TURUNAN FRAKSIONAL DARI BEBERAPA FUNGSI DAN PENERAPANNYA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH TAUTOCHRONE ABEL

SKRIPSI

RAHMI KURNIA SARI
0810432015

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS

PADANG 2012

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini menyatakan bahwa :

Nama	:	Rahmi Kurnia Sari
No. Buku Pokok	:	0810432015
Jurusan	:	Matematika
Bidang	:	Terapan
Judul Skripsi	:	**Turunan Fraksional Dari Beberapa Fungsi Dan Penerapannya Dalam Menyelesaikan Masalah *Tautochrone Abel.***

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal 25 Januari 2012 berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing / Penguji

1.

Narwen, M.Si
NIP. 19670410 199702 1 001

2.

Budi Rudianto, M.Si
NIP.132 169 920

Penguji

1.

Dr. Syafrizal Sy
NIP.19670807 199309 1 001

2.

Dr. Admi Nazra
NIP. 19730330 199903 1 002

3.

Dr.Ahmad Iqbal Baqi
NIP. 19671012 199402 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand

Dr. Syafrizal Sy
NIP.19670807 199309 1 001

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur tak henti-hentinya penulis panjatkan ke hadirat Allah S.W.T. atas segala limpahan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul "Turunan Fraksional Dari Beberapa Fungsi Dan Penerapannya Dalam Menyelesaikan Masalah *Tautochrone Abel*" yang merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang. Salawat dan salam semoga selalu tercurah kepada Baginda Rasulullah SAW yang telah menebar ilmu dan iman dalam cahaya Islam yang beliau bawa. Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, dorongan, kerjasama maupun bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Bapak Narwen, M.Si selaku Pembimbing I yang dengan sabar mengarahkan penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini melalui bimbingan dan diskusi yang sangat bermanfaat.

2. Bapak Budi Rudianto, M.Si selaku Pembimbing II yang membantu penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.

3. Bapak Dr. Syafrizal, Sy, Bapak Dr. Admi Nazra, dan Bapak Dr. Ahmad Iqbal Baqi selaku penguji skripsi yang telah memberi masukan dan saran kapada penulis dalam penyempurnaan skripsi ini.

4. Ibu Haripamyu, M.Si dan Ibu Dr.Lyra Yulianti selaku dosen Pembimbing Akademik yang telah memberi pengarahan, nasehat, motivasi, dan ilmu selama penulis belajar di Jurusan Matematika FMIPA Unand.

5. Bapak Dr. Syafrizal, Sy selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas.

6. Bapak/Ibu dosen Jurusan Matematika FMIPA Unand yang telah membagi ilmunya kepada penulis dalam proses perkuliahan. Karyawan/i Jurusan Matematika FMIPA Unand yang telah membantu penulis selama penulis melaksanakan pendidikan di Unand.

7. Semua pihak yang turut membantu hingga selesainya skrpsi ini, teman-teman angkatan 2008, senior-senior, dan adik-adik angkatan 2009, 2010, 2011 di Jurusan Matematika FMIPA Unand.

8. Yang mulia Ayahanda Masril dan yang tercinta Ibunda Zenorita, serta ketiga kakakku tersayang Dian Rahmad, Sri Wahyuni dan Ulfia Izzati yang telah memberikan dorongan, semangat, do'a dan motivasi tiada henti.

Penulis menyadari penulisan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis mengharapkan kritik dan saran agar kedepannya diperoleh hasil yang lebih baik. Kritik dan saran tersebut dapat disampaikan melalui email di **mrahmikurnia@yahoo.co.id.** Akhir kata Penulis berharap agar skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkannya. Amin.

Padang, Januari 2012

Rahmi Kurnia Sari

ABSTRAK

Konsep turunan secara umum sering dikaitkan ke bilangan bulat. Misalnya, jika diberikan sebuah fungsi, maka dapat dicari turunan ke-1, 2, 3 dan seterusnya dari fungsi tersebut. Hal ini kemudian menjadi menarik untuk menyelidiki kemungkinan mencari turunan ke $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, dan turunan orde pecahan lainnya atau yang dikenal dengan turunan fraksional. Pada skripsi ini dikaji mengenai aturan pencarian turunan fraksional dari beberapa fungsi, yaitu fungsi pangkat, fungsi eksponensial, dan fungsi konstanta dan penerapannya dalam menyelesaikan masalah *Tautochrone Abel.*

Kata Kunci: *Turunan Fraksional, masalah Tautochrone Abel.*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Konsep turunan secara umum sering dikaitkan ke bilangan bulat. Misalnya, jika diberikan sebuah fungsi, maka dapat dicari turunan ke-1, 2, 3 dan seterusnya dari fungsi tersebut. Hal ini kemudian menjadi menarik untuk menyelidiki kemungkinan mencari turunan, seperti turunan ke $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ dan lainnya.

Dalam sebuah surat pada tanggal 30 September 1695 [3], yang ditulis oleh L'Hopital kepada Leibniz, berisi tentang pertanyaan mengenai notasi partikular yang digunakan oleh Leibniz pada publikasinya mengenai turunan ke-n atau turunan tingkat tinggi dari sebuah fungsi $y = f(x)$, yaitu

$$\frac{d^n y}{dx^n}.$$

Hal mendasar yang menjadi pertanyaan L'Hopital adalah "Bagaimana hasil turunan fungsi tersebut, jika $n = \frac{1}{2}$ " dan "Bagaimana jika n sebarang bilangan, seperti pecahan, irrasional atau bilangan kompleks ". Pertanyaan-pertanyaan tersebut melahirkan istilah mengenai **turunan fraksional**. Konsep turunan fraksional merupakan salah satu bagian dalam kajian **kalkulus fraksional**.

Bidang kalkulus fraksional mengkaji mengenai konsep turunan fraksional dan integral orde fraksional. Konsep kalkulus fraksional banyak diterapkan dalam bidang sains dan teknik, seperti pada bidang fisika, konsep kalkulus fraksional dipelajari pada fluid mekanik untuk menemukan solusi dari masalah difusi visko yang bergantung waktu. Selain itu, kalkulus fraksional juga diterapkan pada konstruksi model *signal processing* serta diaplikasikan untuk *edge detection* pada *image processing* dan digunakan dalam menyelesaikan masalah *Tautochrone Abel*.

Namun, yang menjadi pertanyaan adalah " Apa konsep-konsep dan aturan-aturan yang berlaku pada turunan fraksional" dan "Bagaimana penerapan turunan fraksional dalam bidang sains dan teknik ".

Penelitian lebih lanjut mengenai kalkulus fraksional berkembang sejak awal abad ke-20 dan sejak tiga tahun terakhir perkembangan kalkulus fraksional semakin pesat seiring ditemukan aplikasi-aplikasi dari kalkulus fraksional [3].

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah dipaparkan, pada tugas akhir ini, akan dikaji konsep turunan fraksional, yaitu :

1. Diberikan notasi turunan ke-n atau turunan tingkat tinggi dari sebuah fungsi $y = f(x)$, yang dipublikasikan oleh Leibniz, yaitu

$$\frac{d^n y}{dx^n}$$

   Bagaimana aturan pencarian turunan dari fungsi tersebut untuk sebarang $n \in \mathbb{R}$?

2. Apakah turunan fraksional merupakan generalisasi dari turunan orde bilangan bulat ?

3. Bagaimana konsep turunan fraksional oleh Riemann-Liouville ?

4. Apa sifat-sifat yang berlaku pada turunan fraksional ?

5. Bagaimana penerapan turunan fraksional pada masalah *Tautochrone Abel*?

1.3 Pembatasan Masalah

Batasan masalah pada penulisan tugas akhir ini adalah turunan fraksional atau turunan ke-α dengan $\alpha \in \mathbb{R}$, dari beberapa fungsi, yaitu fungsi pangkat, fungsi eksponensial, dan fungsi konstanta, yakni $f_1(x) = x^m$, $f_2(x) = x^{-m}$, $f_3(x) = e^{ax}$, dan $f_4(x) = C$.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penulisan ini adalah :

1. Untuk menunjukan turunan fraksional dari fungsi pangkat, fungsi eksponensial dan fungsi konstanta.

2. Untuk menunjukan bahwa turunan fraksional merupakan generalisasi dari turunan orde bilangan bulat.

3. Untuk menunjukan konsep turunan fraksional oleh Riemann-Liouville.

4. Untuk menunjukan sifat-sifat yang berlaku pada turunan fraksional.

5. Untuk menerapkan turunan fraksional pada masalah *Tautochrone Abel*.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan ini dibagi dalam empat bab, yaitu pendahuluan, landasan teori, turunan fraksional dari beberapa fungsi dan penerapannya dalam menyelesaikan masalah *Tautochrone Abel* serta penutup. Bab I pendahuluan, bab ini dibagi menjadi lima subbab, yakni latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan dan sistematika penulisan. Bab II landasan teori, pada bab ini diuraikan teori-teori mengenai turunan dan integral kalkulus orde bilangan bulat, serta fungsi-fungsi yang berkaitan dengan turunan fraksional seperti fungsi Gamma, deret McLaurin dan deret tak hingga dan masalah *Tautochrone Abel*. Bab III turunan fraksional dari beberapa fungsi dan penerapannya dalam menyelesaikan *Tautochrone Abel*, pada bab ini dikaji mengenai sejarah turunan fraksional, notasi turunan fraksional, aturan pencarian turunan fraksional dari beberapa fungsi, definisi turunan fraksional oleh Riemann-Liouville, sifat-sifat yang berlaku pada turunan fraksional, aplikasi kasus serta penerapan turunan fraksional dalam menyelesaikan masalah *Tautochrone Abel*. Bab IV penutup, bab ini terdiri dari dua subbab, yakni kesimpulan dari pembahasan dan saran untuk penelitian lebih lanjut mengenai kalkulus fraksional dan merupakan bagian penutup dalam penulisan ini.

BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam bab ini akan diberikan beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan permasalahan yang telah dikemukakan di Bab I. Definisi dan aturan pencarian turunan akan dijelaskan pada Subbab 2.1, kemudian pada Subbab 2.2 diuraikan tentang Fungsi Gamma, pada Subbab 2.3 diuraikan tentang masalah *tautochrone abel*, dan pada Subbab 2.4 akan diuraikan tentang deret tak hingga dan deret McLaurin.

2.1 Turunan

Proses pencarian turunan disebut differensiasi. Teorema Dasar Kalkulus menyatakan bahwa differensiasi adalah proses keterbalikan dari pengintegralan [5]. Turunan mempunyai aplikasi dalam semua bidang kuantitatif. Dalam bidang Fisika, turunan dari perpindahan benda terhadap waktu adalah kecepatan dan turunan dari kecepatan benda terhadap waktu adalah percepatan. Persamaan-persamaan yang melibatkan turunan disebut persamaan diferensial, persamaan diferensial sangat penting dalam mendeskripisikan fenomena alam [5].

Definisi 2.1.1. *Turunan sebuah fungsi f adalah fungsi lain f' (dibaca "f aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan c adalah*

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

asalkan limit ini ada.

2.1.1 Notasi Turunan

Notasi turunan yang umum digunakan, adalah :

1. Notasi Leibniz

   Notasi turunan-orde bilangan bulat dari fungsi $f(x)$ yang diturunkan terhadap x, adalah $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ dengan $n \in \mathbb{N}$.

2. Notasi D

   Notasi turunan-orde bilangan bulat dari fungsi $f(x)$ yang diturunkan terhadap x, adalah D_x^n dengan $n \in \mathbb{N}$.

3. Notasi f

   Notasi turunan-orde bilangan bulat dari fungsi $f(x)$ yang diturunkan terhadap x, adalah $f^{(n)}(x)$ dengan $n \in \mathbb{N}$.

2.1.2 Aturan Turunan

Proses pencarian turunan dari sebuah fungsi dapat diperoleh dengan menggunakan definisi turunan. Namun, terdapat beberapa aturan pencarian turunan yang dapat digunakan untuk lebih memudahkan mencari turunan dari sebuah fungsi, diantaranya yaitu aturan fungsi konstanta, aturan pangkat dan aturan eksponensial.

Teorema 2.1.2. *Aturan pencarian turunan,*

1. *Aturan fungsi konstanta*

   Misal $f(x) = k$, *dengan* k *suatu konstanta, maka turunan pertama dari fungsi* $f(x)$, *adalah* $f'(x) = 0$

2. *Aturan pangkat*

   Misal $f(x) = x^n$, *dengan* $n \in \mathbb{N}$, *maka turunan pertama dari fungsi* $f(x)$, *adalah* $f'(x) = nx^{n-1}$

3. *Aturan eksponensial*

   (a) *Misal* $f(x) = e^x$, *maka turunan pertama dari fungsi* $f(x)$, *adalah* $f'(x) = e^x$

   (b) *Misal* $f(x) = e^{ax}$, *maka turunan pertama dari fungsi* $f(x)$, *adalah* $f'(x) = ae^{ax}$

2.2 Fungsi Gamma

Fungsi gamma merupakan fungsi yang memiliki keterhubungan dengan turunan fraksional. Untuk mencari turunan fraksional dari suatu fungsi, dapat dengan menggunakan sifat dan aturan dari fungsi gamma. Fungsi gamma muncul dari perluasan fungsi faktorial. Berdasarkan definisi fungsi faktorial, $n! = 1.2.3...(n-1).n$ untuk $n \in \mathbb{N}$ sedangkan $r! = \Gamma(r+1)$ untuk $r \in \mathbb{R}$.

Definisi 2.2.3. *Untuk* $x \geq 1$ *dan* $x \in \mathbb{R}$, *maka fungsi gamma direpresentasikan oleh*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Proposisi-proposisi fungsi gamma, diantaranya adalah :

Proposisi 2.2.4. *Untuk $x \in \mathbb{R}^+$, maka berlaku*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Bukti. Berdasarkan representasi fungsi gamma dan dengan menggunakan aturan integral parsial, maka

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x}dt$$

dengan $u = t^x, \frac{du}{dt} = xt^{x-1}, du = xt^{x-1}dt, dv = e^{-t}dt, v = -e^{-t}$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-t}t^{x}dt &= (t^x e^{-t})|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-t}xt^{x-1}dt\\ &= (t^x e^{-t})|_0^\infty + x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt\\ &= 0 + x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = x\Gamma(x). \ \square\end{aligned}$$

Proposisi 2.2.5. *Untuk $n \in \mathbb{N}$, berlaku*

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Bukti. Proposisi 2.2.6 akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika. Misal $P(n) = \Gamma(n+1) = n!$, akan ditunjukan $P(n)$ benar untuk $n = 1$, yaitu $P(1) = \Gamma(1+1) = \Gamma(2)!$, sesuai representasi fungsi gamma, diperoleh

$$\Gamma(2) = \int_0^\infty e^{-t}t^{2-1}dt = \int_0^\infty e^{-t}tdt$$

tulis $\Gamma(2) = \int udv$, dengan $u = t$, $dv = e^{-t}dt$, maka diperoleh $\frac{du}{dt} = 1, du = dt, v = -e^{-t}$, akibatnya

$$
\begin{aligned}
\Gamma(2) &= uv - \int vdu \\
&= t(-e^{-t})|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-t}dt \\
&= 0 + (-e^{t})|_0^\infty \\
&= 0 + 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

maka $\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 = 1!$. Jadi, $P(n)$ benar untuk $n = 1$. Selanjutnya, asumsikan $P(n)$ benar untuk $n = k$, dan akan ditunjukan P(n) benar untuk $n = k+1$, yaitu karena $P(n)$ benar untuk $n = k$, maka diperoleh $P(k) = \Gamma(k+1) = k!$, sehingga

$$P(k+1) = \Gamma(k+1) + 1 = \Gamma(k+2) = \int_0^\infty e^{-t}t^{k+2-1}dt = \int_0^\infty e^{-t}t^{k+1}dt$$

tulis $\frac{du}{dt} = (k+1)t^k$, $du = (k+1)t^k dt$, $v = -e^{-t}$, akibatnya

$$
\begin{aligned}
\Gamma(k+2) &= uv - \int vdu \\
&= t^{k+1}(-e^{-t})|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-t}t^{k+1}t^k dt \\
&= t^{k+1}(-e^{-t})|_0^\infty + (k+1)\int_0^\infty (e^{-t})t^k dt \\
&= 0 + (k+1)(k!) \\
&= (k+1)!
\end{aligned}
$$

sehingga $P(n)$ benar untuk $n = k+1$, yaitu $\Gamma(k+1) + 1 = \Gamma(k+2) = (k+1)!$, jadi $P(n)$ berlaku untuk $n \in \mathbb{N}$. Akibatnya diperoleh

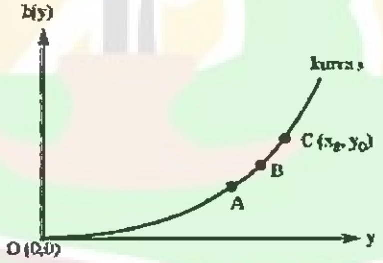
1. $\Gamma(x+1) = x!$, untuk $x \in \mathbb{R}^+$.

2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, untuk $x = \frac{1}{2}$.

3. $\Gamma(\frac{1}{m}) = \pi^{\frac{1}{m}}$, untuk $x = \frac{1}{m}$. □

2.3 Masalah Tautochrone Abel

Tautochrone berasal dari bahasa Yunani, *tauto* yang berarti sama dan *chrono* yang berarti waktu. *Tautochrone* adalah suatu kurva yang memiliki beberapa titik, dengan waktu turun dari setiap titiknya adalah sama tanpa memperhatikan posisi titik pada saat meluncur dan titik tersebut meluncur tanpa dipengaruhi gaya gesekan dan gaya gravitasi. Persamaan kurva tersebut dinamakan *cycloid* dengan waktu turunnya yang sama adalah chrone yang dilambangkan dengan $T(y_0)$. Masalah *tautochrone abel*, adalah menemukan persamaan kurva yang merupakan *cycloid* dan memenuhi syarat waktu $T(y_0)$ adalah sama. Untuk menyelesaikan masalah *tautochrone abel* digunakan aturan pencarian turunan fraksional. Ilustrasi masalah *Tautochrone Abel* diberikan pada Gambar 2.3.1.



Gambar 2.3.1. Kurva masalah *Tautochrone Abel*

2.4 Deret

Aturan deret yang digunakan dalam pencarian turunan fraksional adalah deret tak hingga dan deret McLaurin. Aturan deret tak hingga yang konvergen digunakan untuk mencari turunan fraksional dari fungsi $f(x) = e^x$ dan $f(x) =$

e^{ax}. Deret McLaurin digunakan dalam pembuktian aturan pencarian turunan fraksional untuk fungsi eksponensial $f(x) = e^x$ dan $f(x) = e^{ax}$.

2.4.1 Deret Takhingga

Definisi 2.4.6. [4] *Jika $x = (x_n)$ barisan bilangan riil, maka deret takhingga yang dibangun oleh x adalah suatu barisan $S = S_K$ atau barisan jumlah parsial dari deret yang didefinisikan sebagai berikut*

$$S_1 = x_1$$

$$S_2 = x_1 + x_2 = S_1 + x_2$$

$$S_3 = x_1 + x_2 + x_3 = S_2 + +x_2 + x_3$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$S_{k-1} = x_1 + x_2 + ... + x_{k-1} = S_{k-2} + x_{k-1}$$

$$S_k = x_1 + x_2 + ... + x_k = S_{k-1} + x_k$$

sehingga, jika barisan S konvergen, maka

$$\lim S = \sum(x_n)$$

dengan notasi

$$\sum(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n) atau \sum(x_n) = \sum_{n=k}^{\infty}(x_n)$$

2.4.2 Deret McLaurin

Deret McLaurin merupakan pengembangan khusus dari deret Taylor

Definisi 2.4.7. *Diberikan bentuk umum deret Taylor*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!} z^n$$

untuk $z_0 = 0$, *maka diperoleh Deret McLaurin, yaitu*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n$$

Ilustrasi

tentukan deret McLaurin dari fungsi $f(x) = e^x dan f(x) = e^{ax}$. Berdasarka Definisi 2.4, diperoleh untuk $f(x) = e^x$

$$f'(x) = e^x$$

$$f^2(x) = e^x$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$f^n(x) = e^x$$

untuk $z_0 = 0$, diperoleh Deret McLaurin, yaitu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(e^0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

untuk $f(x) = e^{ax}$

$$f'(x) = ae^x$$

$$f^2(x) = a^2e^x$$

$$.$$

.

.

$$f^n(x) = a^n e^x$$

untuk $z_0 = 0$, diperoleh Deret McLaurin, yaitu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(e^0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!}$$

BAB III

TURUNAN FRAKSIONAL DARI BEBERAPA FUNGSI DAN PENERAPANNYA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH *TAUTOCHRONE ABEL*

Kalkulus fraksional bermula dengan pertanyaan yang muncul dan diajukan oleh L'Hopital mengenai notasi turunan ke-n atau turunan tingkat tinggi dari sebuah fungsi $y = f(x)$, yang diperkenalkan oleh Leibniz, yaitu $\frac{d^n y}{dx^n}$, hal mendasar yang menjadi pertanyaan L'Hopital adalah "Bagaimana hasil turunan fungsi tersebut, jika $n = \frac{1}{2}$ dan "Bagaimana jika n sebarang bilangan, seperti pecahan, irrasional atau bilangan kompleks ".

Pertanyaan-pertanyaan tersebut telah mengantarkan kita untuk memperoleh definisi mengenai turunan fraksional dari sebuah fungsi $y = f(x)$ yang dapat diperoleh dengan mengembangkan aturan pencarian turunan ke-n dari turunan orde bilangan bulat.

Beberapa notasi turunan fraksional yang umum digunakan, adalah :

1. Notasi Leibniz

   Notasi turunan fraksional dari fungsi $f(x)$ yang diturunkan terhadap x, adalah $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x)$ dengan $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Notasi D

   Notasi turunan fraksional dari fungsi $f(x)$ yang diturunkan terhadap x, adalah D_x^α dengan $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Notasi Eksponensial

   Notasi turunan fraksional dari fungsi $f(x) = exp(x)$ yang diturunkan terhadap x, adalah E_α^x dengan $\alpha \in \mathbb{R}$ dan

$$E_\alpha^x = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} exp(x)$$

4. Notasi Riemann-Liouville

   Notasi turunan fraksional dari fungsi $f(x)$yang merupakan integral orde bilangan bulat dari fungsi lain, adalah ${}_bD_x^\alpha f(x)$ dengan $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ dan

$${}_bD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (\frac{d}{dx})^n \int_b^x \frac{f(\tau)d\tau}{(x-\tau)^{\alpha+1-n}}$$

3.1 Turunan Fraksional Dari Beberapa Fungsi

Pada bagian ini, akan dibahas mengenai aturan pencarian turunan fraksional dari beberapa fungsi, yaitu fungsi pangkat, fungsi eksponensial dan fungsi konstanta. Aturan pencarian turunan fraksional ini diperoleh dengan mengembangkan aturan pencarian turunan ke-n dari turunan orde bilangan bulat.

Teorema 3.1.1. *Misalkan $f(x) = x^m$ maka turunan fraksional dari fungsi $f(x)$, adalah*

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)} x^{m-\alpha}$$

dengan $\alpha \in \mathbb{R}$, $m \geqslant 0$, $m \in \mathbb{R}$, $m \geqslant \alpha$ *dan* $\Gamma(r)$ *merupakan fungsi gamma yang direpresentasikan oleh*

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty e^{-t}t^{r-1}dt$$

Bukti.

Misal $f(x) = x^m$ dengan $m \in \mathbb{N}$, maka turunan pertama dari fungsi $f(x)$ adalah

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1} = \frac{m!}{(m-1)!}x^{m-1}$$

dan turunan kedua dari fungsi $f(x)$ adalah

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}x^m) = \frac{d}{dx}(\frac{m!}{(m-1)!}x^{m-1}) = \frac{m!}{(m-1)!}(\frac{d}{dx}x^{m-1}) = \frac{m!}{(m-2)!}x^{m-2}$$

maka turunan ke-n dari fungsi $f(x)$, adalah

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = \frac{d^n}{dx^n}x^m = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}.$$

Untuk $\alpha = n \in \mathbb{R}$ maka $(m-n) \in \mathbb{R}$, berdasarkan definisi fungsi faktorial, $n! = 1.2.3...(n-1).n$ untuk $n \in \mathbb{N}$ dan $r! = \Gamma(r+1)$ untuk $r \in \mathbb{R}$ [4], sehingga turunan fraksional dari fungsi $f(x)$ adalah

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}f(x) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)}x^{m-\alpha}$$

karena fungsi gamma hanya terdefinisi untuk $r \in \mathbb{R}^+$, maka mestilah $m \geqslant 0$ dan $m \geqslant \alpha$. □

Berikut, akan ditentukan aturan pencarian turunan fraksional dari fungsi pangkat $f(x) = x^{-m}$

Teorema 3.1.2. *Misalkan* $f(x) = x^{-m}$ *maka turunan fraksional dari fungsi* $f(x)$ *untuk* $0 < \alpha < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *adalah*

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}x^{-m} = (-1)^\alpha\frac{\Gamma(m+\alpha)}{\Gamma(m)}x^{-(m+\alpha)}$$

dengan $m \geqslant 1$, $m \in \mathbb{R}$, $(-1)^{\alpha} = (e)^{i\pi\alpha}$ *dan* $\Gamma(r)$ *merupakan fungsi gamma yang direpresentasikan oleh*

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{r-1}dt$$

Bukti.

Misal $f(x) = x^{-m}$ dengan $m \in \mathbb{N}$, maka turunan pertama dari fungsi $f(x)$ adalah

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}x^{-m} = -mx^{m-1} = -\frac{m!}{(m-1)!}x^{-(m+1)}$$

turunan kedua dari fungsi $f(x)$ adalah

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}f(x) &= \frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}x^{-m}) \\ &= \frac{d}{dx}(-\frac{m!}{(m-1)!}x^{-(m+1)}) \\ &= -\frac{m!}{(m-1)!}(\frac{d}{dx}x^{-(m+1)}) \\ &= \frac{m!}{(m-1)!}(m+1)x^{-(m+2)} \end{aligned} \tag{3.1}$$

turunan ketiga dari fungsi $f(x)$ adalah

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dx^3}f(x) &= \frac{d}{dx}\frac{d^2}{dx^2}f(x) \\ &= \frac{d}{dx}\frac{m!}{(m-1)!}(m+1)x^{-(m+2)} \\ &= \frac{m!}{(m-1)!}(m+1)\frac{d}{dx}x^{-(m+2)} \\ &= -\frac{m!}{(m-1)!}(m+1)(m+2)(\frac{d}{dx}x^{-(m+2)}) \\ &= -\frac{m!}{(m-1)!}(m+1)(m+2)x^{-(m+3)} \end{aligned} \tag{3.2}$$

maka turunan ke-n dari fungsi $f(x)$, adalah

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = \frac{d^n}{dx^n}x^{-m} = (-1)^n\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}x^{-(m+n)}.$$

Untuk $\alpha = n \in \mathbb{R}$ maka $(m - n) \in \mathbb{R}$, berdasarkan definisi fungsi faktorial, $n! = 1.2.3...(n-1).n$ untuk $n \in \mathbb{N}$ dan $r! = \Gamma(r+1)$ untuk $r \in \mathbb{R}$, sehingga turunan fraksional dari fungsi $f(x)$ adalah

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}f(x) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}x^{-m} = (-1)^\alpha \frac{\Gamma(m+\alpha)}{\Gamma(m)}x^{-(m+\alpha)}$$

karena fungsi gamma hanya terdefinisi untuk $r \in \mathbb{R}^+$ [4], maka mestilah $m > 0$ dan $m \in \mathbb{R}$. $\square$

Berikut, akan ditentukan aturan pencarian turunan fraksional dari fungsi eksponensial, $f(x) = e^{ax}$.

Teorema 3.1.3. *Misalkan $f(x) = e^{ax}$ maka turunan fraksional dari fungsi $f(x)$ adalah*

$$E_x^\alpha = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}f(x) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}exp(ax) = (a)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}$$

dengan $a \in \mathbb{R}$, $\alpha < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ dan $\Gamma(r)$ merupakan fungsi gamma yang direpresentasikan oleh

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty e^{-t}t^{r-1}dt$$

Bukti.

Dari deret McLaurin, fungsi $f(x) = e^{ax}$ dapat dituliskan sebagai

$$exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax)^k}{k!}; k \in \mathbb{N}$$

maka

$$\begin{aligned} E_{ax}^\alpha &= \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^k \end{aligned} \tag{3.3}$$

dengan menggunakan Teorema 3.1.1, yaitu aturan pencarian turunan fraksional untuk fungsi pangkat, diperoleh

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}x^k &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1}x^{k-\alpha}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\frac{k!}{\Gamma(k-\alpha+1}x^{k-\alpha}\\ &= (a)^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ax)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}\end{aligned} \tag{3.4}$$

karena fungsi gamma hanya terdefinisi untuk $r \in \mathbb{R}^+$, maka mestilah $\alpha < 1$. □

Berikut, akan ditentukan aturan pencarian turunan fraksional dari fungsi konstanta, $f(x) = C$.

Teorema 3.1.4. *Misalkan $f(x) = C$ maka turunan fraksional dari fungsi $f(x)$ adalah*

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}[C] = C\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}x^{-\alpha}$$

dengan C suatu konstanta, $\alpha < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dan $\Gamma(r)$ merupakan fungsi gamma yang direpresentasikan oleh

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty e^{-t}t^{r-1}dt$$

Bukti.

Dengan menggunakan Teorema 3.1.1, yaitu aturan pencarian turunan fraksional untuk fungsi pangkat dan menggunakan sifat turunan fraksional, yang menyatakan bahwa $D_x^\alpha f(x)$ adalah operator linear, maka diperoleh

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}[C] = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}[C]x^0 = C\frac{1}{\Gamma(0-\alpha+1)}x^{0-\alpha} = C\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}x^{-\alpha}$$

karena fungsi gamma hanya terdefinisi untuk $r \in \mathbb{R}^+$, maka mestilah $\alpha < 1$. □

Dapat dilihat bahwa, turunan fraksional dari fungsi konstanta menghasilkan suatu fungsi baru yang bukan merupakan fungsi konstanta, hal ini merupakan sesuatu yang menarik dari turunan fraksional. Berdasarkan uraian teorema di atas, dapat dilihat bahwa turunan fraksional merupakan generalisasi dari turunan orde bilangan bulat, karena aturan pencarian turunan fraksional diperoleh dengan mengembangkan aturan pencarian turunan ke-n dari turunan orde bilangan bulat.

3.2 Turunan Fraksional Oleh Riemann-Liouville

Seperti yang telah dijelaskan pada bagian latar belakang bahwa Kalkulus fraksional bermula dengan munculnya pertanyaan yang diajukan oleh L'Hopital mengenai notasi turunan ke-n atau turunan tingkat tinggi dari sebuah fungsi $y = f(x)$, yang diperkenalkan oleh Leibniz. Sejak saat itu, banyak para ahli matematika yang memecahkan pertanyaan dari L'Hopital, diantaranya yaitu : Riemann-Liouville.

Hal yang menarik dari konsep turunan fraksional yang dikemukakan oleh Riemann-Liouville adalah definisi turunan fraksional yang diajukan oleh Riemann-Liouville dapat menyelesaikan persamaan integral. Berikut diberikan definisi turunan fraksional yang diajukan oleh Riemann-Liouville.

Definisi 3.2.5. *Misalkan $f(\tau)$ adalah fungsi yang dapat diintegralkan sedemikian sehingga terdapat suatu fungsi $f(x)$ dengan $f(x) = f(\tau)$ dan memenuhi sifat berikut*

$$ {}_bD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(\frac{d}{dx})^n \int_b^x \frac{f(\tau)d\tau}{(x-\tau)^{\alpha+1-n}} $$

dengan $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $(n-1) \leq \alpha < n$ *dan* $n \in \mathbb{N}$:

Definisi 3.2.6. *Misalkan $f(\tau)$ adalah fungsi yang dapat diintegralkan sedemikian sehingga terdapat suatu fungsi $f(x)$ dengan $f(x) = f(\tau)$ dan memenuhi sifat berikut*

$$ {}_0D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(\frac{d}{dx})^n \int_0^x \frac{f(\tau)d\tau}{(x-\tau)^{\alpha+1-n}} $$

dengan $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $(n-1) \leq \alpha < n$ *dan* $n \in \mathbb{N}$.

3.3 Sifat-Sifat Turunan Fraksional

Turunan fraksional memenuhi sifat berikut ini :

1. D_x^α akan memberikan hasil yang sama untuk $n \in \mathbb{N}$.

   Karena $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ dan $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, sehingga D_x^α juga berlaku untuk $n \in \mathbb{N}$

2. Untuk $\alpha = 0$, maka $D_x^\alpha f(x) = D_x^0 f(x) = f(x)$, dan $D_x^0 f(x)$ dinamakan operator identitas.

   Dengan menggunakan definisi turunan fraksional oleh Riemann Liouville, yaitu

$$ {}_bD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(\frac{d}{dx})^n \int_b^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-n}} $$

   maka diperoleh

$$ {}_bD_x^0 f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-0)}(\frac{d}{dx})^n \int_b^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{0+1-n}} $$

pilih $n = 1$, maka

$$\begin{aligned}
{}_bD_x^0 f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-0)}(\frac{d}{dx})^1 \int_b^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{0+1-1}} \\
&=_b D_x^0 f(x) = \frac{1}{\Gamma(1)}(\frac{d}{dx}) \int_b^x f(\tau)d\tau \\
&= (\frac{d}{dx}) \int_b^x f(\tau)d\tau \\
&= f(x)dx
\end{aligned} \tag{3.5}$$

sehingga diperoleh $D_x^0 f(x) = f(x)$ dan $D_x^0 f(x)$ dinamakan operator identitas.

3. $D_x^\alpha f(x)$ adalah operator linear sehingga memenuhi sifat berikut

$$\begin{aligned}
D_x^\alpha[bf(x) + cf(x)] &= D_x^\alpha bf(x) + D_x^\alpha cf(x) \\
&= bD_x^\alpha f(x) + cD_x^\alpha f(x)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

4. Hukum Perkalian Indeks

$$D_x^\alpha D_x^\beta f(x) = D_x^\beta D_x^\alpha f(x) = D_x^{\alpha+\beta} f(x)$$

3.4 Aplikasi Kasus

Kasus 1

Misal diberikan fungsi $f(x) = x$, tentukan turunan ke-$\frac{1}{2}$ dari fungsi $f(x)$.

Berdasarkan teorema 3.1.1, diperoleh $m = 1$ dan $\alpha = \frac{1}{2}$, sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x &= \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+1)} x^{1-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} \sqrt{x} \\
&= 2\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

dengan

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1! = 1$$

$$\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \Gamma(1+\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Kasus 2

Misal diberikan fungsi $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$, tentukan turunan ke-$\frac{1}{4}$ dari fungsi $f(x)$.

Berdasarkan teorema 3.1.2, diperoleh $m = \frac{3}{2}$ dan $n = \frac{1}{4}$, sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{d^{\frac{1}{4}}}{dx^{\frac{1}{4}}}x &= (-1)^{\frac{1}{4}}\frac{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{2})}x^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}} \\
&= (-1)^{\frac{1}{4}}\frac{\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(\frac{3}{2})}x^{-\frac{5}{4}} \\
&= (-1)^{\frac{1}{4}}\frac{\Gamma(1+\frac{1}{4})}{\Gamma(1+\frac{1}{2})}x^{-\frac{5}{4}} \\
&= (e)^{\frac{i\pi}{4}}\frac{\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}x^{-\frac{5}{4}} \\
&= (e)^{\frac{i\pi}{4}}\frac{\frac{1}{4}\pi^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}x^{-\frac{5}{4}} \\
&= \frac{(e)^{\frac{i\pi}{4}}}{2x\sqrt[4]{(\pi)x}}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

dengan

$$\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \Gamma(1+\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\tfrac{5}{4}) = \Gamma(1+\tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{4}\Gamma(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{4}\pi^{\frac{1}{4}}$$

Kasus 3

Misal diberikan fungsi $f(x) = 2$, tentukan turunan ke-(-2) dari fungsi $f(x)$.

Berdasarkan teorema 3.1.4, diperoleh $C = 2$ dan $\alpha = -2$, sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{d^{-2}}{dx^{-2}}(2) &= \frac{1}{\Gamma(1-(-2))}x^{-(-2)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(3)}x^{(2)} \\
&= \frac{1}{2}x^{(2)}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

dengan

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2! = 2$$

Kasus 4

Hitunglah nilai integral dari

$$\int_b^x \frac{\tau}{\sqrt{x-\tau}} d\tau.$$

Berdasarkan definisi 3.2.5, pilih $\alpha = -\frac{1}{2}$, $n = 0$ dan $f(x) = x$, sehingga

$$\int_b^x \frac{\tau}{\sqrt{x-\tau}} d\tau = \int_b^x \frac{\tau}{(x-\tau)^{(-\frac{1}{2})-0+1}} d\tau$$

maka

$$\begin{aligned}
{}_bD_x^{-\frac{1}{2}} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(0-(-\frac{1}{2}))} \frac{d^0}{dx^0} \int_b^x \frac{\tau}{(x-\tau)^{(-\frac{1}{2})-0+1}} d\tau \\
\Leftrightarrow_b D_x^{-\frac{1}{2}} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_b^x \frac{\tau}{(x-\tau)^{(-\frac{1}{2})-0+1}} d\tau \\
\Leftrightarrow \Gamma(\frac{1}{2})_b D_x^{-\frac{1}{2}} f(x) &= \int_b^x \frac{\tau}{(x-\tau)^{(-\frac{1}{2})-0+1}} d\tau \\
\Leftrightarrow \sqrt{\pi}_b D_x^{-\frac{1}{2}} f(x) &= \int_b^x \frac{\tau}{(x-\tau)^{(-\frac{1}{2})-0+1}} d\tau \\
\Leftrightarrow \sqrt{\pi} \frac{4}{3x\sqrt{(\pi)x}} &= \int_b^x \frac{\tau}{(x-\tau)^{(-\frac{1}{2})-0+1}} d\tau \\
\Leftrightarrow \frac{4}{3x\sqrt{x}} &= \int_b^x \frac{\tau}{(x-\tau)^{(-\frac{1}{2})-0+1}} d\tau
\end{aligned} \tag{3.10}$$

dengan

$$
\begin{aligned}
D_x^{-\frac{1}{2}}(x) &= \frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dx^{-\frac{1}{2}}}x \\
&= \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-(-\frac{1}{2})+1)}x^{1-(-\frac{1}{2})} \\
&= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})}x^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}x^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}x^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{4}{3x\sqrt{(\pi)x}}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Kasus 5

misal diberikan fungsi $f(x) = exp(x)$, tentukan turunan ke-(-1) dari fungsi $f(x)$. berdasarkan teorema 3.1.3 diperoleh $\alpha = 1$, sehingga

$$
\begin{aligned}
E_{-1}^{x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-(-1)}}{\Gamma(k-(-1)+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(k+1)}}{\Gamma(k+2)} \\
&= \frac{x}{\Gamma(2)} + \frac{x^2}{\Gamma(3)} + \frac{x^3}{\Gamma(4)} \cdots
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

selanjutnya, akan dicari jumlah deret tak hingga dari barisan di atas.

Namun, untuk menghitung jumlah deret tak hingga merupakan hal yang rumit, sehingga diperlukan cara lain untuk mencari turunan ke-(-1), yaitu dengan menggunakan konsep turunan yang dikemukakan oleh Riemann Liouville pada definisi 3.2.6, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
E_{-1}^{x} &= \frac{d^{-1}}{dx^{-1}}e^{x} \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^t \frac{e^{\tau}}{(x-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

untuk $\alpha = -1$, pilih $n = 0$ dan $f(x) = e^x$, maka

$$\begin{aligned}
\frac{d^{-1}}{dx^{-1}}e^x &= \frac{1}{\Gamma(0-(-1))}\frac{d^0}{dx^0}\int_0^t \frac{e^\tau}{(x-\tau)^{-1-0+1}}d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(1)}\int_0^t e^\tau d\tau \\
&= \int_0^t e^\tau d\tau \\
&= e^\tau|_0^x \\
&= e^x - 1
\end{aligned} \tag{3.14}$$

karena diperoleh $E_{-1}^x = e^x - 1$, maka

$$\begin{aligned}
E_{-1}^x &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k-(-1)}}{\Gamma(k-(-1)+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{(k+1)}}{\Gamma(k+2)} \\
&= \frac{x}{\Gamma(2)} + \frac{x^2}{\Gamma(3)} + \frac{x^3}{\Gamma(4)}\cdots \\
&= e^x - 1
\end{aligned} \tag{3.15}$$

3.5 Penerapan Turunan Fraksional Dalam Menyelesaikan Masalah *Tautochrone Abel*

Seperti yang telah dijelaskan pada bab II, bahwa masalah *Tautochrone Abel* adalah menemukan persamaan kurva $s = h(y)$ yang merupakan *cycloid* dengan syarat waktu $T(y_0)$ atau *chrone* adalah sama. Untuk menyelesaikan *Tautochrone Abel* ini, digunakan aturan pencarian turunan fraksional.

Langkah-langkah penyelesaian masalah *Tautochrone Abel*, adalah sebagai berikut:

1. Penyelesaian masalah *Tautochrone Abel* dimulai dengan prinsip konservasi energi, yaitu seperti yang diberikan pada gambar 2.3.1

(a) titik meluncur tanpa dipengaruhi oleh gaya gravitasi dan gaya gesekan, sehingga titik kehilangan energi mekanik

(b) waktu turun dari setiap titik adalah sama tanpa memperhatikan posisi titik pada saat meluncur, hal ini mengakibatkan energi kinetik titik sama dengan energi potensial

(c) sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv^2 &= mgh \\
\frac{1}{2}m(\frac{ds}{dt})^2 &= mg(y_0 - y) \\
\frac{1}{1}(\frac{d^2s}{dt^2}) &= g(y_0 - y) \\
d^2s &= 2g(y_0 - y)dt^2 \\
ds &= \sqrt{2g(y_0 - y)}dt
\end{aligned} \tag{3.16}$$

pilih tanda akar yang negatif, karena menunjukan pengurangan jarak terhadap peningkatan waktu, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
dt &= -\frac{1}{\sqrt{2g(y_0 - y)}}ds \\
T(y_o) &= -\int_{y_0}^{0} \frac{1}{\sqrt{2g(y_0 - y)}}ds \\
T(y_o) &= -\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{y_0}^{0} \frac{1}{\sqrt{y_0 - y}}ds \\
\sqrt{2g}T(y_o) &= \int_{0}^{y_0} \frac{1}{\sqrt{y_0 - y}}ds
\end{aligned} \tag{3.17}$$

2. $s = h(y)$ adalah persamaan kurva yang merupakan cycloid, maka

$$\begin{aligned}
s &= h(y) \\
\frac{ds}{dy} &= h'(y) \\
ds &= h'(y)dy
\end{aligned} \tag{3.18}$$

dan misalkan $ds = h'(y) = f(y)dy$, sehingga

$$T(y_o) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y_0} \frac{1}{\sqrt{y_0 - y}} ds$$

$$T(y_o) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y_0} \frac{1}{\sqrt{y_0 - y}} f(y)dy \tag{3.19}$$

$$T(y_o)\sqrt{2g} = \int_0^{y_0} \frac{1}{\sqrt{y_0 - y}} f(y)dy$$

misal $k = T(y_o)\sqrt{2g}$, maka diperoleh

$$k = \int_0^{y_0} \frac{1}{\sqrt{y_0 - y}} f(y)dy$$

persamaan ini dinamakan persamaan integral Abel

tulis kembali persamaan integral Abel dengan menggunakan definisi turunan fraksional dari Riemann-Liouville, yaitu

$${}_bD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (\frac{d}{dx})^n \int_b^x \frac{f(\tau)d\tau}{(x-\tau)^{\alpha+1-n}}$$

maka diperoleh

$$\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{(dy_0)^{-\frac{1}{2}}} f(y) = \frac{1}{\Gamma(0-(-\frac{1}{2}))} \frac{d}{dy_0} \int_0^{y_0} \frac{f(y)dy}{(y_0 - y)^{(-\frac{1}{2})-0+1}}$$

$$\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{(dy_0)^{-\frac{1}{2}}} f(y) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{y_0} \frac{f(y)dy}{\sqrt{(y_0 - y)}}$$

$$\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{(dy_0)^{-\frac{1}{2}}} f(y) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{y_0} \frac{f(y)dy}{\sqrt{(y_0 - y)}} \tag{3.20}$$

$$\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{(dy_0)^{-\frac{1}{2}}} f(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y_0} \frac{f(y)dy}{\sqrt{(y_0 - y)}}$$

$$\sqrt{\pi} \frac{d^{-\frac{1}{2}}}{(dy_0)^{-\frac{1}{2}}} f(y) = \int_0^{y_0} \frac{f(y)dy}{\sqrt{(y_0 - y)}}$$

karena

$$k = T(y_0)\sqrt{2g}$$

dan

$$k = \int_0^{y_0} \frac{1}{\sqrt{y_0 - y}} f(y)dy$$

maka

$$\sqrt{\pi}\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{d(y_0)^{-\frac{1}{2}}} f(y) = k$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^{-\frac{1}{2}}}{d(y_0)^{-\frac{1}{2}}} f(y) = T(y_0)\sqrt{\frac{2g}{\pi}}$$

karena hukum perkalian indeks, maka

$$\begin{aligned}
\frac{d^{\frac{1}{2}}}{(dy_0)^{\frac{1}{2}}}\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{(dy_0)^{-\frac{1}{2}}} f(y) &= \frac{d^{\frac{1}{2}}}{(dy_0)^{\frac{1}{2}}} T(y_0)\sqrt{2g} \\
f(y) &= \frac{d^{\frac{1}{2}}}{(dy_0)^{\frac{1}{2}}} T(y_0)\sqrt{2g} \\
\frac{f(y)}{\sqrt{\frac{2g}{\pi}}} &= \frac{d^{\frac{1}{2}}}{(dy_0)^{\frac{1}{2}}} T(y_0) \\
\frac{f(y)}{\sqrt{\frac{2g}{\pi}}} &= \frac{T(y_0)}{(\pi)x} \\
f(y) &= \frac{T(y_0)}{(\pi)x}\frac{2g}{\pi} \\
f(y) &= \frac{T(y_0)}{\sqrt{\pi}}\frac{2g}{x}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

dengan aturan pencarian turunan fraksional dari fungsi konstanta

$$\begin{aligned}
\frac{d^{\frac{1}{2}}}{(dy_0)^{\frac{1}{2}}} T(y_0) &= T(y_0)\frac{d^{\frac{1}{2}}}{(dy_0)^{\frac{1}{2}}}\frac{x^{0-(\frac{1}{2})}}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \\
\frac{d^{\frac{1}{2}}}{(dy_0)^{\frac{1}{2}}} T(y_0) &= T(y_0)\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{x}} \\
\frac{d^{\frac{1}{2}}}{(dy_0)^{\frac{1}{2}}} T(y_0) &= T(y_0)\frac{1}{\sqrt{(\pi)x}}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

sehingga

$$
\begin{aligned}
ds &= f(y)dy \\
\Leftrightarrow ds &= \frac{T(y_0)}{\pi}\sqrt{\frac{2g}{x}} \qquad (3.23) \\
\Leftrightarrow s &= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2g}{x}}\int_0^y T(y_0)dy
\end{aligned}
$$

dengan demikian diperoleh persamaan kurva $s = h(y)$ yang merupakan solusi dalam masalah *tautochrone abel*

$$
\Leftrightarrow s = h(y) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2g}{x}}\int_0^y T(y_0)dy \qquad (3.24)
$$

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa :

1. Aturan Pencarian Turunan fraksional dari beberapa fungsi

   (a) Turunan fraksional dari fungsi pangkat $f(x) = x^m$, adalah

   $$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)}x^{m-\alpha}$$

   (b) Turunan fraksional dari fungsi pangkat $f(x) = x^{-m}$, adalah

   $$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}x^{-m} = (-1)^\alpha\frac{\Gamma(m+\alpha)}{\Gamma(m)}x^{-(m+\alpha)}$$

   (c) Turunan fraksional dari fungsi eksponensial $f(x) = e^{ax}$, adalah

   $$E_x^\alpha = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}f(x) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}exp(ax) = (a)^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ax)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}$$

   (d) Turunan fraksional dari fungsi konstanta $f(x) = C$, adalah

   $$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}[C] = C\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}x^{-\alpha}$$

2. Turunan fraksional merupakan generalisasi dari turunan orde bilangan bulat.

3. Turunan fraksional yang diperkenalkan oleh Riemann-Liouville dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan integral.

4. Sifat-sifat yang berlaku pada turunan fraksional, yaitu : Hukum Perkalian Indeks, Operator Identitas, dan Operator Linear.

5. Turunan fraksional dapat digunakan dalam menyelesaikan masalah *Tautochrone Abel* untuk menemukan persamaan kurva $s = h(y)$ yang memenuhi permasalahan tersebut.

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan untuk mengkaji tentang konsep integral fraksional yang merupakan bagian dari kalkulus fraksional.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bologna Mauro. 2003. *Short Introduction to Fractional Calculus.* Springer Verlag, New York.

[2] Dalir, Mehdi. dan B. Majid. 2010. Applications of Fractional Calculus. *Journal Applied Mathematical and Sciences.* 4 8: 1021-1022.

[3] Das, Shantanu. 2011. *Functional Fractional Calculus.* Springer Verlag, New York.

[4] Morgan, Frank. 2000. *Real Analysis and Application.* American Mathematical Society, Rhode Island.

[5] Purcell, Varberg. dan Rigdon. 2006. *Kalkulus.* Edisi Kedelapan. Erlangga, Jakarta.

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Rahmi Kurnia Sari, dilahirkan di Padang pada tanggal 20 Januari 1990 dari pasangan Masril dan Zenorita. Penulis adalah anak keempat dari empat bersaudara. Penulis menamatkan pendidikan Sekolah Dasar di SD Negeri 08 Padang pada tahun 2002, SMP Negeri 9 Padang pada tahun 2005, dan SMA Negeri 4 Padang pada tahun 2008. Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur SNMPTN (Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri).

Selama menjadi mahasiswa di jurusan Matematika FMIPA Unand, penulis aktif dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA), organisasi pers Mahasiswa Genta Andalas, Asisten Laboratorium Statistika dan Komputasi Jurusan Matematika FMIPA Unand serta pengajar privat mata pelajaran Matematika. Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) pada tahun 2011 di Jorong Koto Panjang, Nagari Sungai Tunu Utara, Kecamatan Ranah Pesisir, Kabupaten Pesisir Selatan dalam rangka menyelesaikan salah satu mata kuliah wajib fakultas.