HIMPUNAN PEWARNAAN PADA GRAF SEMPURNA

SKRIPSI

ELZA ZURIAWAN
0810431007

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2012

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis ucapkan atas kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan karuniaNya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **Himpunan Pewarnaan Pada Graf Sempurna**, yang merupakan salah satu syarat untuk mendapatkan gelar Sarjana Sains (S.Si).

Salawat beriring salam penulis sampaikan kepada baginda Rasulullah SAW yang telah membawa perubahan bagi umat manusia dari zaman kebodohan sampai zaman yang penuh ilmu pengetahuan seperti yang dirasakan saat ini.

Pada kesempatan ini, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada bapak Dr. Syafrizal Sy selaku pembimbing yang senantiasa memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penulisan skripsi ini. Penghargaan yang tiada tara penulis persembahkan kepada kedua orang tua, kakak-kakak, serta adik-adik tercinta yang senantiasa mencurahkan kasih sayang, memberikan semangat, dorongan dan doa kepada penulis selama penulisan skripsi ini. Tidak lupa penulis ucapkan terima kasih kepada teman-teman yang selalu meluangkan waktunya dalam membantu penulis menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari dalam penulisan ini masih banyak terdapat kekurangan dan untuk ini penulis mengharapkan masukan, baik berupa kritikan maupun saran demi kesempurnaan skripsi ini. Akhir kata penulis mohon maaf bila ada kesalahan maupun kekurangan dan penulis berharap skripsi ini bermanfaat bagi kemajuan dan perkembangan ilmu pengetahuan, terutama ilmu matematika.

Padang, Agustus 2012

Elza Zuriawan

ABSTRAK

Untuk suatu graf terhubung nontrivial G, $c : V(G) \to \mathbb{N}$ adalah suatu pewarnaan titik di G, yang mana titik-titik yang saling bertetangga dapat diwarnai dengan warna yang sama. Untuk suatu titik $v \in V(G)$, himpunan warna lingkungan $NC(v)$ adalah himpunan yang berisikan warna dari lingkungan v. Pewarnaan c disebut suatu himpunan pewarnaan jika $NC(u) \neq NC(v)$ untuk setiap pasangan titik u, v yang bertetangga di G. Bilangan minimum dari warna-warna yang dibutuhkan dari suatu pewarnaan c disebut bilangan kromatik himpunan $\chi_s(G)$. Di sini ditunjukkan bahwa setiap graf *k-colorability* himpunan merupakan suatu masalah *NP-complete* dengan suatu transformasi kedalam *k-colorability*, sehingga bilangan kromatik himpunan χ_s dapat ditentukan dalam waktu polinomial. Dari ketiga kelas graf sempurna yang digunakan dalam tulisan ini, yaitu graf *chordal*, graf *split*, dan graf *threshold*, hanya graf *threshold* yang bilangan kromatiknya bernilai sama dengan bilangan kromatik himpunannya. Selanjutnya pada tulisan ini juga telah ditunjukkan bahwa, jika G adalah graf *threshold*, maka bilangan kromatik himpunan $\chi_s(G)$ dapat dihitung secara efisien dalam waktu polinomial.
Kata kunci : himpunan pewarnaan, *NP-complete*, graf sempurna

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf diperkenalkan pertama kali pada tahun 1736, oleh Leonhard Euler, seorang matematikawan asal Swiss. Teori graf pertama kali muncul sebagai representasi permasalahan jembatan Konigsberg. Konigsberg merupakan wilayah yang dihubungkan oleh tujuh jembatan di atas sungai Pregel, Prussia bagian timur Jerman. Permasalahan yang timbul adalah bagaimana cara seseorang untuk berpindah dari satu tempat ke tempat lain hanya dengan melewati setiap jembatan satu kali.

Sejak pertama kali diperkenalkannya teori graf, aplikasi teori graf telah berkembang dan merambah disiplin ilmu lainnya dan membantu memudahkan penyelesaian permasalahan. Penggunaan graf ditekankan untuk memodelkan persoalan. Teori graf juga sangat berguna untuk mengembangkan model-model yang terstruktur dalam berbagai situasi. Sejak itu, teori graf berkembang seiring dengan ditemukannya masalah-masalah dalam kehidupan yang dapat diselesaikan dengan teori graf, seperti masalah jaringan listrik, jaringan telepon, jaringan komputer, jalan penghubung antar kota dan lain sebagainya.

Salah satu bahasan yang menarik dalam teori graf adalah mengenai pewarnaan graf. Terdapat tiga jenis pewarnaan graf, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah (*face*). Dalam kajian ini akan dibahas mengenai pewarnaan titik. Pewarnaan titik adalah pemberian warna pada titik-titik suatu graf sedemikian sehingga tidak ada dua titik bertetangga yang mempunyai warna yang sama, dan banyaknya warna yang digunakan harus seminimal mungkin. Banyaknya warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai titik-titik disebut sebagai bilangan kromatik dari graf G tersebut, yang dinotasikan dengan $\chi(G)$.

Dalam perkembangannya, konsep mengenai pewarnaan titik pada graf tidak hanya sebatas pada penentuan bilangan kromatik saja. Beberapa ahli dalam bidang graf yaitu Chartrand dkk [3] mengemukakan suatu konsep yang disebut sebagai bilangan kromatik himpunan, yang dinotasikan dengan $\chi_s(G)$.

Bilangan *clique* dinotasikan dengan $\omega(G)$ didefinisikan sebagai orde dari subgraf lengkap maksimum yang bisa dibentuk dari graf G [3]. Dalam [3] juga dijelaskan bahwa, graf sempurna adalah suatu graf yang memenuhi sifat bahwa nilai bilangan kromatiknya sama dengan bilangan *clique*, $\chi(G) = \omega(G)$, untuk setiap graf terinduksi H di graf G. Pada [7], disebutkan bahwa graf sempurna memiliki lebih dari seratus kelas, yang mana untuk setiap kelas mengandung anggota dengan jumlah tak terhingga. Oleh karena itu, menentukan bilangan kromatik himpunan untuk setiap anggota dari kelas pada graf sempurna bukan merupakan suatu hal yang cukup mudah untuk dilakukan. Jadi, dalam kajian ini akan dicari kelas graf dari graf sempurna yang mana bilangan kromatik himpunan dapat ditentukan secara efisien.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, permasalahan yang akan dikaji pada tugas akhir ini adalah membangun *NP-Completeness* dari kajian bilangan kromatik himpunan dan akan dicari kelas dari graf sempurna, yang mana bilangan kromatik himpunan dapat dihitung secara efisien untuk setiap anggota dari kelas tersebut.

1.3 Pembatasan Masalah

Dalam tugas akhir ini akan dibatasi kelas dari graf sempurna, dimana akan digunakan beberapa kelas graf dari graf sempurna, yaitu graf *split*, graf *chordal*, dan graf *threshold*.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penulisan dari tugas akhir ini adalah akan ditentukan kelas yang mana dari graf *chordal*, graf *split*, dan graf *threshold* yang bilangan kromatik himpunannya dapat dihitung secara efisien.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan tugas akhir ini dibagi menjadi empat bab. Bab I berisi latar belakang masalah, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan. Pada Bab II dijelaskan mengenai definisi dan terminologi dari graf, *NP-complete*, serta konsep tentang bilangan kromatik dan bilangan kromatik himpunan. Sedangkan kajian tentang himpunan pewarnaan untuk graf sempurna diberikan pada Bab III. Kemudian penulisan tugas akhir ini diakhiri dengan Bab IV yang berisi kesimpulan dan saran untuk peneliti selanjutnya.

BAB II

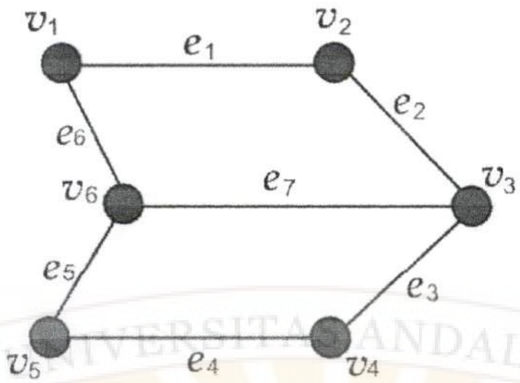
LANDASAN TEORI

Pada bab ini diperkenalkan beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan permasalahan yang telah dikemukakan di Bab I. Definisi dan terminologi pada graf disajikan pada Subbab 2.1, kemudian pada Subbab 2.2 diuraikan tentang *NP-Complete*, pada Subbab 2.3 akan dibahas tentang bilangan kromatik, dan pada Subbab 2.4 akan dijelaskan mengenai himpunan pewarnaan.

2.1 Definisi dan Terminologi dalam Graf

Definisi berikut merujuk pada [2], [4], [7], dan [10].

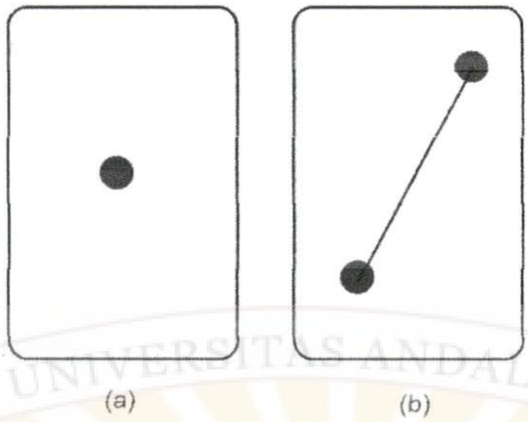
Suatu graf G terdiri atas dua himpunan, yaitu himpunan berhingga V yang memuat **titik** (*vertex*) dan himpunan berhingga E yang memuat **sisi** (*edge*). Misalkan $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ adalah suatu himpunan dengan n titik dan $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ adalah himpunan dengan m sisi. Kardinalitas dari himpunan $V(G)$ disebut **orde** (*order*) dari G, sementara kardinalitas dari himpunan $E(G)$ disebut **ukuran** (*size*) dari G. Pada Gambar 2.1.1 diberikan suatu graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$, jadi orde G adalah 6 dan ukuran G adalah 7.



Gambar 2.1.1. Graf G dengan orde 6 dan ukuran 7

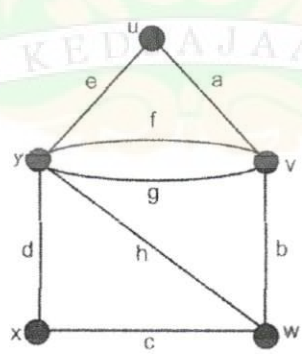
Misal terdapat titik u,v di $V(G)$ dan sisi e=uv berada di $E(G)$ maka dalam hal ini titik u dan v dikatakan **bertetangga** *(adjacent)*, sedangkan e dikatakan **terkait** (*incident*) dengan u dan v. Suatu graf dikatakan **lengkap** *(complete)* apabila semua titik-titiknya saling terkait. **Derajat** dari suatu titik adalah banyaknya sisi yang terkait pada titik tersebut. Jika titik ujung dari suatu sisi terkait pada titik yang sama, maka sisi tersebut dikatakan **loop**. Graf G disebut graf **sederhana** jika $E(G)$ tidak memuat loop atau sisi ganda.

Graf **kosong** didefinisikan sebagai suatu graf dengan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Graf H dikatakan **subgraf** dari graf G apabila $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$, ditulis $H \subseteq G$. Subgraf H dikatakan **subgraf terinduksi** (*induced subgraph*) dari G jika H subgraf dari G dan juga untuk $u, v \in (G)$ mengakibatkan $u, v \in H$. Graf G yang diinduksi oleh H dinotasikan dengan $G[H]$. Suatu graf G dikatakan **trivial** apabila $|V(G)| = 1$.



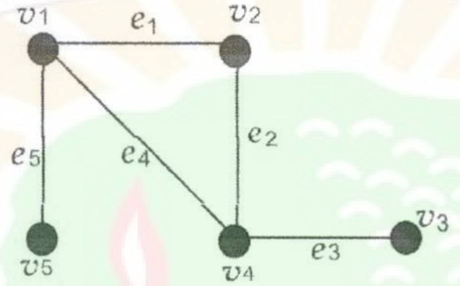
Gambar 2.1.2. (a) Graf trivial, (b) Graf nontrivial

Suatu **jalan** (*walk*) W dari titik v_0 ke v_n pada graf G adalah barisan berhingga yang terdiri dari titik dan sisi berselang seling $v_0, e_0, v_1, e_1, ..., v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ sedemikian sehingga $e_i = v_i v_{i+1}$ untuk setiap $i = 0, 1, 2, ..., n-1$. Jalan W yang semua sisinya berbeda disebut **trail**, sedangkan jalan W yang semua titik dan semua sisinya berbeda disebut **lintasan**. Jika setiap pasang titik di graf G memiliki lintasan, maka G dinamakan **terhubung** (*connected*). Suatu graf dikatakan ***cycle*** apabila graf tersebut merupakan suatu jalan tertutup dimana titik awal dan akhirnya sama.



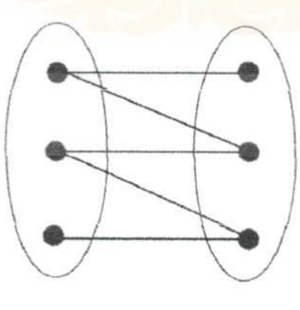
Gambar 2.1.3. **Jalan**:$uavfyfvgyhwbv$, **Lintasan**:$xcwhyeuav$, **Cycle**:wxy

Misal terdapat graf G dengan titik $v \in V(G)$, maka **lingkungan** dari titik $v \in V(G)$ adalah himpunan semua titik-titik yang bertetangga dengan v di G, dinotasikan *N(v)*. Perhatikan Gambar 2.1.4, misal $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, maka $N(v_1) = \{v_2, v_4, v_5\}$, $N(v_2) = \{v_1, v_4\}$, $N(v_3) = \{v_4\}$, $N(v_4) = \{v_1, v_2, v_3\}$, $N(v_5) = \{v_1\}$.



Gambar 2.1.4. Graf G

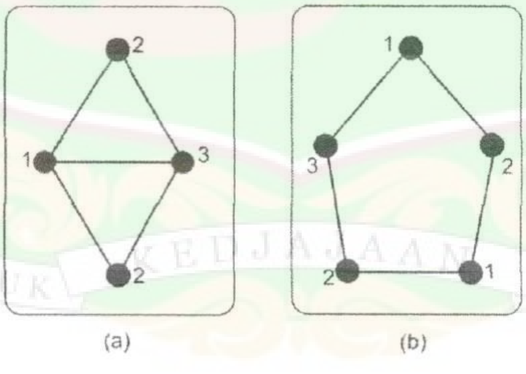
Suatu graf disebut graf **multipartit** jika himpunan titik pada graf tersebut dapat dikelompokkan kedalam subhimpunan tak kosong yang disebut **himpunan partit**, sedemikian sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga yang terletak pada himpunan partit yang sama. Graf multipartit dengan k himpunan partit disebut ***k-partit***. Salah satu contoh adalah graf dengan dua himpunan partit, secara khusus dinamakan graf **bipartit**.



Gambar 2.1.5. Graf Bipartit

Suatu subhimpunan U dari himpunan titik-titik di G dikatakan himpunan **bebas** (*independent*) jika tidak ada dua titik di U yang bertetangga di G. Himpunan titik-titik yang membentuk suatu subgraf lengkap di G disebut ***clique*** dari G. Suatu *clique* berorde k ditulis ***k*-*clique***. Orde maksimum dari suatu *clique* di G disebut **bilangan *clique*** dari G, dinotasikan dengan $\omega(G)$.

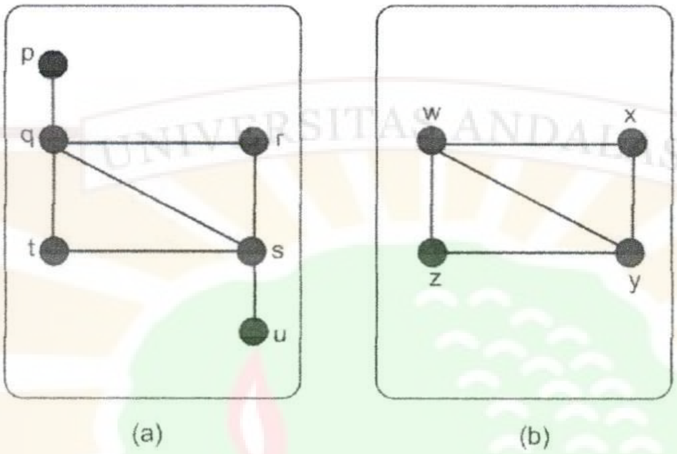
Suatu graf dikatakan **sempurna** jika memenuhi sifat bahwa nilai bilangan kromatiknya sama dengan bilangan *clique*, $\chi(G) = \omega(G)$, untuk setiap graf terinduksi H di graf G. Dalam tugas akhir ini, pelabelan titik mewakili warna-warna yang digunakan. Pada Gambar 2.1.6 (a) dapat dilihat bahwa bilangan kromatiknya adalah 3 dan bilangan *clique*nya juga 3, untuk setiap graf terinduksi dari graf tersebut. Oleh karena itu, $\chi(H)$=$\omega(H)$=3. Sedangkan pada Gambar 2.1.6 [b] terdapat suatu subgraf terinduksi dari graf tersebut yang bilangan kromatiknya tidak sama dengan bilangan *clique*nya.



Gambar 2.1.6. (a) Graf G sempurna, $\chi(H)$=3=$\omega(H)$, (b) Graf G tidak sempurna, $\chi(H)$=3$\neq\omega(H) = 2$

Suatu graf G dikatakan ***split*** jika $V(G)$ dapat dipartisi ke dalam suatu himpunan bebas S dan suatu himpunan *clique* K.

Suatu graf G adalah ***chordal*** jika setiap *cycle* di G dengan panjang empat atau lebih memuat ***chord***, yaitu sisi yang terbentuk dalam dua titik tak berurutan di *cycle* C.



Gambar 2.1.7. (a) Graf *split*, (b) Graf *chordal*

2.2 *NP-Complete*

NP-Complete (*NP-Nondeterministic Polynomial*), diformulasikan oleh Stephen Cook dalam makalahnya, "*The Complexity of Theorem Proving Procedures*" yang terbit pada tahun 1971. ***NP-Complete*** adalah suatu masalah yang tidak dapat diselesaikan dalam waktu yang singkat. Seluruh masalah yang disebut *NP-Complete* ini setara, yaitu yang satu dapat direduksi dari yang lain. Jadi, pada *NP-Complete*, suatu masalah dapat diterjemahkan dari satu masalah ke masalah lain dengan suatu transformasi yang dapat dilakukan dalam **waktu polinomial**, yaitu waktu yang dibutuhkan untuk melakukan sejumlah operasi, dimana terdapat langkah-langkah berulang, dan banyaknya langkah-langkah yang digunakan merupakan suatu fungsi. Contoh yang paling sederhana adalah operasi perkalian matematika. Misalnya terdapat beberapa ubin yang akan menutupi suatu lantai. Untuk 1 inci persegi lantai dibutuhkan 1 ubin, dan membutuhkan waktu 1 detik untuk menutupinya. Untuk 2 inci persegi dibutuhkan 4 ubin, dan membutuhkan waktu 4 detik. Untuk 3 inci persegi dibutuhkan 9 ubin, dan membutuhkan waktu 9 detik. Untuk 4 inci persegi dibutuhkan 16 ubin, dan dibutuhkan waktu 16 detik. Jadi, waktu polinomial yang dibutuhkan untuk menutupi seluruh lantai adalah **T** (*detik*)= **1** *detik* x (**ukuran persegi**)^2. Berikut ini diberikan ilustrasi dari suatu masalah *NP-Complete.*

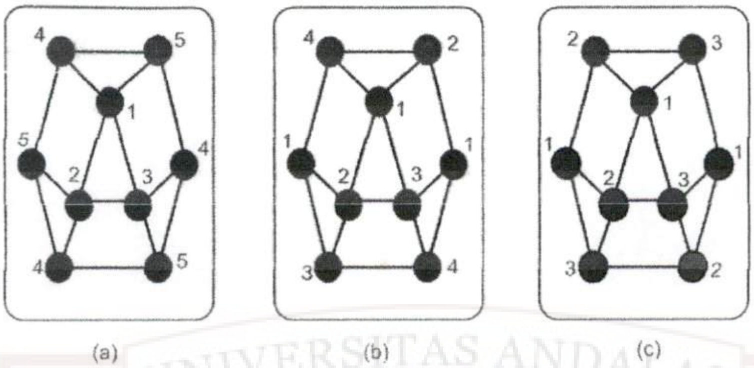
Dalam [9], dimisalkan seorang salesman ingin mempromosikan dagangannya ke n kota, masing-masing hanya boleh dikunjungi satu kali, dan kemudian harus kembali ke tempat semula. Bagaimana rute yang harus dilalui supaya ongkosnya paling murah, dengan kata lain jarak yang ditempuh paling pendek? Masalah ini disebut sebagai *Traveling Salesman Problem*(**TSP**). **Sirkuit Hamilton**, yaitu suatu graf yang lintasannya hanya melewati setiap titik satu kali dan kembali ketitik awal. TSP bisa kita gambarkan sebagai suatu sirkuit Hamilton. Dalam teori graf, kota-kota yang dikunjungi dapat dipandang sebagai titik, sedangkan jalur perjalanan (rel kereta api, jalan raya, atau rute pesawat terbang) dapat dipandang sebagai sisi. Permasalahan yang muncul disini adalah apakah suatu graf G yang diberikan mempunyai sirkuit Hamilton?

Sebagai ilustrasi yang kedua, misalkan terdapat suatu himpunan bilangan, $S = \{1, 2, 3, 6\}$. Adakah partisi yang tak beririsan, sebut S_1 dan S_2, sedemikian sehingga jumlah bilangan dalam setiap partisi sama? Jawaban eksak dapat dicapai dengan mendaftarkan seluruh pasangan himpunan tak beririsan, kemudian memeriksa satu persatu. Misalnya $\{1,2\}$ dan $\{3,6\}$, dimana penjumlahan dari anggota pada himpunan pertama tidak sama dengan penjumlahan anggota dari himpunan kedua, berikutnya $\{1,3,6\}$ dan $\{2\}$, penjumlahan anggota dari kedua himpunan masih tidak sama, dan seterusnya sehingga didapat partisi himpunan yang penjumlahan anggota dari himpunan pertama sama dengan penjumlahan anggota dari himpunan kedua.

Pada **TSP**, jika diberikan urutan dari sekumpulan titik, dengan mudah dapat diperiksa apakah urutan ini menyatakan sirkuit Hamilton dari graf G atau bukan (hanya dengan menyusuri setiap titik dalam daftar sesuai urutan). Demikian pula pada ilustrasi kedua. Jika diberikan $S_1 = \{1,2,3\}$ dan $S_2 = \{6\}$, maka dengan mudah terlihat bahwa partisi ini memenuhi syarat. Secara umum, tentunya masalah ini tidak mudah jika jumlah anggota yang diberikan pada suatu himpunan tidak sedikit.

2.3 Bilangan Kromatik

Suatu pewarnaan titik dari sebuah graf G adalah pemberian warna-warna pada titik-titik di G, dimana satu warna dapat diberikan pada beberapa titik, sedemikian sehingga titik-titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Pewarnaan ini disebut **pewarnaan sejati** di G. Bilangan bulat positif k dari warna-warna yang dibutuhkan pada pewarnaan G disebut **bilangan kromatik** dari G, dinotasikan $\chi(G)$.



Gambar 2.3.8. Bentuk pewarnaan pada suatu graf H

Suatu graf adalah *k-colorable* jika dan hanya jika $\chi(G) \leq k$. Tiga pewarnaan berbeda pada graf H diperlihatkan oleh Gambar 2.3.8. Pewarnaan pada Gambar 2.3.8(a) adalah 5-pewarnaan, pewarnaan pada Gambar 2.3.8(b) adalah 4-pewarnaan, dan pewarnaan pada Gambar 2.3.8(c) adalah 3-pewarnaan. Karena orde dari graf H adalah 9, graf H adalah *k-colorable* untuk bilangan bulat positif k dengan $3 \leq k \leq 9$. Karena H adalah 3-*colorable*, $\chi(H) \leq 3$. Tidak ada 2-pewarnaan dari H karena memuat segitiga dan tiga titik segitiga harus diwarnai dengan warna berbeda. Sehingga $\chi(H) \geq 3$, dapat disimpulkan bahwa $\chi(H) = 3$.

2.4 Himpunan Pewarnaan

Didefinisikan dalam [6]

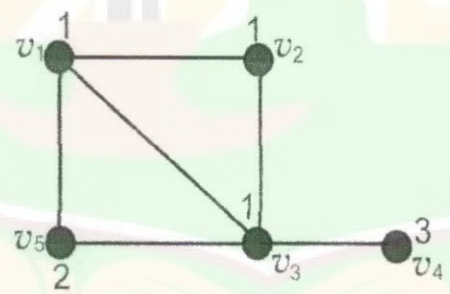
$$N_k = \{1, 2, ..., k\}$$

untuk setiap k adalah bilangan bulat positif. Untuk suatu graf terhubung nontrivial G, $c : V(G) \rightarrow N_k$ merupakan suatu pewarnaan titik di G dimana titik-titik yang bertetangga boleh diwarnai dengan warna yang sama. Untuk suatu himpunan $S \subseteq V(G)$, didefinisikan himpunan $c(S)$ dari warna-warna di S dengan

$$c(S) = \{c(v) : v \in S\}$$

untuk suatu titik v di G. Misal $N(v)$ merupakan lingkungan dari v, himpunan warna lingkungan $NC(v) = c(N(v))$ adalah himpunan yang berisikan warna dari lingkungan v. Pewarnaan c disebut suatu **himpunan pewarnaan**, jika $NC(u) \neq NC(v)$ untuk setiap pasangan $u, v \in V(G)$ di G.

Suatu graf G disebut graf ***k-colorability*** **himpunan** jika terdapat suatu pewarnaan c pada G dari suatu himpunan dengan k warna. Bilangan minimum dari warna-warna yang dibutuhkan dari suatu pewarnaan ini disebut **bilangan kromatik himpunan** dari G, dinotasikan $\chi_s(G)$.



Gambar 2.4.9. Graf G dengan $\chi_s = 3$

Suatu graf G pada Gambar 2.4.9 memenuhi sifat himpunan pewarnaan. Misalkan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, terdapat suatu pewarnaan c dimana $NC(v_1) \neq NC(v_2) \neq NC(v_3) \neq NC(v_5)$, $NC(v_3) \neq NC(v_4)$. Karena warna yang dibutuhkan pada pewarnaan ini adalah 3, maka graf G adalah 3-*colorability* himpunan, dan bilangan kromatik himpunan $\chi_s = 3$.

BAB III

HIMPUNAN PEWARNAAN PADA GRAF SEMPURNA

Pada bagian ini akan dibangun suatu sifat NP - *complete* dari perhitungan bilangan kromatik himpunan, dan akan ditemukan kelas-kelas dari graf yang mana bilangan kromatik himpunan dapat ditentukan secara efisien. Dalam tugas akhir ini digunakan anggota dari kelas-kelas pada graf sempurna. Dalam [3] telah dibuktikan bahwa $\chi_s(G) \leq \chi(G)$ untuk setiap graf G. Salah satu kelas dari graf sempurna adalah graf bipartit, dimana bilangan kromatik himpunan dapat ditentukan secara efisien.

Teorema 3.0.1. [4] *Setiap graf bipartit adalah sempurna.*

Bukti.

Misal G merupakan suatu graf bipartit dan H subgraf dari G. Jika H suatu graf tidak kosong, maka $\chi(H) = \omega(H) = 2$. Sedangkan, jika H adalah graf kosong, maka $\chi(H) = \omega(H) = 1$ untuk semua subgraf terinduksi H dari G. Jadi, $\chi(H) = \omega(H)$. Oleh karena itu G sempurna. □

Pada [3] juga telah dibuktikan bahwa $\chi_s(G) = 2$ jika dan hanya jika G adalah bipartit, dan $\chi_s(G) = \chi(G)$ untuk setiap graf bipartit. Pada [8] telah dibuktikan bahwa graf bipartit dapat dikenali dalam waktu polinomial dengan menggunakan suatu algoritma, maka $\chi_s(G)$ dapat dihitung dalam waktu polinomial untuk graf bipartit G.

Selanjutnya, akan diidentifikasi kelas-kelas lain dari graf sempurna dimana bilangan kromatik himpunannya dapat dihitung secara efisien. Ditentukan suatu masalah optimasi dari bilangan kromatik himpunan. **Masalah optimasi** adalah suatu masalah yang dapat ditransformasi kedalam suatu ***decision problem*** , yaitu suatu masalah dengan solusi "ya" atau "tidak". Dalam hal ini Graf *k-colorability* himpunan merupakan masalah optimasi.

Misalkan graf G dengan $v \in V(G)$ adalah suatu graf *k-colorability* himpunan, dimana $k \in Z^+$. Apakah terdapat suatu pemetaan $c : V \to N_k$ dengan c adalah suatu k-pewarnaan himpunan dari G, dimana $NC(u) \neq NC(v)$?

Teoremanya sendiri mengikuti dari melihat bahwa *k-colorability* sebagai kasus terbatas dari *k-colorability* himpunan.

Teorema 3.0.2. [6] *Graf k-colorability himpunan merupakan suatu masalah NP-complete.*

Bukti.

Setiap contoh dari graf *k-colorability* himpunan dapat menjadi suatu contoh dari graf *k-colorability* dengan pembatasan bahwa pewarnaan c, yang mana $c : V(G) \to N_k$ itu sendiri merupakan suatu pewarnaan sejati. Pewarnaan c memperlihatkan bahwa *k-pewarnaan* sejati dari suatu contoh (G, k) pada graf *k-colorability* adalah korespondensi satu-satu dengan *k-pewarnaan* himpunan dari G yang memenuhi pembatasan tersebut. Karena setiap graf *k-colorability* himpunan dengan pembatasan adalah merupakan suatu graf *k-colorability*, sedangkan *k-colorability* merupakan suatu masalah NP. Oleh karena itu, graf *k-colorability* himpunan dapat ditransformasi ke dalam graf *k-colorability*, sedemikian sehingga graf *k-colorability* himpunan adalah *NP-complete.* □

Menentukan bilangan kromatik himpunan $\chi_s(G)$ pada graf sempurna tidak lebih mudah dari pada menentukan bilangan kromatik $\chi(G)$ yang dapat dihitung dalam waktu polinomial untuk setiap kelas pada graf sempurna. Dalam [6] dijelaskan bahwa jika graf G adalah anggota dari suatu kelas pada graf sempurna, dan apabila graf G tersebut bisa menunjukkan bahwa $\chi_s(G) = \chi(G)$ untuk setiap anggota dari kelas tersebut, maka $\chi_s(G)$ dapat dihitung secara efisien untuk setiap graf dalam kelas tersebut dengan menggunakan suatu algoritma untuk menghitung $\chi(G)$.

Dalam hal ini akan digunakan anggota dari dua kelas graf, yaitu graf *chordal* dan graf *split*. Kedua kelas ini saling berhubungan, yang mana setiap graf *split* adalah graf *chordal*.

Teorema 3.0.3. [1] *Misal G adalah suatu graf sebarang. Kondisi berikut ini ekivalen :*

1. *G adalah suatu graf split*
2. *G dan $\bar{G}$ adalah graf chordal*
3. *G tidak memuat subgraf terinduksi yang isomorfik dengan $2K_2$, C_4, maupun C_5*

Bukti.

($1 \Rightarrow 2$) Misal $G = (V, E)$, dimana V dipartisi menjadi dua himpunan S dan K, dengan S suatu himpunan bebas dan K adalah *clique*. Anggap G memuat suatu *chord* dari *cycle* C dengan panjang ≥ 4, sehingga paling sedikit dua titik bertetangga di C berada di K. Sedemikian sehingga, S memuat suatu pasangan titik yang saling bertetangga, ini merupakan suatu kontradiksi. Oleh karena itu, G harus *chordal*. Menurut Theorem 2 dalam [1], Suatu graf tak berarah G adalah suatu graf *split* jika dan hanya jika komplemen dari G, dinotasikan $\bar{G}$, adalah suatu graf *split*. $\bar{G}$ adalah *split* maka $\bar{G}$ adalah *chordal*.

($2 \Rightarrow 3$) Trivial.

($3 \Rightarrow 1$) Misal K suatu *clique* maksimum di G, sehingga $G[V - K]$ memiliki sisi paling sedikit. Akan ditunjukkan bahwa $S = V - K$ adalah suatu himpunan bebas.

Andaikan terdapat suatu kontradiksi, misal $G[S]$ adalah sisi xy. Dari kemaksimuman K, tidak ada titik di S yang bertetangga ke setiap titik di K. Selain itu, jika x dan y bertetangga ke setiap titik di K, terdapat pengecualian dari titik z tunggal yang sama, maka $K - \{z\} + \{x\} + \{y\}$ merupakan suatu himpunan yang lebih besar dari K, sedemikian sehingga harus ada titik -titik yang berbeda $u, v \in K$ sehingga xv,yu bukan anggota E.

Jika G tidak memuat subgraf terinduksi $2K_2$ maupun C_4, maka jelas bahwa tepat satu dari sisi xv atau yu berada di G. Asumsikan bahwa xv bukan anggota E dan $yu \in E$. Untuk setiap $w \in K - \{u, v\}$, jika yw,xw bukan anggota E, maka $G[\{x, y, u, w\}] \cong 2K_2$. Sebaliknya, jika $yw \in E$ dan $xw \in E$, maka $G[\{x, y, u, w\}] \cong C_4$. Oleh karena itu, y bertetangga ke setiap titik dari $K - v$, dan $K' = K - \{v\} + \{y\}$ merupakan *clique* maksimum.

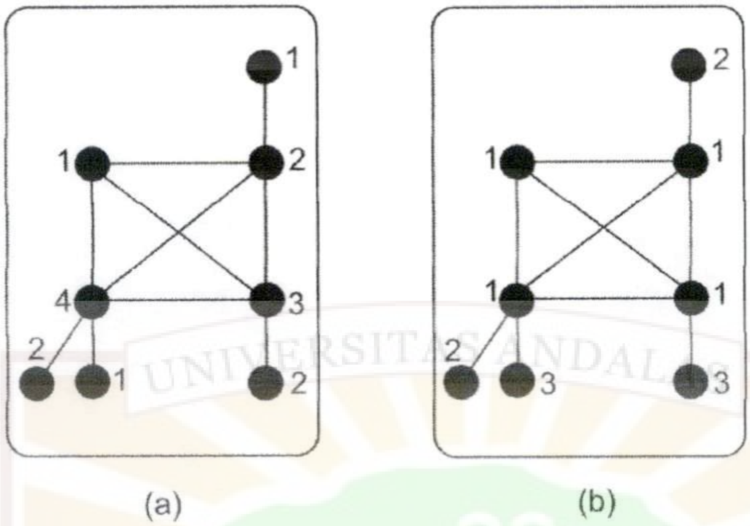
Karena $G[V - K']$ memiliki sisi yang lebih banyak daripada $G[V - K]$, itu menunjukkan bahwa x bertetangga ke y tetapi tidak ke v, terdapat suatu titik $t \neq y$ di $V - K$, dimana t bertetangga ke v tetapi tidak bertetangga dengan y. Sekarang tx harus menjadi sisi di G, kalau tidak $\{t, x, y, u\}$ akan menginduksi suatu bentuk $2K_2$. Dengan cara yang sama, tu bukan anggota E, kalau tidak $\{t, x, y, u\}$ akan menginduksi suatu bentuk C_4. ini berarti bahwa $\{t, x, y, u, v\}$ menginduksi C_5, suatu kontradiksi. Sedemikian sehingga, $S = V - K$ adalah himpunan bebas, dan G adalah suatu graf *split*. □

Proposisi 3.0.4. [1] *Suatu graf* split *G adalah sempurna.*

Bukti.

Misal G adalah graf *split*. Dari Teorema 3.0.3, G adalah *chordal*. karena graf *chordal* adalah sempurna [1], maka G juga sempurna. □

Graf G pada Gambar 3.0.1 adalah suatu graf *split*. Pada Gambar 3.0.1 (a), terdapat suatu pewarnaan sejati dengan bilangan kromatiknya, $\chi(G) = 4$. Sedangkan pada Gambar 3.0.1 (b) terdapat pewarnaan c, $c : V \to N_k$, yang menunjukkan 3-pewarnaan himpunan, dengan bilangan kromatik himpunannya, $\chi_s(G) = 3$. Maka diperoleh bahwa $\chi_s(G) = 3 < 4 = \chi(G)$.

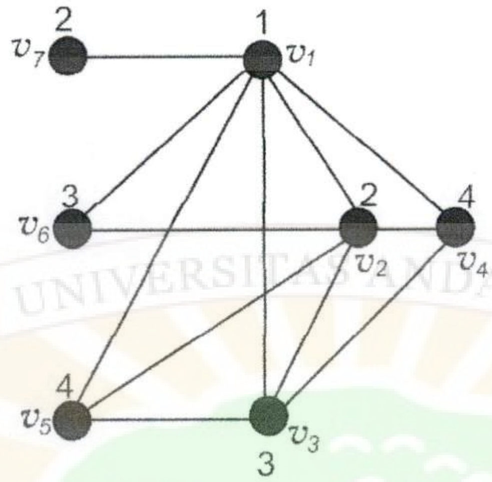


Gambar 3.0.1. Graf *split* G dengan $\chi_s(G) = 3 < 4 = \chi(G)$

Karena graf *split* tidak memenuhi $\chi_s(G) = \chi(G)$, maka ambil satu contoh kelas dari suatu kelas pada graf sempurna dimana bilangan kromatik himpunan dapat dihitung dalam waktu polinomial dan memenuhi $\chi_s(G) = \chi(G)$ untuk setiap anggota kelas tersebut. Dalam hal ini, akan dicoba dengan menggunakan suatu graf yang masih berhubungan dengan graf *split*, yaitu graf *threshold*.[5]

Berikut adalah definisi graf *threshold* yang diberikan oleh Gera [6], Misal $\delta_0 = 0$, dan misal $\delta_1 < \delta_2 < ... < \delta_k$ adalah derajat titik positif berbeda di G. Untuk setiap i, dimana $0 \leq i \leq k$, didefinisikan $V_i = \{v \in V : deg(v) = \delta_i\}$. Graf G dikatakan sebagai suatu graf ***threshold*** jika dan hanya jika untuk semua $u \in V_i$ dan $v \in V_j$, $uv \in E$ jika dan hanya jika $i + j > k$. Jika $u \in V_i$, $v \in V_j$, dan $i \leq j$, maka $N(u) - v \subseteq N(v) - u$, dengan persamaan jika dan hanya jika $i = j$.

Pada Gambar 3.0.2, dimana δ_i untuk $1 \leq i \leq 6, V_1 = \{v_7\}, V_2 = \{v_6\}, V_3 = \{v_4, v_5\}, V_4 = \{v_3\}, V_5 = \{v_2\}$, dan $V_6 = \{v_1\}$. Pemetaan $c : V(G) \rightarrow N_4$ merupakan suatu pewarnaan sejati dan 4-pewarnaan himpunan.



Gambar 3.0.2. Graf *threshold* G dengan $\chi_s(G) = 4 = \chi(G)$

Teorema 3.0.5. [6] *Untuk setiap graf* threshold G, *berlaku* $\chi_s(G) = \chi(G)$.

Bukti.

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf *threshold.* Karena $\chi_s(G) \leq \chi(G)$ berlaku untuk sebarang graf, maka cukup ditunjukkan bahwa $\chi_s(G) \geq \chi(G)$. Karena G adalah suatu graf *split,* maka V dapat dipartisi menjadi $V = \{K, S\}$, dimana K suatu himpunan *clique* dan S adalah himpunan bebas. Karena G adalah sempurna, maka $\chi(G) = \omega(G) = |K|$. Asumsikan suatu kontradiksi, misal $|K| = k-1$, maka terdapat suatu pemetaan c dimana

$$c : V \to N_{k-1}$$

Karena c menggunakan paling sedikit k warna, maka terdapat suatu subset tidak kosong X dari K yang mana untuk setiap titik $v \in K$, $v \in X$ jika dan hanya jika terdapat suatu titik $w \in K - v$ dengan $c(v) = c(w)$. Misal $X = \{x_1, x_2, ..., x_l\}$, dimana $deg(x_1) \leq deg(x_2) \leq ... \leq deg(x_l)$. Maka $2 \leq l \leq k$ dan $|c(K)| \geq k - l + 1$.

Karena $c(K) \subseteq NC(x) \subseteq N_{k-1}$ untuk setiap $x \in X$ dan tidak ada dua titik di X yang mempunyai himpunan warna ketetanggaan yang sama, maka $N(x) \bigcap S \neq N(y) \bigcap S$ untuk setiap dua titik $x, y \in X$. Oleh karena itu, $N(x) - \{y\} \neq N(y) - \{x\}$, artinya tidak ada dua titik pada X yang mempunyai derajat yang sama, selanjutnya diperoleh bahwa jika $i < j$ maka $N(x_i) \bigcap S \subset N(x_j) \bigcap S$. Ini berarti

$$c(K) \subseteq NC(x_1) \subset NC(x_2) \subset ... \subset NC(x_l) \subseteq N_{k-1}$$

Karena $|c(K)| \geq k - l + 1$, maka tidak diperoleh himpunan pewarnaan c. Oleh karena itu, haruslah $\chi_s(G) \geq k = \chi(G)$. $\square$

BAB IV

PENUTUP

Dalam pembahasan pada tulisan ini, telah diperoleh bahwa setiap graf *k-colorability* himpunan merupakan suatu masalah *NP-complete* dengan suatu transformasi kedalam *k-colorability*, sehingga bilangan kromatik himpunan χ_s dapat ditentukan dalam waktu polinomial. Dari ketiga kelas graf sempurna yang telah digunakan dalam tulisan ini, yaitu graf *chordal*, graf *split*, dan graf *threshold*, hanya graf *threshold* yang bilangan kromatiknya bernilai sama dengan bilangan kromatik himpunannya. Selanjutnya pada tulisan ini juga telah ditunjukkan bahwa, jika G adalah graf *threshold*, maka bilangan kromatik himpunan $\chi_s(G)$ dapat dihitung secara efisien dalam waktu polinomial.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Alberti, M.2010.*Small Survey on Perfect Graphs.* ENS Lyon.

[2] Bondy, J. A dan U. S. R. Murty. 1976. *Graph Theory with Applications.* Macmillan, London.

[3] Chartrand,G, F. okamoto, C. Rasmussen, dan P.Zhang :*The Set Chromatic Number of a Graph. Discuss. Math,Graph Theory. To appear.*

[4] Chartrand,G dan Ping Zhang. 2009.*Chromatic graph theory.* A Chapman and Hall book, Boca Raton.

[5] Chvatal, V dan P. Hammer:*Set-packing problems and threshold graphs.* CORR 7321 (1973). University of Waterloo.

[6] Gera, R. dkk.2009.*Set Coloring in Perfect Graphs.* Mathematica Bohemica. No 1,61-68.

[7] Hougardy, S. 2007.*Classes of Perfect Graphs.* Humboldt University, Berlin.

[8] Havet, F. *Combinatorial Optimization of the FirstYear International Master in Computer Science.*Chapter 2.Lecture Notes.

[9] Moura, L. 2002.*Introduction to the theory of NP-Completeness.* Lecture Notes University of Ottawa, Canada.

[10] West, D.B. 2001.*Introduction to graph theory, second edition.* Prentice-Hall, America.

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Elza Zuriawan, dilahirkan di Banda Aceh pada tanggal 8 Juli 1990 dari pasangan Nazwir dan Ermawati. Penulis menamatkan pendidikan Sekolah Dasar di SD Negeri 47 Banda Aceh pada tahun 2002, SMP Negeri 2 Lubuk Alung pada tahun 2005, dan SMA Negeri 1 Lubuk Alung pada tahun 2008. Pada tahun yang sama penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur PMDK (Penelusuran Minat Dan Kemampuan.)

Selama menjadi mahasiswa di jurusan Matematika FMIPA Unand, penulis aktif dalam organisasi LP2I (Lembaga Pendidikan dan Perpustakaan Islami), Andalas Sinematografi, dan Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA), serta sempat menjadi tenaga pengajar dan mengajar bimbel mata pelajaran matematika dan bahasa Inggris selama mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN).