DIMENSI PARTISI DARI GRAF GIR

SKRIPSI

REFINA RIZA
0810432013

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2012

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

Alhamdulillah, puji syukur tiada henti-hentinya penulis panjatkan kehadirat Allah S.W.T. atas segala kelimpahan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "***Dimensi Partisi dari Graf Gir***" ini. Salawat serta beriring salam bagi kekasih Allah, Muhammad Rasulullah SAW yang telah menjadi tauladan dan mengantarkan umat manusia dari abad kegelapan menuju abad terang dan berilmu pengetahuan.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, dorongan, kerjasama maupun bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Ibu Dr. Lyra Yulianti sebagai dosen Pembimbing I yang telah sabar dan bersedia meluangkan waktu dan pikiran sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini, dan sekaligus sebagai dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan pengarahan, nasehat, ilmu, motivasi, dan merancang penyelesaian studi selama penulis menjalani studi di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Andalas.

2. Bapak Dr. Admi Nazra sebagai dosen Pembimbing II yang telah sabar dan bersedia meluangkan pikiran dan waktu sehingga akhirnya penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini.

3. Bapak Dr. Syafrizal Sy, Bapak Narwen, M.Si, dan Bapak Zulakmal, M.Si yang telah bersedia membaca, menelaah, dan menguji naskah skripsi ini.

4. Semua Dosen di Fakultas MIPA Universitas Andalas khususnya di Jurusan Matematika yang telah membagi ilmu kepada penulis selama studi.

5. Staf dan pegawai Jurusan Matematika Universitas Andalas yang telah membantu urusan administrasi dalam menyelesaikan skripsi ini.

6. Teman-teman di Jurusan Matematika, terutama O'Laplace yang telah memberikan dorongan dan semangat untuk tetap maju.

7. Secara khusus penulis mengucapkan terimakasih kepada Ayahanda tercinta Ir. Refizal, MM dan Ibunda tercinta Misnawati yang telah memberikan do'a motivasi, semangat dan dorongan yang luarbiasa dan tiada henti. Serta Ibunda tersayang Siti Aminah Chaniago yang selalu memberikan dukungan dan semangatnya.

8. Semua pihak terkait yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis sangat menyadari bahwa dalam skripsi ini masih banyak sekali kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk penyempurnaan skripsi ini. Kritik dan saran tersebut dapat disampaikan melalui e-mail di **refinariza@gmail.com**.

Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan sesuatu yang bermanfaat bagi pihak yang membacanya.

Padang, Agustus 2012

Penulis

Refina Riza

ABSTRAK

Misalkan G merupakan suatu graf terhubung dan misalkan $S \subseteq V(G)$. Selanjutnya misalkan terdapat sebuah titik $v \in V(G)$. Maka jarak titik v terhadap S didefinisikan sebagai $d(v, S) = min\ \{d(v, x)|x \in S\}$.

Misalkan himpunan titik $V(G)$ dipartisi menjadi beberapa partisi, sebut $S_1, S_2, ..., S_k$. Notasikan π sebagai suatu himpunan terurut dari k-partisi, tulis $\pi = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$. Misalkan terdapat sebuah titik v di G. Maka representasi v terhadap π didefinisikan sebagai $r(v|\pi) = (d(v, S_1),\ d(v, S_2),\ ...,\ d(v, S_k))$. Jika setiap titik yang berbeda di G mempunyai representasi yang berbeda terhadap π, maka π disebut sebagai *partisi penyelesaian.* Kardinalitas minimum dari k-partisi penyelesaian terhadap $V(G)$ disebut dengan *dimensi partisi* dari G, dinotasikan dengan $pd(G)$.

Graf gir G_{2n} didefinisikan sebagai berikut. Diberikan suatu siklus genap C_{2n}: v_0, v_1, ... , v_{2n-1}, v_0, dimana $n \geq 2$ dan suatu titik baru yang dinotasikan sebagai c yang bertetangga dengan n titik di C_{2n}, yaitu v_0, v_2, ... , v_{2n-2}.

Skripsi ini mengkaji tentang dimensi partisi dari graf gir G_{2n}. Misalkan $n \geq 2$, dengan n adalah banyaknya titik pada G_{2n} yang bertetangga dengan titik-titik di C_{2n} dan k merupakan dimensi partisi dari G_{2n}, maka orde graf gir G_{2n} dibatasi oleh dimensi partisinya, yaitu $2n + 1 < 3k^4(k + 2)2^{k-7}$.

Kata kunci : *Partisi penyelesaian, dimensi partisi, graf gir.*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Suatu graf $G = (V, E)$ adalah pasangan himpunan terurut yang terdiri dari himpunan titik V dan himpunan sisi E. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Banyak sekali struktur yang bisa direpresentasikan dengan graf. Untuk memudahkan pengertian suatu graf, biasanya diberikan suatu interpretasi geometri dari suatu graf. Setiap simpul dari suatu graf digambarkan sebagai titik pada bidang datar, sedangkan setiap sisi pada graf tersebut digambarkan sebagai garis yang menghubungkan dua simpul pada graf tersebut.

Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan kemajuan teknologi saat ini, aplikasi teori graf dapat membantu menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Sebagai contoh, jejaring sosial Facebook bisa direpresentasikan dengan graf, dimana simpul-simpulnya adalah para pemakai Facebook dan terdapat sisi antara A dan B jika dan hanya jika A berteman dengan B. Selain itu, teori graf juga dapat diterapkan dalam berbagai cabang ilmu pengetahuan seperti ekonomi, sosial, genetika, riset operasional serta membantu menyelesaikan permasalahan seperti masalah jaringan listrik, jaringan telepon, jaringan komputer dan sebagainya.

Banyak istilah yang terdapat pada teori graf, salah satunya adalah dimensi partisi. Untuk lebih memahami istilah dimensi partisi ini, berikut diberikan gambaran tentang istilah tersebut. Misalkan terdapat beberapa kota di suatu propinsi pada suatu negara. Kota-kota tersebut dibagi menjadi beberapa kelompok dengan ketentuan, jarak dari setiap kota dalam suatu kelompok tertentu ke kota-kota lain dalam kelompok yang lain harus berbeda. Kemudian hitung jarak minimum dari masing-masing kota tersebut terhadap semua kelompok. Jika terdapat suatu kota yang berjarak sama ke dua atau lebih kota lain dalam kelompok yang sama maka ubah kembali pembagian kelompok tersebut sampai didapatkan jarak minimum diantara setiap dua kota berbeda. Banyaknya kelompok yang dibuat seminimal mungkin ini dinamakan dengan dimensi partisi.

Representasi dari suatu titik dapat dianggap sebagai vektor atau koordinat yang menunjukkan lokasi titik tersebut relatif terhadap partisi yang dipilih. Suatu representasi yang baik harus memiliki vektor koordinat yang berbeda. Namun, karena pemilihan partisi adalah sebarang, maka representasi yang dihasilkan tidaklah tunggal. Hal ini mengakibatkan tidak semua pilihan partisi dapat menghasilkan representasi yang baik. Pemilihan partisi yang tepat dapat menghasilkan suatu representasi di mana semua titiknya memiliki vektor koordinat yang berbeda. Jika hal ini terjadi, maka partisi tersebut disebut dengan partisi penyelesaian (*resolving partition*).

Misalkan terdapat suatu graf terhubung G. Ambil sebarang titik v di $V(G)$. Jarak $d(u, v)$ antara titik u dan v pada graf G adalah panjang lintasan terpendek dari titik-titik tersebut. Sedangkan jarak terpanjang antara titik-titik pada $V(G)$

didefinisikan sebagai diameter dari graf G, ditulis *diam* (G). Misal terdapat titik $v \in V(G)$ dan S adalah himpunan bagian dari $V(G)$. Jarak antara v dan S adalah $d(v,S) = min\{d(v,x) |\ x \in S\}$.

Misal $V(G)$ dipartisi menjadi k buah himpunan, S_1,S_2,...,S_k yang saling lepas. Definisikan $\pi = \{S_1,S_2,...,S_k\}$ sebagai himpunan yang berisikan k-partisi tersebut. Misal terdapat titik $v \in V(G)$, maka representasi dari v terhadap π didefinisikan sebagai $r(v|\pi) = (d(v,\ S_1), d(v,S_2),..., d(v,S_k))$. Jika titik-titik yang berbeda di G mempunyai representasi yang berbeda terhadap π, maka π disebut partisi penyelesaian *(resolving partition)* graf G. Kardinalitas dari partisi penyelesaian minimum disebut dimensi partisi dari G, ditulis $pd(G)$.

Berikut akan diberikan definisi dari beberapa graf yang digunakan dalam kajian ini. Graf siklus adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf siklus dengan n titik dilambangkan dengan C_n. Jika n genap maka graf tersebut dikatakan sebagai siklus genap, dilambangkan dengan C_{2n}. Jika n ganjil maka graf tersebut dikatakan sebagai siklus ganjil yang dilambangan dengan C_n.

Graf roda merupakan graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu titik di luar graf siklus C_n, dan menghubungkan titik baru tersebut dengan semua titik pada C_n. Graf roda dinotasikan dengan W_n.

Pada tulisan ini akan dikaji tentang dimensi partisi dari graf gir G_{2n} serta batasan untuk dimensi partisi graf gir tersebut. Pada kajian oleh Tomescu dkk. (2007), telah diperoleh batas atas dan batas bawah dari dimensi partisi untuk graf roda. Mereka menunjukkan bahwa, jika p adalah bilangan prima terkecil sedemikian sehingga $p(p-1) \geq n$, maka $\lceil 2n^{\frac{1}{3}} \rceil \leq pd(W_n) \leq p+1$. Menarik untuk dikaji ada atau tidaknya hubungan dimensi partisi antara graf roda dengan dimensi partisi graf mirip roda, dalam hal ini graf yang dimaksud adalah graf Gir.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang akan dikaji dalam tulisan ini adalah bagaimana menentukan dimensi partisi dari suatu graf.

1.3 Pembatasan Masalah

Terdapat beberapa jenis graf yang berasal dari graf roda, antara lain adalah graf gir, graf helm dan graf bunga matahari. Oleh karena itu, permasalahan yang dikaji pada tulisan ini dibatasi pada pembahasan penentuan dimensi partisi dari graf gir .

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penulisan penelitian ini adalah menentukan dimensi partisi dari graf gir.

1.5 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini terdiri dari empat bab sebagai berikut, yaitu Bab I sebagai pendahuluan yang memuat latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, serta sistematika penulisan. Dalam Bab II disajikan secara singkat mengenai konsep dasar, yaitu berbagai macam definisi dan terminologi pada teori graf yang relevan dengan dimensi partisi dari graf gir dalam bentuk definisi dan notasi. Selanjutnya, dalam Bab III dibahas mengenai hasil utama dari tugas akhir ini yaitu membahas dimensi partisi pada graf gir. Bab IV memuat kesimpulan dari hasil pengerjaan tugas akhir ini.

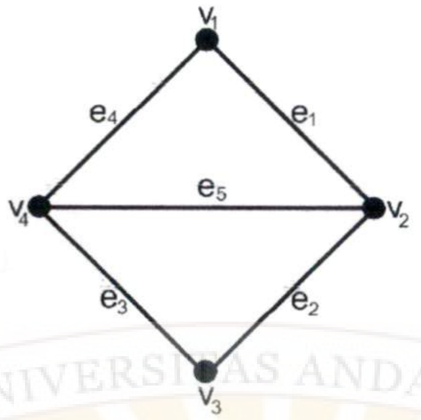
BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini diperkenalkan beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan permasalahan yang telah dikemukakan pada Bab I. Bab II terdiri dari beberapa subbab. Subbab 2.1 menyajikan definisi dan terminologi dalam teori graf. Selanjutnya Subbab 2.2 menjelaskan jenis-jenis graf. Kemudian Subbab 2.3 berisi penjelasan tentang dimensi partisi. Pada subbab terakhir yaitu Subbab 2.4 diberikan teorema dan lema pendukung untuk menyelesaikan permasalahan yang dibahas pada tulisan ini.

2.1 Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf

Suatu **graf** G merupakan pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tak kosong titik-titik pada graf G dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang titik di G. Himpunan **titik** di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan **sisi** dinotasikan dengan $E(G)$. Graf G dapat ditulis sebagai $G = (V, E)$. Banyaknya titik (anggota V) di G disebut **orde (*order*) *G***, dinotasikan dengan $|V(G)|$ dan banyaknya sisi (anggota E) di G disebut **ukuran (*size*)**, dinotasikan dengan $|E(G)|$. Untuk lebih jelasnya perhatikan Gambar 2.1.1 berikut.



Gambar 2.1.1. Graf G dengan 4 titik dan 5 sisi

Dari Gambar 2.1.1 dapat dilihat bahwa himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Jadi $|V(G)| = 4$ dan $|E(\mathrm{G})| = 5$.

Misal terdapat titik $u, v \in V(G)$, dan sisi $e = uv \in E(G)$ maka titik u dikatakan **bertetangga** dengan titik v dan sisi e dikatakan **terkait** dengan titik u dan titik v. **Derajat** suatu titik adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik tersebut, dinotasikan dengan $d(v)$. Tinjau kembali Gambar 2.1.1. Pada graf tersebut titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 dan v_4, dan sisi e_1 berkaitan dengan titik v_1 dan v_2. Derajat tiap titiknya adalah $d(v_1) = d(v_3) = 2$ dan $d(v_2) = d(v_4) = 3$.

Lintasan yang panjangnya n dari titik awal v_0 ke titik tujuan v_n pada graf G adalah barisan berselang-seling titik-titik dan sisi-sisi yang berbentuk v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., v_{n-1}, e_n, v_n sedemikian sehingga $e_1 = v_0v_1$, $e_2 = v_1v_2$, ..., $e_n = v_{n-1}v_n$ adalah sisi-sisi dari G. **Panjang lintasan** adalah banyaknya sisi dalam lintasan tersebut. Lintasan dari v_0 ke v_n dapat ditulis sebagai lintasan v_0v_n. **Lintasan**

terpendek dari v_0 ke v_n adalah banyaknya sisi minimum yang terdapat pada lintasan-v_0v_n.

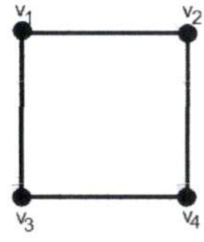
Jarak antara titik u dan titik v pada graf terhubung G adalah panjang lintasan terpendek dari titik-titik tersebut, dinotasikan dengan $d(u, v)$. Jarak terpanjang antara dua titik pada graf G disebut sebagai **diameter** dari graf G, ditulis $diam(G)$.

Banyaknya **kombinasi** r benda dari n benda yang berbeda adalah $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

2.2 Beberapa graf sederhana khusus

Graf sederhana adalah graf yang tidak mengandung loop maupun sisi ganda. Graf pada Gambar 2.1.1 merupakan salah satu contoh dari graf sederhana.

Suatu graf G dikatakan **graf terhubung** jika untuk setiap pasang titik v_i, $v_j \in V$ terdapat lintasan dari v_i ke v_j. Graf G dikatakan **graf terhubung nontrivial** apabila graf tersebut merupakan graf terhubung dan memiliki lebih dari satu titik. Panjang untuk setiap lintasan pada graf terhubung G adalah min $\{p-1, q\}$ dimana p merupakan orde dan q merupakan ukuran dari graf tersebut. Gambar 2.2.2 berikut merupakan contoh graf terhubung.



Gambar 2.2.2. Graf terhubung

Graf siklus adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf siklus dengan n titik dilambangkan dengan C_n. Graf siklus dengan orde genap dinamakan siklus genap, dinotasikan dengan C_{2n}.

Graf roda merupakan graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu titik pada graf siklus C_n, dan menghubungkan titik baru tersebut dengan semua titik pada graf siklus tersebut. Graf roda dinotasikan dengan W_n.

Graf gir (gear) diperoleh dari graf roda dengan tambahan sebuah titik diantara tiap-tiap pasangan dari titik-titik yang bertetangga pada siklus genap, dinotasikan dengan G_{2n}. Gambar 2.2.3 merupakan contoh dari graf siklus, graf roda dan graf gir.

Terdapat dua jenis titik dari siklus genap C_{2n} pada graf gir G_{2n}, yaitu titik berderajat dua dan titik berderajat tiga. Titik-titik yang berderajat dua disebut sebagai **titik minor** dan titik-titik yang berderajat tiga disebut sebagai **titik mayor**.

Gambar 2.2.3. Graf siklus C_8, graf roda W_8 dan graf gir G_8

2.3 Pengertian Dimensi Partisi pada Graf

Definisi 2.3.1 berikut memberikan pengertian dari jarak antara dua titik dan jarak antara suatu titik terhadap sebuah himpunan pada suatu graf.

Definisi 2.3.1. [5] *Misalkan* $G = (V,E)$ *merupakan suatu graf terhubung dan misalkan* $S \subseteq V(G)$. *Selanjutnya misalkan terdapat sebuah titik* $v \in V(G)$. *Maka jarak titik* v *terhadap* S *didefinisikan sebagai* $d(v,S) = min\ \{d(v,x)|x \in S\}$.

Definisi 2.3.2. [5] *Misalkan* $G = (V,E)$ *merupakan suatu graf terhubung dan* $u,v \in V(G)$ *adalah sebarang dua titik di* G. *Diameter* G *didefinisikan sebagai jarak maksimum antara setiap dua titik di* G, *dinotasikan sebagai* $diam(G) = max\{d(u,v)|u,v \in V(G)\}$.

Selanjutnya dimensi partisi dari suatu graf diberikan pada Definisi 2.3.3 berikut.

Definisi 2.3.3. [5] *Misalkan* G *adalah suatu graf terhubung. Himpunan titik* $V(G)$

dipartisi menjadi beberapa partisi, sebut $S_1, S_2, ..., S_k$. Notasikan π sebagai suatu himpunan terurut dari k-partisi, tulis $\pi = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$. Misalkan terdapat sebuah titik v di G, maka ***representasi*** *v terhadap π didefinisikan sebagai jarak dari v ke tiap-tiap partisi di π, ditulis $r(v|\pi) = (d(v,S_1), d(v,S_2), ..., d(v,S_k))$. Untuk selanjutnya $r(v|\pi)$ ini disebut* ***vektor penyajian****. Jika setiap titik yang berbeda di G mempunyai representasi yang berbeda terhadap π, maka π disebut sebagai* ***partisi penyelesaian****. Kardinalitas minimum dari k-partisi penyelesaian terhadap V(G) disebut* ***dimensi partisi*** *dari G, dinotasikan dengan pd(G).*

Pada Definisi 2.3.4 berikut diberikan pengertian dari himpunan penyelesaian.

Definisi 2.3.4. [5] *Misalkan $W \subseteq V(G)$ dan $x, y \in V(G)$. Himpunan $W = \{w_1, w_2, ..., w_k\}$ dikatakan* ***himpunan penyelesaian (resolving set)*** *di G jika untuk setiap dua titik $x, y \in V(G)$, dengan $x \neq y$ maka terdapat suatu titik $w_i \in W$ sedemikian sehingga $d(x, w_i) \neq d(y, w_i)$.*

2.4 Lema Pendukung

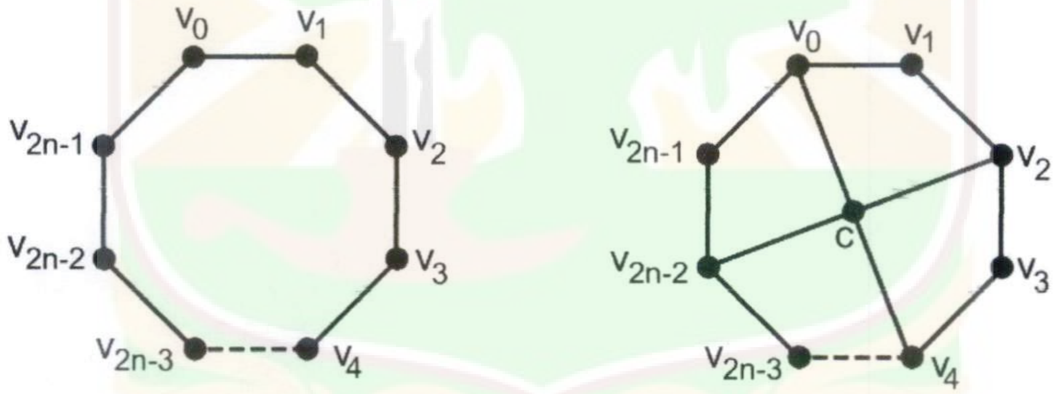
Berikut diberikan lema yang mendukung untuk menyelesaikan masalah utama dalam tulisan ini.

Lema 2.4.5. [3] *Misalkan π adalah partisi penyelesaian dari V(G) dan $u, v \in V(G)$. Jika $d(u,w) = d(v,w)$ untuk semua titik-titik $w \in V(G)\backslash\{u,v\}$ maka u dan v termasuk pada kelas berbeda dari π.*

Bukti. Misalkan terdapat $\pi = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$ yang merupakan himpunan partisi penyelesaian dari G. Kemudian pandang dua titik berbeda u, $v \in V(G)$. Jika $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G) \setminus \{u,v\}$ maka u dan v harus termuat dalam kelas partisi yang berbeda di G. Hal ini jelas karena jika tidak demikian maka $r(u|\pi) = r(v|\pi)$, yang mengakibatkan π bukan merupakan partisi penyelesaian. $\square$

BAB III
DIMENSI PARTISI DARI GRAF GIR

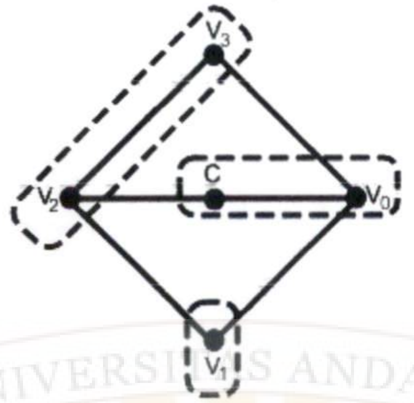
Misal diberikan suatu siklus genap dengan $V(C_{2n}) = \{v_0, v_1, ..., v_{2n-1}\}$ dengan $n \geq 2$. Untuk mengkonstruksi graf gir G_{2n}, tambahkan satu titik baru, notasikan dengan c, yang bertetangga dengan n titik di C_{2n}, dengan ketentuan, untuk $i = 0$ atau 1, tambahkan sisi-sisi $cv_i, cv_{i+2}, cv_{i+4}, ..., cv_{i+(2n-2)}$. Jadi $V(G_{2n}) = \{v_i | i = 0, 1, ..., 2n-1\} \cup \{c\}$ dan $E(G_{2n}) = \{cv_j | j = 0, 2, ..., 2n-2\}$. Graf gir G_{2n} mempunyai orde $2n+1$ dan berukuran $3n$. Pada Gambar 3.0.1 berikut diberikan gambar C_{2n} dan G_{2n} sebagaimana yang telah didefinisikan di atas.



Gambar 3.0.1. Graf siklus genap C_{2n} dan graf gir G_{2n}

Contoh 3.0.1. *Misal terdapat graf gir G_4 dengan $V(G_4) = \{c, v_0, v_1, v_2, v_3\}$. Akan ditunjukkan bahwa $pd(G_4) = 3$. Lihat Gambar 3.0.2.*

Misal $\pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{c, v_0\}, S_2 = \{v_1\}, S_3 = \{v_2, v_3\}$. Ambil titik



Gambar 3.0.2. Graf gir G_4

$c \in S_1$. *Representasi titik c terhadap* π *adalah* $r(c|\pi) = ((d(c, S_1), d(c, S_2), d(c, S_3))$ $= (0, 2, 1)$. *Selanjutnya, ambil titik* $v_0 \in S_1$ *maka* $r(v_0|\pi) = (0, 1, 1)$. *Dengan cara yang sama diperoleh :*

$r(v_1|\pi) = (1, 0, 1)$,

$r(v_2|\pi) = (1, 1, 0)$,

$r(v_3|\pi) = (1, 2, 0)$.

Dapat dilihat bahwa sebarang titik v di G_4 *mempunyai representasi* $r(v|\pi)$ *yang berbeda, maka haruslah* $pd(G_4) = |\pi| = 3$.

3.1 Beberapa Klaim dan Lema Pendukung

Untuk membuktikan hasil utama pada kajian ini, penulis menggunakan Klaim 1-4 dan Lema 3.1.1-3.1.6 yang dapat mendukung dalam proses pembuktian.

Klaim 1. *Terdapat paling banyak dua angka 1 pada vektor penyajian dari titik tepi selain posisi pertama.*

Jika terdapat lebih dari dua angka 1 pada vektor penyajian dari titik tepi selain posisi pertama, maka representasi titik-titik di G_{2n} terhadap π akan ada yang sama, yang mengakibatkan π bukan merupakan partisi penyelesaian.

Klaim 2. *Terdapat paling banyak dua angka 2 pada vektor penyajian dari titik tepi minor selain posisi pertama.*

Jika terdapat lebih dari dua angka 2 pada vektor penyajian dari titik tepi minor selain posisi pertama, maka representasi titik-titik di G_{2n} terhadap π akan ada yang sama, yang mengakibatkan π bukan merupakan partisi penyelesaian.

Klaim 3. *Bilangan terbesar pada vektor penyajian titik minor adalah 4.*

Karena titik minor berderajat dua, maka jarak terpanjang dari titik minor ke titik lain adalah 4.

Klaim 4. *Bilangan terbesar pada vektor penyajian titik mayor adalah 3.*

Karena titik mayor berderajat tiga, maka jarak terpanjang dari titik mayor ke titik lain adalah 3.

Misalkan $pd(G_{2n}) = k$. Akan diberikan Lema-Lema yang menunjukkan keterkaitan antara n dan k tersebut.

Lema 3.1.1. *Banyaknya representasi yang berbeda dari titik pusat c pada graf gir terhadap partisi dari $V(G_{2n})$ adalah* 2^{k-1}.

Bukti. Misal $pd(G_{2n})= k$ dan $\pi = \{S_1,S_2,...,S_k\}$ adalah suatu k-partisi terurut dari titik-titik pada G. Asumsikan bahwa titik pusat $c \in S_1$. Dapat dituliskan

$r(c|\pi) = (d(c, S_1), d(c, S_2), ..., d(c, S_k))$, yang berisikan k buah unsur. Unsur pertama yaitu $d(c, S_1)$, haruslah 0. Untuk $k-1$ posisi lainnya, dapat diisi dengan angka 1 atau 2. Oleh karena itu banyaknya representasi yang berbeda untuk c adalah 2^{k-1}. □

Lema 3.1.2. *Banyaknya representasi yang berbeda pada titik-titik tepi mayor dalam S_1 yang mengandung titik pusat c terhadap partisi dari $V(G_{2n})$ adalah $\sum_{i=0}^{2}\binom{k-1}{i}2^{k-i-1}$.*

Bukti. Misalkan v merupakan titik mayor pada S_1, maka posisi pertama pada vektor penyajian v terhadap π adalah 0. Sehingga $k-1$ posisi lainnya dapat diisi dengan angka 1, 2 atau 3. Karena terdapat paling banyak dua angka 1 (berdasarkan Klaim 1) maka pandang tiga kasus berikut:

Kasus 1. Tidak terdapat angka 1.

Karena posisi pertama pada vektor penyajian v terhadap π adalah 0, maka $k-1$ posisi lainnya dapat diisi dengan angka 2 atau 3. Oleh karena itu banyaknya representasi yang berbeda adalah $\binom{k-1}{0}2^{k-0-1}$.

Kasus 2. Terdapat satu angka 1.

Karena posisi pertama pada vektor penyajian v terhadap π adalah 0, tanpa mengurangi perumuman asumsikan posisi kedua diisi oleh angka 1, maka $k-2$ posisi lainnya dapat diisi dengan angka 2 atau 3. Oleh karena itu banyaknya representasi yang berbeda adalah $\binom{k-1}{1}2^{k-1-1}$.

Kasus 3. Terdapat dua angka 1.

Karena posisi pertama pada vektor penyajian v terhadap π adalah 0, maka $k-1$ posisi lainnya dapat diisi dengan angka 1, 2 atau 3. Tanpa mengurangi perumuman, asumsikan posisi kedua dan ketiga diisi oleh angka 1, maka $k-3$ posisi dapat diisi dengan angka 2 atau 3. Oleh karena itu banyaknya representasi yang berbeda adalah $\binom{k-1}{2}2^{k-2-1}$.

Dari tiga kasus di atas maka banyaknya representasi yang berbeda adalah $\sum_{i=0}^{2}\binom{k-1}{i}2^{k-i-1}$ dimana i adalah banyaknya angka 1 dalam vektor penyajian. □

Lema 3.1.3. *Banyaknya representasi yang berbeda pada titik-titik tepi minor dalam S_1 yang mengandung titik pusat c pada graf gir terhadap partisi dari $V(G_{2n})$ adalah*$\sum_{j=0}^{2}\sum_{i=0}^{2}\binom{k-1}{j}\binom{k-j-1}{i}2^{k-i-j-1}$.

Bukti. Misal u adalah titik minor di S_1. Karena posisi pertama pada vektor penyajian titik u terhadap π diisi 0, maka $k-1$ posisi lainnya dapat diisi dengan 1, 2, 3, atau 4. Karena paling banyak dua posisi diisi angka 1 (berdasarkan Klaim 1) dan berdasarkan Klaim 2, terdapat paling banyak dua buah angka 2 maka banyaknya representasi yang berbeda adalah $\sum_{j=0}^{2}\sum_{i=0}^{2}\binom{k-1}{j}\binom{k-j-1}{i}2^{k-i-j-1}$. Hal ini dapat dilihat berdasarkan tiga kasus berikut:

Kasus 1. Tidak terdapat angka 1.

Dalam kasus ini, terdapat pula tiga subkasus sebagai berikut:

Subkasus 1.1. Tidak terdapat angka 2.

Karena posisi pertama pada vektor penyajian titik u terhadap π adalah 0, maka $k-1$ posisi lainnya dapat diisi dengan angka 3 atau 4. Oleh karena itu banyaknya representasi yang berbeda adalah $\binom{k-1}{0}\binom{k-0-1}{0}2^{k-0-0-1}$.

Subkasus 1.2. Terdapat satu angka 2.

Karena posisi pertama pada vektor penyajian titik u terhadap π adalah 0, maka tanpa mengurangi perumuman, asumsikan posisi kedua diisi oleh angka 2.

Maka $k-2$ posisi lainnya dapat diisi dengan angka 3 atau 4. Oleh karena itu banyaknya representasi yang berbeda adalah $\binom{k-1}{0}\binom{k-0-1}{0}2^{k-1-0-1}$.

Subkasus 1.3. Terdapat dua angka 2.

Karena posisi pertama pada vektor penyajian titik u terhadap π adalah 0, maka tanpa mengurangi perumuman, asumsikan posisi kedua dan ketiga diisi oleh angka 2. Maka $k-3$ posisi lainnya dapat diisi dengan angka 3 atau 4. Oleh karena itu banyaknya representasi yang berbeda adalah $\binom{k-1}{0}\binom{k-0-1}{2}2^{k-2-0-1}$.

Kasus 2. Terdapat satu angka 1.

Dalam kasus ini, terdapat pula tiga subkasus sebagai berikut:

Subkasus 2.1. Tidak terdapat angka 2.

Karena posisi pertama pada vektor penyajian titik u terhadap π adalah 0, tanpa mengurangi perumuman asumsikan posisi kedua diisi oleh angka 1. Karena tidak terdapat angka 2 maka $k-2$ posisi lainnya dapat diisi dengan angka 3 atau 4. Oleh karena itu banyaknya representasi yang berbeda adalah $\binom{k-1}{1}\binom{k-1-1}{0}2^{k-0-1-1}$.

Subkasus 2.2. Terdapat satu angka 2.

Karena posisi pertama pada vektor penyajian titik u terhadap π adalah 0, tanpa mengurangi perumuman asumsikan posisi kedua diisi oleh angka 1 dan posisi ketiga diisi oleh angka 2, maka $k-3$ posisi lainnya dapat diisi dengan angka 3 atau 4. Oleh karena itu banyaknya representasi yang berbeda adalah $\binom{k-1}{1}\binom{k-1-1}{1}2^{k-1-1-1}$.

Subkasus 2.3. Terdapat dua angka 2.

Karena posisi pertama pada vektor penyajian titik u terhadap π adalah 0, tanpa mengurangi perumuman asumsikan posisi kedua diisi oleh angka 1, posisi ketiga dan keempat diisi oleh angka 2, maka $k-4$ posisi lainnya dapat diisi dengan angka 3 atau 4. Oleh karena itu banyaknya representasi yang berbeda adalah $\binom{k-1}{1}\binom{k-1-1}{2}2^{k-2-1-1}$.

***Kasus 3. Terdapat dua angka 1*.**

Dalam kasus ini, terdapat pula tiga subkasus sebagai berikut:

Subkasus 3.1. Tidak terdapat angka 2.

Karena posisi pertama pada vektor penyajian titik u terhadap π adalah 0, tanpa mengurangi perumuman asumsikan posisi kedua dan ketiga diisi oleh angka 1. Karena tidak terdapat angka 2 maka $k-3$ posisi lainnya dapat diisi dengan angka 3 atau 4. Oleh karena itu banyaknya representasi yang berbeda adalah $\binom{k-1}{2}\binom{k-2-1}{0}2^{k-0-2-1}$.

Subkasus 3.2. Terdapat satu angka 2.

Karena posisi pertama pada vektor penyajian titik u terhadap π adalah 0, tanpa mengurangi perumuman asumsikan posisi kedua dan ketiga diisi oleh angka 1. Kemudian asumsikan pula posisi keempat diisi oleh angka 2 maka $k-4$ posisi lainnya dapat diisi dengan angka 3 atau 4. Oleh karena itu banyaknya representasi yang berbeda adalah $\binom{k-1}{2}\binom{k-2-1}{1}2^{k-1-2-1}$.

Subkasus 3.3. Terdapat dua angka 2.

Karena posisi pertama pada vektor penyajian titik u terhadap π adalah 0, tanpa mengurangi perumuman asumsikan posisi kedua dan ketiga diisi oleh angka 1. Kemudian asumsikan pula posisi keempat dan kelima diisi oleh angka 2 maka $k-5$ posisi lainnya dapat diisi dengan angka 3 atau 4. Oleh karena itu banyaknya representasi yang berbeda adalah $\binom{k-1}{2}\binom{k-2-1}{2}2^{k-2-2-1}$.

Dari tiga kasus di atas dapat disimpulkan bahwa banyaknya representasi yang berbeda pada titik-titik tepi minor dalam S_1 yang mengandung pusat c pada graf gir terhadap partisi dari $V(G_{2n})$ adalah $\sum_{j=0}^{2}\sum_{i=0}^{2}\binom{k-1}{j}\binom{k-j-1}{i}2^{k-i-j-1}$, dimana j adalah banyaknya angka 1 dan i adalah banyaknya angka 2 dalam vektor penyajian. □

Lema 3.1.4. *Banyaknya representasi yang berbeda pada titik-titik tepi mayor dalam kelas lain selain S_1 yang mengandung titik pusat c pada graf gir terhadap partisi dari $V(G_{2n})$ adalah $\sum_{i=0}^{2}\binom{k-2}{i}2^{k-i-2}$.*

Bukti. Misalkan w adalah titik mayor pada kelas lain selain S_1. Tanpa mengurangi perumuman dapat diasumsikan bahwa $w \in S_2$, maka posisi pertama pada vektor penyajian w terhadap π adalah 1 dan posisi kedua diisi oleh 0. Sehingga $k-2$ posisi lainnya dapat diisi dengan 1, 2 atau 3. Karena terdapat paling banyak dua buah angka 1 (berdasarkan Klaim 1), maka dengan cara yang sama seperti pada pembuktian Lema 3.1.2 diperoleh bahwa banyaknya representasi yang berbeda adalah $\sum_{i=0}^{2}\binom{k-2}{i}2^{k-i-2}$, dimana i adalah banyaknya angka 1 dalam vektor penyajian. □

Lema 3.1.5. *Banyaknya representasi yang berbeda pada titik-titik tepi minor dalam kelas lain selain S_1 yang mengandung titik pusat c pada graf gir terhadap partisi dari $V(G_{2n})$ adalah $2\sum_{j=0}^{2}\sum_{i=0}^{2}\binom{k-2}{j}\binom{k-j-2}{i}2^{k-i-j-2}$.*

Bukti. Karena posisi pertama pada vektor penyajian dapat diisi oleh 1 atau 2 dan posisi kedua diisi oleh 0, sehingga $k-2$ posisi lainnya dapat diisi dengan

1, 2, 3, atau 4. Berdasarkan Klaim 1 dan Klaim 2 dan dengan cara yang sama seperti pada pembuktian Lema 3.1.3, maka banyaknya representasi yang berbeda adalah $2\sum_{j=0}^{2}\sum_{i=0}^{2}\binom{k-2}{j}\binom{k-j-2}{i}2^{k-i-j-2}$, dengan j adalah banyaknya angka 1 dan i adalah banyaknya angka 2 dalam vektor penyajian. □

3.2 Batas Atas untuk Orde G_{2n}

Dengan menggunakan Lema 3.1.1 - 3.1.5, akan ditunjukkan bahwa banyaknya titik pada graf Gir dibatasi oleh dimensi partisinya, seperti yang ditunjukkan pada Teorema 3.2.6 berikut.

Teorema 3.2.6. *Misalkan $n \geq 2$ dan k merupakan dimensi partisi dari G_{2n}, maka orde graf gir G_{2n} dibatasi oleh dimensi partisinya, yaitu $2n + 1 < 3k^4(k + 2)2^{k-7}$.*

Bukti. Misal $\pi = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$ dan titik pusat c berada di S_1. Maka berdasarkan Lema 3.1.1- Lema3.1.3 diperoleh bahwa banyaknya titik pada S_1 adalah

$$\begin{aligned}|S_1| &\leq 2^{k-1} + \sum_{i=0}^{2}\binom{k-1}{i}2^{k-i-1} + \sum_{j=0}^{2}\sum_{i=0}^{2}\binom{k-1}{j}\binom{k-j-1}{i}2^{k-i-j-1}\\ &= 2^{k-7}(k^4 - 2k^3 + 27k^2 + 14k + 152)\\ &< 3k^4 2^{k-6},\end{aligned}$$

untuk setiap $k \geq 3$. Berdasarkan Lema 3.1.4 dan Lema 3.1.5 maka banyaknya titik pada partisi lainnya adalah

$$\begin{aligned}|S_l| &\leq \sum_{i=0}^{2}\binom{k-2}{i}2^{k-i-2} + 2\sum_{j=0}^{2}\sum_{i=0}^{2}\binom{k-2}{j}\binom{k-j-2}{i}2^{k-i-j-2}\\ &= 2^{k-7}(k^4 - 6k^3 + 35k^2 + 46k + 80)\\ &< 3k^4 2^{k-7},\end{aligned}$$

untuk setiap $k \geq 3$. Karena banyaknya titik di G_{2n} adalah jumlah titik dari masing-masing kelas partisi, maka diperoleh

$$2n + 1 = \sum_{l=1}^{k} |S_l|$$

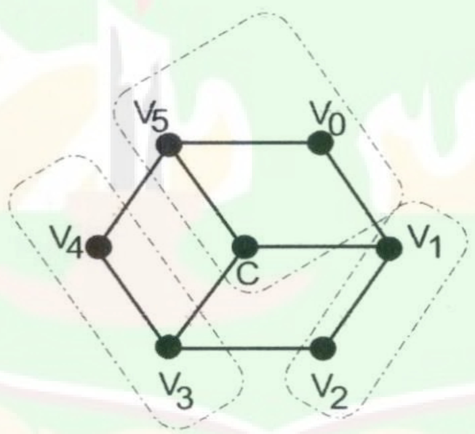
$$< 3k^4 2^{k-6} + 3(k-1)k^4 2^{k-7}$$

$$2n + 1 < 3k^4(k+2)2^{k-7}.$$

□

Dapat disimpulkan bahwa orde G_{2n} dibatasi oleh dimensi partisinya.

Contoh 3.2.2. *Diberikan suatu graf gir G_6, dengan $n = 3$ dimana n adalah banyaknya titik di G_6 yang bertetangga pada C_6. Akan ditunjukkan bahwa $pd(G_6) = 3$ dan orde G_6 dibatasi oleh dimensi partisinya. Lihat Gambar 3.2.3. Misal diambil $\pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dimana $S_1 = \{c, v_0, v_5\}, S_2 = \{v_1, v_2\}, S_3 = \{v_3, v_4\}$ maka diperoleh representasi setiap titik pada graf G_6 relatif terhadap π adalah :*



Gambar 3.2.3. Graf gir G_6

$r(c|\pi) = (0, 1, 1),$

$r(v_0|\pi) = (0, 1, 3),$

$r(v_1|\pi) = (1, 0, 2),$

$r(v_2|\pi) = (2, 0, 1),$

$$r(v_3|\pi) = (1,1,0),$$

$$r(v_4|\pi) = (1,2,0),$$

$$r(v_5|\pi) = (0,2,1).$$

Karena representasi setiap titik terhadap π pada G_6 berbeda, maka π merupakan himpunan partisi penyelesaian dari G_6. Karena $\pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ dan $|\pi| = 3$ maka pd(G_6)= 3.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa orde graf gir G_6 dibatasi oleh dimensi partisinya. Diketahui bahwa $n = 3$ dimana n adalah banyaknya titik di G_6 yang bertetangga pada C_6. Telah diperoleh bahwa $pd(G_6) = k = 3$. Maka berdasarkan Teorema 3.2.6, berlaku :

$$\begin{aligned} 2n+1 &< 3k^4(k+2)2^{k-7} \\ 2(3)+1 &< 3(3^4(3+2))2^{3-7} \\ 6+1 &< 3(81(5))2^{-4} \\ 7 &< 76. \end{aligned}$$

Dari contoh di atas dapat dilihat bahwa orde graf gir G_6 terbatas di atas oleh dimensi partisinya.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Graf gir G_{2n} berasal dari siklus genap C_{2n}: v_0, v_1, ... , v_{2n-1}, v_0, untuk $n \geq 2$ dan suatu titik baru, notasikan sebagai c yang bertetangga dengan n titik di C_{2n}, yaitu v_0, v_2, ... , v_{2n-2}. Jadi $V(G_{2n}) = \{v_i | i = 0, 1, ..., 2n-1\} \cup \{c\}$ dan $E(G_{2n}) = \{cv_j | j = 0, 2, ..., 2n-2\}$

Pada kajian telah diperoleh bahwa dimensi partisi graf Gir dibatasi oleh banyaknya titik pada graf Gir tersebut. Misalkan $n \geq 2$, dengan n adalah banyaknya titik pada G_{2n} yang bertetangga dengan titik-titik di C_{2n} dan k merupakan dimensi partisi dari G_{2n}, maka

$$\boxed{2n + 1 < 3k^4(k+2)2^{k-7},}$$

untuk setiap $k \geq 3$.

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan untuk membahas mengenai dimensi partisi dari graf mirip roda lainnya, yaitu graf helm, graf bunga matahari dan graf friendship.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bondy, J. A dan Murty, U. S. R. 1976. *Graph Theory with Applications*. Macmillan, London.

[2] Chartrand, G., E. Salehi dan P. Zhang. 2000. The partition dimension of a graph.*Aequationes Mathematicae*.**59**: 45-54.

[3] Darmaji. 2011. Dimensi Partisi Gaf Multipartit dan Graf Hasil Korona Dua Buah Graf Terhubung. *Disertasi Program Studi Doktor Matematika ITB*, tidak diterbitkan.

[4] Javaid, I. dan Shokat S. 2008. On the partition dimension of some whell related graphs. *Prime Research in Mathematica*. **4**: 154-164.

[5] Tomescu, I., I. Javaid dan Slamin. 2007. On the partition dimension and connected partition dimension of whell. *Ars Combin*. **84**: 311-317.

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Refina Riza, dilahirkan di Pekanbaru pada tanggal 24 Maret 1988 dari pasangan Ir. Refizal, MM dan Misnawati. Penulis menamatkan pendidikan Sekolah Dasar di SD Negeri Proyonanggan XI Batang Jawa Tengah pada tahun 2000, SMP Negeri 2 Pekanbaru pada tahun 2003, dan SMA Negeri 1 Pekanbaru pada tahun 2006. Pada tahun 2008 penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur SNMPTN(Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri).

Selama menjadi mahasiswa di jurusan Matematika FMIPA Unand, penulis aktif dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA), pengajar privat mata pelajaran Matematika, serta sempat menjadi tenaga pengajar dan mengajar bimbel mata pelajaran matematika dan bahasa Inggris selama mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN). Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) pada tahun 2011 di Jorong Nan Duo Suku, Nagari Salimpaung, Kecamatan Salimpaung, Kabupaten Tanah Datar dalam rangka menyelesaikan salah satu mata kuliah wajib fakultas.