



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar Unand.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Unand.

KARAKTERISTIK SOLUSI KUADRAT TERKECIL

SKRIPSI



REFNI MARCHELINA

0810432022

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

PADANG 2012

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

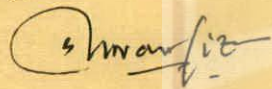
Dengan ini dinyatakan bahwa:

Nama : REFNI MARCHELINA
No. Buku Pokok : 0810432022
Jurusan : Matematika
Bidang : Matematika Teoritis
Judul Skripsi : **Karakteristik Solusi Kuadrat Terkecil**

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal **23 April 2012** berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing,

1.



Nova Noliza Bakar, M. Si
NIP. 19631104 199203 2 002

2.



Dr. Susila Bahri
NIP. 19680303 199302 2 001

Penguji,

1.



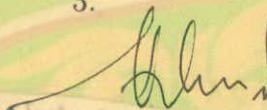
Dr. Muhafzan
NIP. 19670602 199302 1 001

2.



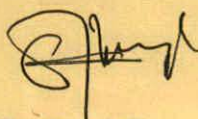
Izzati Rahmi HG, M. Si
NIP. 19740928 199903 1 002

3.



Dr. Admi Nazra
NIP. 19730330 199903 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand



Dr. Syafrizal Sy
NIP. 19670807 199309 1 001

Bismillaahirrahmaanirrahiim

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, maka apabila kamu telah selesai(dari segala urusan) kerjakanlah dengan sungguh-sungguh urusan yang lain, hanya kepada Tuhanmulah hendaknya kamu berharap"
(Al- Insyirah 6-8)

Alhamdulillaahirabbil'alamiinn....

Terima kasih ya Allah...

Atas kesabaran dan kekuatan yang telah Engkau anugerahkan ya Allah
Atas semua kasih sayang yang menuntun hamba ke jalanMU ya Allah
Ke jalan yang terbaik dariMu...

" Skripsi ini dipersembahkan buat semua orang yang telah mengisi hari-hariQ..."

My Family

Mama n Papa (terima kasih atas support, kasih sayang, do'a dan semua pengob-anannya..), bg oby(ani kan ingek bg...!), etekQ(benar apa yg etk blg).

∀ sahabat tercinta...

Autizers tercinta(makasi bwt hari2 yg qt lalui, suka duka brsama)...

∀ ∈ O'laplace...

∀ ∈ Himatika...

Uda2, uni2, n adek2 smw yg telah mengisi hri2 yg penuh warna, bisa trtawa brsama, menjalani hri2 brsama...

Bwt se2orang yang jauh disana, makasi bwt supportnya selama ini, makasi saran n smwnya...

Makasi bwt "S@ - el" yg pernah jadi se2orang yg sangat berarti...

Bwt "jelekQ" makasi juga dah beri masukan2, do'anya, dukungannya, wlw terkadang dirimu menyebalkan, tapi tu bermakna bwt hari2Q...

Terima kasih smw, mgkin tanpa adanya kebersamaan ini hidup ini akan terasa hampa.

*Tak kan ada tawa canda, suka duka,
dan air mata bahagia itu...*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur tak henti-hentinya penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas segala limpahan rahmat dan karunia-Nya; sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul **"Karakteristik Solusi Kuadrat Terkecil"** yang merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang. Salawat dan salam semoga selalu tercurah kepada Baginda Rasulullah SAW yang menebar ilmu dan iman dalam cahaya Islam yang beliau bawa.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, dorongan, kerjasama maupun bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

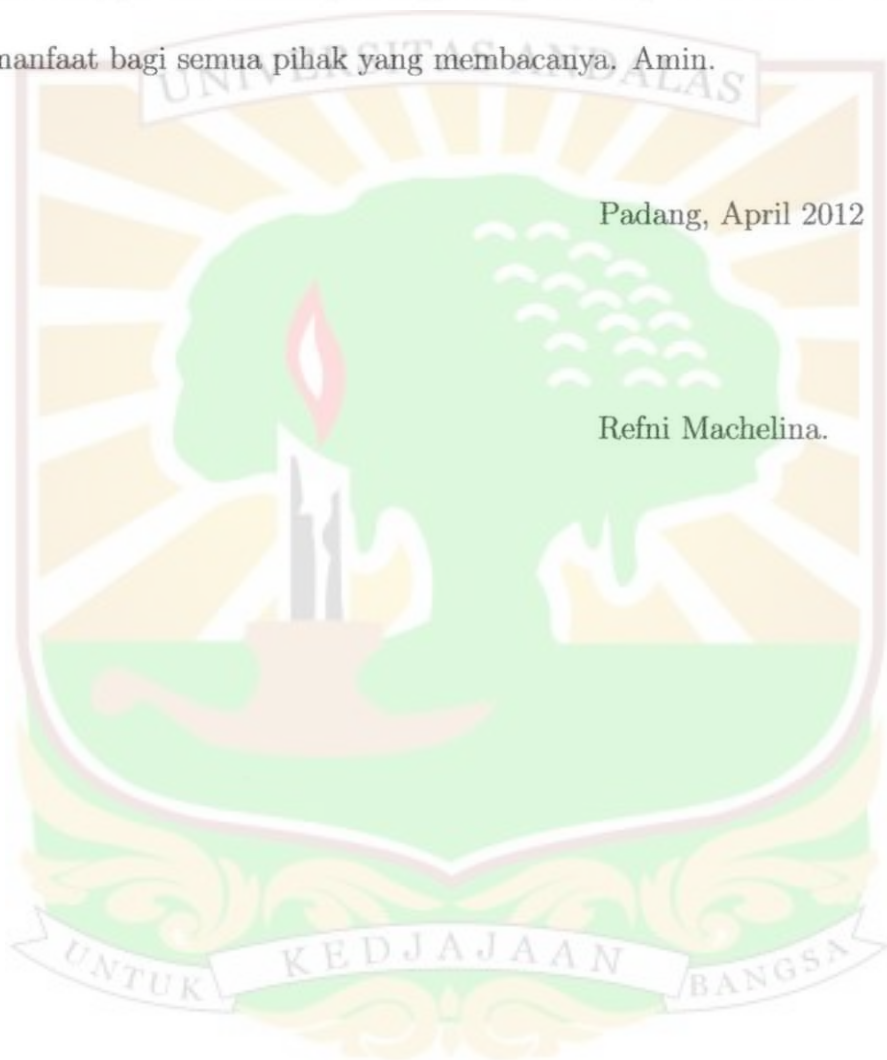
1. Ibuk Nova Noliza Bakar, M. Si selaku Pembimbing I yang dengan sabar mengarahkan penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini melalui bimbingan dan diskusi yang sangat bermanfaat. Serta ilmu, ide, saran, dan nasihat yang diberikan selama penulis menjalani perkuliahan.
2. Ibuk Dr. Susila Bahri selaku Pembimbing II yang membantu penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini, serta ilmu yang didapat selama penulis menjalani perkuliahan.

bahwa dalam skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan dan tidak luput dari kekurangan karena terbatasnya ilmu dan pengalaman yang penulis miliki. Kritik dan saran tersebut dapat disampaikan melalui e-mail di chelcutes@yahoo.com.

Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan sesuatu yang bermanfaat bagi semua pihak yang membacanya. Amin.

Padang, April 2012

Refni Machelina.



ABSTRAK

Sistem persamaan linier $A\vec{x} = \vec{b}$ dengan A matriks $m \times n$ dimana $m > n$ dikatakan *overdetermined system*. Dalam tulisan ini dikaji karakteristik solusi kuadrat terkecil pada *overdetermined system* untuk memperoleh solusi aproksimasi pada *inconsistent system*.

Solusi kuadrat terkecil memenuhi $A^T(\vec{b} - A\vec{x}) = \vec{0}$, persamaan normal, bersifat tunggal jika $\text{rank}(A) = n$, dan jika $\text{rank}(A) < n$ maka himpunan semua solusi kuadrat terkecilnya yaitu $\mathcal{S} = \{\vec{x} = \hat{\vec{x}} + \vec{z} | \vec{z} \in \mathcal{N}(A)\}$ dengan $\mathcal{N}(A)$ adalah ruang null dari A .

Kata kunci : *sistem persamaan linier, overdetermined system, inconsistent system, persamaan normal, rank, ruang null.*



DAFTAR ISI

ABSTRAK	vii
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR GAMBAR	x
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Pembatasan Masalah	2
1.4 Tujuan	2
1.5 Sistematika Penulisan	2
II LANDASAN TEORI	4
2.1 Sistem Persamaan Linier	4
2.2 Teori Matriks	5
2.3 Vektor, Ruang Vektor, dan Subruang	7
2.4 Hasil Kali Dalam, Norm dan Norm Euclidean	10
2.5 Transformasi Linier dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$	11
2.6 Subruang Ortogonal	14
2.7 Proyeksi Ortogonal	15

III PEMBAHASAN18

3.1 Karakteristik Solusi Kuadrat Terkecil

18

3.2 Proyeksi Ortogonal pada Masalah Kuadrat Terkecil

26

IV PENUTUP33

4.1 Kesimpulan

33

4.2 Saran

34

DAFTAR PUSTAKA35



DAFTAR GAMBAR

2.5.1	Operator Proyeksi	13
2.7.2	Proyeksi Ortogonal $\vec{u}$ pada W	15
2.7.3	$\ \vec{u} - \vec{w}\ $ diminimalkan oleh $\vec{w} = \text{proj}_W \vec{u}$	16
3.1.1	Interpretasi Geometri dari Sifat Kuadrat Terkecil	25
3.2.2	Proyeksi Ortogonal $\vec{b}$ pada S	27



BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diuraikan beberapa definisi dan teorema yang berkaitan dengan karakteristik solusi kuadrat terkecil.

2.1 Sistem Persamaan Linier

Persamaan linier dalam n peubah $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, dimana $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan b adalah konstanta-konstanta riil. Sebuah himpunan berhingga dari persamaan-persamaan linier dalam peubah $x_1, x_2, \dots, x_n$ dinamakan sistem persamaan linier. Sebuah sistem persamaan linier mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

(2.1.1)

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

dan dapat ditulis sebagai $A\vec{x} = \vec{b}$ dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ dan, } \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{2.1.2}$$

Jika A adalah matriks dengan m baris dan n kolom dimana $m > n$ maka sistem linier tersebut disebut *overdetermined system*.

2.2 Teori Matriks

Suatu matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan, bilangan ini disebut dengan entri matriks. Suatu matriks yang hanya terdiri dari satu kolom disedut dengan matriks kolom (atau vektor kolom) dan suatu matriks yang hanya terdiri dari satu baris disebut matriks baris (atau vektor baris). Sebuah matriks dengan n baris dan n kolom dinamakan matriks kuadrat berorde n . Jika A adalah sebarang matriks kuadrat, *rank* dari A , ditulis $rank(A)$ adalah jumlah baris tak nol dari bentuk eselon baris yang tereduksi dari A .

Suatu matriks A dikatakan berbentuk matriks eselon baris yang tereduksi jika matriks tersebut mempunyai sifat-sifat berikut:

1. Jika satu baris tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka bilangan taknol pertama pada baris itu adalah 1. Bilangan 1 ini disebut sebagai 1 utama.

Teorema 2.2.3. [3] *Jika ukuran matriks sedemikian rupa sehingga operasi-operasi berikut dapat dilakukan, maka*

1. $((A)^T)^T = A$

2. $(A + B)^T = A^T + B^T$ dan $(A - B)^T = A^T - B^T$

3. $(kA)^T = kA^T$

4. $(AB)^T = B^T A^T$

Suatu matriks simetris A dikatakan definit positif jika $\vec{x}^T A \vec{x} > 0$, dan semi definit positif jika $\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0$ untuk semua $\vec{x}$ [2].

2.3 Vektor, Ruang Vektor, dan Subruang

Vektor dapat dinyatakan secara geometrik sebagai ruas garis terarah atau anak panah, arah anak panah menunjukkan arah vektor dan panjang anak panah menggambarkan besarannya. Suatu ruang vektor V atas lapangan $\mathbb{F}$ adalah himpunan tak kosong V yang memuat vektor $\vec{0}$ dan dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar sehingga dipenuhi [4]:

1. Untuk semua $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ berlaku

- (a) $\vec{u} + \vec{v} \in V$

- (b) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

- (c) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

(d) $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$

(e) Terdapat $-\vec{u} \in V$ sehingga $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

2. Untuk semua $\vec{u}, \vec{v} \in V$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ berlaku

(a) $\alpha\vec{u} \in V$

(b) $1\vec{u} = \vec{u}$

(c) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

(d) $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$

(e) $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$.

Definisi 2.3.4. [3] Suatu subhimpunan W dari suatu ruang vektor V disebut subruang dari V jika W itu sendiri merupakan suatu ruang vektor di bawah penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada V .

Definisi 2.3.5. [5] Misalkan $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ adalah vektor-vektor dan $r_1, r_2, \dots, r_n$ adalah skalar-skalarnya. Vektor $\vec{w} = r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + \dots + r_n\vec{v}_n$ dikatakan sebagai kombinasi linier dari $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Himpunan semua kombinasi linier dari $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ disebut span dari $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ dan ditulis $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$.

Definisi 2.3.6. [5] Koleksi vektor-vektor $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ dikatakan bebas linier jika $r_1, r_2, \dots, r_n$ adalah skalar-skalarnya dan $r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + \dots + r_n\vec{v}_n = \vec{0}$, hanya dipenuhi oleh $r_1 = 0, r_2 = 0, \dots, r_n = 0$. (Dengan kata lain, cara untuk mengungkapkan $\vec{0}$

2. A mempunyai rank n

3. vektor-vektor kolom dari A adalah bebas linier

Teorema 2.3.11. [3] *Jika A adalah sebuah matriks $m \times n$, maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen*

1. A memiliki vektor-vektor kolom yang bebas linier

2. $A^T A$ dapat dibalik

2.4 Hasil Kali Dalam, Norm dan Norm Euclidean

Misalkan vektor $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ dengan $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n \right\}$,

maka hasil kali dalam Euclidean pada $\mathbb{R}^n$ adalah

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n.$$

Definisi 2.4.12. [5] *Misalkan V suatu ruang vektor riil. Hasil kali dalam riil terhadap V adalah fungsi bernilai riil terhadap $V \times V$, biasanya ditunjukkan oleh $\langle , \rangle$ yang memenuhi:*

1. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ untuk semua $\vec{v}, \vec{u} \in V$.

2. $\langle k\vec{v}, \vec{u} \rangle = k \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ untuk semua $k \in \mathbb{R}$ dan $\vec{v}, \vec{u} \in V$.

3. $\langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}_2, \vec{u} \rangle$ untuk semua $\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$.
4. $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ untuk semua $\vec{v} \in V$ dan $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ jika hanya $\vec{v} = \vec{0}$.

Panjang dari suatu vektor $\vec{u}$ sering disebut sebagai norm dari $\vec{u}$ dan dinyatakan dengan $\|\vec{u}\|$. Secara umum sebuah norm pada $\mathbb{R}^n$ didefinisikan dengan

$$\|\vec{u}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p \right)^{1/p} \quad (2.4.1)$$

untuk setiap bilangan riil $p \geq 1$. Secara khusus, jika $p = 2$, maka persamaan (2.4.1) menjadi

$$\|\vec{u}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^2 \right)^{1/2}. \quad (2.4.2)$$

Persamaan (2.4.2) disebut dengan norm Euclidean.

Teorema 2.4.13. [3] *Jika $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah vektor-vektor pada $\mathbb{R}^n$ dan k adalah suatu skalar sebarang, maka*

1. $\|\vec{u}\| \geq 0$
2. $\|\vec{u}\| = 0$ jika dan hanya jika $\vec{u} = \vec{0}$
3. $\|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$
4. $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (Ketidaksamaan Segitiga).

2.5 Transformasi Linier dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$

Jika domain dari suatu fungsi f adalah $\mathbb{R}^n$ dan kodomainnya adalah $\mathbb{R}^m$, maka f disebut sebagai transformasi dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$ dan dinyatakan bahwa fungsi

atau dalam notasi matriks

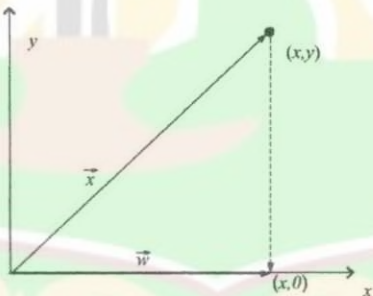
$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{2.5.4}$$

sistem (2.5.4) ditulis lebih singkat dengan:

$$\vec{w} = A\vec{x}.$$

Matriks $A = [a_{ij}]$ disebut matriks standar untuk transformasi linier T .

Salah satu operator linier yang penting pada $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$ adalah operator yang menghasilkan proyeksi (operator proyeksi).



Gambar 2.5.1. Operator Proyeksi

Perhatikan operator $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ yang memetakan setiap vektor ke proyeksi ortogonalnya pada sumbu x (Gambar 2.5.1). Persamaan-persamaan yang



mengaitkan komponen-komponen dari $\vec{x}$ dan $\vec{w} = T(\vec{x})$ adalah

$$\begin{aligned} w_1 &= x = x + 0y \\ w_2 &= 0 = 0x + 0y \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

atau dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Persamaan-persamaan pada (2.5.5) adalah linier, sehingga T adalah suatu operator linier dan matriks standar untuk T adalah

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Secara umum, operator proyeksi (operator proyeksi ortogonal) pada $\mathbb{R}^2$ atau $\mathbb{R}^3$ adalah operator sebarang yang memetakan setiap vektor ke proyeksi ortogonalnya pada suatu garis atau suatu bidang yang melewati titik asal.

2.6 Subruang Ortogonal

Dua vektor taknol tegak lurus (ortogonal) jika dan hanya jika hasil kali titiknya adalah nol.

Definisi 2.6.14. [7] Dua subruang X dan Y dari $\mathbb{R}^n$ dikatakan ortogonal jika $\vec{x}^T \vec{y} = 0$ untuk setiap $\vec{x} \in X$ dan $\vec{y} \in Y$. Jika X dan Y ortogonal, ditulis $X \perp Y$.

Definisi 2.6.15. [7]. Misalkan Y subruang dari $\mathbb{R}^n$. Himpunan semua vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$ yang ortogonal pada setiap vektor di Y akan dinotasikan dengan $Y^\perp$.

V , didefinisikan proyeksi ortogonal dari $\vec{u}$ pada $\vec{v}$ dengan

$$\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v}. \quad (2.7.1)$$



atau

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1(t_1) & \Phi_2(t_1) & \cdots & \Phi_n(t_1) \\ \Phi_1(t_2) & \Phi_2(t_2) & \cdots & \Phi_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1(t_m) & \Phi_2(t_m) & \cdots & \Phi_n(t_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (3.1.2)$$

persamaan (3.1.2) menjadi

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

atau

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Banyak cara untuk memperoleh solusi dari sistem persamaan linier $A\vec{x} = \vec{b}$ yang tak konsisten, salah satu caranya yaitu dengan mencari solusi $\vec{x}$ untuk masalah minimisasi

$$\min_{\vec{x}} \|A\vec{x} - \vec{b}\|_2, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^m$$

$$\begin{aligned}
&= (\hat{\vec{r}}^T + (Ae)^T)(\hat{\vec{r}} + Ae) \\
&= \hat{\vec{r}}^T \hat{\vec{r}} + \hat{\vec{r}}^T (Ae) + (Ae)^T \hat{\vec{r}} + (Ae)^T (Ae) \\
&= \hat{\vec{r}}^T \hat{\vec{r}} + ((Ae)^T \hat{\vec{r}})^T + (Ae)^T \hat{\vec{r}} + (Ae)^T (Ae) \\
&= \hat{\vec{r}}^T \hat{\vec{r}} + (e^T A^T \hat{\vec{r}})^T + (e^T A^T) \hat{\vec{r}} + (Ae)^T (Ae) \\
&= \hat{\vec{r}}^T \hat{\vec{r}} + (e^T (A^T \hat{\vec{r}}))^T + e^T (A^T \hat{\vec{r}}) + (Ae)^T (Ae) \\
&= \hat{\vec{r}}^T \hat{\vec{r}} + (e^T \vec{0})^T + e^T \vec{0} + (Ae)^T (Ae) \\
&= \hat{\vec{r}}^T \hat{\vec{r}} + \|Ae\|_2^2
\end{aligned}$$

yang bernilai minimum ketika $\vec{x} = \hat{\vec{x}}$.

($\Rightarrow$) Misalkan $\hat{\vec{x}}$ solusi dari persamaan (3.1.3) dan andaikan $A^T \hat{\vec{r}} = \vec{z} \neq \vec{0}$. Dengan mengambil $\vec{x} = \hat{\vec{x}} + \epsilon \vec{z}$ untuk suatu skalar ϵ , diperoleh vektor residu

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \vec{b} - A\vec{x} \\
&= \hat{\vec{r}} + A\hat{\vec{x}} - A(\hat{\vec{x}} + \epsilon \vec{z}) \\
&= \hat{\vec{r}} + A\hat{\vec{x}} - A\hat{\vec{x}} - A\epsilon \vec{z} \\
&= \hat{\vec{r}} - \epsilon A\vec{z}
\end{aligned}$$

Selanjutnya dengan mengkuadratkan $\vec{r} = \hat{\vec{r}} - \epsilon A\vec{z}$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\vec{r}^T \vec{r} &= (\hat{\vec{r}} - \epsilon A\vec{z})^T (\hat{\vec{r}} - \epsilon A\vec{z}) \\
&= (\hat{\vec{r}}^T - (\epsilon A\vec{z})^T)(\hat{\vec{r}} - \epsilon A\vec{z}) \\
&= \hat{\vec{r}}^T \hat{\vec{r}} - \hat{\vec{r}}^T \epsilon A\vec{z} - (\epsilon A\vec{z})^T \hat{\vec{r}} + (\epsilon A\vec{z})^T \epsilon A\vec{z} \\
&= \hat{\vec{r}}^T \hat{\vec{r}} - \epsilon \hat{\vec{r}}^T A\vec{z} - \epsilon (A\vec{z})^T \hat{\vec{r}} + \epsilon (A\vec{z})^T \epsilon A\vec{z} \\
&= \hat{\vec{r}}^T \hat{\vec{r}} - \epsilon ((A\vec{z})^T \hat{\vec{r}})^T - \epsilon (A\vec{z})^T \hat{\vec{r}} + \epsilon (A\vec{z})^T \epsilon A\vec{z}
\end{aligned}$$

Teorema 3.1.3. [1] Misalkan $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Matriks $A^T A$ adalah definit positif jika dan hanya jika kolom-kolom dari A adalah bebas linier, yakni $\text{rank}(A) = n$.

Bukti.

($\Leftarrow$) Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\vec{c}_1 \ \vec{c}_2 \ \cdots \ \vec{c}_n]$, de-

ngan $\vec{c}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, i = 1, 2, \cdots, n$ adalah kolom-kolom dari A yang

bebas linier. Jika $\vec{x} \neq \vec{0}$ dengan $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, maka terdapat $x_i \neq 0$. Karena $A\vec{x}$

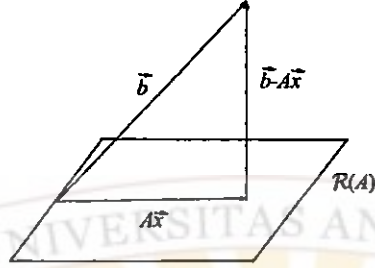
dapat ditulis $A\vec{x} = x_1\vec{c}_1 + x_2\vec{c}_2 + \cdots + x_n\vec{c}_n$, dan $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \cdots, \vec{c}_n$ bebas linier, maka $x_1\vec{c}_1 + x_2\vec{c}_2 + \cdots + x_n\vec{c}_n \neq \vec{0}$, dengan perkataan lain $A\vec{x} \neq \vec{0}$. Akibatnya

$$\vec{x}^T(A^T A)\vec{x} = \vec{x}^T A^T A\vec{x} = (A\vec{x})^T(A\vec{x}) = \|A\vec{x}\|_2^2 > 0$$

sehingga $A^T A$ adalah definit positif.

$$\vec{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}. \quad (3.1.5)$$

Jadi, solusi kuadrat terkecil tunggal, dan vektor residu $\vec{r} = \vec{b} - A((A^T A)^{-1} A^T \vec{b})$.



Gambar 3.1.1. Interpretasi Geometri dari Sifat Kuadrat Terkecil

Ruang kolom (*range*) dari matriks $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ didefinisikan dengan

$$\mathcal{R}(A) = \{\vec{z} = A\vec{x} | \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}. \quad (3.1.6)$$

Himpunan solusi untuk $A^T \vec{y} = \vec{0}$ adalah subruang yang disebut dengan ruang null (*nullspace*) dari A^T dan ditunjukkan oleh

$$\mathcal{N}(A^T) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^m | A^T \vec{y} = \vec{0}\} \quad (3.1.7)$$

dan merupakan komplemen ortogonal pada $\mathbb{R}^m$ untuk ruang kolom $\mathcal{R}(A)$. Berdasarkan Teorema 3.1.1, vektor residu $\vec{r} = \vec{b} - A\vec{x}$ dari solusi kuadrat terkecil anggota $\mathcal{N}(A^T)$ dan dari Gambar 3.1.1 dapat ditulis

$$\vec{b} = A\vec{x} + \vec{r}, \quad A\vec{x} \in \mathcal{R}(A), \quad \vec{r} \in \mathcal{N}(A^T).$$

Jika $\text{rank}(A) < n$ maka A mempunyai ruang null nontrivial dan solusi kuadrat terkecil yang tidak tunggal. Jika $\hat{\vec{x}}$ adalah solusi kuadrat terkecil tertentu

maka himpunan dari semua solusi kuadrat terkecil adalah

$$\mathcal{S} = \{\vec{x} = \hat{\vec{x}} + \vec{z} | \vec{z} \in \mathcal{N}(A)\}. \quad (3.1.8)$$

Jika $\hat{\vec{x}} \perp \mathcal{N}(A)$ maka $\|\vec{x}\|_2^2 = \|\hat{\vec{x}}\|_2^2 + \|\vec{z}\|_2^2$, dan oleh karena itu $\hat{\vec{x}}$ adalah solusi kuadrat terkecil tunggal dengan norm minimum.

3.2 Proyeksi Ortogonal pada Masalah Kuadrat Terkecil

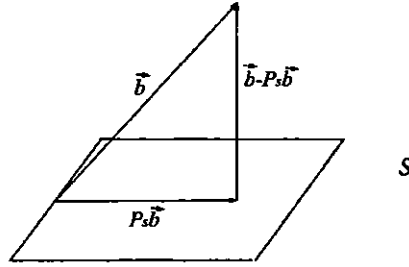
Misalkan $S \subset \mathbb{R}^m$ adalah subruang, $P_S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ adalah proyektor ortogonal pada S jika:

1. $\mathcal{R}(P_S) = S$
2. $P_S^2 = P_S$
3. $P_S^T = P_S$
4. $(I - P_S)^2 = (I - P_S)$
5. $(I - P_S)P_S = \vec{0}$ dan $(I - P_S)$ adalah proyektor untuk komplemen subruang dari S .

Berikut ini akan diperlihatkan syarat di atas berlaku:

1. Akan diperlihatkan $\mathcal{R}(P_S) = S$. Misalkan $S = \{\vec{b} \in \mathbb{R}^m | \vec{b} = A\vec{x}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$, dan $proj_S \vec{b}$ sebagai proyeksi ortogonal terhadap $\vec{b}$. Maka dapat ditulis:

$$proj_S \vec{b} = \vec{p} = A\vec{x}$$



Gambar 3.2.2. Proyeksi Ortogonal $\vec{b}$ pada S

sehingga berdasarkan (3.1.5) diperoleh

$$\vec{p} = A(A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$$

dimana $A(A^T A)^{-1} A^T = P_S$ adalah matriks proyeksi. Berdasarkan persamaan (3.1.6) dapat ditulis

$$\mathcal{R}(P_S) = \{\vec{p} = P_S \vec{b} | \vec{b} \in \mathbb{R}^m\},$$

sehingga proyeksi dari $\vec{b}$ adalah

$$proj_S \vec{b} = \vec{p} = A(A^T A)^{-1} A^T \vec{b} = A(A^T A)^{-1} A^T A \vec{x} = A \vec{x} = \vec{b}.$$

Jadi, terlihat bahwa $\vec{p} = \vec{b}$ dimana $\vec{p} \in \mathcal{R}(P_S)$ dan $\vec{b} \in S$.

2. $P_S^2 = P_S$ dengan $P_S = A(A^T A)^{-1} A^T$,

$$P_S^2 = P_S P_S = [A(A^T A)^{-1} A^T][A(A^T A)^{-1} A^T]$$

$$= A(A^T A)^{-1} A^T A(A^T A)^{-1} A^T$$

$$= A I (A^T A)^{-1} A^T$$

$$= A(A^T A)^{-1} A^T = P_S$$

3. $P_S^T = P_S$ yang diperlihatkan dengan:

$$P_S^T = (A(A^T A)^{-1} A^T)^T = (A^T)^T ((A^T A)^{-1})^T A^T = A(A^T A)^{-1} A^T = P_S$$

4. $(I - P_S)^2 = (I - P_S)$ yang diperlihatkan dengan:

$$\begin{aligned} (I - P_S)^2 &= (I - P_S)(I - P_S) \\ &= I^2 - 2P_S + P_S^2 \\ &= I - 2P_S + P_S = (I - P_S) \end{aligned}$$

5. $(I - P_S)P_S = \vec{0}$

$$(I - P_S)P_S = IP_S - P_S^2 = P_S - P_S = \vec{0}$$

dan $(I - P_S)$ adalah proyektor untuk komplemen subruang dari S .

Misalkan P_1 dan P_2 proyektor ortogonal pada S . Dengan menggunakan

$P_S^2 = P_S$, $P_S^T = P_S$ untuk semua $\vec{z} \in \mathbb{R}^m$, diperoleh

$$\begin{aligned} \|(P_1 - P_2)\vec{z}\|_2 &= ((P_1 - P_2)\vec{z})^T ((P_1 - P_2)\vec{z}) \\ &= (\vec{z}^T (P_1 - P_2)^T) ((P_1 - P_2)\vec{z}) \\ &= (\vec{z}^T P_1^T - \vec{z}^T P_2^T) (P_1 \vec{z} - P_2 \vec{z}) \\ &= \vec{z}^T P_1^T P_1 \vec{z} - \vec{z}^T P_1^T P_2 \vec{z} - \vec{z}^T P_2^T P_1 \vec{z} + \vec{z}^T P_2^T P_2 \vec{z} \\ &= \vec{z}^T P_1 P_1 \vec{z} - \vec{z}^T P_1 P_2 \vec{z} - \vec{z}^T P_2 P_1 \vec{z} + \vec{z}^T P_2 P_2 \vec{z} \\ &= \vec{z}^T P_1^2 \vec{z} - \vec{z}^T P_1 P_2 \vec{z} - \vec{z}^T P_2 P_1 \vec{z} + \vec{z}^T P_2^2 \vec{z} \\ &= \vec{z}^T P_1 \vec{z} - \vec{z}^T P_1 P_2 \vec{z} + \vec{z}^T P_2 \vec{z} - \vec{z}^T P_2 P_1 \vec{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\vec{z}^T P_1 \vec{z} - \vec{z}^T P_1 P_2 \vec{z}) + (\vec{z}^T P_2 \vec{z} - \vec{z}^T P_2 P_1 \vec{z}) \\
&= \vec{z}^T P_1 (I \vec{z} - P_2 \vec{z}) + \vec{z}^T P_2 (I \vec{z} - P_1 \vec{z}) \\
&= \vec{z}^T P_1 (I - P_2) \vec{z} + \vec{z}^T P_2 (I - P_1) \vec{z} \\
&= \vec{0}
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Berdasarkan Teorema 2.4.13 dan (3.2.1) diperoleh $P_1 = P_2$, dengan kata lain proyeksi ortogonal adalah tunggal.

Berdasarkan interpretasi geometri dari sifat kuadrat terkecil (Gambar 3.1.1), $A\vec{x}$ adalah proyeksi ortogonal dari $\vec{b}$ pada $\mathcal{R}(A)$ yang dapat ditulis sebagai

$$proj_{\mathcal{R}(A)} \vec{b} = A\vec{x}$$

dengan $\vec{r} = (I - P_{\mathcal{R}(A)})\vec{b}$, dan pada kasus rank penuh

$$P_{\mathcal{R}(A)} = A(A^T A)^{-1} A^T.$$

Berikut beberapa contoh menggunakan hasil di atas untuk memperoleh solusi aproksimasi tak konsisten sistem

Contoh 1:

Temukan solusi terbaik untuk sistem persamaan linier

$$-x_1 + x_2 = -2$$

$$0 + 2x_2 = 6$$

$$x_1 + 3x_2 = 8$$

Dari sistem diatas, dengan memisalkan matriks $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$

dan $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Akan dicari $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ yang menyebabkan vektor $A\vec{x} - \vec{b}$

tegak lurus terhadap ruang kolom dari A yaitu $\mathcal{R}(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$.

Berdasarkan Teorema 3.1.1 $\vec{x}$ memenuhi

$$A^T(A\vec{x} - \vec{b}) = \vec{0}$$

atau

$$A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}.$$

Diperoleh

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 14 \end{bmatrix}$$

dan

$$A^T \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 34 \end{bmatrix}$$

sehingga persamaan normalnya adalah

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 34 \end{bmatrix}.$$

Dari persamaan normal diatas diperoleh solusi terbaik untuk sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ adalah

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dengan vektor residu:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Contoh 2:

Diberikan sistem persamaan linier

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

yang disingkat dengan $A\vec{x} = \vec{b}$ yang tak konsisten dimana $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$

$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$ dan $\vec{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}.$ Ruang kolom dari matriks A adalah sub-

ruang $W = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Solusi aproksimasi dari sistem tersebut dapat diperoleh dengan dua cara yaitu:

1. Pilih vektor $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W$ maka dari (2.7.1) diperoleh

$$\text{proj}_W \vec{b} = \frac{\langle \vec{b}, \vec{w} \rangle}{\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle} \vec{w} = \frac{7+8+9}{1+1+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{24}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

solusi kuadrat terkecil adalah solusi dari sistem

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}. \quad (3.2.3)$$

Jadi, solusi aproksimasi dari sistem (3.2.2) adalah solusi dari sistem (3.2.3)

2. Dengan menggunakan persamaan normal diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 72 \end{bmatrix}. \quad (3.2.4)$$

Jadi, solusi aproksimasi dari sistem (3.2.2) yaitu solusi dari sistem (3.2.4).

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian dari bab III, $\vec{x}$ adalah solusi kuadrat terkecil yang merupakan solusi dari masalah minimisasi

$$\min_{\vec{x}} \|A\vec{x} - \vec{b}\|_2, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^m$$

dimana $m > n$. Karakteristik solusi kuadrat terkecil yaitu:

1. Memenuhi

$$A^T(\vec{b} - A\vec{x}) = \vec{0}.$$

dan memenuhi persamaan normal

$$A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}.$$

2. Jika matriks $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definit positif ($\text{rank}(A) = n$), maka solusi kuadrat terkecil $\vec{x}$ tunggal yaitu

$$\vec{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}.$$

3. Jika $\text{rank}(A) < n$, maka himpunan semua solusi kuadrat terkecil adalah

$$S = \{\vec{x} = \hat{\vec{x}} + \vec{z} | \vec{z} \in \mathcal{N}(A)\}.$$

Berdasarkan interpretasi geometri dari sifat kuadrat terkecil dapat disimpulkan bahwa $A\vec{x}$ merupakan proyeksi ortogonal dari $\vec{b}$ pada $\mathcal{R}(A)$.

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan untuk membahas tentang karakteristik solusi kuadrat terkecil pada *underdetermined system*.



DAFTAR PUSTAKA

- [1] Å.Björck. 1996. *Numerical Methods for Least Squares Problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA.
- [2] Anton, H. 1991. *Aljabar Linier Elementer* Edisi Lima. Terjemahan, Erlangga. Jakarta.
- [3] Anton, H dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linier Elementer* Versi Aplikasi. Terjemahan, Erlangga. Jakarta.
- [4] Budhi, Wono Setya dan Irawati. 2005. *Aljabar II*. Universitas Terbuka, Jakarta.
- [5] Jacob, B. 1990. *Linear Algebra*. W. H. Freeman and Company, New York
- [6] Laub, Alan J. 2005. *Matrix Analysis for Scientists and Engineers*. SIAM. USA.
- [7] Leon, J Steven. 2001. *Aljabar Linier dan Aplikasinya* Edisi Lima. Erlangga, Jakarta.



RIWAYAT HIDUP



Penulis bernama Refni Marchelina, dilahirkan di Padang pada tanggal 13 Mei 1990 dari pasangan Marni dan Wisrul. Penulis adalah anak kedua dari empat bersaudara. Penulis menamatkan pendidikan Sekolah Dasar di SD Negeri 16 Padang pada tahun 2002, SMP Negeri 24 Padang pada tahun 2005, dan SMA Negeri 4 Padang pada tahun 2008. Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu

Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur SNMPTN (Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri).

Selama menjadi mahasiswa di jurusan Matematika FMIPA Unand, penulis aktif dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA), organisasi Forum Studi Islam (FSI) kepengurusan 2009/2010, dan pengajar privat mata pelajaran Matematika. Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) pada tahun 2011 di Jorong Tandikek, Kenagarian Sitalang, Kecamatan Ampek Nagari, Kabupaten Agam dalam rangka menyelesaikan salah satu mata kuliah wajib fakultas.

Alhamdulillah, 3 tahun 8 bulan lamanya penulis butuhkan untuk menyelesaikan studi di UNAND, sehingga Penulis memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) pada tanggal 23 April 2012. Selama kuliah, Penulis menemukan ribuan pengalaman, teman, ilmu dan pengetahuan demi melewati hidup saat ini dan di kemudian hari.

