# PELABELAN TOTAL SISI-AJAIB SUPER PADA GRAF CORONO-LIKE UNICYLIC

**SKRIPSI**

**PRIMA RESA PUTRI**
**07 934 031**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS ANDALAS**
**PADANG 2012**

## KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Alhamdulillah, puji syukur penulis sampaikan kehadirat Allah SWT karena berkat ridho dan izin-Nya jualah penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul ***"Pelabelan Total Sisi-Ajaib Super Pada Graf Corona-Like Unicyclic"***. Skripsi ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang.

Selanjutnya, penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini, terutama kepada :

1. Bapak Dr. Syafrizal Sy selaku Pembimbing I dan Bapak Narwen, M.Si selaku Pembimbing II yang telah membantu mengarahkan penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Serta ilmu, ide, saran dan nasihat yang telah diberikan selama proses bimbingan tugas akhir maupun selama penulis menjalani proses perkuliahan.
2. Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Efendi, M.Si dan Bapak Dr. Muhafzan selaku penguji yang telah membaca, memberi masukan dan saran kepada penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Admi Nazra selaku Pembimbing Akademik yang telah membantu penulis dalam urusan akademik serta nasihat dan ilmu yang telah diberikan selama penulis menjalani proses studi.
4. Bapak Dr. Syafrizal Sy selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand

5. Bapak/Ibu dosen dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Unand.
6. Terima kasih yang sebesar-besarnya kepada papaku Rivai Zain dan mamaku Yarnis, karena dengan kasih sayang, doa, dorongan dan semangat beliau, penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Untuk seluruh keluarga besarku, terima kasih doanya.
7. Sahabat-sahabatku mahasiswa matematika angkatan 2007 FMIPA Unand, Yuridya, Novalia, Widya, Fatrika, Anne, Anggun, Nurul, Rahmi, Ridha, Riri, Puput, Dian, Ferdi, Echa, Joko, Newton, Novi, Asita, Andra, Fitria, Isnaini, Mely, Mia, Revi, Paul, Winda, dan semua yang tidak dapat disebutkan satu persatu, tetap semangat.

Akhir kata, semoga skripsi ini bermanfaat untuk civitas akademik Universitas Andalas khususnya dan masyarakat umumnya. Amin.

Padang, 4 Januari 2012

**Prima Resa Putri**

## ABSTRAK

Misalkan suatu graf $G = G(V, E)$ adalah graf sederhana, terhubung dan tak berarah dengan $v$ titik dan $e$ sisi. Pelabelan total sisi ajaib *( edge-magic total labeling)* adalah pemetaan fungsi bijektif $f$ dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1,2,3, \dots, |V(G) + E(G)|\}$ sedemikian sehingga untuk sebarang sisi $uv$ di $G$ berlaku $f(u) + f(uv) + f(v) = k$, untuk suatu konstanta k. Pelabelan total sisi ajaib $f$ pada graf $G$ disebut pelabelan total sisi ajaib super *(super edge-magic total labeling)* jika $f(V(G)) = \{1,2,3, \dots, |V(G)|\}$. Dalam tugas akhir ini, akan ditunjukkan bahwa subkelas baru dari graf *unicyclic* yaitu *corona-like unicyclic* merupakan pelabelan total sisi-ajaib super dengan mengkonstruksi pelabelan total sisi-ajaib super dari *cycle* ganjil. Dengan menggunakan proses penempelan *cycle* ganjil pada *grid* dan pentransformasian sisi diperoleh suatu subkelas baru dari pelabelan total sisi-ajaib super.



**Kata kunci :** *pelabelan total sisi-ajaib, pelabelan total sisi-ajaib super, graf unicyclic, cycle ganjil, graf corona-like unicyclic.*

# DAFTAR ISI

# DAFTAR GAMBAR

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Teori graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1735 oleh seorang matematikawan terkenal Swiss yang bernama Leonhard Euler. Teori graf pertama kali muncul sebagai representasi permasalahan jembatan Konigsberg yang sangat terkenal. Terdapat tujuh jembatan yang berada di atas sungai Pregel di kota Konigsberg, salah satu kota yang terletak di Prusia bagian Timur Jerman. Permasalahan yang timbul adalah bagaimana cara seseorang berpindah dari satu tempat ke tempat lain dengan melewati setiap jembatan tepat satu kali. Jawaban yang dibuktikan oleh Euler dari masalah tersebut adalah tidak mungkin.

Suatu graf terdiri dari gabungan himpunan tak kosong dan berhingga yang disebut dengan titik dan himpunan pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda yang disebut sebagai sisi. Graf dinotasikan sebagai $G = (V, E)$, dengan $V$ menyatakan himpunan titik dan $E$ menyatakan himpunan sisi. Banyak titik yang ada pada graf $G$ adalah $|V(G)|$ dan banyak sisi pada graf $G$ adalah $|E(G)|$. Pada masalah jembatan Konigsberg, titik menyatakan daratan dan sisi menyatakan jembatan dengan $|V(G)| = 4$ dan $|E(G)| = 7$.

Pelabelan pada suatu graf adalah sebarang pemetaan atau fungsi yang memasangkan unsur-unsur graf (titik dan sisi) ke himpunan bilangan bulat positif. Jika domain dari fungsi adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik. Jika domainnya adalah sisi maka disebut pelabelan sisi, dan jika domainnya titik dan sisi maka disebut pelabelan total.

Pada tahun 1967, Kotzig dan Rosa mendefinisikan *pelabelan ajaib* pada graf $G(V,E)$ sebagai fungsi satu-satu $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, |V(G)|+|E(G)|\}$ yang memenuhi kondisi bahwa $f(uv) + f(u) + f(v) = k$ (konstanta), untuk setiap sisi $uv$ di $E(G)$. Konstanta $k$ disebut sebagai *angka ajaib* untuk pelabelan tersebut. Pelabelan ini kemudian diberi nama ulang menjadi *pelabelan total sisi-ajaib* oleh Wallis dkk (2000) untuk membedakan dengan konsep pelabelan ajaib lainnya. Khususnya, bila $f(V(G)) = \{1,2, \ldots, |V(G)|\}$ maka $f$ disebut sebagai *pelabelan total sisi-ajaib super*.

Pada tugas akhir ini, akan dilakukan kajian pelabelan total sisi-ajaib super *(super edge-magic total labeling)* pada salah satu subkelas graf unicylic yaitu *corona-like unicyclic.*

**1.2 Perumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang di atas, maka masalah yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah apakah graf *corona-like unicyclic* merupakan graf yang memuat pelabelan total sisi-ajaib super.

**1.3 Pembatasan Masalah**

Dalam tulisan ini permasalahan dibatasi hanya untuk menentukan pelabelan total sisi-ajaib super pada graf *corona-like unicylic*.

## 1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk memperlihatkan bahwa graf *corona-like unicyclic* merupakan pelabelan total sisi-ajaib super.

## 1.5 Sistematika penulisan

Skripsi ini dibagi menjadi empat bab. Bab I, pendahuluan yang berisi latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan dan sistematika penulisan. Pada Bab II dijelaskan mengenai definisi dan terminologi dalam teori graf, pemetaan, pelabelan pada graf, pelabelan total sisi ajaib super, graf unicyclic, grid dan transformasi sisi. Pada Bab III dibahas mengenai Pelabelan Total Sisi-Ajaib Super pada Graf *Corona-Like Unicyclic.* Kesimpulan dari hasil pembahasan diberikan pada Bab IV.

# BAB II

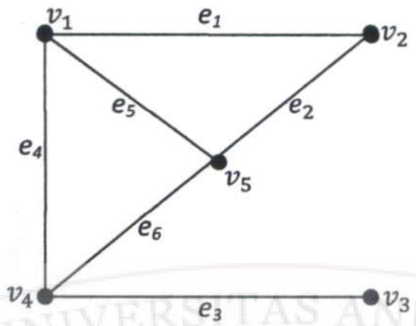
# LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan permasalahan yang telah dikemukakan pada Bab I. Definisi dan terminologi dalam teori dasar graf disajikan pada Subbab 2.1. Pada Subbab 2.2 diuraikan tentang pemetaan. Pada Subbab 2.3 dijelaskan tentang pelabelan pada graf. Pada Subbab 2.4 dijelaskan tentang pelabelan total sisi ajaib super. Pada Subbab 2.5 dijelaskan tentang graf unicyclic. Pada Subbab 2.6 dijelaskan tentang grid. Terakhir, pada Subbab 2.6 menjelaskan tentang transformasi sisi.

## 2.1 Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf

Definisi dan terminologi yang digunakan mengacu pada [1]. **Graf** G adalah pasangan himpunan $(V, E)$ dengan $V$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai **titik** dan $E$ adalah himpunan pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $G$ yang disebut sebagai **sisi**. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Banyak titik yang ada pada graf G adalah $|V(G)|$, dan disebut **orde** (*order*) dari G, sedangkan banyak sisi pada graf G adalah $|E(G)|$, dan disebut **ukuran** (*size*) dari G.

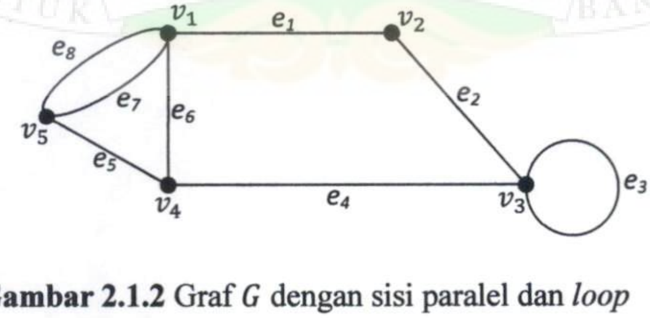
Sebagai contoh perhatikan Gambar 2.1.1 berikut.




**Gambar 2.1.1** Graf $G$

Graf G pada gambar 2.1.1 diatas adalah graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, v_6\}$ . Jadi, $|V(G)| = 5$ dan $|E(G)| = 6$.

Pada suatu graf $G$, jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik, maka sisi-sisi tersebut dinamakan **sisi paralel**. Jika suatu titik $v$ dihubungkan dengan dirinya sendiri atau $e = uv$ maka sisi $e$ disebut dengan ***loop***, atau dengan kata lain kedua titik ujung dari sisi tersebut sama. Dua titik $u, v$ dikatakan **bertetangga (*adjacent*)** apabila terdapat sisi $e$ yang menghubungkan kedua titik tersebut dan sisi $e$ dikatakan **terkait (*incident*)** dengan titik $u$ dan $v$. Sebagai ilustrasi perhatikan Gambar 2.1.2 berikut :

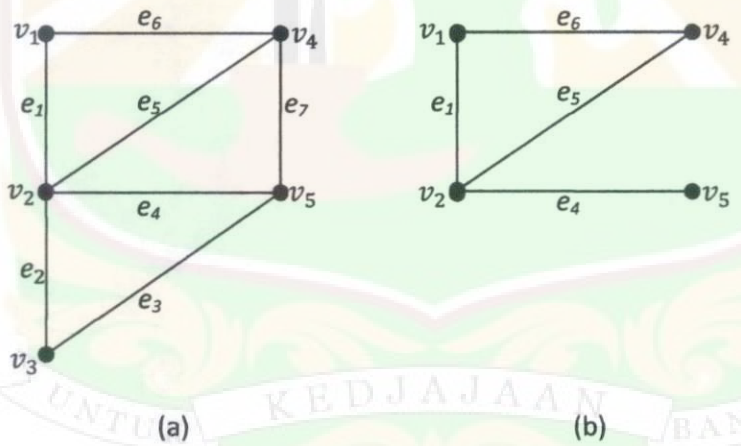



**Gambar 2.1.2** Graf $G$ dengan sisi paralel dan *loop*

Pada Gambar 2.1.2 di atas, $e_3$ merupakan *loop* pada $v_3$. Sisi $e_7$ dan sisi $e_8$ merupakan sisi paralel. Titik $v_1$ bertetangga dengan titik $v_2$, $v_4$ dan $v_5$, titik $v_2$ bertetangga dengan titik $v_1$ dan $v_3$, titik $v_3$ bertetangga dengan titik $v_2$ dan $v_4$, titik $v_4$ bertetangga dengan titik $v_1, v_3$ dan $v_5$. Sisi $e_1$ terkait dengan titik $v_1$ dan $v_2$, sisi $e_2$ terkait dengan titik $v_2$ dan $v_3$, sisi $e_4$ terkait dengan titik $v_3$ dan $v_4$, sisi $e_5$ terkait dengan titik $v_4$ dan $v_5$, sisi $e_6$ terkait dengan titik $v_1$dan $v_4$ , sisi $e_7$ terkait dengan titik $v_1$dan $v_5$.

**Subgraf** dari graf $G = (V, E)$ adalah sebuah graf $H = (V, E)$ sedemikian sehingga $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$ dengan kata lain, graf $H$ dikatakan subgraf dari graf $G$ jika semua simpul dan sisi di graf $H$ ada di graf $G$ dan graf $H$ mempunyai sisi yang titik ujungnya sama dengan di graf $G$.

Sebagai ilustrasi perhatikan Gambar 2.1.3 berikut:



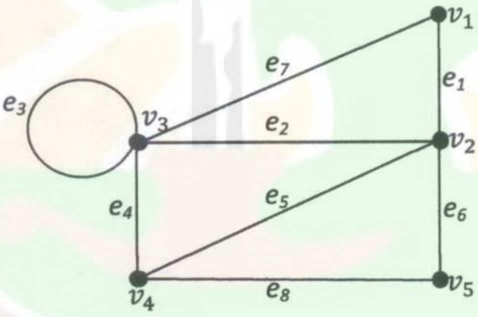

**Gambar 2.1.3** (a) Graf $G$ (b) Salah satu subgraf dari graf $G$

Pada Gambar 2.1.3 diatas, (a) merupakan graf $G$ dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Sedangkan (b) adalah salah satu contoh subgraf dari graf (a) yang terdiri dari himpunan titik $V(H) = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(H) = \{v_1, v_4, v_5, v_6\}$.

Suatu **jalan** ***(walk)*** pada graf $G$ adalah suatu barisan berselang-seling terbatas antara titik-titik dan sisi-sisi, yang mana setiap sisi terkait dengan titik *preceding* dan titik *following* nya. **Titik *preceding*** dan **titik *following*** adalah titik ujung dari sisi-sisi pada *walk* kecuali titik awal dan titik akhir. **Titik terminal** adalah suatu titik dimana suatu *walk* dimulai dan berakhir atau dengan kata lain titik terminal adalah titik awal dan titik akhir dari *walk*. *Walk* yang dimulai dari titik $u$ dan berakhir pada titik $v$ ditulis $uv - walk\ (jalan - uv)$.

Suatu jalan dikatakan **jalan tertutup** jika berawal dan berakhir pada titik yang sama, dan dikatakan **jalan terbuka** jika titik awal dan titik akhirnya berbeda.

Sebagai ilustrasi perhatikan Gambar 2.1.4 berikut:



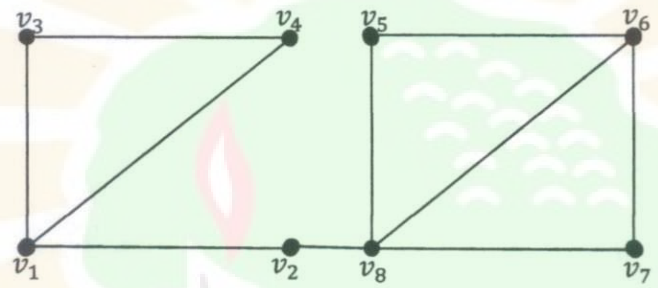

**Gambar 2.1.4** Graf $H$

$w = v_1\, e_1\, v_2\, e_2\, v_3\, e_3\, v_3\, e_4\, v_4\, e_5\, v_2\, e_6\, v_5$ merupakan salah satu contoh jalan dari gambar 2.1.4 di atas. Titik $v_1$ dan titik $v_5$ merupakan terminal dan titik $v_2, v_3$ dan $v_4$ merupakan titik *preceding* dan titik *following* dari sisi – sisi $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$. $w_1 = v_1e_1v_2e_6v_5e_8v_4e_4v_3e_3v_3$ merupakan salah satu contoh jalan terbuka dan $w_2 = v_2e_6v_5e_8v_4e_4v_3e_2v_2$ merupakan contoh jalan tertutup.

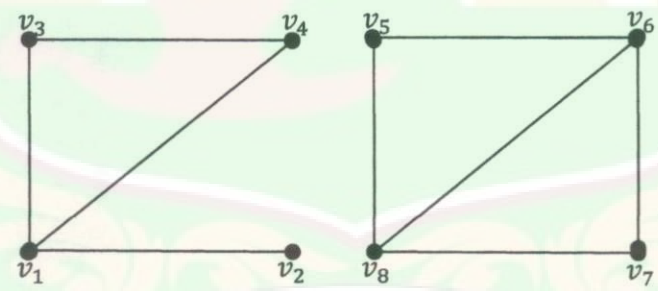
Jalan yang mana tidak ada sisi yang dilewati lebih dari satu kali disebut **Jejak *(trail)***.

Titik $u$ dan $v$ dikatakan **terhubung (*connected*)** jika terdapat suatu lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Graf G dikatakan **graf terhubung** jika terdapat paling sedikit satu lintasan yang menghubungkan setiap pasangan titik di $G$ dan sebaliknya graf $G$ dikatakan tidak terhubung.

Sebagai ilustrasi perhatikan Gambar 2.1.5 berikut:




$G_1$



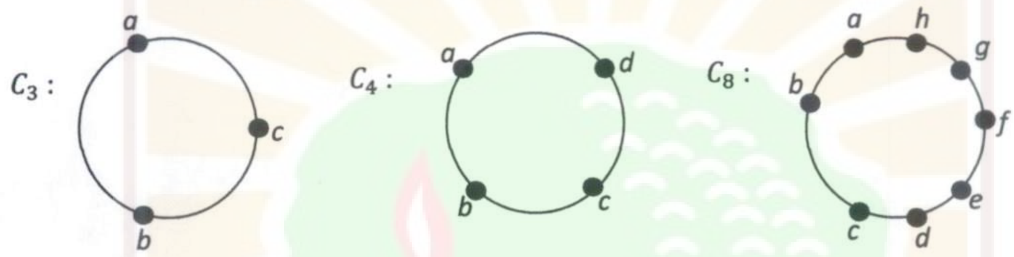

$G_2$

**Gambar 2.1.5** Graf $G_1$ terhubung dan $G_2$ tak-terhubung

Graf $G_1$ pada Gambar 2.1.5 merupakan salah satu contoh graf terhubung, karena untuk setiap dua pasang titik pada graf terdapat minimal satu lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Sedangkan, graf $G_2$ bukan graf terhubung, karena tidak terdapat lintasan yang menghubungkan titik-titik $v_1$, $v_2, v_3$, dan $v_4$ dengan titik-titik $v_5, v_6, v_7$ dan $v_8$ .

Graf yang berbentuk siklus dengan titik sebanyak $n$ untuk $n \geq 3$, disebut **graf siklus (*cycle*). Panjang siklus** adalah jumlah sisi di dalam siklus tersebut dan siklus dengan $n$ titik ditulis $C_n$.

Sebagai ilustrasi perhatikan Gambar 2.1.6 berikut:




**Gambar 2.1.6** Graf siklus

Siklus yang banyak titiknya ganjil disebut siklus ganjil dan siklus yang banyak titiknya genap disebut siklus genap.

**2.2 Pemetaan [3]**

Misalkan A dan B adalah dua himpunan yang tidak kosong. Suatu cara atau aturan yang memasangkan setiap elemen dan himpunan A dengan tepat satu elemen di himpunan B disebut **pemetaan** dari himpunan A ke himpunan B. Pemetaan dari himpunan A ke himpunan B diberi notasi $f$ yaitu $f: A \rightarrow B$. Selanjutnya himpunan A disebut daerah asal (domain) dan himpunan B disebut daerah kawan (kodomain).

## 2.3 Pelabelan pada graf [7]

**Definisi 2.3.1.** *Pelabelan pada suatu graf adalah suatu pemetaan atau fungsi yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) ke himpunan bilangan bulat positif.*

Jika domain dari fungsi adalah titik, maka pelabelan disebut **pelabelan titik** *(vertex labeling)*. Jika domainnya adalah sisi, maka disebut **pelabelan sisi** *(edge labelling)*, dan jika domainya titik dan sisi maka disebut **pelabelan total** *(total labelling)*.

## 2.4 Pelabelan total sisi-ajaib super [2]

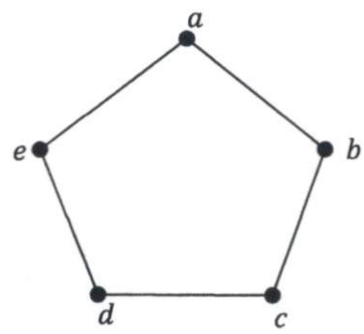
Misalkan $G$ adalah suatu graf dengan himpunan titik $V$ dan sisi $E$. Banyaknya titik di $G$ adalah $|V(G)|$, dan banyak sisi di $G$ adalah $|E(G)|$ .

**Definisi 2.4.1.** *Pelabelan total sisi-ajaib (edge-magic total labeling) pada graf $G$ adalah fungsi bijektif $f$ dari $V(G) \cup E(G)$ ke* $\{1,2,3,\dots,|V(G)| + |E(G)|\}$ *sedemikian sehingga untuk sebarang sisi $uv$ di $G$ berlaku*

$$f(u) + f(uv) + f(v) = k$$

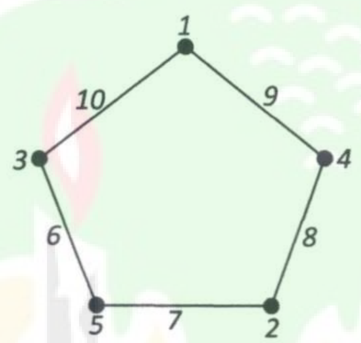
*untuk suatu konstanta $k$.*

Selanjutnya $k$ disebut konstanta ajaib pada graf $G$ dan graf yang mempunyai sifat di atas disebut graf total sisi-ajaib. Sebagai contoh, perhatikan graf $C_5$ pada gambar 2.4.1 berikut dengan $V(G) = \{a,b,c,d,e\}$ dan $E(G) = \{ab,bc,cd,de,ea\}$. Jadi orde $G$ adalah $|V(G)| = 5$ dan ukuran $G$ adalah $|E(G)| = 5$.




**Gambar 2.4.1** Graf $C_5$

Setelah dilakukan pelabelan titik dan sisi pada graf $C_5$ diperoleh graf berikut :




**Gambar 2.4.2** Pelabelan total sisi ajaib pada Graf $C_5$

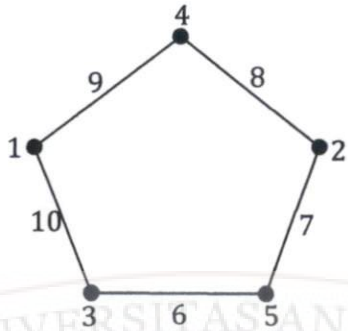
Pada gambar tersebut terlihat bahwa $f(v_i) + f(v_i v_j) + f(v_j) = 14$ untuk $v_i v_j \in E(C_5)$ dan $i, j = 1, 2, \dots, 5$

Jadi, graf $G$ adalah graf total sisi-ajaib dengan konstanta ajaib $k = 14$.

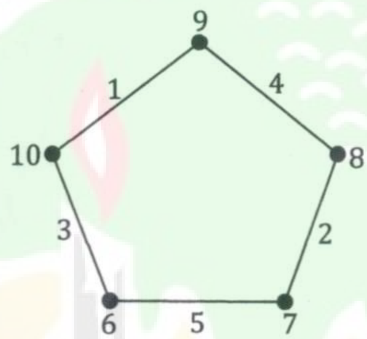
**Definisi 2.4.2** *Pelabelan total sisi-ajaib $f$ pada graf $G$ disebut pelabelan total sisi-ajaib super jika* $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$.

Dengan demikian, pelabelan total sisi-ajaib super adalah suatu bentuk khusus dari pelabelan total sisi-ajaib. Setiap pelabelan total sisi-ajaib super pasti merupakan pelabelan total sisi-ajaib, tetapi tidak sebaliknya. Graf yang dapat dikenai pelabelan total sisi-ajaib super disebut graf total sisi-ajaib super.

Perhatikan graf $G$ berikut :




**Gambar 2.4.3** Pelabelan total sisi-ajaib super pada graf $C_5$




**Gambar 2.4.4** Pelabelan total sisi-ajaib pada graf $C_5$

Pelabelan pada Gambar 2.4.3 dan Gambar 2.4.4 diatas merupakan pelabelan total sisi-ajaib. Meskipun demikian, pelabelan pada Gambar 2.4.3 disebut pelabelan total sisi-ajaib super, sedangkan pada Gambar 2.4.4 bukan pelabelan total sisi-ajaib super. Hal ini karena pada Gambar 2.4.3 himpunan titik dipetakan ke himpunan $\{1, 2, 3\}$, sedangkan pada Gambar 2.4.4 tidak memetakan ke himpunan $\{1, 2, 3\}$.

Pada tahun 1970 Kotzig dan Rosa telah membuktikan bahwa semua *siklus* ganjil adalah ajaib.

**Teorema 2.4.3 [6].** Setiap *siklus* $C_n$ adalah sisi-ajaib super jika dan hanya jika $n$ ganjil.

**Lemma 2.4.4 [6].** *Suatu graf $G$ dengan $n$ titik dan $m$ sisi adalah graf sisi-ajaib super jika dan hanya jika terdapat suatu fungsi bijektif*

$$f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$$

*sedemikan sehingga himpunan $S = \{f(u) + f(v) | uv \in E(G)\}$ terdiri dari $m$ bilangan bulat terurut. Dalam kasus ini, $f$ diperluas menjadi pelabelan total sisi-ajaib super dari $G$ dengan konstanta ajaib $k = |V(G)| + |E(G) + s$ dimana $s = min(S)$ dan*

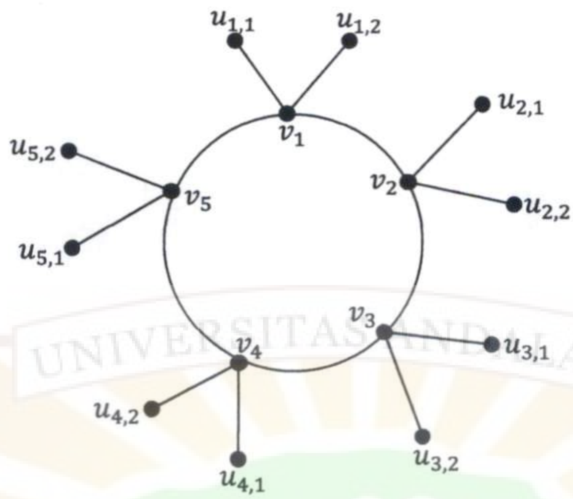
$$S = \{f(u) + f(v) | uv \in E(G)\}$$
$$= \{ k - (|V(G)| + 1), k - (|V(G)| + 2), \dots, k - (|V(G)| + |E(G)|) \}.$$

## 2.5 Graf Unicyclic ( *Unicyclic Graph*) [4]

**Definisi 2.5.1** *Suatu graf corona $F \cong C_n \bullet \overline{K_r}$ dikatakan* ***graf unicyclic*** *jika terdapat satu subgraf siklus pada graf tersebut.*

Graf siklus termasuk graf unicyclic. Graf corona ditulis sebagai $F \cong C_n \bullet \overline{K_r}$ , didefinisikan sebagai graf yang dihasilkan dengan mengambil satu copy $C_n$ , dimana $i = 1, 2, \dots, n$ dan satu copy $\overline{K_r}$ dimana $\overline{K_r}$ merupakan komplemen dari graf lengkap $K_r$ dengan $j = 1, 2, \dots, r$ yang disebut dengan titik daun $j$ dan kemudian dilakukan penyambungan titik $i$ dari $C_n$ untuk setiap titik pada $j$ dari $\overline{K_r}$.

Sebagai contoh perhatikan Gambar 2.5.1 berikut:

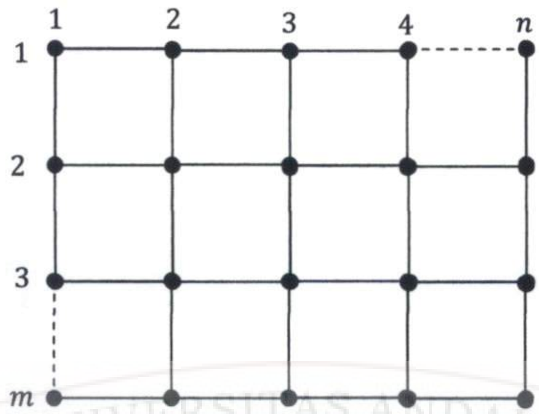



**Gambar 2.5.1** Graf Corona $F \cong C_5 \bullet \overline{K_2}$

Gambar di atas merupakan graf corona $F \cong C_5 \bullet \overline{K_2}$ dimana graf tersebut dihasilkan dengan mengambil satu copy $C_5$ , dimana $i = 1, 2, \dots, 5$ dan satu copy $\overline{K_2}$ dimana $\overline{K_2}$ merupakan komplemen dari graf lengkap $K_2$ dengan $j = 1, 2$ yang disebut dengan titik daun $j$ dan kemudian dilakukan penyambungan titik $i$ dari $C_5$ untuk setiap titik pada $j$ dari $\overline{K_2}$.

## 2.6 *Grid* [6]

Sebuah graf *grid* $G_{mn}$ memiliki $m \times n$ titik dan $2mn - m - n$ sisi. Sebagai ilustrasi perhatikan gambar 2.6.1 berikut ini:

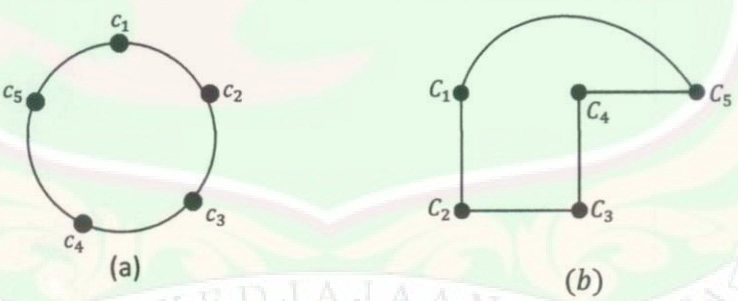



**Gambar 2.6.1** Graf *Grid*

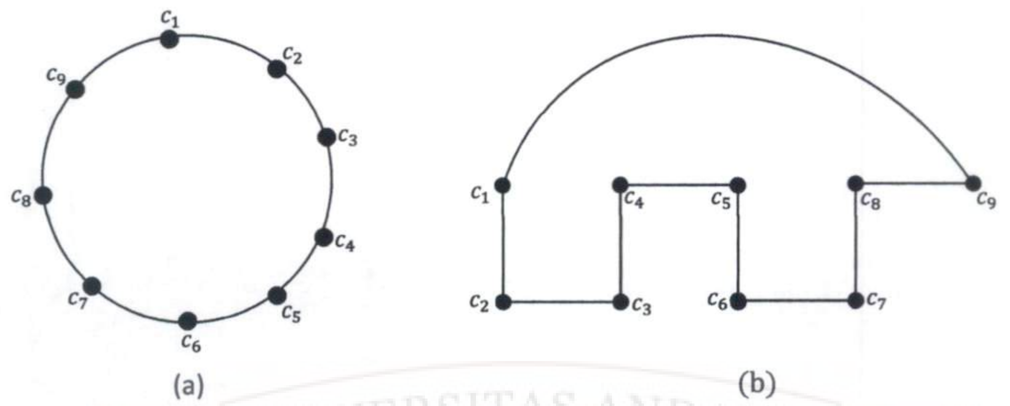
Sebuah grid berdimensi dua adalah graf $m \times n$ yang merupakan graf catersian product $P_m \times P_n$ dari graf lintasan di $m$ dan $n$ titik.

Misalkan suatu graf *siklus* $C_n$, $n \geq 4$ dengan $V(C_n) = \{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(C_n) = \{x_i x_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\}$. *Siklus* $C_n$ disebut menempel ke *grid* jika $C_n$ dapat digambarkan sebagai suatu subgraf dari *grid* dua dimensi.

Sebagai ilustrasi perhatikan gambar 2.6.2 dan 2.6.3 berikut :




**Gambar 2.6.2** (a) Graf siklus $C_5$ (b) Hasil penempelan graf siklus $C_5$ pada *grid*



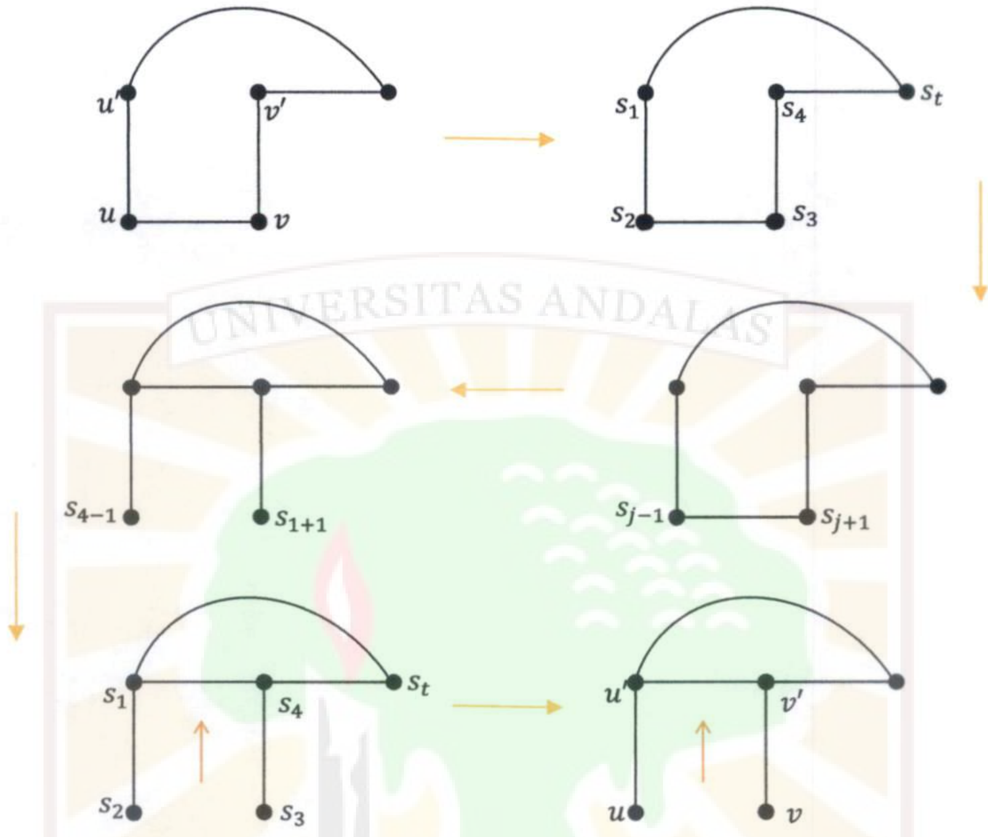

**Gambar 2.6.3** (a) graf siklus $C_9$ (b) Hasil penempelan siklus $C_9$ pada *grid*

**2.7 Transformasi sisi [6]**

Transformasi sisi merupakan pemindahan sisi yang terdiri dari dua titik ke dua titik lainnya sehingga diperoleh bentuk sisi baru.

Misalkan bahwa $S_j = P_2$ untuk suatu $j$ dimana $1 < j < t$. $V(S_j) = vu$ dengan $u \in V(S_{j-1}) \cap V(S_j)$ dan $v \in V(S_j) \cap V(S_{j+1})$. Jarak dari $u'$ dan $v'$ adalah satu untuk titik $u'$ dari $S_{j-1}$ dan titik $v'$ dari $S_{j+1}$. Jarak antara $u$ dan $u'$ di $S_{j-1}$ sama dengan jarak antara $v$ dan $v'$ di $S_{j+1}$. Suatu transformasi sisi menggantikan sisi $uv$ dengan suatu sisi baru $v'u'$.

Sebagai ilustrasi perhatikan gambar 2.7.1 berikut




**Gambar 2.7.1** Proses transformasi sisi dari penempelan siklus $C_n$ pada *grid*.

Gambar 2.7.1 di atas memperlihatkan bahwa suatu transformasi sisi menggantikan sisi $vu$ dengan sisi baru $v'u'$.

# BAB III

# PELABELAN TOTAL SISI-AJAIB SUPER PADA GRAF *CORONA-LIKE UNICYCLIC*

Pada bab ini akan dikaji hasil utama dari inti bahasan skripsi, yaitu pelabelan total sisi-ajaib super pada graf *corona-like unicyclic*. Untuk membuktikan bahwa graf *corona-like unicyclic* merupakan graf dengan pelabelan total sisi-ajaib super maka dibuktikan dalam bentuk teorema sebagai berikut :

**Teorema 3.1** Semua graf *corona-like unicyclic* adalah graf dengan pelabelan total sisi-ajaib super.

**Bukti**. Ambil sebarang graf corona $F \cong C_n \bullet \overline{K_r}$ yaitu graf yang dihasilkan dengan mengambil satu copy $C_n$ , dimana $i = 1, 2, \dots, n$ dan satu copy $\overline{K_r}$ dimana $\overline{K_r}$ merupakan komplemen dari graf lengkap $K_r$ dengan $j = 1, 2, \dots, r$ yang disebut dengan titik daun $j$ dan kemudian dilakukan penyambungan titik $i$ dari $C_n$ untuk setiap titik pada $j$ dari $\overline{K_r}$.

Akibatnya diperoleh himpunan titik dari graf corona $F \cong C_n \bullet \overline{K_r}$ adalah

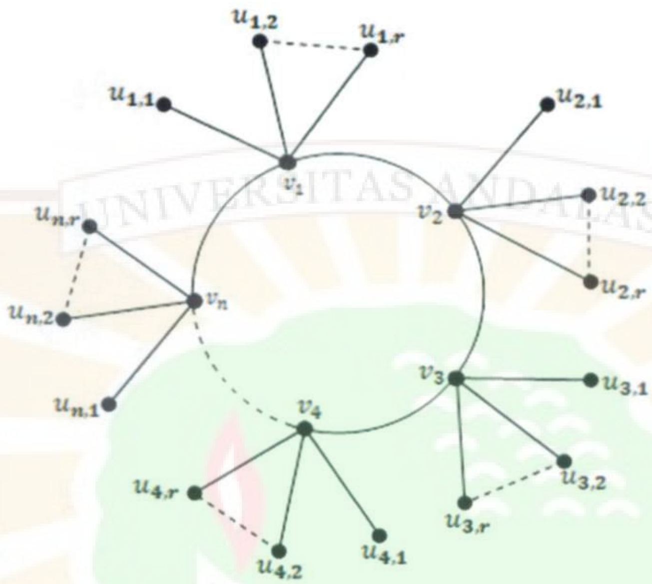
$$V(C_n \bullet \overline{K_r}) = \{v_i | i = 1,2, \dots, n\} \bigcup_{i=1}^{n} \{u_{i,j} | j = 1,2, \dots, r\}$$

dan himpunan sisi dari graf corona $F \approx C_n \bullet \overline{K_r}$ adalah

$$E(C_n \bullet \overline{K_r}) = \{\{v_i v_{i+1} \mid i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{v_n v_1\}\} \bigcup_{i=1}^{n} \{v_i \, u_{i,j} | j = 1,2, \dots, r\}$$

dimana $v_i$ menyatakan titik pada siklus dan $u_{i,j}$ menyatakan titik daun ke $j$ yang terhubung dengan titik pada siklus ke $i$.

Terlihat pada gambar 3.1.1 berikut ini:




**Gambar 3.1.1** Graf corona $F \cong C_n \bullet \overline{K_r}$

Pertamata-tama akan dilakukan pelabelan terhadap graf siklus yang terdapat pada graf corona $F \cong C_n \bullet \overline{K_r}$ yaitu pelabelan titik dan pelabelan sisi.

Pelabelan titik $v_i$, dengan $i = 1, 2, .., n$ didefinisikan sebagai berikut :

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 + \dfrac{(i-1)(r+1)}{2}, & i \text{ ganjil} \\ 1 + \dfrac{(n+i-1)(r+1)}{2}, & i \text{ genap} \end{cases}$$

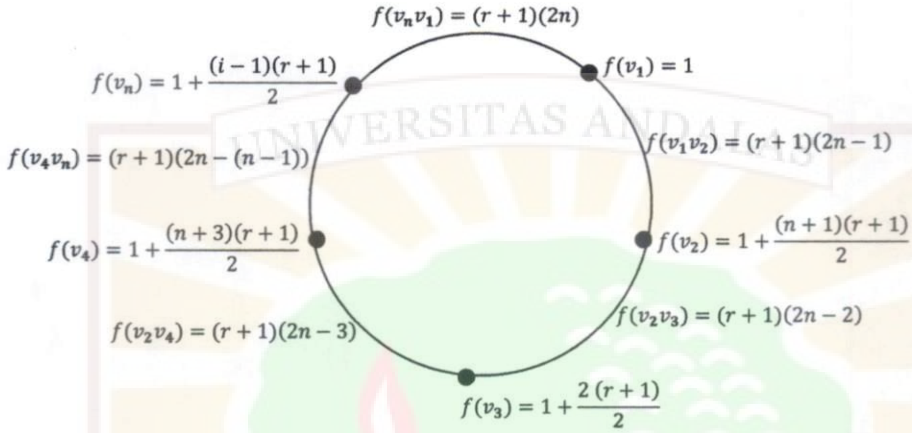
Sedangkan pelabelan pada sisi $v_i v_{i+1}$, dengan $i = 1, 2, \ldots, n-1$ didefinisikan sebagai berikut :

$$f(v_i v_{i+1}) = (r+1)(2n-i)$$

dan pelabelan sisi $v_n v_1$ didefinisikan sebagai berikut :

$$f(v_n v_1) = (r + 1)(2n)$$

sehingga diperoleh bentuk siklus yang telah dilabeli sebagai berikut :




**Gambar 3.1.2** Graf Corona $F \cong C_n \bullet \overline{K_r}$ tanpa daun yang telah dilabeli titik-titik dan sisi-sisinya.

Pada pelabelan di atas terlihat bahwa pelabelan tersebut merupakan pelabelan total sisi-ajaib super dengan suatu konstanta ajaib $k$. Nilai $k$ tersebut diperoleh dari pelabelan setiap titik $v_i$, dengan $i = 1, 2, \ldots., n$ dan pelabelan setiap sisi $v_i v_{i+1}$ dengan $i = 1, 2, \ldots., n-1$ serta sisi $v_n v_i$ dengan menggunakan rumus

$$k = f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1})$$

Selanjutnya diperoleh nilai $k$ sebagai berikut :

$$k = \left(1 + \frac{(i-1)(r+1)}{2}\right) + ((r+1)(2n-i)) + \left(1 + \frac{(n+i+1-1)(r+1)}{2}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{ir + i - r - 1}{2}\right) + (2nr - ir + 2n - i) + \left(1 + \frac{(n+i)(r+1)}{2}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{ir + i - r - 1}{2}\right) + (2nr - ir + 2n - i) + \left(1 + \frac{(nr + n + ir + i)}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2 + ir + i - r - 1}{2}\right) + (2nr - ir + 2n - i) + \left(\frac{2 + nr + n + ir + i}{2}\right)$$

$$= \frac{2 + ir + i - r - 1 + 4nr - 2ir + 4n - 2i + 2 + nr + n + ir + i}{2}$$

$$= \frac{3 - r + 5nr + 5n}{2}$$

Sedangkan untuk titik $v_1$ dan $v_n$ serta sisi $v_i v_n$ diperoleh nilai $k$ sebagai berikut :

$$k = f(v_1) + f(v_1 v_n) + f(v_n)$$

$$= (1) + \big((r + 1)(2n)\big) + \left(1 + \frac{(i - 1)(r + 1)}{2}\right)$$

$$= (1) + \big((r + 1)(2n)\big) + \left(1 + \frac{(n - 1)(r + 1)}{2}\right)$$

$$= (1) + (2nr + 2n) + \left(1 + \frac{(nr + n - r - 1)}{2}\right)$$

$$= (1) + (2nr + 2n) + \left(\frac{2(nr + n - r - 1)}{2}\right)$$

$$= \frac{2 + 4nr + 4n + 2 + nr + n - r - 1}{2}$$

$$= \frac{3 - r + 5nr + 5n}{2}$$

Jadi diperoleh nilai konstanta ajaib $k$ pada siklus adalah :

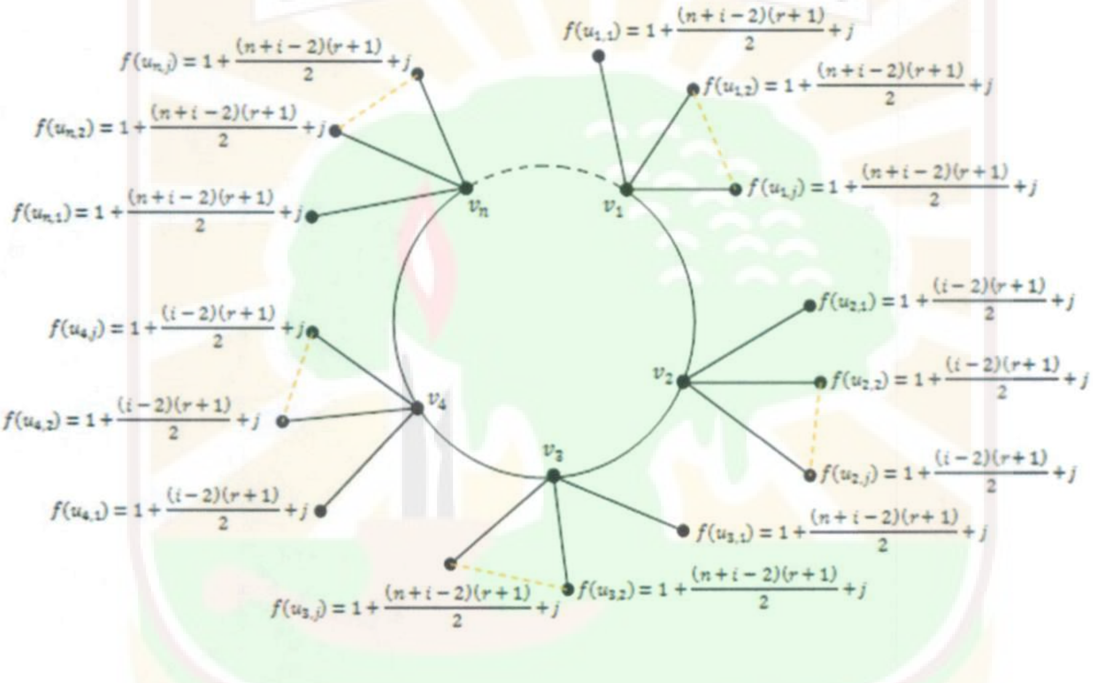
$$k = \frac{3 - r + 5nr + 5n}{2}$$

Langkah berikutnya yaitu dengan mendefinisikan pelabelan pada daun sebagai berikut:

Pelabelan titik pada daun yaitu:

$$f(u_{i,j}) = \begin{cases} 1 + \dfrac{(n+i-2)(r+1)}{2} + j, & i\ ganjil \\ 1 + \dfrac{(i-2)(r+1)}{2} + j, & i\ genap \end{cases}$$

Sehingga diperoleh bentuk daun pada siklus yang titiknya telah dilabeli sebagai berikut :

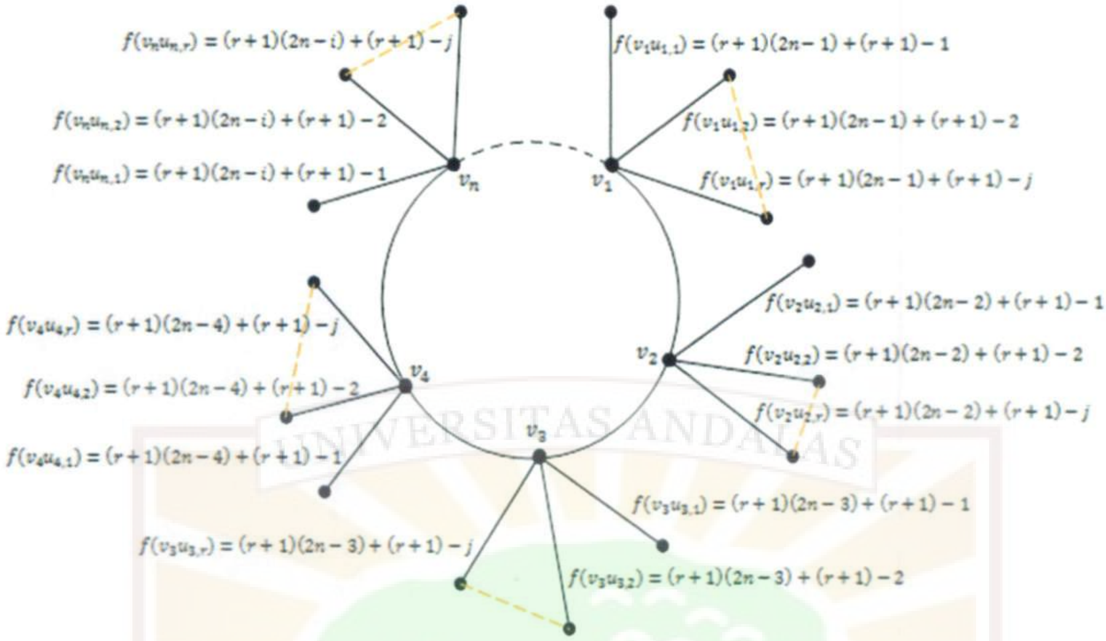


**Gambar 3.1.3** Graf corona $F \cong C_n \bullet \overline{K_r}$ yang setiap titik pada daunnya telah dilabeli

Sedangkan pelabelan sisi pada daun yaitu:

$$f(v_i u_{i,j}) = (r+1)(2n-i) + (r+1) - j$$

Sehingga diperoleh bentuk daun pada lingkaran yang sisinya telah dilabeli adalah sebagai berikut :




**Gambar 3.1.4** Graf Corona $F \cong C_n \bullet \overline{K_r}$ yang setiap sisi pada daunnya telah dilabeli

Pada pelabelan daun di atas terdapat suatu konstanta ajaib $k$. Nilai $k$ tersebut diperoleh dari pelabelan setiap titik pada daun $u_{i,j}$ dan pelabelan sisi $v_i u_{i,j}$ serta pelabelan titik pada siklus $v_i$ dengan $i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = 1, 2, \dots, r$ dengan menggunakan rumus :

$$k = f(v_i) + f(v_i u_{i,j}) + f(u_{i,j})$$

Diperoleh nilai $k$ sebagai berikut :

$$k = \left(1 + \frac{(i-1)(r+1)}{2}\right) + ((r+1)(2n-i) + (r+1) - j) + \left(1 + \frac{(n+i-2)(r+1)}{2} + j\right)$$

$$= \left(1 + \frac{ir + i - r - 1}{2}\right) + (2nr - ir + 2n - i) + (r+1) - j) + \left(1 + \frac{nr + n + ir + i - 2r - 2}{2} + j\right)$$

$$= \left(\frac{2 + ir + i - r - 1}{2}\right) + (2nr - ir + 2n - i + r + 1 - j) + \left(\frac{2 + nr + n + ir + i - 2r - 2 + 2j}{2}\right)$$

$$= \frac{2 + ir + i - r - 1 + 4nr - 2ir + 4n - 2i + 2r + 2 - 2j + 2 + nr + n + ir + i - 2r - 2 + 2j}{2}$$

$$= \frac{3 - r + 5nr + 5n}{2}$$

Sedangkan untuk titik pada daun $v_{i+1}$ dan pelabelan sisi $v_i u_{i,j}$ serta pelabelan titik pada lingkaran $u_{i+1,j}$ dengan $i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = 1, 2, \dots., r$ adalah sebagai berikut :

$$k = f(v_{i+1}) + f(v_i u_{i,j}) + f(u_{i+1,j})$$

$$= \left(1 + \frac{(n + i - 1)(r + 1)}{2}\right) + ((r + 1)(2n - i) + (r + 1) - j) + \left(1 + \frac{(i - 2)(r + 1)}{2} + j\right)$$

$$= \left(1 + \frac{nr + n + ir + i - r - 1}{2}\right) + ((2nr - ir + 2n - i) + (r + 1) - j) + \left(1 + \frac{ir + i - 2r - 2}{2} + j\right)$$

$$= \left(\frac{2 + nr + n + ir + i - r - 1}{2}\right) + (2nr - ir + 2n - i + r + 1 - j) + \left(\frac{2 + ir + i - 2r - 2 + 2j}{2}\right)$$

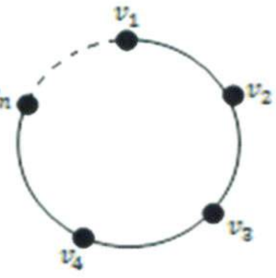
$$= 2 + nr + n + ir + i - r - 1 + 4nr - 2ir + 4n - 2i + 2r + 2 - 2j + 2 + ir + i - 2r - 2 + 2j$$

$$= \frac{3 - r + 5nr + 5n}{2}$$

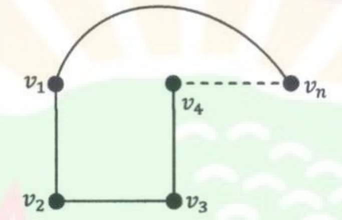
Maka diperoleh nilai konstanta ajaib $k$ pada daun adalah :

$$k = \frac{3 - r + 5nr + 5n}{2}$$

Langkah selanjutnya adalah dengan memandang siklus pada graf corona $F \cong C_n \bullet \overline{K_r}$ kemudian lakukan penempelan *grid* pada siklus tersebut. Sehingga diperoleh gambar 3.1.5 dan gambar 3.1.6 sebagai berikut :

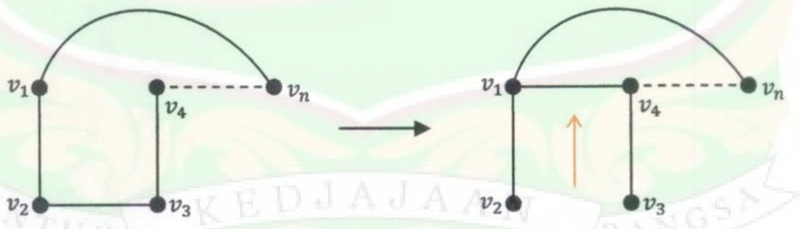



**Gambar 3.1.5** Graf corona $F \cong C_n \bullet \overline{K_r}$ tanpa daun




**Gambar 3.1.6** Hasil penempelan grid pada graf corona $F \cong C_n \bullet \overline{K_r}$ tanpa daun

Setelah dilakukan penempelan *grid* pada graf corona $F \cong C_n \bullet \overline{K_r}$ tanpa daun, maka selanjutnya akan dilakukan transformasi sisi pada *grid* tersebut. Sehingga diperoleh gambar sebagai berikut :



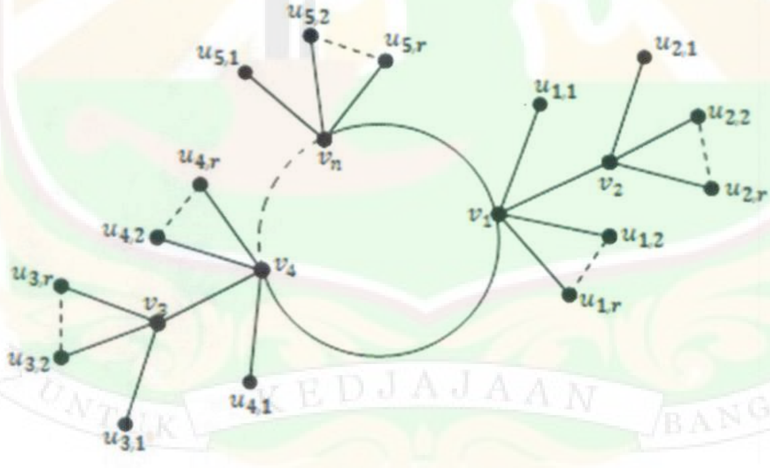

**Gambar 3.1.7** Transformasi sisi pada *grid*

Pada proses transformasi tersebut terlihat bahwa suatu transformasi sisi menggantikan sisi $v_2v_3$ dengan sisi baru $v_1v_4$.

Langkah berikutnya adalah dengan mengembalikan hasil transformasi sisi ke dalam bentuk siklus, sehingga diperoleh gambar 3.1.8 berikut :


**Gambar 3.1.8** Hasil pengembalian transformasi sisi ke dalam bentuk siklus

Setelah diperoleh hasil pengembalian transformasi sisi ke dalam bentuk siklus maka akan dilakukan pemberian daun pada masing-masing titik. Akibatnya diperoleh suatu $G \cong$ *corona-like unicyclic* $C_n \bullet \overline{K_r}$ yang terlihat pada gambar 3.1.9 berikut ini :




**Gambar 3.1.9** $G \cong$ *corona-like unicyclic* $C_n \bullet \overline{K_r}$

Kemudian lakukan pelabelan pada graf $G \cong$ graf *corona-like unicyclic* $C_n \bullet \overline{K_r}$ dengan menggunakan hasil pelabelan total sisi-ajaib super pada graf corona $F \approx C_n \bullet \overline{K_r}$ yang merupakan gabungan dari Gambar 3.1.2 , Gambar 3.1.3

dan Gambar 3.1.4, sehingga diperoleh pelabelan total sisi ajaib super pada graf *corona like unicyclic*.

Misalkan graf $U_{j+1}, j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ adalah hasil dari proses pentransformasian sisi dengan menggunakan sisi $uv$ pada $U_j$ menjadi sisi $u'v'$. Himpunan titik-titik pada $S_j$ dapat dibagi menjadi dua subkelas yg saling lepas :

$$V_1^j = \{v_i \in V(U_j) | i \text{ } ganjil\}$$

$$V_2^j = \{v_i \in V(U_j) | i \text{ } genap\}$$

Definisikan $d(u, u')$ sebagai jarak (jumlah sisi pada lintasan minimum) dari $u$ ke $u'$ di graf corona $C_n$

Terdapat dua kasus sebagai berikut :

**Kasus 1**

Titik-titik $u$ dan $u'$ berada dalam subkelas yang berbeda

$$f(u') = f(v) - \left(\left(\frac{d(u, u') + 1}{2}\right)(r + 1)\right)$$

$$f(v') = f(u) + \left(\left(\frac{d(u, u') + 1}{2}\right)(r + 1)\right)$$

**Kasus 2**

Titik-titik $u$ dan $u'$ berada dalam subkelas yang sama

1. $u \in V_1$

$$f(u') = f(v) - \left(\left(\frac{d(u, u') + n + 1}{2}\right)(r + 1)\right)$$

$$f(v') = f(u) - \left(\left(\frac{d(u,u') + n + 1}{2}\right)(r+1)\right)$$

2. $u \in V_2$

$$f(u') = f(v) + \left(\left(\frac{n - d(u,u') - 1}{2}\right)(r+1)\right)$$

$$f(u') = f(v) - \left(\left(\frac{n - d(u,u') - 1}{2}\right)(r+1)\right)$$

Untuk dua kasus ini diperoleh $f(u) + f(v) = f(u') + f(v')$. Dengan menggunakan Lema 2.4.4 dapat disimpulkan bahwa *corona-like unicyclic* merupakan pelabelan total sisi ajaib super. ■

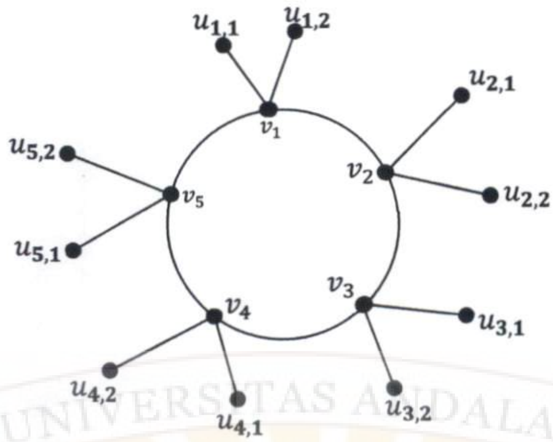
**Contoh 1**

Graf *corona-like unicyclic* merupakan graf dengan pelabelan total sisi ajaib super dari graf corona $F \approx C_n \bullet \overline{K_r}$ untuk $n = 5$ dan $r = 2$

Misalkan graf corona $F \approx C_5 \bullet \overline{K_2}$, dengan himpunan titik dan himpuna sisi sebagai berikut :

$V(C_5 \bullet \overline{K_2}) = \{v_i | i = 1,2, \dots ,5\} \cup_{i=1}^{5} \{u_{i,j} | j = 1,2\}$ dan

$E(C_5 \bullet \overline{K_2}) = \{v_i v_{i+1} : i = 1, 2, \dots ,5\} \cup \{v_5 v_1\}\} \cup_{i=1}^{5} \{v_i\, u_{i,j} | j = 1,2\}$, dimana $v_i$ menyatakan titik pada lingkaran dan $u_{i,j}$ menyatakan titik daun ke $j$ yang terhubung dengan titik pada lingkaran ke $i$, seperti terlihat pada Gambar 3.1.10 berikut :




**Gambar 3.1.10** Graf corona $F \cong C_5 \bullet \overline{K_2}$

Pelabelan titik dan sisi pada graf $F \cong C_5 \bullet \overline{K_2}$ adalah sebagai berikut :

Pelabelan titik pada siklus :

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 + \dfrac{(i-1)(r+1)}{2} = 1 + \dfrac{(i-1)3}{2}, & i\ ganjil \\ 1 + \dfrac{(n+i-1)(r+1)}{2} = 1 + \dfrac{(4+i)3}{2}, & i\ genap \end{cases}$$

Pelabelan sisi pada siklus :

$$f(v_i v_{i+1}) = r + 1(2n - i) = 3(10 - i)$$

$$f(v_n v_i) = r + 1(2n) = 3(2n)$$

dengan $i = 1, 2, \ldots, 5$

Pelabelan titik sebagai berikut :

$$f(v_1) = 1 + \frac{(1-1)3}{2} = 1$$

$$f(v_2) = 1 + \frac{(4+2)3}{2} = 10$$

$$f(v_3) = 1 + \frac{(3-1)3}{2} = 4$$

$$f(v_4) = 1 + \frac{(4+2)3}{2} = 13$$

$$f(v_5) = 1 + \frac{(5-1)3}{2} = 7$$

Pelabelan sisi sebagai berikut :

$$f(v_1v_2) = 3(10-1) = 27$$

$$f(v_2v_3) = 3(10-2) = 24$$

$$f(v_3v_4) = 3(10-3) = 21$$

$$f(v_4v_5) = 3(10-4) = 18$$

$$f(v_5v_1) = 2((2)(5)) = 30$$

Pelabelan titik dan sisi pada daun sebagai berikut :

Pelabelan titik :

$$f(u_{i,j}) = \begin{cases} 1 + \dfrac{(n+i-2)(r+1)}{2} + j = 1 + \dfrac{(3+i)3}{2} + j, & i\ ganjil \\ 1 + \dfrac{(i-2)(r+1)}{2} + j = 1 + \dfrac{(i-2)3}{2} + j, & i\ genap \end{cases}$$

Pelabelan sisi :

$$f(v_i u_{i,j}) = (r+1)(2n-i) + (r+1) - j = 3(10-i) + 3 - j$$

dengan $i = 1,2,\dots,5$ dan $j = 1,2$

Pelabelan titik pada daun :

$$f(u_{1,1}) = 1 + \frac{(3+1)3}{2} + 1 = 8$$

$$f(u_{1,2}) = 1 + \frac{(3+1)3}{2} + 2 = 9$$

$$f(u_{2,1}) = 1 + \frac{(2-2)3}{2} + 1 = 2$$

$$f(u_{2,2}) = 1 + \frac{(2-2)3}{2} + 2 = 3$$

$$f(u_{3,1}) = 1 + \frac{(3+3)3}{2} + 1 = 11$$

$$f(u_{3,2}) = 1 + \frac{(3+3)3}{2} + 2 = 12$$

$$f(u_{4,1}) = 1 + \frac{(4-2)3}{2} + 1 = 5$$

$$f(u_{4,2}) = 1 + \frac{(4-2)3}{2} + 2 = 6$$

$$f(u_{5,1}) = 1 + \frac{(3+5)3}{2} + 1 = 14$$

$$f(u_{5,1}) = 1 + \frac{(3+5)3}{2} + 2 = 15$$

Pelabelan sisi pada daun :

$$f(v_1u_{1,1}) = 3(10-1) + 3 - 1 = 29$$

$$f(v_1u_{1,2}) = 3(10-1) + 3 - 2 = 28$$

$$f(v_2u_{2,1}) = 3(10-2) + 3 - 1 = 26$$

$$f(v_2u_{2,2}) = 3(10-2) + 3 - 2 = 25$$

$$f(v_3u_{3,1}) = 3(10-3) + 3 - 1 = 23$$

$$f(v_3u_{3,2}) = 3(10-3) + 3 - 2 = 22$$

$$f(v_4u_{4,1}) = 3(10-4)+3-1 = 20$$

$$f(v_4u_{4,1}) = 3(10-4)+3-2 = 19$$

$$f(v_5u_{5,1}) = 3(10-5)+3-1 = 17$$

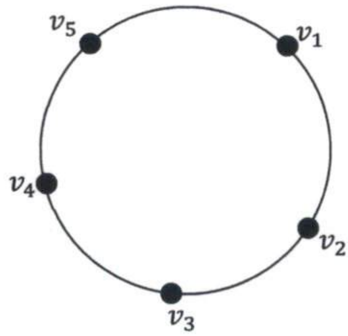
$$f(v_5u_{5,2}) = 3(10-5)+3-2 = 16$$

Dengan demikian pelabelan total sisi-ajaib super untuk graf corona $F \cong C_5 \bullet \overline{K_2}$ adalah :

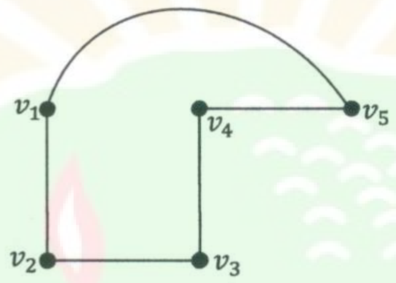

**Gambar 3.1.11** Pelabelan total sisi ajaib super pada graf corona $F \cong C_5 \bullet \overline{K_2}$

Terlihat bahwa pelabelan tersebut merupakan pelabelan total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib $k = 38$.

Kemudian pandang graf corona $F \cong C_5 \bullet \overline{K_2}$ kemudian lakukan penempelan *grid* pada lingkaran tersebut, sehingga diperoleh gambar 3.1.12 dan gambar 3.1.13 sebagai berikut :

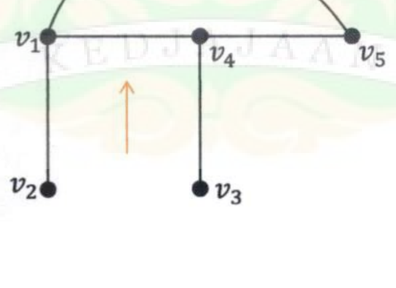



**Gambar 3.1.12** Graf corona $F \cong C_5 \bullet \overline{K_2}$ tanpa daun



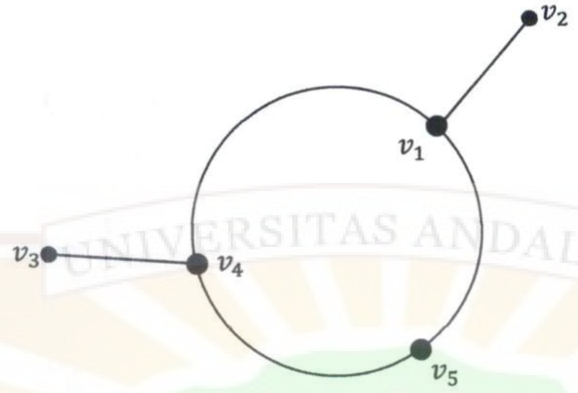

**Gambar 3.1.13** Hasil penempelan *grid* pada graf corona $F \cong C_5 \bullet \overline{K_2}$ tanpa daun

Setelah dilakukan penempelan *grid* pada graf corona $F \cong C_5 \bullet \overline{K_2}$ tanpa daun, maka selanjutnya dilakukan transformasi sisi pada *grid*, sehingga diperoleh gambar 3.1.14 berikut :



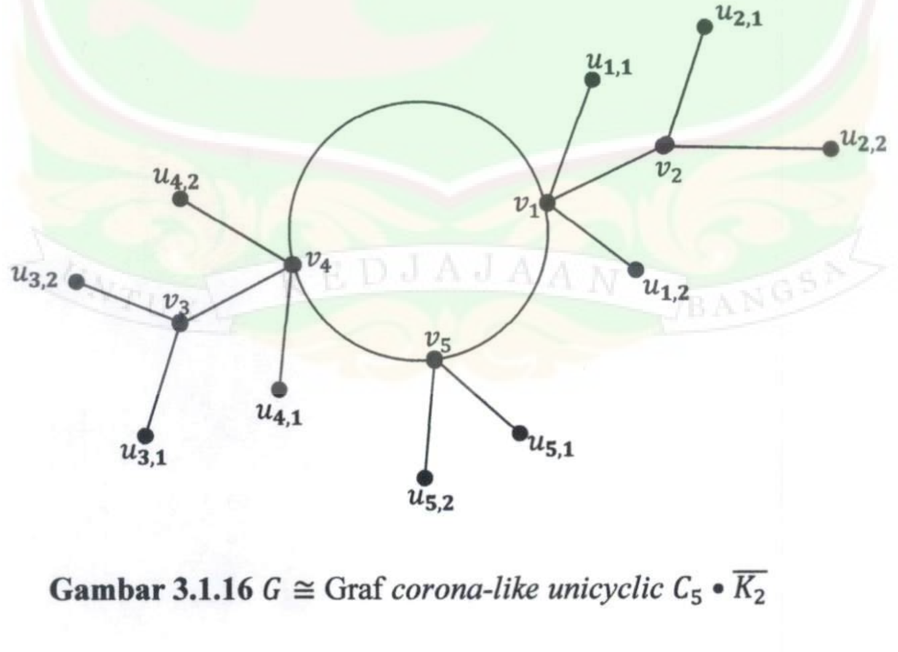

**Gambar 3.1.14** Hasil transformasi sisi pada $F \cong C_5 \bullet \overline{K_2}$

Kemudian kembalikan hasil transformasi sisi ke dalam bentuk lingkaran, sehingga diperoleh gambar 3.1.15 berikut :



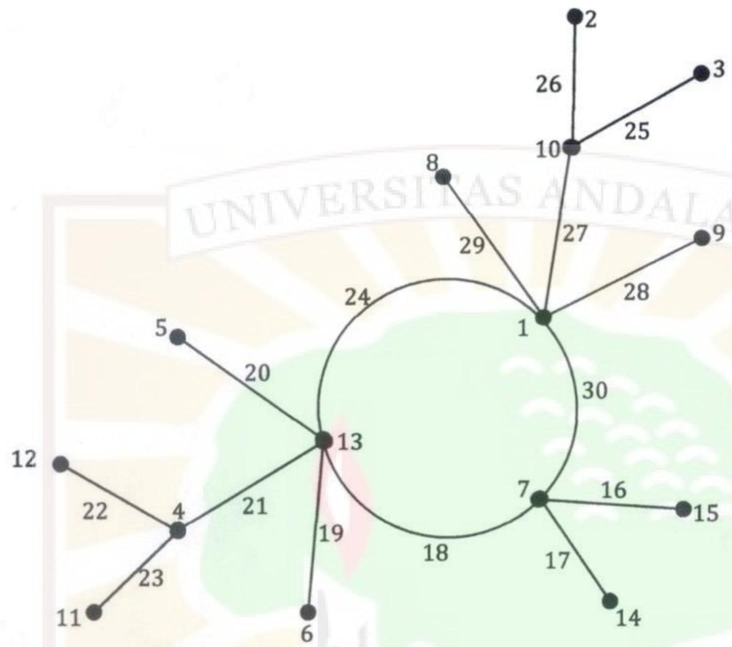

**Gambar 3.1.15** Hasil pengembalian transformasi sisi ke dalam bentuk siklus

Setelah diperoleh hasil pengembalian transformasi sisi ke dalam bentuk siklus maka akan dilakukan pemberian daun pada masing-masing titik. Akibatnya diperoleh suatu $G \cong$ *corona-like unicyclic* $C_5 \bullet \overline{K_2}$ yang terlihat pada gambar 3.1.16 berikut ini :




**Gambar 3.1.16** $G \cong$ Graf *corona-like unicyclic* $C_5 \bullet \overline{K_2}$

Kemudian lakukan pelabelan pada graf $G \cong$ graf *corona-like unicyclic* $C_5 \bullet \overline{K_2}$ dengan menggunakan hasil pelabelan total sisi ajaib super pada graf corona $F \cong C_5 \bullet \overline{K_2}$ pada gambar 3.1.11 sehingga diperoleh hasil sebagai berikut :




**Gambar 3.1.17** Pelabelan pada $G \cong$ graf *corona-like unicyclic* $C_5 \bullet \overline{K_2}$

Misalkan graf $U_{j+1}, j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ adalah hasil dari proses pentransformasian sisi dengan menggunakan sisi $u, v$ pada $U_j$ menjadi sisi $u', v'$.

Himpunan titik-titik pada $S_j$ dapat dibagi menjadi dua subkelas yg saling lepas :

$$V_1^j = \{v_i \in V(U_j)\,|\, i\ ganjil\}$$

$$V_2^j = \{v_i \in V(U_j)\,|\, i\ genap\}$$

Definisikan $d(u, u')$ sebagai jarak (jumlah sisi pada lintasan minimum) dari $u$ ke $u'$ di graf corona $C_n$

**Kasus 1**

Titik-titik $u$ dan $u'$ berada dalam subkelas yang berbeda

Untuk $u = v_2 = f(v_2) = 10 \quad u' = v_1$

$v = v_3 = f(v_3) = 4 \quad v' = v_4$

$$f(u') = f(v_1) = f(v) - \left(\left(\frac{d(u,u') + 1}{2}\right)(r+1)\right)$$

$$= f(v_3) - \left(\left(\frac{1+1}{2}\right)(2+1)\right)$$

$$= 4 - ((1)(3))$$

$$= 1$$

$$f(v') = f(v_4) = f(u) + \left(\left(\frac{d(u,u') + 1}{2}\right)(r+1)\right)$$

$$= f(v_2) + \left(\left(\frac{1+1}{2}\right)(2+1)\right)$$

$$= 10 + ((1)(3))$$

$$= 13$$

**Kasus 2**

Titik-titik $u$ dan $u'$ berada dalam subkelas yang sama dimana $u \in V_1$

Untuk $u = v_4 = f(v_4) = 13 \quad u' = v_4$

$v = v_5 \qquad v' = v_5$

$$f(v') = f(v_5) = f(u) - \left(\left(\frac{n - d(u,u') - 1}{2}\right)(r+1)\right)$$

$$= f(v_4) - \left(\left(\frac{5-0-1}{2}\right)(2+1)\right)$$

$$= 13 - \big((2)(3)\big)$$

$$= 7$$

Sehingga diperoleh $f(u) + f(v) = f(u') + f(v')$. Dengan menggunakan Lemma 2.4.4 diperoleh:

$$S = \{f(u) + f(v) | uv \in E(G)\}$$

$$= \{\, k - (|V(G)| + 1), k - (|V(G)| + 2), \ldots, k - (|V(G)| + |E(G)|)\, \}.$$

$$= \{\, 38 - 6, 38 - 7, 38 - 8, 38 - 9, 38 - 10\}$$

$$= \{\, 32, 31, 30, 29, 28\}$$

Dapat disimpulkan bahwa graf *corona-like unicyclic* merupakan graf dengan pelabelan total sisi ajaib super dari $G$ dengan konstanta ajaib

$k = |V(G)| + |E(G) + s$, dimana s = min (S)

$$= 5 + 5 + 28$$

$$= 38$$

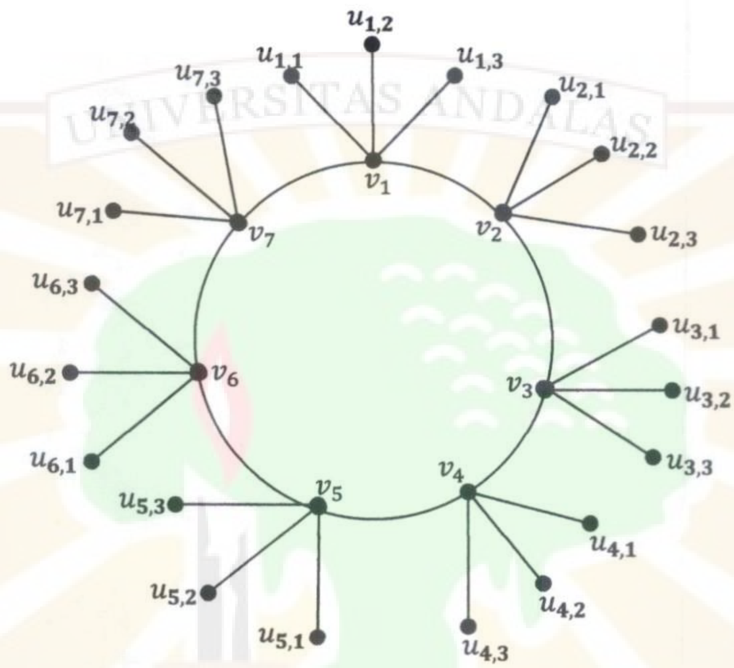
**Contoh 2**

Graf *corona-like unicyclic* merupakan graf dengan pelabelan total sisi ajaib super dari graf corona $F \cong C_n \bullet \overline{K_r}$ untuk $n = 7$ dan $r = 3$

Misalkan graf corona $F \cong C_5 \bullet \overline{K_2}$, dengan himpunan titik dan himpuna sisi sebagai berikut :

$V(C_7 \bullet \overline{K_3}) = \{v_i | i = 1,2, \ldots .,7\} \cup_{i=1}^{7} \{u_{i,j} | j = 1,2,3\}$ dan

$E(C_7 \bullet \overline{K_3}) = \{v_i v_{i+1} : i = 1, 2, \ldots, 7\} \cup \{v_7 v_1\}\} \cup_{i=1}^{7} \{v_i\, u_{i,j} | j = 1,2,3\}$ dimana $v_i$ menyatakan titik pada siklus dan $u_{i,j}$ menyatakan titik daun ke $j$ yang terhubung dengan titik pada siklus ke $i$, seperti terlihat pada Gambar 3.1.18 berikut :




**Gambar 3.1.18** Graf corona $F \cong C_7 \bullet \overline{K_3}$

Pelabelan titik dan sisi pada graf corona $F \cong C_7 \bullet \overline{K_3}$ adalah sebagai berikut :

Pelabelan titik pada siklus :

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 + \dfrac{(i-1)(r+1)}{2} = 1 + \dfrac{(i-1)4}{2}, & i\ ganjil \\ 1 + \dfrac{(n+i-1)(r+1)}{2} = 1 + \dfrac{(6+i)4}{2}, & i\ genap \end{cases}$$

Pelabelan sisi pada siklus :

$$f(v_i v_{i+1}) = r + 1(2n - i) = 4(14 - i)$$

$$f(v_n v_i) = r + 1(2n) = 4(2n)$$

dengan $i = 1, 2, \ldots, 7$

Pelabelan titik pada siklus sebagai berikut :

$$f(v_1) = 1 + \frac{(1-1)4}{2} = 1$$

$$f(v_2) = 1 + \frac{(6+2)4}{2} = 17$$

$$f(v_3) = 1 + \frac{(3-1)4}{2} = 5$$

$$f(v_4) = 1 + \frac{(6+4)4}{2} = 21$$

$$f(v_5) = 1 + \frac{(5-1)4}{2} = 9$$

$$f(v_6) = 1 + \frac{(6+6)4}{2} = 25$$

$$f(v_7) = 1 + \frac{(7-1)4}{2} = 13$$

Pelabelan sisi pada siklus sebagai berikut :

$$f(v_1v_2) = 4(14-1) = 52$$

$$f(v_2v_3) = 4(14-2) = 48$$

$$f(v_3v_4) = 4(14-3) = 44$$

$$f(v_4v_5) = 4(14-4) = 40$$

$$f(v_5v_6) = 4(14-5) = 36$$

$$f(v_6v_7) = 4(14-6) = 32$$

$$f(v_7v_1) = 4((2)(7)) = 56$$

Pelabelan titik dan sisi pada daun sebagai berikut :

Pelabelan titik :

$$f(u_{i,j}) = \begin{cases} 1 + \frac{(n+i-2)(r+1)}{2} + j = 1 + \frac{(5+i)4}{2} + j, & i \ ganjil \\ 1 + \frac{(i-2)(r+1)}{2} + j = 1 + \frac{(i-2)4}{2} + j, & i \ genap \end{cases}$$

Pelabelan sisi :

$$f(v_i u_{i,j}) = (r+1)(2n-i) + (r+1) - j = 4(14-i) + 4 - j$$

dengan $i = 1,2,\dots,7$ dan $j = 1,2,3$

Pelabelan titik pada daun :

$$f(u_{1,1}) = 1 + \frac{(5+1)4}{2} + 1 = 14$$

$$f(u_{1,2}) = 1 + \frac{(5+1)4}{2} + 2 = 15$$

$$f(u_{1,3}) = 1 + \frac{(5+1)4}{2} + 3 = 16$$

$$f(u_{2,1}) = 1 + \frac{(2-2)4}{2} + 1 = 2$$

$$f(u_{2,2}) = 1 + \frac{(2-2)4}{2} + 2 = 3$$

$$f(u_{2,3}) = 1 + \frac{(2-2)4}{2} + 3 = 4$$

$$f(u_{3,1}) = 1 + \frac{(5+3)4}{2} + 1 = 18$$

$$f(u_{3,2}) = 1 + \frac{(5+3)4}{2} + 2 = 19$$

$$f(u_{3,3}) = 1 + \frac{(5+3)4}{2} + 3 = 20$$

$$f(u_{4,1}) = 1 + \frac{(4-2)4}{2} + 1 = 6$$

$$f(u_{4,2}) = 1 + \frac{(4-2)4}{2} + 2 = 7$$

$$f(u_{4,3}) = 1 + \frac{(4-2)4}{2} + 3 = 8$$

$$f(u_{5,1}) = 1 + \frac{(5+5)4}{2} + 1 = 22$$

$$f(u_{5,2}) = 1 + \frac{(5+5)4}{2} + 2 = 23$$

$$f(u_{5,3}) = 1 + \frac{(5+5)4}{2} + 3 = 24$$

$$f(u_{6,1}) = 1 + \frac{(6-2)4}{2} + 1 = 10$$

$$f(u_{6,2}) = 1 + \frac{(6-2)4}{2} + 2 = 11$$

$$f(u_{6,3}) = 1 + \frac{(6-2)4}{2} + 3 = 12$$

$$f(u_{7,1}) = 1 + \frac{(5+7)4}{2} + 1 = 26$$

$$f(u_{7,2}) = 1 + \frac{(5+7)4}{2} + 2 = 27$$

$$f(u_{7,3}) = 1 + \frac{(5+7)4}{2} + 3 = 28$$

Pelabelan sisi pada daun :

$$f(v_1u_{1,1}) = 4(14-1)+4-1 = 55$$

$$f(v_1u_{1,2}) = 4(14-1)+4-2 = 54$$

$$f(v_1u_{1,3}) = 4(14-1)+4-3 = 53$$

$$f(v_2u_{2,1}) = 4(14-2)+4-1 = 51$$

$$f(v_2u_{2,2}) = 4(14-2)+4-2 = 50$$

$$f(v_2u_{2,3}) = 4(14-2)+4-3 = 49$$

$$f(v_3u_{3,1}) = 4(14-3)+4-1 = 47$$

$$f(v_3u_{3,2}) = 4(14-3)+4-2 = 46$$

$$f(v_3u_{3,3}) = 4(14-3)+4-3 = 45$$

$$f(v_4u_{4,1}) = 4(14-4)+4-1 = 43$$

$$f(v_4u_{4,2}) = 4(14-4)+4-2 = 42$$

$$f(v_4u_{4,3}) = 4(14-4)+4-3 = 41$$

$$f(v_5u_{5,1}) = 4(14-5)+4-1 = 39$$

$$f(v_5u_{5,2}) = 4(14-5)+4-2 = 38$$

$$f(v_5u_{5,3}) = 4(14-5)+4-3 = 37$$

$$f(v_6u_{6,1}) = 4(14-6)+4-1 = 35$$

$$f(v_6u_{6,2}) = 4(14-6)+4-2 = 34$$

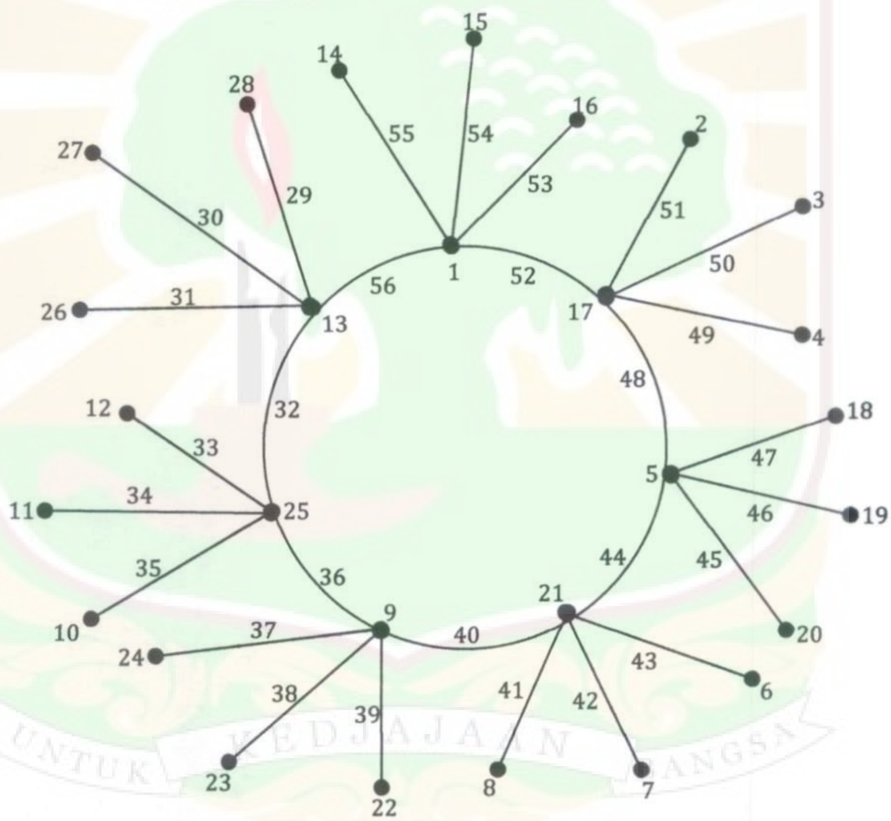
$$f(v_6u_{6,3}) = 4(14-6)+4-3 = 33$$

$$f(v_7u_{7,1}) = 4(14-7)+4-1 = 31$$

$$f(v_7u_{7,2}) = 4(14-7)+4-2 = 30$$

$$f(v_7u_{7,3}) = 4(14-7)+4-3 = 29$$

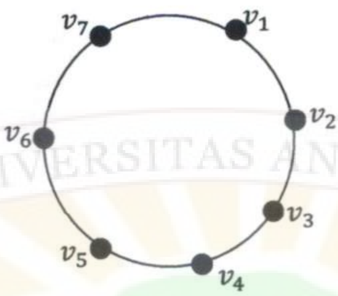
Dengan demikian pelabelan total sisi-ajaib super untuk graf corona $F \cong C_7 \bullet \overline{K_3}$ adalah



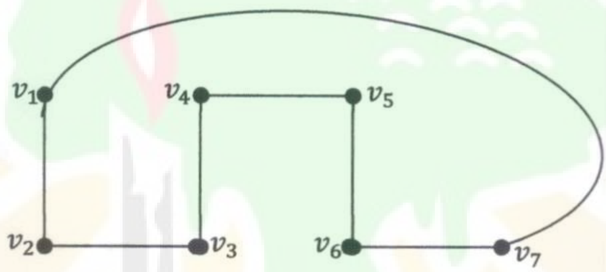

**Gambar 3.1.19** Pelabelan total sisi ajaib super untuk graf corona $F \cong C_7 \bullet \overline{K_3}$

Terlihat bahwa pelabelan tersebut merupakan pelabelan total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib $k = 70$.

Pandang graf corona $F \cong C_7 \bullet \overline{K_3}$ kemudian lakukan penempelan *grid* pada siklus tersebut, sehingga diperoleh gambar 3.1.20 dan gambar 3.1.21 sebagai berikut :

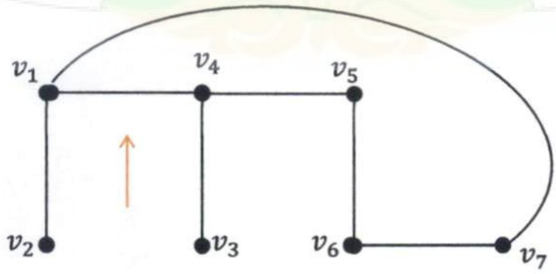



**Gambar 3.1.20** Graf corona $F \cong C_7 \bullet \overline{K_3}$ tanpa daun



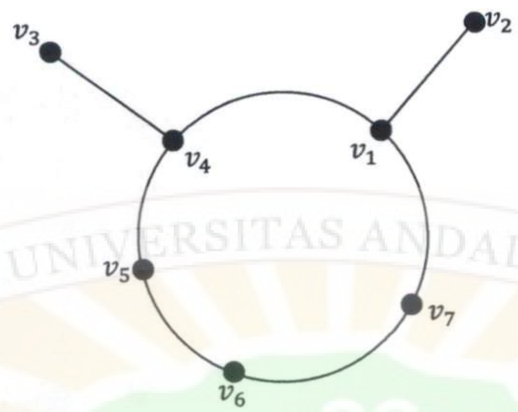

**Gambar 3.1.21** Hasil penempelan *grid* pada graf corona $F \cong C_7 \bullet \overline{K_3}$ tanpa daun

Setelah dilakukan penempelan *grid* pada graf corona $F \cong C_7 \bullet \overline{K_3}$ tanpa daun, maka selanjutnya dilakukan transformasi sisi pada *grid*, sehingga diperoleh gambar 3.1.22 berikut :



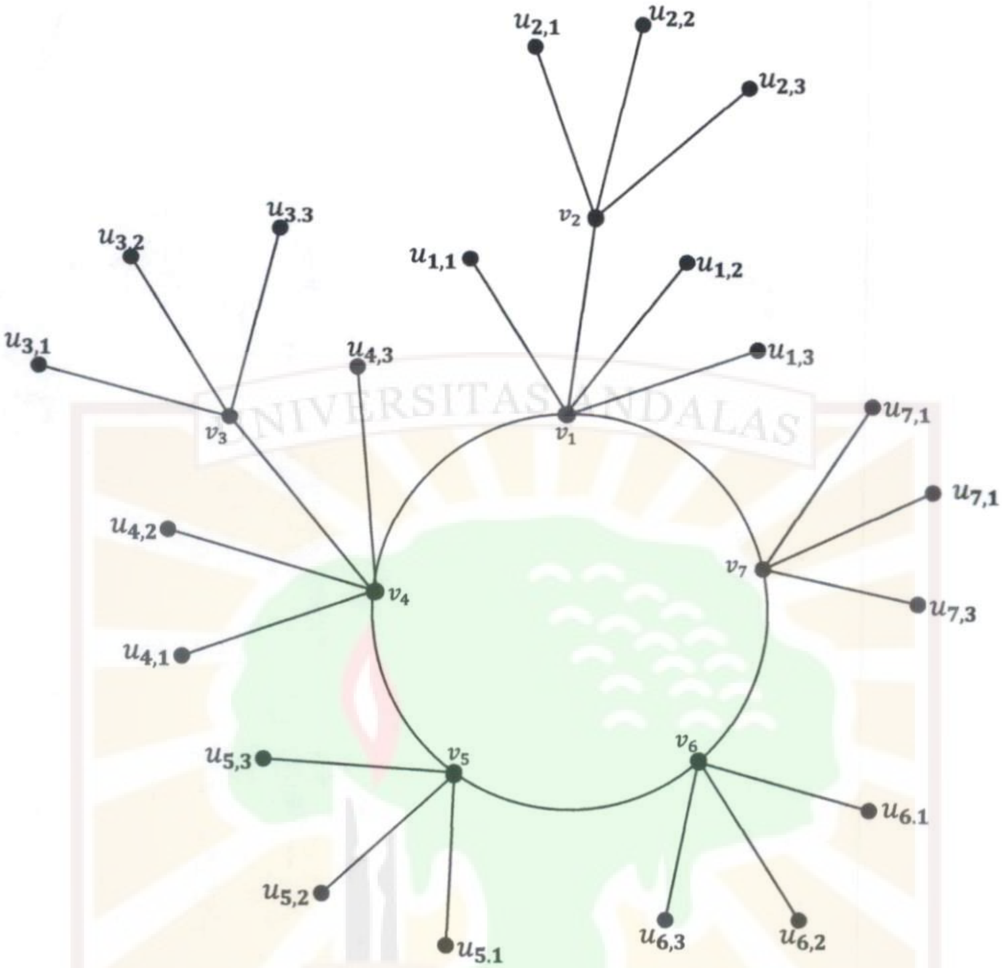

**Gambar 3.1.22** Hasil transformasi sisi pada graf corona $F \cong C_7 \bullet \overline{K_3}$ tanpa daun

Kemudian kembalikan hasil transformasi sisi ke dalam bentuk siklus, sehingga diperoleh gambar 3.1.23 berikut :



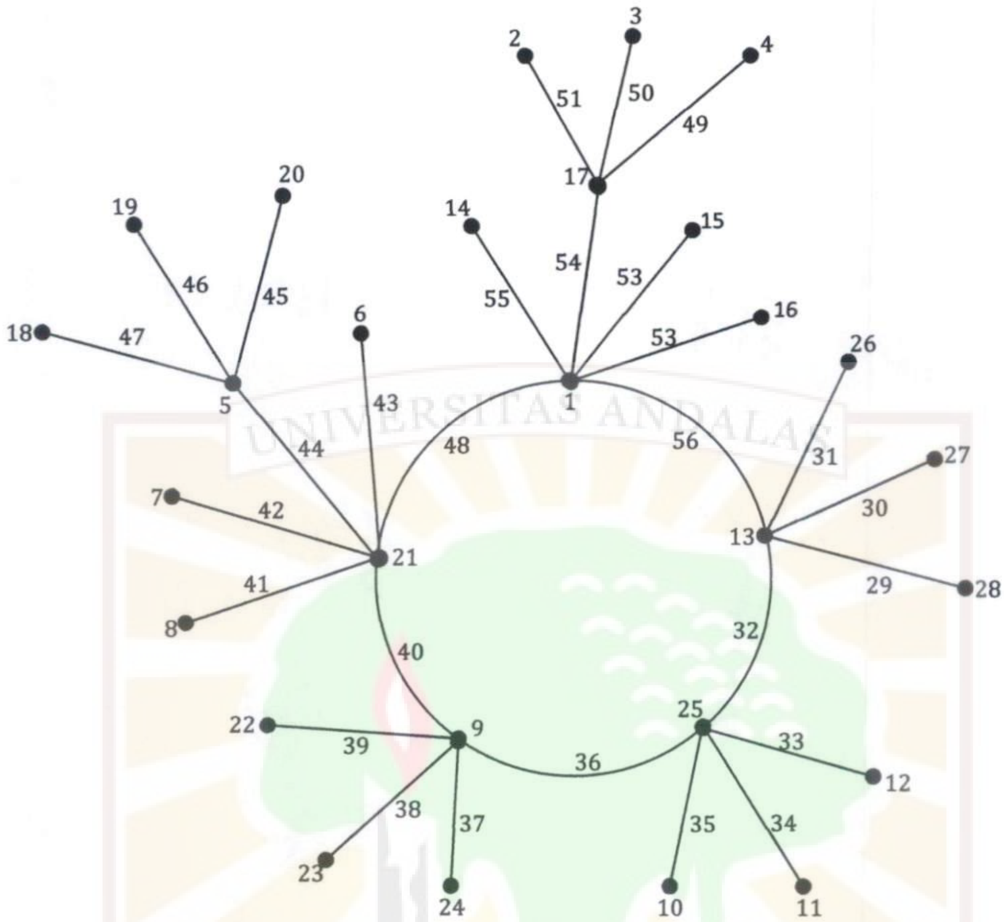

**Gambar 3.1.23** Hasil pengembalian transformasi sisi ke dalam bentuk siklus

Setelah diperoleh hasil pengembalian transformasi sisi ke dalam bentuk siklus maka akan dilakukan pemberian daun pada masing-masing titik. Akibatnya diperoleh suatu $G \cong$ graf *corona-like unicyclic* $C_7 \bullet \overline{K_3}$ yang terlihat pada gambar 3.1.24 berikut ini :




**Gambar 3.1.24** $G \cong$ Graf *Corona-like unicyclic* $C_7 \bullet \overline{K_3}$

Kemudian lakukan pelabelan pada $G \cong$ *graf corona-like unicyclic* $C_7 \bullet \overline{K_3}$ dengan menggunakan hasil pelabelan total sisi ajaib super pada graf corona $F \cong C_7 \bullet \overline{K_3}$ pada gambar 3.1.22 sehingga diperoleh hasil sebagai berikut :




**Gambar 3.1.25** Pelabelan pada graf $G \cong$ graf *corona-like unicyclic* $C_7 \bullet \overline{K_3}$

Misalkan graf $U_{j+1}, j \in \{1, 2, \dots, p\}$ adalah hasil dari proses pentransformasian sisi dengan menggunakan sisi $uv$ pada $U_j$ menjadi sisi $u'v'$.

Himpunan titik-titik pada $S_j$ dapat dibagi menjadi dua subkelas yg saling lepas :

$$V_1^j = \{v_i \in V(U_j) | i \text{ } ganjil\}$$

$$V_2^j = \{v_i \in V(U_j) | i \text{ } genap\}$$

Definisikan $d(u, u')$ sebagai jarak (jumlah sisi pada lintasan minimum) dari $u$ ke $u'$ di graf corona $C_n$

**Kasus 1**

Titik-titik $u$ dan $u'$ berada dalam subkelas yang berbeda

Untuk $u = v_2 = f(v_2) = 17 \quad u' = v_1$

$v = v_3 = f(v_3) = 5 \quad v' = v_4$

$$f(u') = f(v_1) = f(v) - \left(\left(\frac{d(u,u') + 1}{2}\right)(r+1)\right)$$

$$= f(v_3) - \left(\left(\frac{1+1}{2}\right)(3+1)\right)$$

$$= 5 - ((1)(4))$$

$$= 1$$

$$f(v') = f(v_4) = f(u) + \left(\left(\frac{d(u,u') + 1}{2}\right)(r+1)\right)$$

$$= f(v_2) + \left(\left(\frac{1+1}{2}\right)(3+1)\right)$$

$$= 17 + ((1)(4))$$

$$= 21$$

**Kasus 2**

Titik $u$ dan $u'$ berada dalam subkelas yang sama dimana $u \in V_1$

Untuk $u = v_4 = f(v_4) = 21 \quad u' = v_4$

$v = v_5 \qquad v' = v_5$

$$f(v') = f(v_5) = f(u) - \left(\left(\frac{n - d(u,u') - 1}{2}\right)(r+1)\right)$$

$$= f(v_4) + \left(\left(\frac{7 - 0 - 1}{2}\right)(3+1)\right)$$

$$= 21 + ((4)(3))$$

$$= 9$$

dimana $u \in V_6$

Untuk $u = v_5 = f(v_5) = 9 \quad u' = v_5$

$v = v_6 \qquad v' = v_6$

$$f(v') = f(v_6) = f(u) + \left(\left(\frac{d(u,u') + n - 1}{2}\right)(r+1)\right)$$

$$= f(v_5) + \left(\left(\frac{0 - 7 - 1}{2}\right)(3+1)\right)$$

$$= 9 + ((4)(4))$$

$$= 25$$

dimana $u \in V_1$

Untuk $u = v_6 = f(v_6) = 25 \quad u' = v_6$

$v = v_7 \quad v' = v_7$

$$f(v') = f(v_7) = f(u) - \left(\left(\frac{n - d(u,u') - 1}{2}\right)(r+1)\right)$$

$$= f(v_6) + \left(\left(\frac{7 - 0 - 1}{2}\right)(3+1)\right)$$

$$= 25 + ((3)(4))$$

$$= 13$$

Sehingga diperoleh $f(u) + f(v) = f(u') + f(v')$. Dengan menggunakan Lema 2.4.4 diperoleh:

$S = \{f(u) + f(v) | uv \in E(G)\}$

$= \{ k - (|V(G)| + 1), k - (|V(G)| + 2), \dots, k - (|V(G)| + |E(G)|) \}.$

$= \{ 70 - 8,\ 70 - 9,\ 70 - 10,\ 70 - 11,\ 70 - 12,\ 70 - 13,\ 70 - 14 \}$

$= \{62, 61, 60, 59, 58, 57, 56 \}$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa graf *corona-like unicyclic* merupakan graf dengan pelabelan total sisi ajaib super dari $G$ dengan konstanta ajaib

$k = |V(G)| + |E(G) + s$, dimana s = min (S)

$= 7 + 7 + 56$

$= 70$

# BAB IV

# KESIMPULAN

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh pada Bab III, diketahui bahwa graf corona yang ditulis sebagai sebagai $F \cong C_n \bullet \overline{K_r}$ , didefinisikan sebagai graf yang dihasilkan dengan mengambil satu copy $C_n$ , dimana $i = 1, 2, \dots, n$ dan satu copy $\overline{K_r}$ dimana $\overline{K_r}$ merupakan komplemen dari graf lengkap $K_r$ dengan $j = 1, 2, \dots, r$ yang disebut dengan titik daun $j$ dan kemudian dilakukan penyambungan titik $i$ dari $C_n$ untuk setiap titik pada $j$ dari $\overline{K_r}$. Lakukan pelabelan pada graf corona $F \cong C_n \bullet \overline{K_r}$ tersebut sehingga diperoleh pelabelan total sisi-ajaib super pada graf corona $\cong C_n \bullet \overline{K_r}$ . Selanjutnya lakukan penempelan grid terhadap siklus pada graf corona $F \cong C_n \bullet \overline{K_r}$. Kemudian grid ditransformasikan sehingga diperoleh suatu sisi baru yang mana sisi $uv$ digantikan dengan sisi $u'v'$ dan diperoleh graf $G \cong$ graf corona-like unicyclic $C_n \bullet \overline{K_r}$. Selanjutnya lakukan pelabelan pada graf $G \cong$ graf corona-like unicyclic $C_n \bullet \overline{K_r}$ menggunakan pelabelan pada graf corona $F \cong C_n \bullet \overline{K_r}$ sehingga dapat disimpulkan bahwa graf corona-like unicyclic merupakan graf dengan pelabelan total sisi ajaib super.

# DAFTAR PUSTAKA

[1] Baca, M. and M. Miller. 2008. ***Super Edge-Antimagic Graphs***. Brown Walker Press, Florida USA.

[2] Bondy, J.A. and U.S.R. Murty. 1976. ***Graph Theory with Applications***. The Macmillan Press Ltd, London.

[3] Chatrand, G and P. Zhang. 2005. ***Introduction to Graph Theory***. McGrawHill Press, Boston.

[4] Fiqueroa, R.M, R. Ichishima, dkk. 2002. *Magical coronations of graphs*. Australasian Journal of Combinatorics vol 26 pp.199-208

[5] Hartsfield, N. and G. Ringel. 1994. ***Pearls in Graph Theory***. Academic Press.Inc, London.

[6] Sepang, A., P.A. Wibowo, B.N. Herawati, and K.A. Sugeng. 2008. *Super Edge Magic Total Labeling on Unicyclic Graphs*. *Makara, Sains*. 12 : 31-36

[7] Wallis, W.D, E.T.Baskoro, dkk. 2000. *Edge magic total labeling*. The Electronic Journal Of Combinatorics.

## RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Prima Resa Putri, dilahirkan di Padang pada tanggal 25 Desember 1989 buah hati dari pasangan Rivai Zain dan Yarnis. Penulis menamatkan pendidikan Sekolah Dasar di SDN 06 Padang Pasir pada tahun 2001, SMP Adabiah Padang pada tahun 2004, dan SMA Adabiah Padang pada tahun 2007. Pada tahun 2007 penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas. Selama di bangku perkuliahan penulis sangat aktif di berbagai kegiatan kemahasiswaan. Penulis pernah mengikuti magang di UKM-UKS pada tahun 2007. Penulis aktif di organisasi teratas kampus yaitu BEM-KM UNAND selama tiga periode pada tahun 2008-2009, tahun 2009-2010 dan tahun 2010-2011. Penulis juga aktif di berbagai kepanitian menjabat sebagai steering commitee, ketua maupun sekretaris. Untuk syarat meraih gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika FMIPA UNAND, penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Jorong Toboh, Kanagarian Lareh Nan Panjang, Kabupaten Padang Pariaman pada bulan Juli s/d bulan Agustus 2010. Selain itu pada tahun 2011 penulis juga aktif di Pojok BNI Unand sebagai Duta Pojok BNI.