SYARAT PERLU UNTUK GRAF RAMSEY 2K2, Cn)-MINIMAL

SKRIPSI

JONDESI
06134044

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2012

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa:

Nama	:	JONDESI
No. Buku Pokok	:	06 134 044
Jurusan	:	Matematika
Bidang	:	Kombinatorika
Judul Skripsi	:	**Syarat Perlu Untuk Graf Ramsey$(2K_2, C_n)$-Minimal**

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal **02 Agustus 2012** berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing,

1.

Dr. Lyra Yulianti
NIP. 19750706 199903 2 003

2.

Budi Rudianto, M.Si
NIP.132 169 920

Penguji,

1.

Narwen, M.Si
NIP. 19670410 199702 1 001

2.

Dr, Admi Nazra
NIP. 19730330 199903 1 002

3.

Zulakmal, M.Si
NIP. 19671108 199802 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand

Dr. Syafrizal Sy
NIP. 19670807 199309 1 001

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur tak henti-hentinya penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas segala limpahan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul **"Syarat Perlu untuk GRAF Ramsey$(2K_2, C_n)$-MINIMAL"** yang merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang. Salawat dan salam semoga selalu tercurah kepada Baginda Rasulullah SAW yang menebar ilmu dan iman dalam cahaya Islam yang beliau bawa.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, dorongan, kerjasama maupun bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Ibu Dr. Lyra Yulianti selaku Pembimbing I yang dengan sabar mengarahkan penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini melalui bimbingan dan diskusi yang sangat bermanfaat. Serta ilmu, ide, saran, dan nasihat yang diberikan selama penulis menjalani perkuliahan.

2. Bapak Budi Rudianto, M.Si selaku Pembimbing II yang membantu penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini, serta ilmu yang didapat selama penulis menjalani perkuliahan.

3. Bapak Narwen, M.Si Bapak Dr. Admi Nazra dan Bapak Zulakmal, M.Si selaku penguji skripsi yang telah memberi masukan dan saran kepada penulis

dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.

4. Bapak Dr. Admi Nazra selaku dosen Pembimbing Akademik.

5. Bapak Dr. Syafrizal Sy selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang.

6. Bapak/Ibu dosen Jurusan Matematika FMIPA Unand yang telah membagi ilmunya kepada penulis dalam proses perkuliahan. Karyawan/i Jurusan Matematika FMIPA Unand yang telah membantu selama penulis melaksanakan studi di Unand.

7. Ayahanda Basri dan Ibunda Fahrida yang teristimewa, serta Abang dan Uniku tersayang yang telah memberikan dorongan semangat, do'a, dan motivasi tiada henti.

8. Semua pihak yang turut membantu hingga selesainya skripsi ini, terutama teman-teman angkatan 2006, senior-senior dan adik-adik angkatan 2007,2008,2009 dan 2010 di Jurusan Matematika FMIPA Unand.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini belum sempurna. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun demi kesempurnaan skripsi ini sehingga dapat bermanfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan.

Padang, Juni 2012

Jondesi

ABSTRAK

Diberikan dua graf G dan H. Notasi $F \rightarrow (G, H)$ berarti bahwa sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F mengakibatkan F memuat subgraf merah yang isomorfik dengan G atau subgraf biru yang isomorfik dengan H. Graf F disebut sebagai graf $Ramsey(G, H) - minimal$ jika $F \rightarrow (G, H)$ dan $F^* \nrightarrow (G, H)$ untuk sebarang subgraf sejati $F^* \subset F$. Dalam skripsi ini akan dikaji tentang beberapa syarat perlu untuk graf yang berada dalam kelas berhingga $\mathcal{R}(2K_2, C_n)$ untuk $n \geq 4$.

Kata Kunci: Graf Ramsey minimal

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1735 oleh seorang matematikawan terkenal Swiss yang bernama Leonhard Euler. Teori graf pertama kali muncul sebagai representasi permasalahan Jembatan Konigsberg yang sangat terkenal. Terdapat tujuh jembatan yang berada di atas sungai Pregel di kota Konigsberg, salah satu kota yang terletak di Prusia bagian Timur Jerman. Permasalahan yang timbul adalah bagaimana cara seseorang berpindah dari satu tempat ke tempat lain dengan melewati setiap jembatan tepat satu kali.

Permasalahan graf juga dikaji oleh Frank Plumpton Ramsey pada tahun 1930. Teori Ramsey adalah suatu area penelitian dalam teori graf yang sedang berkembang pesat dan mempunyai banyak aplikasi. Meskipun tergolong area yang baru dalam bidang kombinatorik, khususnya dalam teori graf, teori ini telah mendapat perhatian dari banyak peneliti. Akibatnya, kajian ini berkembang pesat dan telah memperoleh banyak hasil.

Terlebih dahulu diberikan definisi mengenai graf. Graf $G = (V, E)$ adalah suatu sistem yang terdiri dari himpunan titik berhingga tak kosong $V = V(G)$ dan himpunan sisi $E = E(G)$, yaitu himpunan bagian dari himpunan pasangan tak terurut dari anggota-anggota V. Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf. Jika

$e = uv \in E(G)$, maka u disebut tetangga dari v, demikian juga sebaliknya. Pada tahun 1935, Erdős dan Szekeres mengkaji dan mengaplikasikan teorema Ramsey kedalam teori graf yang menghasilkan teorema Ramsey untuk graf lengkap.

Seiring dengan perkembangan ilmu matematika, studi bilangan Ramsey pun diperumum untuk kombinasi dari berbagai jenis graf lain, seperti graf siklus dan graf lainnya.

Misalkan diberikan graf G dan H sebarang. Notasi $F \rightarrow (G, H)$ berarti bahwa sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F mengakibatkan F memuat subgraf merah yang isomorfik dengan G atau subgraf biru yang isomorfik dengan H. Suatu *pewarnaan* $-$ (G, H) pada graf F didefinisikan sebagai pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F sedemikian sehingga F tidak memuat subgraf merah G sekaligus tidak memuat subgraf biru H.

Dengan menggunakan notasi panah di atas dapat didefinisikan beberapa jenis bilangan Ramsey. *Bilangan Ramsey graf* $R(G, H)$ didefinisikan sebagai banyaknya titik minimum dari graf lengkap K_n yang memenuhi $K_n \rightarrow (G, H)$. Selanjutnya graf F disebut sebagai *graf Ramsey* (G, H)*-minimal* jika $F \rightarrow (G, H)$ dan $F - e \nrightarrow (G, H)$ untuk sebarang sisi e di F. Semua *graf Ramsey (G,H)-minimal* dikelompokkan dalam kelas yang dinamakan *kelas Ramsey(G,H)-minimal*, yang dinotasikan sebagai $\mathcal{R}(G, H)$. Karena tingkat kesulitan yang cukup tinggi, hasil yang diperoleh terkait $\mathcal{R}(G, H)$ masih sangat sedikit, bahkan untuk graf G dan H yang berukuran kecil atau yang berstruktur sederhana sekalipun. Oleh karena itu, masalah ini menjadi topik yang sangat menarik untuk dikaji.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, permasalahan pada tugas akhir ini adalah bagaimana menentukan syarat perlu untuk graf yang berada dalam $\mathcal{R}(2K_2, C_n)$, untuk $n \geq 4$ sedemikian sehingga akan diperoleh karakterisasi dari graf yang berada dalam $\mathcal{R}(2K_2, C_n)$.

1.3 Pembatasan Masalah

Karena penentuan karakterisasi graf Ramsey masih merupakan masalah yang sangat sulit, maka pada skripsi ini akan dibahas tentang syarat perlu untuk $\mathcal{R}(2K_2, C_n)$, $n \geq 4$

1.4 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan penulisan skripsi ini adalah menentukan syarat perlu untuk graf yang berada dalam $\mathcal{R}(2K_2, C_n)$.

1.5 Sistematika Penulisan

Tugas Akhir ini dibagi menjadi empat bab, yaitu Bab I menguraikan tentang latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan, sedangkan Bab II berisi teori-teori dan definisi yang mendukung pembahasan. Kemudian, pembahasan serta penyelesaian permasalahan dalam penulisan tugas akhir ini akan diberikan pada Bab III. Penulisan tugas akhir ini diakhiri oleh Bab IV yang berisi kesimpulan.

BAB II

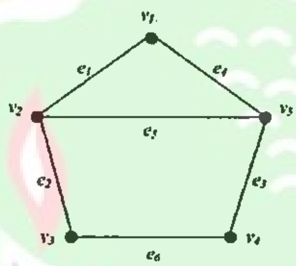
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas tentang definisi dan terminologi dalam teori graf, jenis-jenis graf, dan pengertian bilangan graf Ramsey, serta graf Ramsey minimal.

2.1 Definisi dan Terminologi

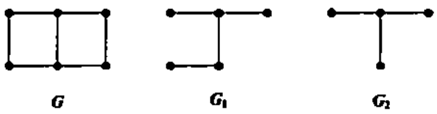
Graf G adalah suatu pasangan himpunan (V, E), yang dapat ditulis dengan $G = (V(G), E(G))$ dimana $V(G)$ adalah himpunan titik (*vertices*) dan $E(G)$ adalah himpunan sisi (*edges*). Banyaknya titik pada graf G disebut dengan kardinalitas $V(G)$ yang dapat dinotasikan dengan $|V(G)|$, sedangkan banyaknya sisi pada graf G disebut dengan kardinalitas $E(G)$ yang dapat dinotasikan dengan $|E(G)|$. Misalkan u dan v adalah dua titik yang bertetangga di G. Jika terdapat lebih dari dua sisi yang menghubungkan u dan v, maka G dikatakan graf yang memuat sisi ganda. Selanjutnya jika titik-titik ujung dari suatu sisi terkait pada titik yang sama, maka sisi tersebut dinamakan loop.

Graf G dikatakan graf sederhana apabila G tidak memuat sisi ganda dan loop. Untuk selanjutnya pada tulisan ini hanya dibicarakan tentang graf sederhana. Titik u disebut tetangga (*neighbour*) dari titik v jika $e = uv$ untuk suatu $e \in E(G)$. Lebih lanjut, titik u dan v dikatakan sebagai dua titik yang bertetangga, sedangkan sisi e dikatakan terkait (*incident*) dengan titik u dan v. Banyaknya sisi yang bertetangga dari $v \in V(G)$ dikatakan derajat dari v di G. Dua sisi e_1 dan e_2 pada G disebut sisi-sisi bertetangga jika e_1 dan e_2 terkait pada satu titik yang sama. Gambar 2.1.1 memperlihatkan bahwa $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dengan $|V(G)| = 5$, sedangkan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ dengan $|E(G)| = 6$. Titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 dan v_5 sedangkan sisi e_6 bertetangga dengan sisi e_2 dan e_3.



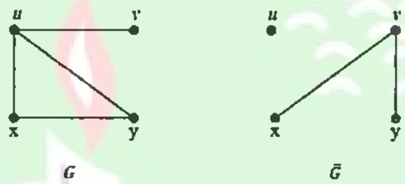
Gambar 2.1.1. Ketetanggaan pada suatu graf

Graf H disebut subgraf dari graf G, yang dinotasikan dengan $H \subseteq G$, jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Suatu subgraf dari graf G dapat diperoleh dengan menghapus titik atau sisi di G. Misalkan $u \in V(G)$ dengan $|V(G)| \geq 2$, maka $G - u$ adalah subgraf dari graf G dengan $V(G - u) = V(G)\backslash\{u\}$ dan $E(G-u) = E(G)\backslash\{uv|v \in V(G)\}$. Misalkan $e \in E(G)$, maka $G - e$ adalah suatu subgraf dari graf G dengan $V(G - e) = V(G)$ dan $E(G - e) = E(G)\backslash\{e\}$, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.1.2 berikut :



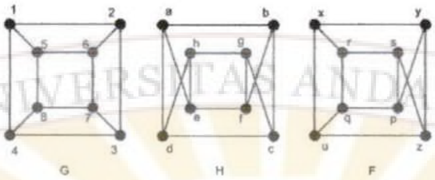
Gambar 2.1.2. Graf G_1 dan G_2 subgraf dari Graf G

Komplemen dari graf G, dinotasikan dengan $\bar{G}$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$, dimana dua titik bertetangga di $\bar{G}$ jika dan hanya jika dua titik tersebut tidak bertetangga di graf G. Gambar 2.1.3 memperlihatkan suatu graf dan komplemennya.



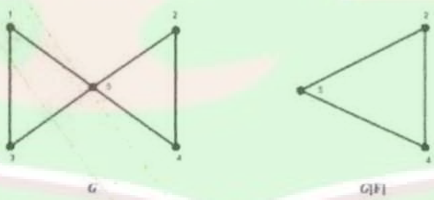
Gambar 2.1.3. Graf dan komplemennya

Dua graf G dan H dikatakan **isomorfik** jika terdapat pemetaan satu-satu dan pada $\phi : V(G) \to V(H)$ sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in V(G)$ berlaku $xy \in E(G)$ jika dan hanya jika $\phi(x)\phi(y) \in E(H)$. Dalam Gambar 2.1.4, graf G isomorfik dengan graf H karena terdapat pemetaan satu-satu dan pada.



Gambar 2.1.4. Graf G isomorfik dengan H tetapi tidak isomorfik dengan F

Subgraf F dikatakan subgraf terinduksi di G jika F subgraf dari G dan juga untuk $u, v \in E(G)$ mengakibatkan $uv \in E(F)$. Graf G yang diinduksi oleh F dinotasikan dengan $G[F]$. Contoh dari graf yang diinduksi oleh subgraf F dapat dilihat pada gambar berikut.



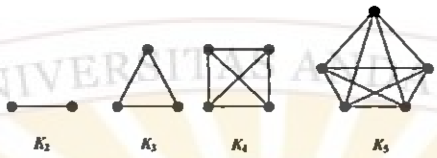
Gambar 2.1.5. Ilustrasi penginduksian suatu graf

2.2 Jenis-jenis Graf

Berikut diberikan beberapa jenis graf.

2.2.1 Graf Lengkap

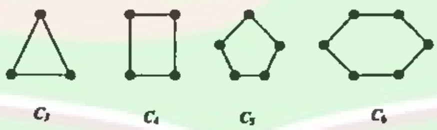
Graf lengkap (*complete graph*) adalah graf sederhana yang setiap titiknya bertetangga ke semua titik lainnya. Graf lengkap dengan n titik dilambangkan dengan K_n. Setiap titik pada K_n berderajat $n - 1$.



Gambar 2.2.6. Graf Lengkap K_2, K_3, K_4, K_5

2.2.2 Graf Siklus

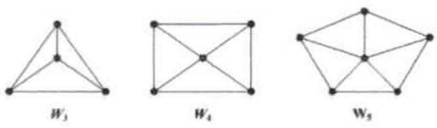
Graf siklus adalah graf terhubung yang setiap titiknya berderajat dua. Graf siklus dengan n titik dilambangkan dengan C_n. Gambar 2.2.7 merupakan gambar graf siklus C_n, dengan $3 \leqslant n \leqslant 6$.



Gambar 2.2.7. Graf Siklus C_n, $3 \leqslant n \leqslant 6$

2.2.3 Graf Roda

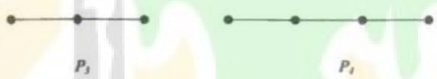
Graf roda (*wheel*) adalah suatu graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu titik pada graf siklus C_n, kemudian menghubungkan titik baru tersebut dengan semua titik pada graf siklus tersebut. Graf roda dengan $n+1$ titik dilambangkan dengan simbol W_n.



Gambar 2.2.8. Graf Roda W_n dengan $3 \leqslant n \leqslant 5$

2.2.4 Graf Lintasan

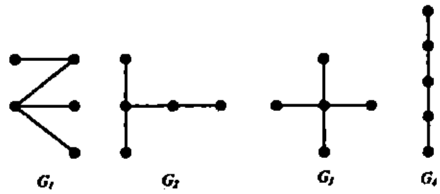
Graf lintasan dengan n titik dilambangkan dengan P_n. Graf lintasan dengan n titik memiliki $n-1$ sisi.



Gambar 2.2.9. Graf lintasan P_3 dan P_4

2.2.5 Graf Pohon

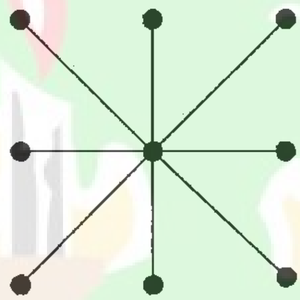
Graf pohon dengan n titik dilambangkan dengan T_n. Graf pohon T_n adalah graf terhubung berorde n yang tidak memuat siklus. Titik-titik berderajat satu pada pohon dinamakan daun. Setiap pohon yang nontrivial memiliki setidaknya dua daun. Perhatikan Gambar 2.2.10 di bawah ini



Gambar 2.2.10. Empat kemungkinan graf pohon dengan lima titik

2.2.6 Graf Bintang

Graf bintang (*star*) S_n adalah graf pohon berorde $n+1$ dan memiliki satu titik berderajat n, sementara n titik lainnya berderajat satu. Pada Gambar 2.2.11 diberikan graf S_9 dengan satu titik pusat dan delapan buah sinar bintang.



Gambar 2.2.11. Graf Bintang S_9

2.3 Bilangan Ramsey Graf

Salah satu kajian dalam matematika kombinatorika yang mendasari munculnya teori Ramsey adalah *Prinsip Pigeonhole*, yaitu *jika akan ditempatkan* $k+1$ *buah objek ke* k *kotak, maka paling sedikit terdapat satu kotak yang memuat dua objek atau lebih.* Keterkaitan prinsip ini dapat diilustrasikan dengan contoh sebagai berikut.

Jika sebuah grup terdiri atas enam orang dan masing-masing pasangan dari individu-individu mempunyai dua teman atau dua musuh, maka terdapat tiga orang yang saling bersahabat atau tiga orang yang saling bermusuhan, tetapi tidak sekaligus keduanya.

Pada tahun 1935, Erdös dan Szekeres mengkaji teori Ramsey dan kemudian mengaplikasikannya kedalam teori graf.

Berikut didefinisikan bilangan Ramsey klasik$R(a, b)$ sebagai berikut.

Definisi 2.3.1. *Misalkan $a, b \geq 2$ adalah bilangan asli. Bilangan Ramsey $R(a, b)$ adalah bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga jika sisi-sisi graf lengkap K_n diwarnai dengan warna merah dan biru, maka senantiasa terdapat subgraf K_a merah atau K_b biru.*

Pada perkembangan selanjutnya, penentuan bilangan Ramsey ini tidak hanya terbatas pada graf lengkap. Dengan melepas syarat kelengkapan pada graf yang masuk dalam domainnya, maka diperoleh definisi bilangan Ramsey Graf sebagai berikut.

Definisi 2.3.2. *Diberikan dua graf G dan H. Bilangan Ramsey Graf $R(G, H)$ adalah bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga setiap graf F dengan n titik akan memuat G atau $\bar{F}$ memuat H.*

Definisi 2.3.3. *Diberikan dua graf G dan H. Graf F disebut graf $(G, H) - elok$ jika F tidak memuat G dan $\bar{F}$ tidak memuat H. Sebarang graf $(G, H) - elok$ dengan n titik dinotasikan dengan graf $(G, H, n) - elok$.*

Berdasarkan Definisi 2.3.3, bilangan Ramsey Graf secara umum juga dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.4. *Diberikan dua graf G dan H. Bilangan Ramsey Graf $R(G,H)$ adalah bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga, tidak ada graf $(G,H,n)-$elok.*

2.4 Graf Ramsey $(G,H)-$Minimal

Notasi $F \rightarrow (G,H)$ berarti bahwa sebarang pewarnaan merah-biru terhadap semua sisi-sisi graf F senantiasa memberikan F yang memuat subgraf merah yang isomorfik dengan G atau subgraf biru yang isomorfik dengan H.

Notasi $F^* \nrightarrow (G,H)$ berarti bahwa sebarang pewarnaan merah-biru terhadap semua sisi-sisi graf F^* senantiasa memberikan F^* yang tidak memuat subgraf merah yang isomorfik dengan G dan subgraf biru yang isomorfik dengan H.

Definisi 2.4.5. *Diberikan graf G dan H. Graf F dikatakan sebagai graf* ***Ramsey (G,H) -minimal*** *jika,*

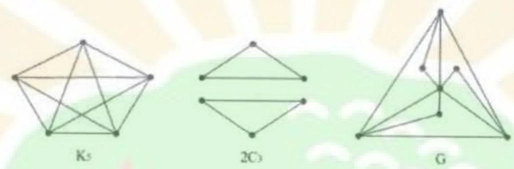
1. *$F \rightarrow (G,H)$.*

2. *$F^* \nrightarrow (G,H)$ untuk sebarang subgraf sejati $F^* \subset F$*

Selanjutnya, kelas Ramsey minimal $\mathcal{R}(G,H)$ didefinisikan sebagai kelas yang memuat semua graf F dengan kondisi pada Definisi 2.4.5 diatas.

Suatu *pewarnaan* $-(G,H)$ pada graf F didefinisikan sebagai pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F sedemikian sehingga F tidak memuat subgraf merah G sekaligus tidak memuat subgraf biru H.

Berikut adalah beberapa hasil yang telah diperoleh terkait $\mathcal{R}(mK_2, H)$ untuk m sebarang, $m \geq 2$ dan H graf sebarang. Burr dkk. (1978b) menunjukkan bahwa kelas $\mathcal{R}(mK_2, H)$ merupakan kelas berhingga untuk setiap bilangan positif m dan H graf sebarang. Burr dkk. (1981a) memberikan karakterisasi dari graf yang menjadi anggota $\mathcal{R}(2K_2, tK_2)$ untuk $t \geq 4$. Burr dkk.(1978b) juga menunjukkan bahwa ketiga graf dibawah ini masuk dalam $\mathcal{R}(2K_2, C_3)$.



Gambar 2.4.12. Graf Anggota $\mathcal{R}(2K_2, C_3)$

BAB III

GRAF RAMSEY$(2K_2, C_n)$-MINIMAL

Pada subbab ini akan ditentukan beberapa syarat perlu dari graf yang menjadi anggota $\mathcal{R}(2K_2, C_n)$ untuk $n \geq 4$. Setiap graf terhubung $F \in \mathcal{R}(2K_2, C_n)$ dapat dibangun dari irisan dua siklus dengan panjang n, dengan cara menambahkan paling sedikit satu siklus lain dengan panjang n yang beririsan dengan kedua siklus pertama pada titik yang berbeda.

Pada teorema berikut akan diberikan beberapa syarat perlu untuk suatu graf yang berada dalam kelas Ramsey minimal untuk pasangan $(2K_2, C_n)$.

Teorema 3.0.1. *Misalkan graf $F \in \mathcal{R}(2K_2, C_n)$ untuk $n \geq 4$. Maka:*

1. *$F - v \supseteq C_n$ untuk setiap $v \in V(F)$ dan $F - e \supseteq C_n$ untuk setiap $e \in E(F)$.*

2. *$F - E(C_3) \supseteq C_n$ untuk setiap segitiga C_3 dalam F.*

3. *Setiap sisi $e \in E(F)$ selalu termuat dalam suatu siklus C_n di F.*

Bukti.

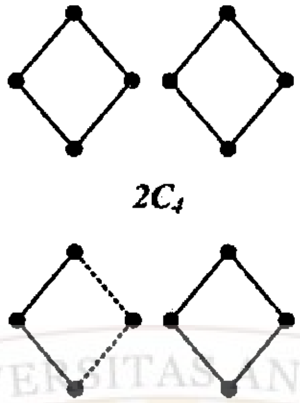
1. Misalkan terdapat suatu titik $v \in V(F)$ (atau sisi $e \in E(F)$) sedemikian sehingga $C_n \nsubseteq F - v$ (atau $C_n \nsubseteq F - e$). Jika semua sisi yang terkait pada v (atau pada e) berwarna merah dan semua sisi lainnya dari F berwarna biru, maka diperoleh suatu $(2K_2, C_n)$-pewarnaan pada F. Hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa $F \in \mathcal{R}(2K_2, C_n)$.

2. Asumsikan bahwa (2) tidak berlaku untuk suatu segitiga C_3 di F. Jika sisi-sisi segitiga tersebut diwarnai dengan warna merah dan semua sisi lainnya dari F diwarnai biru, maka diperoleh suatu $(2K_2, C_n)$-pewarnaan pada F. Hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa $F \in \mathcal{R}(2K_2, C_n)$.

3. Andaikan terdapat suatu sisi $e \in E(F)$ yang tidak termuat dalam suatu siklus C_n di F. Dari sifat keminimalan F, dapat diperoleh suatu $(2K_2, C_n)$-pewarnaan dari graf $F - e$. Dengan menggunakan $(2K_2, C_n)$-pewarnaan tersebut, selanjutnya sisi e diwarnai biru, maka tetap diperoleh $(2K_2, C_n)$-pewarnaan dari F. Hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa $F \in \mathcal{R}(2K_2, C_n)$.

Akibat 3.0.2. *Satu-satunya graf yang tak terhubung yang berada dalam* $\mathcal{R}(2K_2, C_n)$ *untuk* $n \geq 4$ *adalah* $2C_n$.

Bukti. Misalkan pada pewarnaan merah-biru, warna merah dilambangkan dengan garis putus-putus dan warna biru dengan garis lurus. Akan ditunjukkan bahwa $2C_n \in \mathcal{R}(2K_2, C_n)$. Misalkan tidak terdapat $2K_2$ merah dalam sebarang pewarnaan merah-biru terhadap $2C_n$. Maka terdapat maksimal satu sisi merah pada salah satu sisi C_n, sementara sisi-sisi lainnya dari $2C_n$ berwarna biru. Maka diperoleh C_n biru pada pewarnaan tersebut. Sehingga $2C_n \to (2K_2, C_n)$.

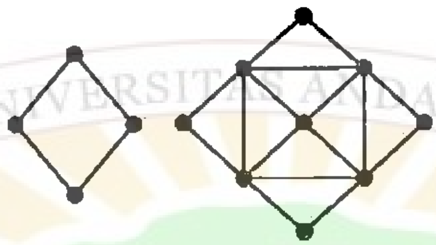


Gambar 3.0.1. $2C_4 \rightarrow (2K_2, C_4)$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $2C_n^* := 2C_n - e \nrightarrow (2K_2, C_n)$ untuk sebarang $e \in E(2C_n)$. Misalkan sisi e sebarang dihapus dari salah satu C_n. Maka $2C_n^*$ terdiri dari satu lintasan P_n dan siklus C_n. Warnai satu sisi sebarang pada siklus dengan merah, serta sisi-sisi lain dari siklus dan semua sisi lintasan dengan warna biru. Maka tidak diperoleh C_n biru pada pewarnaan tersebut. Terbukti bahwa $2C_n \in \mathcal{R}(2K_2, C_n)$.

Gambar 3.0.2. $2C_4 - e \nrightarrow (2K_2, C_4$

Misalkan $F \in \mathcal{R}(2K_2, C_n)$ untuk $n \geq 4$ dan F memuat lebih dari satu komponen. Berdasarkan Teorema 3.1.1 (3), setiap komponen harus memuat satu siklus C_n. Maka graf dengan ukuran terkecil yang memenuhi sifat ini adalah graf $2C_n$. □



Gambar 3.0.3. F memuat lebih dari satu komponen

Selanjutnya definisikan $\mathcal{R}^*(2K_2, C_n) := \mathcal{R}(2K_2, C_n) - 2C_n$. Dalam Teorema 3.1.3 berikut diberikan syarat perlu yang harus dipenuhi oleh setiap graf $F \in \mathcal{R}^*(2K_2, C_n)$.

Teorema 3.0.3. *Misalkan $F \in \mathcal{R}^*(2K_2, C_n)$. Misalkan pula $n \geq 4$. Maka :*

1. *Setiap dua siklus dengan panjang n di F memuat sedikitnya satu titik bersama.*
2. *Graf F memuat paling sedikit tiga siklus dengan panjang n dan tidak semua siklus tersebut beririsan disatu titik yang sama.*

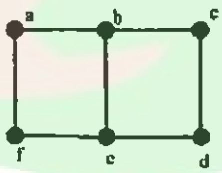
Bukti.

1. Misalkan terdapat dua siklus dengan panjang n yang saling lepas di F. Karena $2C_n \in \mathcal{R}(2K_2, C_n)$ berdasarkan Akibat 3.1.2, maka pemisalan bahwa $F \supseteq 2C_n$ bertentangan dengan sifat keminimalan F.

2. Andaikan F hanya memuat dua siklus dengan panjang n. Berdasarkan Teorema 3.1.3 (1), kedua siklus harus beririsan di paling sedikit satu titik, namakan v. Jika semua sisi yang menempel pada v berwarna merah dan sisi-sisi lainnya berwarna biru, maka tidak diperoleh C_n biru dalam pewarnaan tersebut. Hal ini bertentangan dengan Teorema 3.1.1 (1). $\square$

Berdasarkan Teorema 3.1.3 (1) dan Teorema 3.1.3 (2), dapat disimpulkan bahwa setiap $F \in \mathcal{R}^*(2K_2, C_n)$, $n \geq 4$ dapat dibangun dari irisan dua siklus dengan panjang n, dengan cara menambahkan paling sedikit satu siklus lain, dengan panjang yang sama, yang beririsan dengan kedua siklus pada titik yang berbeda.

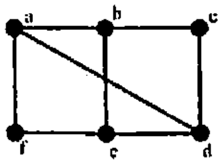
Selanjutnya akan diberikan salah satu contoh graf F yang menjadi anggota $\mathcal{R}(2K_2, C_4)$ berdasarkan Teorema 3.1.1 dan Teorema 3.1.3. Pada Gambar 3.0.4 berikut diberikan salah satu contoh irisan dua buah C_4.



Gambar 3.0.4. Irisan $2C_4$

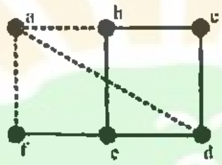
Misalkan ditambahkan satu sisi ad pada irisan $2C_4$ tersebut. Maka akan ditunjukkan bahwa graf F pada Gambar 3.0.5 adalah anggota dari $\mathcal{R}(2K_2, C_4)$.

Pandang sebarang pewarnaan merah-biru terhadap F. Misalkan tidak terdapat $2K_2$ merah dalam pewarnaan tersebut. Maka subgraf yang diinduksi oleh sisi-sisi merah berbentuk $K_{1,2}$ atau $K_{1,3}$. Untuk setiap $K_{1,2}$ atau $K_{1,3}$ merah di F, selalu



Gambar 3.0.5. Penambahan satu sisi pada irisan $2C_4$

diperoleh C_4 biru, sehingga $F \rightarrow \mathcal{R}(2K_2, C_4)$.



Gambar 3.0.6. $F \rightarrow (2K_2, C_4)$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $F^* := F - e \not\rightarrow (2K_2, C_4)$ untuk sebarang $e \in E(F)$. Notasikan $V(F) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ dan $E(F) = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5, x_5x_6, x_1x_6, x_1x_4, x_2x_5\}$. Misalkan $e = x_1x_6$. Maka warnai sisi-sisi x_1x_4, x_3x_4 dan x_4x_5 dengan merah, sementara sisi-sisi lainnya diwarnai biru sedemikian sehingga tidak diperoleh C_4 biru dalam pewarnaan tersebut. Untuk sisi $e = x_3x_4$ pembuktian dilakukan dengan cara yang sama. Misalkan $e = x_1x_2$. Maka sisi-sisi x_2x_5, x_4x_5, x_5x_6 diwarnai merah. Untuk $e = x_2x_3, x_4x_5, x_5x_6$, pembuktian dilakukan dengan cara yang sama. Jika $e = x_2x_5$ maka warnai sisi x_1x_4, x_3x_4, x_4x_5 dengan merah. Jika $e = x_1x_4$ maka warnai sisi x_1x_2, x_2x_5, x_2x_3 dengan merah. Sehingga diperoleh $F^* \not\rightarrow \mathcal{R}(2K_2, C_4)$. Maka $F \in \mathcal{R}(2K_2, C_4)$.

BAB IV

KESIMPULAN

Misalkan diberikan dua graf G dan H. Notasi $F \rightarrow (G, H)$ berarti bahwa sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F mengakibatkan F memuat subgraf merah yang isomorfik dengan G atau subgraf biru yang isomorfik dengan H. Graf F disebut sebagai graf $Ramsey(G, H)$-minimal jika $F \rightarrow (G, H)$ dan $F^* \nrightarrow (G, H)$ untuk sebarang subgraf sejati $F^* \subset F$.

Misalkan diberikan graf $2K_2$ dan siklus C_n untuk $n \geq 4$. Selanjutnya misalkan terdapat graf yang berasal dari irisan dua siklus dengan panjang n. Dalam skripsi ini telah dikaji bahwa suatu graf F yang menjadi anggota $\mathcal{R}(2K_2, C_n)$ untuk $n \geq 4$ dapat diperoleh dengan cara menambahkan satu siklus dengan panjang n ke irisan dua siklus tersebut, dengan syarat-syarat seperti yang dibahas pada Teorema 3.1.1 dan Teorema 3.1.3. Selanjutnya telah dikaji bahwa satu-satunya graf tidak terhubung yang menjadi anggota $\mathcal{R}(2K_2, C_n)$ untuk $n \geq 4$ adalah graf $2C_n$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Baskoro, E.T, dkk. 2002. *On Ramsey Number for Trees versus Wheels of Five or Six Vertices.* Graph and Combinatorics. 4 : 717 -721.

[2] Burr,S. A., Erdős, P., Faudree, R. J., dan Schelp, R. H., (1978b): A Class of Ramsey-finite Graphs, *Congressus Numer.*

[3] Burr,S. A., Erdős, P., Faudree, R. J., dan Schelp, R. H., (1981a): Ramsey-minimal Graphs for Matching, *Theory and applications of Graphs, G. Chartrand ed.*

[4] Chartrand, G. and Ping Zhang. 2005. *Introduction to Graph Theory.* McGraw-Hill Press, Singapore.

[5] Hasmawati. 2007. *Bilangan Ramsey untuk graf gabungan bintang.* ITB Bandung. *Disertasi-S3.* Tidak diterbitkan.

[6] Radziszowski, S. P. 2011. *Small Ramsey Number.* Electron J. Combin. DS1.13

[7] Surahmat dan E.T. Baskoro. 2001. On the Ramsey number of a Path or a Star versus W_4 or W_5. *Proceedings of the 12-th Australian Workshop on Combinatorial Algorithms.* Bandung. 165-170.

[8] Yulianti,L., Baskoro, E.T., Assiyatun, H., dan Uttunggadewa, S. 2009. Ramsey $(2K_2, C_4)$-minimal Graphs. *Diajukan ke Discussiones Mathematicae Graph Theory.*