PELABELAN TOTAL SISI-AJAIB SUPER PADA GRAF POHON PISANG

SKRIPSI

MERDEKAWATI
06934014

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2012

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa:

Nama	:	Merdekawati
Nomor Buku Pokok	:	06 934 014
Jurusan	:	Matematika
Bidang	:	Kombinatorik
Judul Skripsi	:	**Pelabelan Total Sisi-Ajaib Super pada Graf Pohon Pisang**

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal **18 Januari 2012** berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing,

1\.

Narwen, M.Si
NIP: 19670410 199702 1 001

2\.

Dr. Ahmad Iqbal Baqi
NIP: 19631104 199203 2 002

Penguji,

1\.

Dr. Dodi Devianto, M.Sc
NIP: 19771227 200012 1 002

2\.

Dr. Lyra Yulianti
NIP:19750706 199903 2 003

3\.

Budi Rudianto, M.Si
NIP: 132169920

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand

Dr. Syafrizal Sy
NIP: 19670807 199309 1 001

KATA PENGANTAR

بِسْــــــــــــمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Puji dan syukur penulis ucapkan kepada Allah SWT atas segala limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan tugas akhir dengan judul "**Pelabelan Total Sisi-Ajaib Super pada Graf Pohon Pisang**". Selanjutnya tak lupa shalawat dan salam penulis sampaikan kepada Nabi Besar Muhammad SAW.

Skripsi ini ditulis sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Andalas. Penyelesaian skripsi ini tak lepas dari semua pihak yang terlibat baik secara langsung maupun tidak langsung, oleh karena itu penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada :

1. Bapak **Narwen, M.Si** selaku Pembimbing I yang telah dengan sabar membantu mengarahkan penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini.
2. Bapak **Dr. Ahmad Iqbal Baqi** selaku Pembimbing II yang telah membantu penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.
3. Bapak **Dr. Dodi Devianto, M.Sc**, Ibu **Dr. Lyra Yulianti** dan Bapak **Budi Rudianto M.Si** selaku penguji yang telah membaca, memberi masukan dan saran kepada penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.

4. Ibu **Ir. Hj. Hazmira Yozza, M.Si** selaku Penasehat Akademik yang telah memberikan motivasi dan merancang penyelesaian studi penulis hingga selesai.
5. Seluruh Bapak dan Ibu Dosen beserta Staf jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Andalas yang telah memberikan ilmu yang sangat bermanfaat.
6. Terima kasih banyak saya sampaikan kepada **Gina Aprilia Yong, S.Si** yang sabar sekali membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
7. Teman-teman seperjuangan Chitra, Arif, Heru, Dedi, Ridho dan lainnya, serta teman kosan Frima dan Ni Tya.
8. Semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi ini.

Kepada keluarga yang tercinta mama **Murni. M** dan yang mulia papa **Supirman** yang telah memberikan semangat dan motivasi untuk menyelesaikan tugas akhir ini dan saudara kandung tercinta kakak **Anita Firmayanti, S.T** dan **Apriani, S.Kom.** Untuk yang tersayang **Hadi Maulana** yang telah mau dengar cerita kehidupan saya dan mengingatkan saya agar selalu sabar menjalankan kehidupan ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran agar sempurnanya skripsi ini. Semoga skripsi ini memberikan manfaat bagi kita semua. Amin.

Padang, Januari 2012

Penulis,

Merdekawati

ABSTRAK

Misalkan $G_1, G_2, \dots, G_n$ adalah keluarga bintang yang saling lepas. Suatu pohon diperoleh dengan menambahkan sebuah titik baru a ke satu titik cabang untuk masing-masing bintang G_i dinamakan graf pohon pisang. Untuk $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = n$, dimana $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \leq n \leq k-1$, maka graf pohon pisang $G \cong BT(n_1, n_2, \dots, n_k)$ memuat suatu pelabelan total sisi-ajaib super . Sedangkan, untuk $n_1 > n_2 > \cdots > n_k > 1$, maka graf pohon pisang $G \cong BT(n_1, n_2, \dots, n_k)$ memuat pelabelan total sisi-ajaib super .

Kata kunci : *Pelabelan total sisi-ajaib super, Graf pohon pisang*

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR iv
ABSTRAK vi
DAFTAR ISI vii
DAFTAR GAMBAR viii
BAB I PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang Masalah.. 1
1.2 Perumusan Masalah... 2
1.3 Pembatasan Masalah.. 2
1.4 Tujuan Penelitian... 2
1.5 Sistematika Penulisan.. 3
BAB II LANDASAN TEORI 4
2.1 Graf 4
2.2 Jenis- jenis Graf.. 6
2.3 *Star* (Bintang).. 8
2.4 *Banana Tree* (Pohon Pisang).................................... 9
2.5 Pelabelan Graf... 11
2.6 Fungsi *Floor* dan *ceiling*.. 13
BAB III PELABELAN TOTAL SISI-AJAIB SUPER PADA GRAF POHON PISANG 15
BAB IV KESIMPULAN 31
DAFTAR PUSTAKA 32
DAFTAR RIWAYAT HIDUP 33

DAFTAR GAMBAR

2.1.1 Ilustrasi titik dan sisi pada graf 5

2.1.2 (a) jalur, (b) lintasan P_4, (c) siklus C_3 6

2.2.1 (a) Graf sederhana, (b) graf tak sederhana 6

2.2.2 (a) Graf tak terhubung, (b) graf terhubung 7

2.2.3 Graf lengkap K_n untuk $1 \leq n \leq 6$ 7

2.2.4 Graf siklus C_n untuk $3 \leq n \leq 7$ 8

2.3.1 Graf bintang $K_{1,n}$ 9

2.4.1 Graf pohon 10

2.4.2 Graf Pohon Pisang $BT(n_1, n_2, \dots, n_k)$ 10

2.5.1 Graf G sebelum dilabeli 12

2.5.2 Graf G dengan label 13

3.1.1 Graf Pohon Pisang $BT(n_1, n_2, \dots, n_k)$ 17

3.1.2 Graf Pohon Pisang $BT(2, 2, 2)$ 18

3.1.3 Graf Pohon Pisang $BT(2, 2, 2)$ dengan label titik 20

3.1.4 Graf Pohon Pisang $BT(2, 2, 2)$dengan label titik dan sisi 22

3.2.1 Graf Pohon Pisang $BT(n_1, n_2, \dots, n_k)$ 24

3.2.2 Graf Pohon Pisang $BT(2, 3, 4)$ 25

3.2.3 Graf Pohon Pisang $BT(2, 3, 4)$ dengan label titik 28

3.2.4 Graf Pohon Pisang $BT(2, 3, 4)$ dengan label titik dan sisi 30

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf pertama kali ditemukan oleh Leonhard Euler (1763). Euler mencari solusi bagaimana cara menyeberangi jembatan di Kota .Kaliningrat, sehingga ini dikenal dengan teori graf. Sejak itu teori graf terus berkembang hingga sekarang.

Pelabelan graf merupakan salah satu topik dalam teori graf. Pelabelan graf merupakan pemetaan dari elemen-elemen graf ke bilangan bulat positif. Pelabelan mulai dikembangkan pada pertengahan tahun 1960. Pelabelan muncul pertama kali pada karya Rosa pada tahun 1967 [1]. Pelabelan graf diperkenalkan dengan memperumum gagasan persegi ajaib (*magic square*), di antaranya oleh Sedláček (1963) dan Stewart [2]. Sedláček mendefinisikan bahwa suatu graf dikatakan ajaib jika graf tersebut memiliki pelabelan sisi di mana jumlah pelabelan di setiap titik sama dengan suatu konstanta. Stewart mengatakan bahwa suatu pelabelan terhadap graf dikatakan sebagai pelabelan super ajaib jika himpunan label titik berisikan bilangan bulat yang dimulai dari satu, sampai banyaknya titik dalam graf tersebut.

Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi. Hingga saat ini dikenal beberapa jenis pelabelan pada graf, antara lain pelabelan harmoni, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Pelabelan total pada graf G adalah pemetaan dari himpunan titik dan himpunan sisi dari graf G pada himpunan bilangan bulat positif. Jika semua titik di G mempunyai bobot titik yang sama, maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total titik-ajaib, dan jika semua sisi di G mempunyai bobot sisi yang sama, maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total sisi-ajaib.

Pada tugas akhir ini, penulis melakukan kajian pelabelan total sisi-ajaib super (*super edge-magic total labeling*) pada graf pohon pisang. Defini graf pohon pisang akan diberikan pada Bab II.

1.2 Perumusan Masalah

Masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana mengkaji pelabelan total sisi-ajaib super pada graf pohon pisang.

1.3 Pembatasan Masalah

Agar penulisan ini terarah, maka penulis akan memfokuskan untuk membahas tentang pelabelan total sisi-ajaib super pada graf pohon pisang $BT(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ dengan batasan n_i sisi untuk setiap $i, 1 \leq i \leq k$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah menunjukkan bahwa graf pohon pisang $BT(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ memuat pelabelan total sisi-ajaib super.

1.5 Sistematika Penulisan

Tulisan ini terdiri atas empat bab. Bab I Pendahuluan yang mencakup latar belakang masalah, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan. Konsep dasar dari teori graf berupa definisi dan terminologi, pengertian pelabelan sisi ajaib serta beberapa teori pendukung yang digunakan untuk menyelesaikan tugas akhir. Kemudian pada Bab II Landasan Teori yang mencakup permasalahan tersebut akan diuraikan pada Bab III, yaitu pelabelan total sisi-ajaib super pada graf pohon pisang. Pada bab ini juga akan dijelaskan untuk membantu proses pembuktian teorema agar pelabelan mudah dipahami, maka diberikan beberapa aplikasi kasus sebagai ilustrasi atau gambaran. Penulisan ini diakhiri pada Bab IV Kesimpulan yang berisi kesimpulan dari hasil-hasil pembahasan.

BAB II

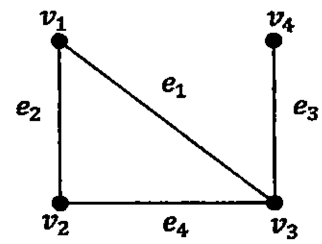
LANDASAN TEORI

Untuk membahas pelabelan total sisi-ajaib super pada graf pohon pisang perlu diperkenalkan beberapa teori dasar untuk menunjang pembuktian dan mempermudah pemahaman. Beberapa teori dasar itu meliputi definisi graf, istilah dalam graf, jenis-jenis graf, definisi dan beberapa jenis pelabelan graf.

2.1 Graf

Suatu **graf** G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan $G = (V, E)$, di mana V adalah himpunan tak kosong dan E adalah himpunan pasangan tak terurut dari elemen-elemen V. Elemen-elemen dari V disebut **titik** dari G dan elemen-elemen dari E disebut **sisi** dari G. Himpunan titik dari G dinotasikan dengan $V(G)$ sedangkan himpunan sisi dari G dinotasikan dengan $E(G)$. **Orde (*order*)** dari suatu graf G, dinotasikan v, yaitu banyaknya titik di graf G dan **ukuran (*size*)** suatu graf G, dinotasikan e, yaitu jumlah sisi di graf G.

Misalkan v_i dan v_j adalah titik pada graf G. Titik v_i dikatakan **bertetangga (*adjacent*)** dengan v_j jika terdapat sebuah sisi yang menghubungkan v_i dan v_j. Misalkan $e = v_iv_j$, maka e dikatakan **terkait (*incident*)** dengan v_i dan v_j. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 2.1.1.

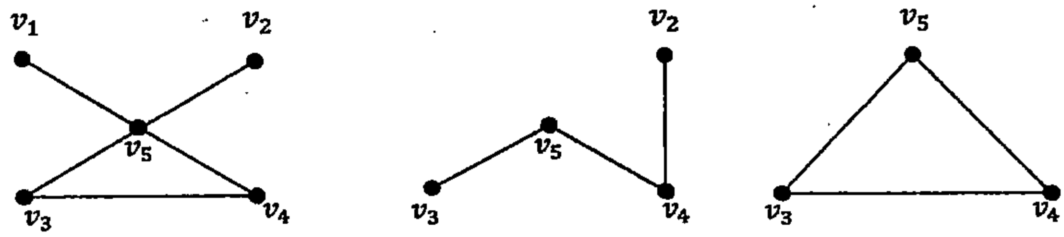


Gambar 2.1.1

Pada Gambar 2.1.1 dapat dilihat bahwa v_1 bertetangga dengan v_2 dan v_3, tetapi tidak bertetangga dengan v_4. Selain itu titik v_1 terkait dengan e_1 dan e_2, tetapi tidak terkait dengan e_4. **Derajat** dari titik v di G adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik v. Dari Gambar 2.1.1 dapat dilihat bahwa v_1, v_2, v_3, dan v_4 berturut-turut berderajat 2, 2, 3, dan 1.

Jalan (*walk*) pada graf G adalah barisan titik pada G yang dimulai dari titik awal v_i dan berakhir pada titik akhir v_j dan setiap titiknya dihubungkan oleh sebuah sisi. Pada jalan, jika setiap sisinya dilewati tidak lebih dari satu kali maka jalan tersebut dikatakan **jalur** (***trail***). Jalan yang semua titiknya berbeda disebut **lintasan** (***path***). Lintasan yang titik awal dan titik akhirnya sama dikatakan *cycle* (**siklus**). Banyak sisi dalam lintasan disebut **panjang** (***length***) dari lintasan tersebut. Lintasan dan siklus dengan n titik berturut-turut dinotasikan dengan P_n dan C_n.

Panjang dari lintasan P_n adalah $n - 1$ seperti terlihat pada Gambar 2.1.2 yang juga memberikan ilustrasi jalur, lintasan, dan siklus.



(a) jalur (b) lintasan P_4 *(c)* siklus C_3

Gambar 2.1.2 ***jalur, lintasan P_4, dan siklus C_3***

2.2 Jenis-jenis Graf

Suatu graf yang tidak mempunyai sisi ganda atau ***loop*** dinamakan **graf sederhana**. Pada kajian ini, graf yang dibahas adalah graf sederhana.

(a) Graf Sederhana (b) Graf Tak Sederhana

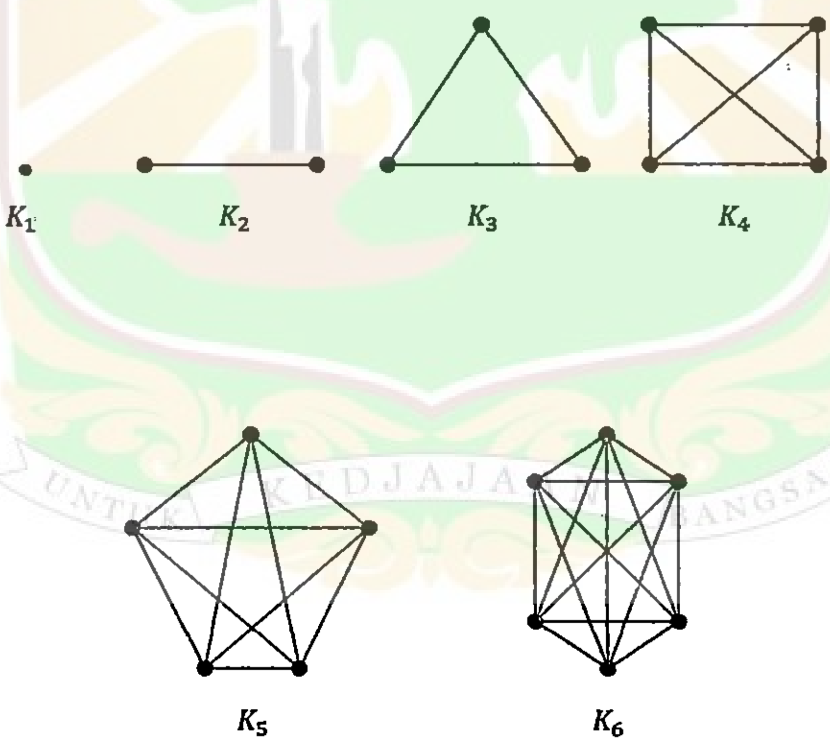
Gambar 2.2.1 Graf Sederhana dan Graf Tak Sederhana

Suatu graf $G = (V, E)$ disebut **graf terhubung** (***connected graph***), jika untuk setiap pasang titik $v_i, v_j \in V$ terdapat lintasan dari v_i ke v_j. Graf yang hanya terdiri atas satu titik saja (tanpa sisi) juga dikatakan graf terhubung, karena titik tunggalnya terhubung dengan dirinya sendiri. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 2.2.2.

(a) Graf Tak Terhubung (b) Graf Terhubung

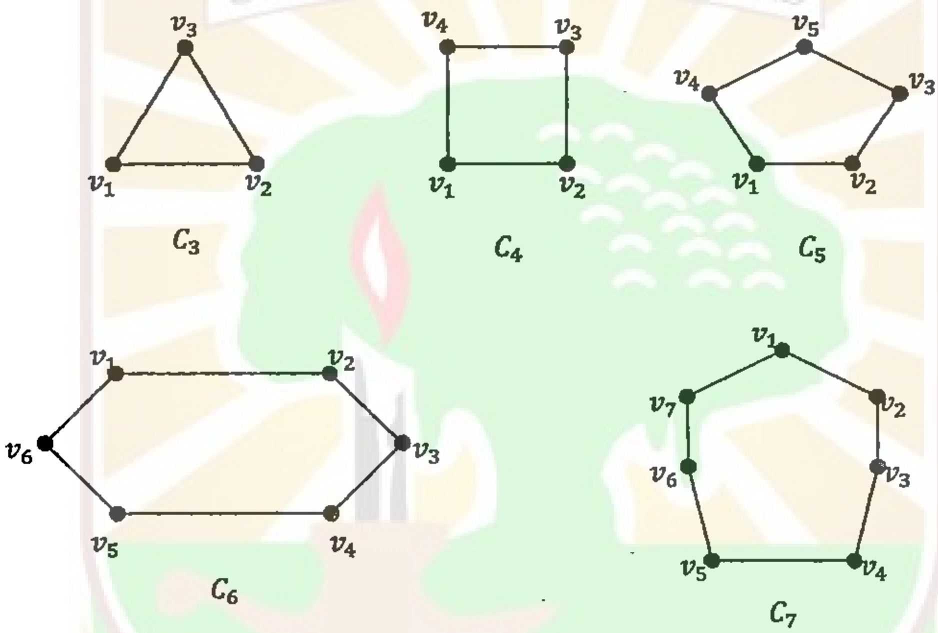
Gambar 2.2.2 Graf Tak Terhubung dan Graf Terhubung

Graf sederhana yang setiap titiknya bertetangga dengan titik lainnya dinamakan **graf lengkap**. Graf lengkap dengan *n* buah titik dilambangkan dengan K_n. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 2.2.3



Gambar 2.2.3. Graf Lengkap K_n untuk $1 \leq n \leq 6$

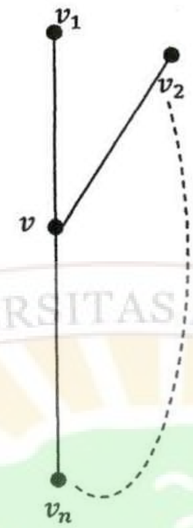
Suatu graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua disebut dengan graf siklus. Graf siklus dengan n titik dilambangkan dengan C_n, di mana $n \geq 3$ adalah graf dengan n titik yaitu $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dan sisi-sisinya yaitu v_1v_2, $v_2v_3, \ldots$, $v_{n-1}v_n$, v_nv_1. Beberapa graf siklus dapat dilihat pada Gambar 2.2.4.



Gambar 2.2.4 Graf Siklus C_n untuk $3 \leq n \leq 7$

2.3 *Star* (Bintang)

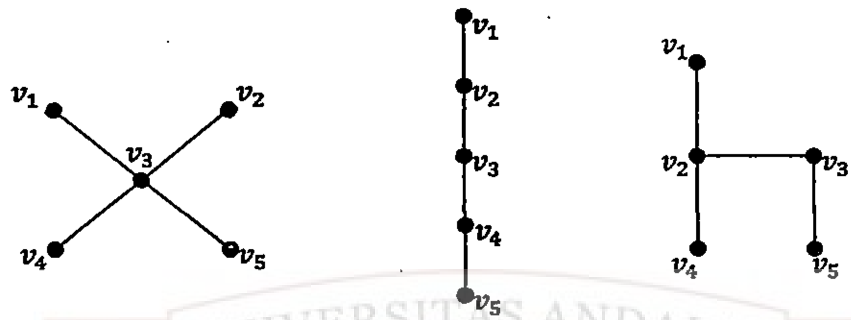
Graf bintang (*star*) $K_{1,n}$ adalah suatu graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat n yang disebut dengan pusat, dan n titik lain yang berderajat satu yang disebut daun.



Gambar 2.3.1 Graf Bintang $K_{1,n}$

2.4 *Banana Tree* (Pohon Pisang)

Tree **(Pohon)** adalah graf terhubung yang tidak memuat siklus. ***Leaf*** **(daun)** adalah titik paling ujung dalam sebuah pohon. Sebagai contoh, pada Gambar 2.4.1 (a) graf F_1 adalah pohon dengan lima titik, dimana v_1, v_2, v_4, dan v_5 adalah daun-daun dari pohon F_1 tersebut. (b) graf F_2 adalah pohon dengan lima titik, dimana v_1 dan v_5 adalah daun-daun dari pohon F_2 tersebut. (c) graf F_3 adalah pohon dengan lima titik, dimana v_1, v_4, dan v_5 adalah daun-daun dari pohon F_3 tersebut.

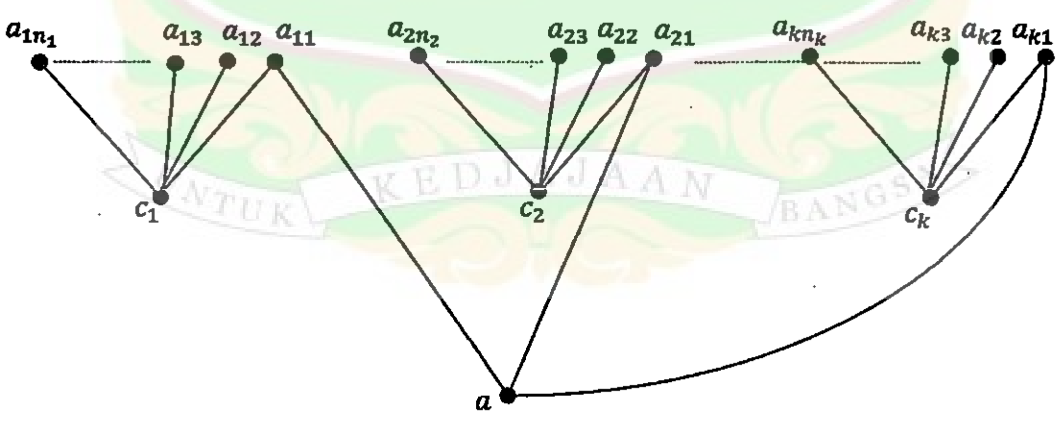


(a) F_1 (b) F_2 (c) F_3

Gambar 2.4.1 Graf Pohon

Pada Gambar 2.4.1, graf F_1, F_2, dan F_3 adalah tiga buah pohon dengan banyak titik lima.

Definisi 2.4.1 *Misalkan K_{1,n_i} menyatakan bintang dengan n_i sisi untuk setiap i, $1 \leq i \leq k$. Suatu graf pohon pisang $BT(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ merupakan suatu pohon yang diperoleh dengan menambahkan suatu titik baru a yang dihubungkan ke $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{k1}$.* Hal ini dapat dilihat pada Gambar 2.4.2 berikut ini :



Gambar 2.4.2 Graf Pohon Pisang BT $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$

Gambar 2.4.2 menunjukkan suatu graf pohon pisang BT $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ dengan K_{1,n_i} menyatakan bintang dengan n_i sisi untuk setiap i, $1 \leq i \leq k$. Himpunan titik dan himpunan sisi dari $G \cong BT(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ adalah

$V(G) = \{a\} \cup \{c_i | 1 \leq i \leq k\} \cup \{a_{ij} | 1 \leq i \leq k; 1 \leq j \leq n\}$, dan

$E(G) = \{aa_{i1} \mid 1 \leq i \leq k\} \cup \{c_i a_{ij} \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n\}$.

2.5 Pelabelan Graf

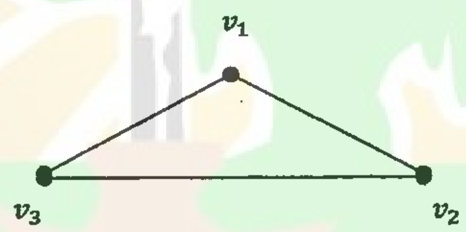
Pelabelan adalah pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf pada himpunan bilangan bulat positif. Jika domain dari fungsi adalah titik, maka pelabelan disebut **pelabelan titik** (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi, maka disebut **pelabelan sisi** (*edge labeling*), dan jika domainnya titik dan sisi maka disebut **pelabelan total** (*total labeling*).

Misalkan G adalah suatu graf dengan himpunan titik V dan sisi E. Banyaknya titik di G adalah $|V(G)| = v$, dan banyak sisi di G adalah $|E(G)| = e$.

Definisi 2.5.1 *Suatu pelabelan total sisi-ajaib dari suatu graf G merupakan pemetaan satu-satu λ dari $V(G) \cup E(G)$ ke bilangan bulat positif $\{1, 2, \ldots, v \cup e\}$, di mana terdapat suatu bilangan bulat positif konstan h sehingga $\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = h$ untuk setiap $xy \in E(G)$.*

Definisi 2.5.2 *Suatu pelabelan total sisi-ajaib λ dari graf G disebut pelabelan total sisi-ajaib super jika $\lambda(V(G)) = \{1,2, \ldots, v\}$.*

Jumlah label sisi dan label dua titik yang terkait pada sisi tersebut disebut **bobot sisi.** Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang sama maka pelabelan tersebut di sebut **pelabelan total sisi-ajaib.** Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan dari bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama a dan beda d maka pelabelan tersebut di sebut **pelabelan total (a, d) sisi anti-ajaib.** Sebaliknya, graf yang memiliki bobot titik dan bobot sisi yang sama disebut graf dengan **pelabelan ajaib.** Sebagai contoh, perhatikan graf G berikut dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3\}$. Jadi **orde** G adalah **3.** Akan ditunjukkan bahwa graf G adalah sisi-ajaib. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 2.5.1



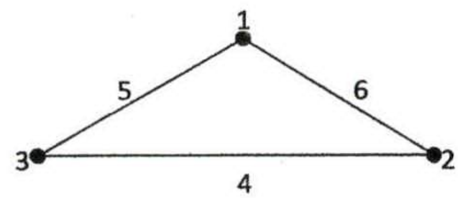
Gambar 2.5.1 Graf G sebelum dilabeli

Diperoleh

$$f(v_1) + f(v_1v_2) + f(v_2) = 1 + 6 + 2 = 9$$

$$f(v_1) + f(v_1v_3) + f(v_3) = 1 + 5 + 3 = 9$$

$$f(v_2) + f(v_2v_3) + f(v_3) = 2 + 4 + 3 = 9$$



Gambar 2.5.2 Graf G dengan label

Graf G adalah sisi ajaib dengan konstanta ajaib $k = 9$.

Lema 2.5.3 *Suatu graf G dengan v titik dan e sisi merupakan total sisi-ajaib* ***super*** *jika dan hanya jika terdapat suatu bijektif*

$$f : V(G) \to \{1, 2, \dots, v\}$$

sehingga himpunan $S = \{f(x) + f(y) | \, xy \in E(G)\}$ *terdiri dari bilangan-bilangan* ***bulat*** *positif berurut. Fungsi f memuat pelabelan total sisi-ajaib super pada G dengan konstanta ajaib* $h = v + e + s$ *, dimana* $s = min(S)$ *dan*

$S = \{f(x) + f(y) | xy \in E(G)\}$

$= \{h - (v + 1), h - (v + 2), \dots, h - (v + e)\}$.

2.6 Fungsi *Floor* dan *Ceiling*

Beberapa fungsi yang dipakai pada pembahasan adalah fungsi *floor* dan *ceiling*. Misalkan x adalah bilangan riil, berarti x berada di antara dua bilangan bulat. Fungsi *floor* dari x, dilambangkan dengan $\lfloor x \rfloor$ dan *ceiling* dari x dilambangkan dengan $\lceil x \rceil$. Definisi dari kedua fungsi tersebut adalah

- $\lfloor x \rfloor$ menyatakan nilai bilangan bulat tebesar yang lebih kecil atau sama dengan x.
- $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x.

Dengan kata lain, fungsi *floor* membulatkan x ke bawah, sedangkan fungsi *ceiling* membulatkan x ke atas.

Contoh :

1. $\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0$, nilai bilangan bulat terbesar lebih kecil adalah 0.
2. $\left\lceil \frac{7}{2} \right\rceil = 4$, nilai bilangan bulat terkecil yang lebih besar adalah 4.

BAB III

PELABELAN TOTAL SISI-AJAIB SUPER PADA GRAF POHON PISANG

Misalkan diberikan graf $K_{1,n_1}, K_{1,n_2}, \dots, K_{1,n_k}$ yang menyatakan bintang dengan himpunan titik $V(K_{1,n_i}) = \{c_i, a_{i1}, \dots, a_{in_i}\}$, dan himpunan sisi $E(K_{1,n_i}) = \{c_i\, a_{i1}, \dots, c_i a_{in_i}\}$ untuk i, $1 \leq i \leq k$. Selanjutnya diberikan sebuah titik a yang dihubungkan ke salah satu titik di K_{1,n_i}, misalkan titik a_{i1}, untuk setiap $i, 1 \leq i \leq k$ di $K_{1,n_1}, K_{1,n_2}, \dots, K_{1,n_k}$ yaitu titik-titik $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{k1}$. Maka diperoleh suatu graf pohon pisang $BT(n_1, n_2, \dots, n_k)$ dengan himpunan titik dari graf pohon pisang $G \cong BT(n_1, n_2, \dots, n_k)$ adalah $V(G) = \{a\} \cup \{c_i | 1 \leq i \leq k\} \cup \{a_{ij} | 1 \leq i \leq k ; 1 \leq j \leq n\}$, dan himpunan sisi dari graf pohon pisang $G \cong BT(n_1, n_2, \dots, n_k)$ adalah $E(G) = \{aa_{i1} \mid 1 \leq i \leq k\} \cup \{c_i a_{ij} \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n\}$.

Pada bab ini akan dibahas tentang Pelabelan Total Sisi-Ajaib Super pada *Banana Tree* $G \cong BT(n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Teorema 3.1. *Untuk* $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = n$, *dimana* $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \leq n \leq k - 1$, *maka graf pohon pisang* $G \cong BT(n_1, n_2, \dots, n_k)$ *memuat suatu pelabelan total sisi-ajaib super.*

Bukti.

Misalkan terdapat graf pohon pisang $G \cong BT(n_1, n_2, \dots, n_k)$, dan $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = n$. Maka

$$v = |V(G)| = k + 1 + k(n) = k(n+1) + 1,\text{dan}$$

$$e = |E(G)| = k + k(n) = k + 1 - 1 + k(n) = v - 1.$$

Kontruksikan sebuah pelabelan graf λ dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan

$\{1, 2, \dots, v + e\}$ atau ditulis $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, v + e\}$, sebagai berikut :

1. Pelabelan untuk titik a dikontruksikan sebagai

$$\lambda(a) = (n+1)k + 1 - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$$

2. Pelabelan titik c_i dengan $i = 1, 2, \dots, k$ dikontrusikan sebagai

$$\lambda(c_i) = \begin{cases} nk + i, & untuk\ 1 \le i \le \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \\ nk + 1 + i, & untuk\ \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil < i \le k \end{cases}$$

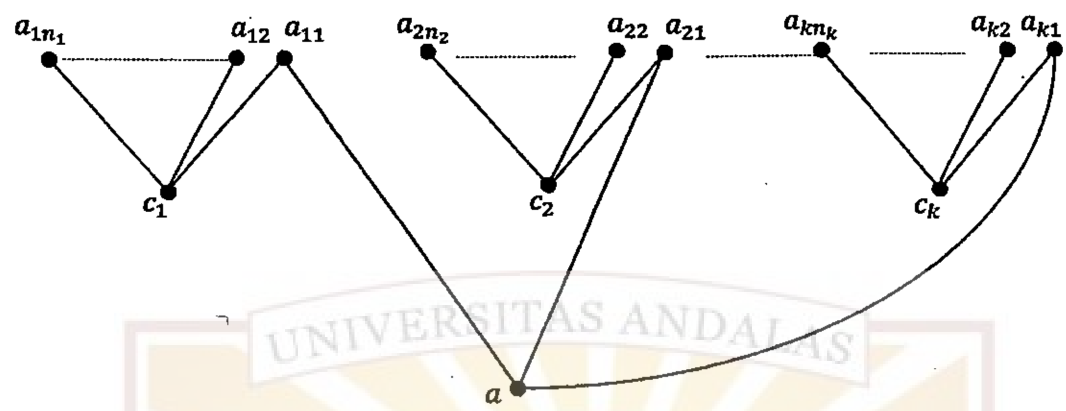
3. Pelabelan titik a_{i1} dengan $i = 1, 2, \dots, k$ dikontruksikan sebagai

$$\lambda(a_{i1}) = \begin{cases} (n+1)i - \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil, & untuk\ i \le \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \\ (n+1)i - n - \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil, & untuk\ i \ge \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 1 \end{cases}$$

4. Pelabelan daun a_{ij}, untuk $1 \le i \le k$ dikontruksikan sebagai,

$$\lambda(\{a_{ij} | 2 \le j \le n\}) = \{(i-1)n + 1, (i-1)n + 2, \dots, (i-1)n + n\} \backslash \{\lambda(a_{i1})\}.$$

Berdasarkan pelabelan titik λ, maka graf pohon pisang setelah diberikan label titik diperoleh graf seperti Gambar 3.1.1.



Gambar 3.1.1 Graf Pohon Pisang BT $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$

Dengan demikian diperoleh himpunan $S = \{f(x) + f(y) | xy \in E(G)\}$, bila diuraikan diperoleh nilai S adalah $S = \{c_1 + a_{11}, c_1 + a_{12}, \ldots, c_k + a_{kn_k}\}$. Maka dari semua bobot sisi dihasilkan membentuk suatu barisan bilangan bulat berurutan

$$S = \{nk + 2,\ nk + 3, \ldots, nk + (n + 1)k + 1\}.$$

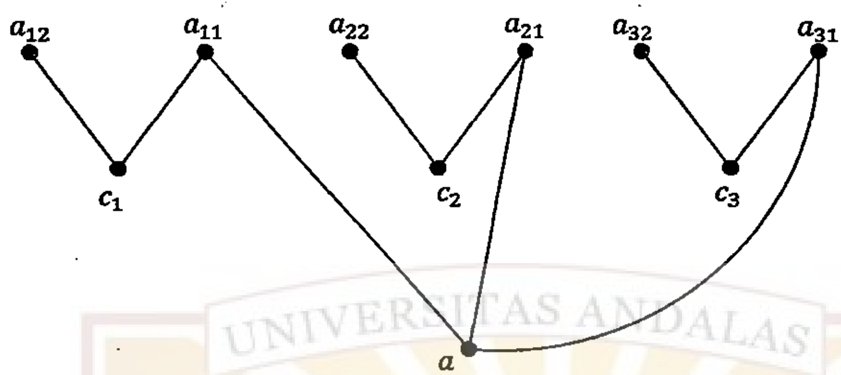
Dengan menggunakan Lema 2.5.3, diperoleh $s = \min(S) = nk + 2$. Maka graf pohon pisang memuat pelabelan total sisi-ajaib super dan diperoleh konstanta ajaib

$$h = v + e + s = k(n + 1) + 1 + k(n + 1) + nk + 2 = 3nk + 2k + 3.$$

■

Contoh 1

Misalkan diberikan $k = 3$ maka $n = 2$, sehingga graf pohon pisang berbentuk $BT(2, 2, 2)$ seperti pada Gambar 3.1.2



Gambar 3.1.2 Graf Pohon Pisang $BT(2,2,2)$

Banyaknya titik dan sisi dari graf pohon pisang $BT(2,2,2)$ masing-masing adalah

$v = |V(G)| = k(n+1)+1 = 3(2+1)+1 = 10$, dan

$e = |E(G)| = v-1 = 10-1 = 9.$

Kontruksikan pelabelan titik pada graf pohon pisang $BT(2,2,2)$, sebagai berikut

1. Pelabelan titik a adalah

$$\lambda(a) = (n+1)k + 1 - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = (3)3 + 1 - 1 = 9.$$

2. Pelabelan titik c_i, $i = 1, 2, 3$ adalah

$$\lambda(c_i) = \begin{cases} nk + i, & untuk\ 1 \leq i \leq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \\ nk + 1 + i, & untuk\ \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil < i \leq k \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 6 + i, & untuk\ 1 \leq i \leq 2 \\ 7 + i, & untuk\ 2 < i \leq 3 \end{cases}$$

Bila diuraikan untuk $i = 1, 2,$ dan 3, maka diperoleh hasil sebagai berikut :

- Untuk $i = 1$, maka $\lambda(c_1) = 6 + i = 6 + 1 = 7$.
- Untuk $i = 2$, maka $\lambda(c_2) = 6 + i = 6 + 2 = 8$.
- Untuk $i = 3$, maka $\lambda(c_3) = 7 + i = 7 + 3 = 10$.

3. Pelabelan titik $a_{i1}, i = 1, 2, 3$ adalah

$$\lambda(a_{i1}) = \begin{cases} (n+1)i - \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil, & untuk\ i \le \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \\ (n+1)i - n - \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil, & untuk\ i \ge \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3i - 2, & untuk\ i \le 2 \\ 3i - 4, & untuk\ i \ge 3 \end{cases}$$

Bila diuraikan untuk $i = 1, 2,$ dan 3, maka diperoleh hasil sebagai berikut :

- Untuk $i = 1$, maka $\lambda(a_{11}) = 3i - 2 = (3)1 - 2 = 1$.
- Untuk $i = 2$, maka $\lambda(a_{21}) = 3i - 2 = (3)2 - 2 = 4$.
- Untuk $i = 3$, maka $\lambda(a_{31}) = 3i - 4 = (3)3 - 4 = 5$.

4. Pelabelan daun a_{ij}, untuk $1 \le i \le 3$ adalah

$$\lambda(\{a_{ij} | 2 \le j \le 2\}) = \{(i-1)2 + 1, (i-1)2 + 2\} \backslash \{\lambda(a_{i1})\}.$$

Bila diuraikan untuk $i = 1, 2,$ dan 3, maka diperoleh hasil sebagai berikut :

- Untuk $i = 1$, maka

  $\lambda(\{a_{1j} | 2 \leq j \leq 2\}) = \lambda(a_{12}) = 2.$

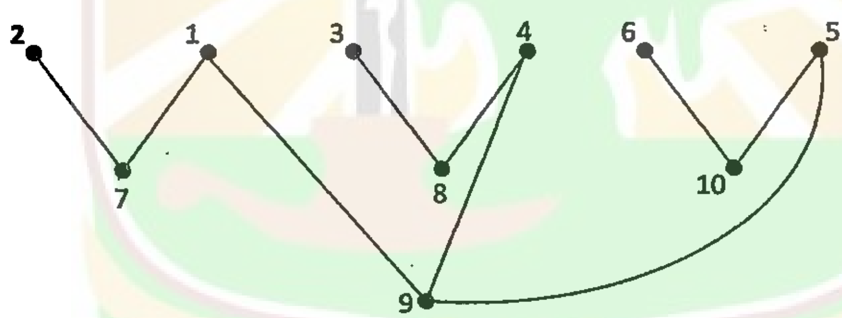
- Untuk $i = 2$, maka

  $\lambda(\{a_{2j} | 2 \leq j \leq 2\}) = \lambda(a_{22}) = 3.$

- Untuk $i = 3$, maka

  $\lambda(\{a_{3j} | 2 \leq j \leq 2\}) = \lambda(a_{32}) = 6.$

Maka diperoleh himpunan label titik dari graf pohon pisang $BT(2,2,2)$ adalah $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$, dapat dilihat pada Gambar 3.1.3.



Gambar 3.1.3 Graf Pohon Pisang $BT(2, 2, 2)$ dengan label titik

Himpunan bobot sisi yang dihasilkan adalah

- $\lambda(c_1) + \lambda(a_{11}) = 8.$
- $\lambda(c_1) + \lambda(a_{12}) = 9.$
- $\lambda(a) + \lambda(a_{11}) = 10.$

- ❖ $\lambda(c_2) + \lambda(a_{21}) = 12.$
- ❖ $\lambda(c_2) + \lambda(a_{22}) = 11.$
- ❖ $\lambda(a) + \lambda(a_{21}) = 13.$
- ❖ $\lambda(c_3) + \lambda(a_{31}) = 15.$
- ❖ $\lambda(c_3) + \lambda(a_{32}) = 16.$
- ❖ $\lambda(a) + \lambda(a_{32}) = 14.$

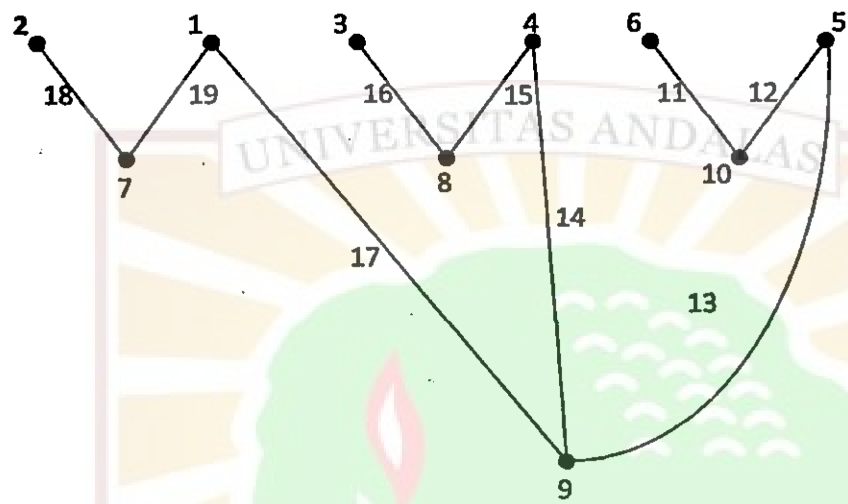
Himpunan bobot sisi yang dihasilkan oleh rumus di atas membentuk suatu barisan bilangan bulat yang berurutan yakni $8, 9, \ldots, 16$, sehingga diperoleh $S = \{8, 9, \ldots, 16\}$, dengan $s = \min(S) = 8$. Dengan menggunakan Lema 2.5.3, maka konstanta ajaib

$$h = v + e + s = 10 + 9 + 8 = 27.$$

Untuk mendapatkan pelabelan total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib $h = 27$, maka akan ditentukan label sisi $v_i v_j \; \forall \; v_i v_j \in E(BT(2,2,2))$ sebagai berikut :

- ➢ $\lambda(c_1 a_{11}) = h - [\lambda(c_1) + \lambda(a_{11})] = 27 - [7 + 1] = 19.$
- ➢ $\lambda(a a_{11}) = h - [\lambda(a) + \lambda(a_{11})] = 27 - [9 + 1] = 17.$
- ➢ $\lambda(c_2 a_{22}) = h - [\lambda(c_2) + \lambda(a_{22})] = 27 - [8 + 3] = 16.$
- ➢ $\lambda(c_2 a_{21}) = h - [\lambda(c_2) + \lambda(a_{21})] = 27 - [8 + 4] = 15.$
- ➢ $\lambda(a a_{21}) = h - [\lambda(a) + \lambda(a_{21})] = 27 - [9 + 4] = 14.$
- ➢ $\lambda(a a_{31}) = h - [\lambda(a) + \lambda(a_{31})] = 27 - [9 + 5] = 13.$
- ➢ $\lambda(a_3 a_{31}) = h - [\lambda(a_3) + \lambda(a_{31})] = 27 - [10 + 5] = 12.$
- ➢ $\lambda(c_3 a_{32}) = h - [\lambda(c_3) + \lambda(a_{32})] = 27 - [10 + 6] = 11.$

Diperoleh pelabelan total sisi-ajaib super pada graf pohon pisang $BT(2,2,2)$ dengan nilai $k=3$ dan $n=2$ seperti pada Gambar 3.1.4 sebagai berikut :



Gambar 3.1.4 Graf Pohon Pisang $BT(2,2,2)$ dengan label titik dan sisi

Teorema 3.2 *Untuk* $n_1 > n_2 > \cdots > n_k > 1$, *maka graf pohon pisang* $G \cong BT(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ *memuat pelabelan total sisi-ajaib super .*

Bukti.

Misalkan terdapat graf pohon pisang $G \cong BT(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ dengan $n_1 > n_2 > \cdots > n_k > 1$. Maka

$$v = |V(G)| = k + 1 + (n_1 + n_2 + \cdots + n_k) = k + 1 + \sum_{i=1}^{k} n_i, \text{ dan}$$

$$e = |E(G)| = k + \sum_{i=1}^{k} n_i = v - 1.$$

Kontruksikan sebuah pelabelan graf λ dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan

$\{1,2,\dots,v+e\}$ atau ditulis $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1,2,\dots,v+e\}$, sebagai berikut

1. Pelabelan untuk titik a dikontruksikan sebagai,

   $\lambda(a) = v - 2$

2. Pelabelan untuk titik $C_i, i = 1,2,\dots,k$ dikontruksikan sebagai,

$$\lambda(c_i) = \begin{cases} (v-k-1)+i, & untuk\ 1 \le i \le k-2 \\ (v-k)+i, & untuk\ k-1 \le i \le k \end{cases}$$

3. Pelabelan untuk titik $a_{i1}, i = 1,2,\dots,k$ dikontruksikan sebagai,

$$\lambda(a_{i1}) = \begin{cases} i+2-k+\sum_{l=1}^{i} n_l, & untuk\ 1 \le i \le k-2 \\ -(n_i+1)+\sum_{l=1}^{i+1} n_l, & untuk\ i = k-1 \\ \sum_{l=1}^{i} n_l, & untuk\ i = k \end{cases}$$

4. Pelabelan daun a_{ij} untuk $1 \le i \le k$ didefinisikan sebagai,

$$\lambda(\{a_{ij} | 2 \le j \le n\}) = \{a, a-1, \dots, a-(n_i-1)\} \backslash \{\lambda a_{i1})\},$$

   di mana $a = \sum_{l=1}^{i} n_l$

Berdasarkan pelabelan titik λ, maka graf pohon pisang setelah diberikan label titik diperoleh graf seperti Gambar 3.2.1.

$\{1,2,\dots,v+e\}$ atau ditulis $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1,2,\dots,v+e\}$, sebagai berikut

1. Pelabelan untuk titik a dikontruksikan sebagai,

   $$\lambda(a) = v - 2$$

2. Pelabelan untuk titik $C_i, i = 1,2,\dots,k$ dikontruksikan sebagai,

   $$\lambda(c_i) = \begin{cases} (v-k-1)+i, & untuk\ 1 \le i \le k-2 \\ (v-k)+i, & untuk\ k-1 \le i \le k \end{cases}$$

3. Pelabelan untuk titik a_{i1}, $i = 1,2,\dots,k$ dikontruksikan sebagai,

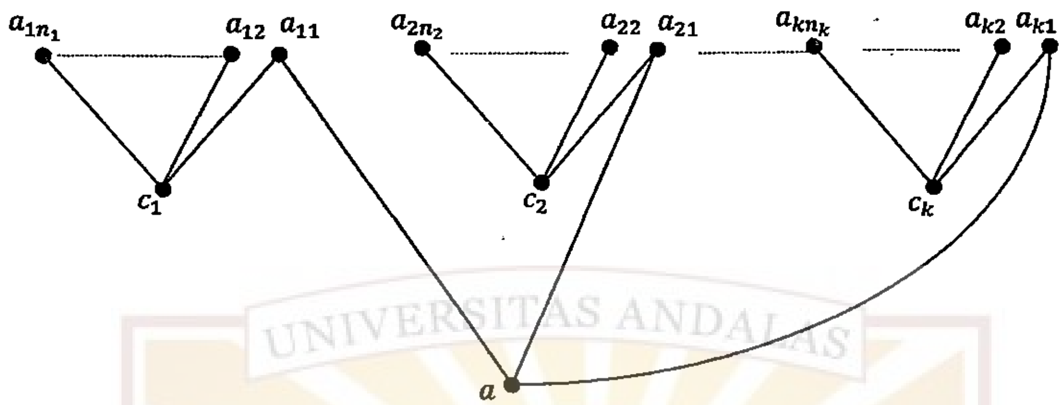
   $$\lambda(a_{i1}) = \begin{cases} i+2-k+\sum_{l=1}^{i} n_l, & untuk\ 1 \le i \le k-2 \\ -(n_i+1)+\sum_{l=1}^{i+1} n_l, & untuk\ i = k-1 \\ \sum_{l=1}^{i} n_l, & untuk\ i = k \end{cases}$$

4. Pelabelan daun a_{ij} untuk $1 \le i \le k$ didefinisikan sebagai,

   $$\lambda(\{a_{ij} | 2 \le j \le n\}) = \{a, a-1, \dots, a-(n_i-1)\} \backslash \{\lambda a_{i1})\},$$

   di mana $a = \sum_{l=1}^{i} n_l$

Berdasarkan pelabelan titik λ, maka graf pohon pisang setelah diberikan label titik diperoleh graf seperti Gambar 3.2.1.



Gambar 3.2.1 Graf Pohon Pisang BT $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$

Dengan demikian diperoleh himpunan $S = \{f(x) + f(y) | xy \in E(G)\}$, bila diuraikan diperoleh nilai S adalah $S = \{c_1 + a_{11}, c_1 + a_{12}, \ldots, c_k + a_{kn_k}\}$. Maka dari semua bobot sisi dihasilkan membentuk suatu barisan bilangan bulat berurutan

$$S = \{v + 1 - k, v + 2 - k, \ldots, v + e - k\}.$$

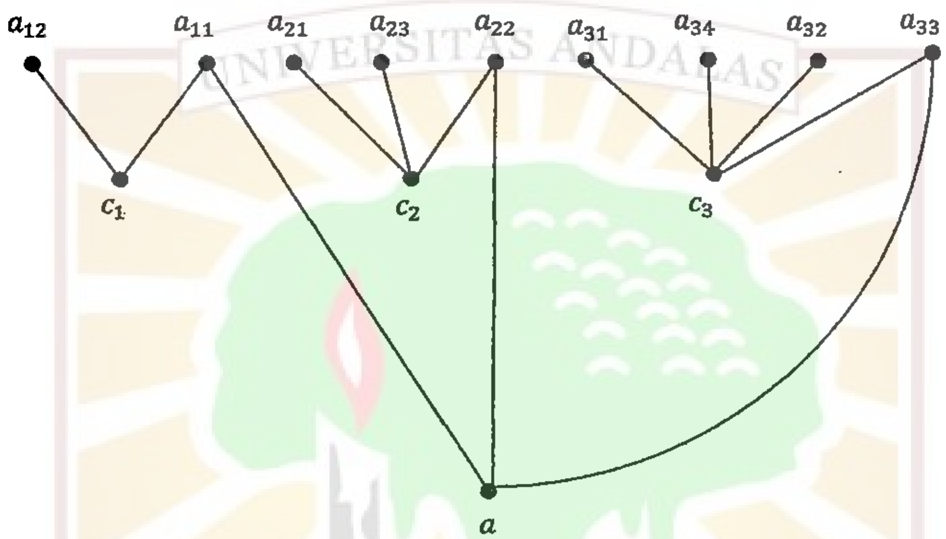
Dengan menggunakan Lema 2.5.3, diperoleh $s = \min(S) = v + 1 - k$. Maka graf pohon pisang memuat pelabelan total sisi-ajaib super dan diperoleh konstanta ajaib

$$h = v + e + s = v + v - 1 + v + 1 - k = 3v - k.$$

■

Contoh 2

Misalkan diberikan $k = 3$, maka diperoleh $n_1 = 2, n_2 = 3$, dan $n_3 = 4$, sehingga graf pohon pisang berbentuk $BT(2,3,4)$ seperti pada Gambar 3.2.2



Gambar 3.2.2 Graf Pohon Pisang $BT(2,3,4)$

Banyaknya titik dan sisi dari graf pohon pisang $BT(2,3,4)$ masing-masing adalah

$$v = |V(G)| = k + 1 + \sum_{i=1}^{k} n_i = 3 + 1 + \sum_{i=1}^{3} n_i = 4 + (n_1 + n_2 + n_3) = 13,$$

dan

$$e = |E(G)| = v - 1 = 13 - 1 = 12.$$

Konstruksikan pelabelan titik pada graf pohon pisang $BT(2,3,4)$ sebagai berikut

1. Pelabelan titik a adalah

   $\lambda(a) = v - 2 = 13 - 2 = 11.$

2. Pelabelan titik $c_i, i = 1,2,3$

$$\lambda(c_i) = \begin{cases} (v-k-1)+i, & untuk\ 1 \le i \le k-2 \\ (v-k)+i, & untuk\ k-1 \le i \le k \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 9+i, & untuk\ 1 \le i \le 1 \\ 10+i, & untuk\ 2 \le i \le 3 \end{cases}$$

   Bila diuraikan untuk $i = 1, 2$, dan 3, maka diperoleh hasil sebagai berikut :

   - Untuk $i = 1$, maka $\lambda(c_1) = 9 + i = 9 + 1 = 10.$
   - Untuk $i = 2$, maka $\lambda(c_2) = 10 + i = 10 + 2 = 12.$
   - Untuk $i = 3$, maka $\lambda(c_3) = 10 + i = 10 + 3 = 13.$

3. Pelabelan titik $a_{i1}, i = 1,2,3$ adalah

$$\lambda(a_{i1}) = \begin{cases} i+2-k+\sum_{l=1}^{i} n_l, & untuk\ 1 \le i \le k-2 \\ -(n_i+1)+\sum_{l=1}^{i+1} n_l, & untuk\ i = k-1 \\ \sum_{l=1}^{i} n_l, & untuk\ i = k \end{cases}$$

$$= \begin{cases} i+1+\sum_{l=1}^{i} n_l, & untuk\ 1 \le i \le 1 \\ -(n_i+1)+\sum_{l=1}^{i+1} n_l, & untuk\ i = 2 \\ \sum_{l=1}^{i} n_l, & untuk\ i = 3 \end{cases}$$

Bila diuraikan untuk $i = 1, 2$, dan 3, maka diperoleh hasil sebagai berikut :

- Untuk $i = 1$, maka

  $\lambda(a_{11}) = i - 1 + \sum_{l=1}^{i} n_l = 1 - 1 + \sum_{l=1}^{1} n_l = n_1 = 2.$

- Untuk $i = 2$, maka

$$\lambda(a_{21}) = -(n_i + 1) + \sum_{l=1}^{i+1} n_l = -(n_2 + 1) + \sum_{l=1}^{3} n_l$$

$$= -(3 + 1) + (n_1 + n_2 + n_3) = -(4) + (2 + 3 + 4) = 5.$$

- Untuk $i = 3$, maka

$$\lambda(a_{31}) = \sum_{l=1}^{i} n_l = \sum_{l=1}^{3} n_l = n_1 + n_2 + n_3 = 2 + 3 + 4 = 9$$

4. Pelabelan daun a_{ij} untuk $1 \le i \le 3$ adalah

$$\lambda(\{a_{ij} | 2 \le j \le n\}) = \{a, a - 1, \dots, a - (n_i - 1)\} \backslash \{\lambda a_{i1})\}$$

di mana $a = \sum_{l=1}^{i} n_l$

Bila diuraikan untuk $i = 1, 2$, dan 3, maka diperoleh hasil sebagai berikut :

- Untuk $i = 1$, dengan

$$a = \sum_{l=1}^{i} n_l = \sum_{l=1}^{1} n_l = n_1 = 2$$

  maka

  $\lambda(\{a_{1j} | 2 \le j \le 2\}) = \lambda(a_{12}) = 1.$

- Untuk $i = 2$, dengan

$$a = \sum_{l=1}^{i} n_l = \sum_{l=1}^{2} n_l = n_1 + n_2 = 2 + 3 = 5$$

maka

$\lambda(\{a_{2j}|2 \leq j \leq 3\}) = \lambda(a_{22}, a_{23}) = 3, 4$

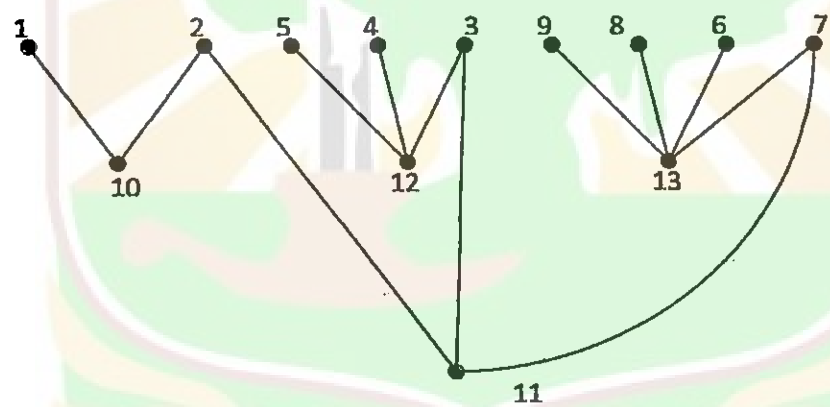
- Untuk $i = 3$, dengan

$$a = \sum_{l=1}^{i} n_l = \sum_{l=1}^{3} n_l = n_1 + n_2 + n_3 = 2 + 3 + 4 = 9$$

maka

$\lambda(\{a_{3j}|2 \leq j \leq 4\}) = \lambda(a_{32}, a_{33}, a_{34}) = 6, 7, 8$

Maka diperoleh himpunan label titik dari graf pohon pisang $BT(2, 3, 4)$ adalah $\{1, 2, 3, \ldots, 13\}$ seperti yang dapat dilihat pada Gambar 3.2.3



Gambar 3.2.3 Graf Pohon Pisang $BT(2, 3, 4)$ dengan label titik

Himpunan bobot sisi yang dihasilkan adalah

- $\lambda(c_1) + \lambda(a_{11}) = 12.$
- $\lambda(c_1) + \lambda(a_{12}) = 11.$
- $\lambda(a) + \lambda(a_{11}) = 13.$

- $\lambda(c_2) + \lambda(a_{21}) = 17.$
- $\lambda(c_2) + \lambda(a_{22}) = 15.$
- $\lambda(c_2) + \lambda(a_{23}) = 16.$
- $\lambda(a) + \lambda(a_{22}) = 14.$
- $\lambda(c_3) + \lambda(a_{31}) = 22.$
- $\lambda(c_3) + \lambda(a_{32}) = 19.$
- $\lambda(c_3) + \lambda(a_{33}) = 20.$
- $\lambda(c_3) + \lambda(a_{34}) = 21.$
- $\lambda(a) + \lambda(a_{33}) = 18.$

Himpunan bobot sisi yang dihasilkan oleh rumus di atas membentuk suatu barisan bilangan bulat berurutan yakni $11, 12, \dots, 22$ sehingga diperoleh $S = \{11, 12, \dots, 22\}$, dengan $s = \min(S) = 11$. Dengan menggunakan Lema 2.5.3, maka konstanta ajaib

$$h = v + e + s = 13 + 12 + 11 = 36.$$

Untuk mendapatkan pelabelan total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib $h = 36$, maka akan ditentukan label sisi $v_i v_j \ \forall \ v_i v_j \in E(BT(2,3,4))$ sebagai berikut :

- $\lambda(c_1 a_{12}) = h - [\lambda(c_1) + \lambda(a_{12})] = 36 - [10 + 1] = 25.$
- $\lambda(c_1 a_{11}) = h - [\lambda(c_1) + \lambda(a_{11})] = 36 - [10 + 2] = 24.$
- $\lambda(a a_{12}) = h - [\lambda(a) + \lambda(a_{12})] = 36 - [11 + 2] = 23.$
- $\lambda(a a_{22}) = h - [\lambda(a) + \lambda(a_{22})] = 36 - [11 + 3] = 22.$
- $\lambda(c_2 a_{22}) = h - [\lambda(c_2) + \lambda(a_{22})] = 36 - [12 + 3] = 21.$

➢ $\lambda(c_2a_{23}) = h - [\lambda(c_2) + \lambda(a_{23})] = 36 - [12 + 4] = 20.$

➢ $\lambda(c_2a_{21}) = h - [\lambda(c_2) + \lambda(a_{21})] = 36 - [12 + 5] = 19.$

➢ $\lambda(aa_{33}) = h - [\lambda(a) + \lambda(a_{33})] = 36 - [11 + 7] = 18.$

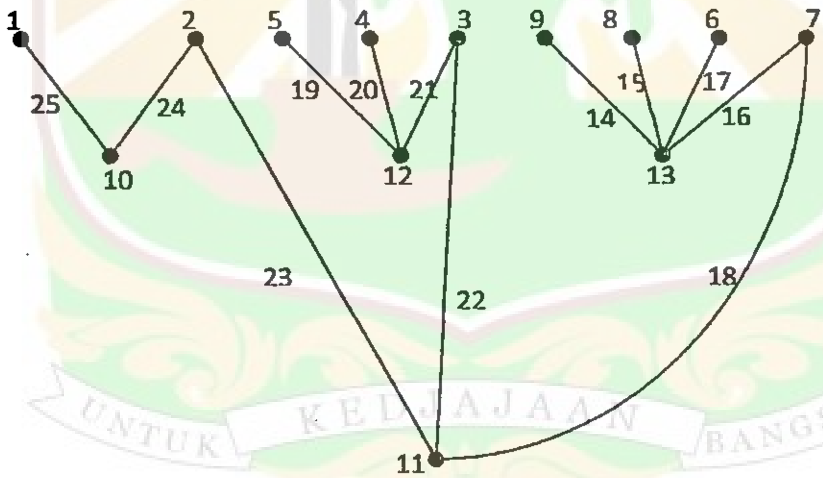
➢ $\lambda(c_3a_{32}) = h - [\lambda(c_3) + \lambda(a_{32})] = 36 - [13 + 6] = 17.$

➢ $\lambda(c_3a_{33}) = h - [\lambda(c_3) + \lambda(a_{33})] = 36 - [13 + 7] = 16.$

➢ $\lambda(c_3a_{34}) = h - [\lambda(c_3) + \lambda(a_{34})] = 36 - [13 + 8] = 15.$

➢ $\lambda(c_3a_{31}) = h - [\lambda(c_3) + \lambda(a_{31})] = 36 - [13 + 9] = 14.$

Diperoleh pelabelan total sisi-ajaib super pada graf pohon pisang $BT(2,3,4)$ dengan nilai $k = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, dan $n_3 = 4$ seperti pada Gambar 3.2.4 sebagai berikut



Gambar 3.2.4 Graf Pohong Pisang $BT(2,3,4)$ dengan label titik dan sisi

BAB IV

KESIMPULAN

Graf pohon pisang $BT(n_1,\ n_2, \dots,\ n_k)$ suatu pohon yang diperoleh dari sebuah titik a yang dihubungkan ke salah satu titik di K_{1,n_i}, misalkan titik a_{i1}, untuk setiap $i, 1 \leq i \leq k$ di $K_{1,n_1}, K_{1,n_2}, \dots, K_{1,n_k}$ yaitu titik-titik $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{k1}$. Graf pohon pisang $BT(n_1,\ n_2, \dots,\ n_k)$ memuat pelabelan total sisi-ajaib super jika $(V(G)) = \{1,2, \dots, v\}$ dengan v adalah banyaknya titik di G. maka dapat disimpulkan bahwa graf pohon pisang memuat pelabelan total sisi-ajaib super.

Berdasarkan hasil sebelumnya, yaitu teorema 3.1 dan teorema 3.2 dapat disimpulkan bahwa graf pohon pisang $BT(n_1,\ n_2, \dots,\ n_k)$ memuat pelabelan total sisi-ajaib super.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Kotzig. A and Rosa. 1970. **Magic Valuations of Finite Graphs,** Canad. Math, Bull. 451-461.

[2] Stewart, B.M. 1967. **Super Magic Complete Graph,** Canadian J. Math. 427-438.

[3] Baskoro E. T and A. A. G. Ngurah. 2003. **On Super Edge-Magic-Total Labeling,** Bull. Inst. Combin. Appl. 82-87.

[4] Enomoto, H, A. S. Llado, T. Nakamigawa, and G. Ringle. 1980. **Super Edge-Magic Graphs,** SUT J. Math. 105-109.

[5] R. M. Figueroa-Centeno, R. Inchishima and F. A. Muntaner-Batle. 2001. **The Place of Super Edge-Magic Labeling among Other Classes of Labeling,** Discrete Math. 153-168.

[6] Swaminathan, V. and P. Jeyanthi. 2006. **Super Edge-Magic Strength of Fire Crackers, Banana Tree and Unicyclic Graphs,** Discrete Math. 1624-1636.

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis bernama Merdekawati, dilahirkan di Kota Jambi pada tanggal 10 Agustus 1988, anak ketiga dari tiga bersaudara, buah hati dari pasangan Supirman dan Murni. Penulis menamatkan pendidikan dasar di SDN 199 dan Madrasah Ibtidayah pada tahun 2000 kemudian melanjutkan ke SMPN 2 Jambi dan menamatkannya pada tahun 2003. Penulis melanjutkan pendidikan ke SMAN 8 Jambi dan selesai pada tahun 2006. Di tahun yang sama penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur Reguler Mandiri. Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) pada tahun 2009 di jorong Lundar Kanagarian Panti, Kabupaten Pasaman Timur, dalam rangka menyelesaikan salah satu mata kuliah wajib Fakultas.