LEMA SCHUR DAN APLIKASINYA DALAM CG-MODUL

Skripsi

REVI MELIYANI
07934015

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2011

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa:

Nama	: Revi Meliyani
No. Buku Pokok	: 07 934 015
Jurusan	: Matematika
Bidang	: Aljabar
Judul Skripsi	: LEMA *SCHUR* DAN APLIKASINYA DALAM $\mathbb{C}G$ – MODUL

Telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal 09 Agustus 2011 berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing

1.

Monika Rianti Helmi, M.Si
NIP. 196302181989031004

2.

Zulakmal, M.Si
NIP. 196711081998021001

Penguji

1.

Dr. Admi Nazra
NIP. 197103301999031002

2.

Prof. Dr. I. Made Arnawa
NIP. 196302181989031004

3.

Nova Noliza Bakar, M.Si
NIP. 196311041992032002

Mengetahui, Ketua Jurusan Matematika
FMIPA Universitas Andalas

Dr. Syafrizal Sy
NIP. 196708071993091001

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Puji syukur kehadirat Allah SWT Yang Maha Mendengar lagi Maha Melihat dan atas segala limpahan rahmat, taufik, serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan karya tulis yang berbentuk skripsi ini sesuai dengan waktu yang telah direncanakan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada baginda Nabi Besar Muhammad SAW beserta seluruh keluarga dan sahabatnya yang selalu membantu perjuangan beliau dalam menegakkan Dinullah di muka bumi ini.

Dalam penulisan skripsi yang berjudul "**Lema *Schur* dan Aplikasinya Dalam $\mathbb{C}G$-Modul**" ini, tentunya banyak pihak yang telah memberikan bantuan baik moril maupun materil. Oleh karena itu penulis ingin menyampaikan ucapan terimakasih yang tak berhingga kepada yang terhormat :

1. Ibuk Monika Rianti Helmi, M.Si dan Bapak Zulakmal, M.Si sebagai dosen pembimbing yang telah memberikan bimbingan, waktu dan pikiran kepada penulis hingga akhirnya penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
2. Bapak Dr. Admi Nazra, Bapak Prof. Dr. I. Made Arnawa dan Ibuk Nova Noliza Bakar, M.Si sebagai dosen penguji yang telah membaca, menelaah, mengoreksi, mengedit serta memberi kritikan yang konstruktif untuk penyempurnaan tugas akhir ini.

3. Bapak Dr.Safrizal Sy sebagai Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas.
4. Ibuk Dr. Maiyastri, M.Si sebagai Penasehat Akademik yang telah banyak memberikan masukan selama perkuliahan.
5. Staf Pengajar dan Staf Tata Usaha Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas.
6. Ayahanda yang penulis banggakan dan Ibunda tercinta, atas dukungan , perhatian, cinta dan kasih sayang serta pengorbanan baik secara moril maupun materil sehingga penulis dapat menyelesaikan studi dengan baik dan adinda-adinda yang menjadi penyemangat penulis.
7. Ucapan terima kasih penulis kepada semua sahabat dan teman-teman Matematika Angkatan 2007 yang tidak bisa disebutkan satu-persatu serta teman-teman KKN Sei.Sariak, Kabupaten Padang Pariaman tahun 2010.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini masih banyak terdapat kekurangan, karena keterbatasan waktu, pengetahuan dan pengalaman yang penulis miliki. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari semua pihak yang membaca tugas akhir ini. Akhirnya penulis berharap apa yang penulis lakukan dapat bermanfaat bagi penulis dan semua pihak yang membutuhkan.

Padang, 09 Agustus 2011

Penulis

ABSTRAK

$\mathbb{C}$G-modul adalah suatu ruang vektor berdimensi hingga V atas $\mathbb{C}$ yang didalamnya didefinisikan suatu perkalian gv (untuk setiap $g \in G$ dan $v \in V$) yang memenuhi kondisi-kondisi berikut yaitu untuk setiap u, $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$, dan $g, h \in G$ berlaku $gv \in V$, $(gh)v = g(hv)$, $1v = v$, $g(\lambda v) = \lambda(gv)$, $g(u+v) = gu + gv$. Lema *Schur* merupakan teori dasar bagi $\mathbb{C}$G-modul tidak tereduksi. Suatu $\mathbb{C}$G-modul V tak nol dikatakan tidak tereduksi jika $\mathbb{C}$G-submodul dari V hanyalah $\{\mathbf{0}\}$ dan V. Lema *Schur* menyatakan bahwa setiap $\mathbb{C}G$-homomorfisma pada $\mathbb{C}G$-modul tidak tereduksi adalah suatu $\mathbb{C}G$-isomorfisma dan $\mathbb{C}G$-isomorfisma pada $\mathbb{C}G$-modul tidak tereduksi V terhadap dirinya sendiri adalah sebuah perkalian skalar dari identitas endomorfisma 1_v.

Dalam tugas akhir ini, Lema Schur dan konversnya digunakan untuk membuktikan proposisi-proposisi, yaitu jika G adalah grup abelian hingga maka setiap $\mathbb{C}G$-modul tidak tereduksi mempunyai dimensi 1 dan $\mathbb{C}$G-submodul dari $\mathbb{C}$G-modul yang tidak tereduksi adalah isomorfiik.

Kata kunci : *$\mathbb{C}$G-modul, $\mathbb{C}$G-modul tidak tereduksi, Lema Schur.*

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Balakang

Misalkan G grup hingga dan $GL_n(\mathbb{C})$ merupakan grup yang beranggotakan matriks $n \times n$ yang dapat diinverskan dengan komponennya di $\mathbb{C}$, maka homomorfisma grup $\rho : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ adalah suatu representasi dari grup G.

Teori representasi mempunyai hubungan yang sangat erat dengan $\mathbb{C}G$-modul. $\mathbb{C}G$-modul adalah suatu ruang vektor berdimensi hingga V atas $\mathbb{C}$ yang didalamnya didefinisikan suatu perkalian gv (untuk setiap $g \in G$ dan $v \in V$) yang memenuhi kondisi tertentu. Karena $\mathbb{C}G$-modul dibangun dari ruang vektor, maka $\mathbb{C}G$-modul juga mempunyai subruang yang diberi nama $\mathbb{C}G$-submodul. $\mathbb{C}G$-submodul dari $\mathbb{C}G$-modul V adalah subruang U dari V sedemikian sehingga U sendiri merupakan suatu $\mathbb{C}G$-modul. Suatu $\mathbb{C}G$-modul V tak nol dikatakan tidak tereduksi jika $\mathbb{C}G$-submodul dari V hanyalah $\{\mathbf{0}\}$ dan V, dan dikatakan tereduksi jika sebaliknya.

Lema *Schur* merupakan teori dasar bagi $\mathbb{C}G$-modul tidak tereduksi. Lema ini banyak digunakan untuk membuktikan sifat-sifat dalam teori representasi grup. Misalnya untuk menentukan semua representasi tidak tereduksi dari grup komutatif hingga.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan uraian diatas, permasalahan yang akan dibahas pada penulisan tugas akhir ini adalah bagaimana membuktikan Lema *Schur* dan bentuk aplikasi Lema *Schur* dalam $\mathbb{C}G$-modul.

1.3 Pembatasan Masalah

Pada penulisan tugas akhir ini, hanya akan dibahas Lema *Schur* untuk $\mathbb{C}G$-modul yang dibangun oleh ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan kompleks dan grup hingga.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah menjelaskan pembuktian Lema *Schur* dan bentuk aplikasi dari Lema *Schur* dalam $\mathbb{C}G$-modul.

1.5 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini terdiri Bab 1 Pendahuluan, berisi latar belakang masalah, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan. Bab 2 Landasan Teori, memuat tentang beberapa definisi dari suatu matriks, definisi grup, definisi ruang vektor, pemetaan linier dan nilai eigen, representasi grup, definisi $\mathbb{C}G$-modul, $\mathbb{C}G$-submodul, $\mathbb{C}G$-homomorfisma, $\mathbb{C}G$-isomorfisma dan Teorema Maschke. Bab 3 Pembahasan, memuat tentang Lema *Schur* dalam $\mathbb{C}G$-modul dan konvers dari Lema *Schur*, versi matriks dari Lema *Schur*, serta aplikasi Lema *Schur* dalam $\mathbb{C}G$-modul. Bab 4 Penutup, berisi kesimpulan-kesimpulan dari pembahasan.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan disajikan teori-teori pendukung yang berkaitan dengan pembahasan tentang Lema *Schur* yaitu definisi matriks, pemetaan linier, definisi grup, definisi ruang vektor, representasi grup, definisi ℂG-modul, ℂG-submodul, ℂG-homomorfisma, ℂG-isomorfisma, dan teorema Maschke.

2.1 Matriks

Definisi 2.1.1 [1]

Suatu matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks.

Definisi 2.1.2 [1]

Jika A adalah matriks kuadrat dan jika terdapat matriks B sehingga $AB = BA = I$ maka A dikatakan dapat dibalik dan B dinamakan invers dari A.

2.2 Grup

Definisi 2.2.1 [3]

Suatu himpunan tak nol dari elemen G disebut grup jika G yang didefinisikan oleh operasi biner " $*$ " sedemikian sehingga

1. Untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$ (tertutup).
2. Untuk setiap $a, b \in G$ maka berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$ (sifat assosiatif).
3. Terdapat elemen identitas $e \in G$ sehingga berlaku $a * e = e * a = a$ untuk setiap $a \in G$.

4. Untuk setiap $a \in G$ ada $a^{-1} \in G$ sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (ada invers di G).

Definisi 2.2.2 [3]

Suatu grup G dikatakan abelian (komutatif) jika untuk setiap $a, b \in G$,

$$a * b = b * a.$$

Selanjutnya, dalam tulisan ini $a * b$ hanya ditulis ab untuk setiap $a, b \in G$.

Definisi 2.2.3 [2]

Misalkan G suatu grup. G disebut grup siklik (grup yang dibangun oleh suatu unsur) jika terdapat $a \in G$ sehingga $G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$. Dalam hal ini a disebut generator (pembangun) dari G dan ditulis $G = \langle a \rangle$.

Definisi 2.2.4 [5]

Misalkan n adalah bilangan bulat positif dan notasikan $\mathbb{C}$ sebagai himpunan semua bilangan kompleks. Himpunana dari n akar tunggal $\mathbb{C}$, dengan perkalian biasa dari bilanngan kompleks, adalah suatu grup yang berorde n. Ditulis sebagai C_n dan disebut grup siklik berorde n. Jika $a = e^{2\pi i/n}$, maka $C_n = \{1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$ dan $a^n = 1$.

2.3 Ruang Vektor

Definisi 2.3.1 [1]

Misalkan V adalah suatu himpunan tak kosong dari objek-objek sebarang, dimana dua operasinya didefinisikan, yaitu penjumlahan dan perkalian dengan skalar (bilangan). Operasi penjumlahan dapat diartikan sebagai suatu aturan yang mengasosiasikan setiap pasang objek u dan v pada V dengan suatu objek $u + v$, yang disebut jumlah dari u dan v. Operasi perkalian skalar dapat diartikan sebagai suatu aturan yang mengasosiasikan setiap skalar k dan setiap objek u pada V dengan suatu objek ku, yang disebut kelipatan skalar dari u oleh k . Jika aksioma-aksioma berikut dipenuhi oleh semua objek u, v, w pada V dan semua skalar k dan l, maka V disebut ruang vektor dan objek-objek pada V disebut vektor. Aksioma-aksioma tersebut adalah:

1. Jika u dan v adalah objek-objek pada V, maka $u + v$ berada pada V.
2. $u + v = v + u$.
3. $u + (v + w) = (u + v) + w$.
4. Terdapat $\mathbf{0}$ di V yang disebut vektor nol untuk V, sedemikian rupa sehingga $\mathbf{0} + u = u + \mathbf{0} = u$ untuk semua u di V.
5. Untuk setiap u di V terdapat $-u$ di V yang disebut sebagai negatif dari u, sedemikian rupa sehingga $u + (-u) = (-u) + u = 0$.
6. Jika k adalah skalar sebarang dan u adalah objek sebarang di V, maka ku terdapat di V.
7. $k(u + v) = ku + kv$.
8. $(k + l)u = ku + lu$.
9. $k(lu) = (kl)(u)$.
10. $1u = u$.

Teorema 2.3.2 [6]

Misalkan V suatu ruang vektor atas lapangan F maka

i. $0v = \mathbf{0}$ untuk setiap $v \in V$.

ii. $(-1)v = -v$ untuk setiap $v \in V$.

Bukti. Lihat [6] halaman 1.5

Definisi 2.3.3 [1]

Suatu subhimpunan W dari suatu ruang vektor V disebut subruang dari V jika W itu sendiri merupakan suatu ruang vektor di bawah penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada V.

Lema 2.3.4 [4]

Suatu himpunan tak kosong $U \subseteq V$ dari suatu ruang vektor atas F adalah subruang dari V jika dan hanya jika

1. $u_1, u_2 \in U$, maka $u_1 + u_2 \in U$.
2. $k \in F$ dan $u \in U$ maka $ku \in U$.

Bukti. Lihat [4] halaman 100.

Selanjutnya akan dijelaskan definisi jumlah langsung dari suatu ruang vektor.

Definisi 2.3.5 [4]

Misalkan bahwa W_1 dan W_2 adalah subruang dari ruang vektor V, maka

$V = W_1 \oplus W_2$ jika

1. $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$.
2. $V = W_1 + W_2$ sehingga untuk setiap $v \in V$ dapat ditulis $v = w_1 + w_2$, dimana $w_1 \in W_1$ dan $w_2 \in W_2$.

Dalam hal ini, W adalah jumlah langsung dari W_1 dan W_2 .

Lema 2.3.6 [4]

Misalkan $V = W_1 \oplus W_2$, maka setiap $v \in V$ dapat ditulis secara tunggal sebagai $v = w_1 + w_2$ dimana $w_1 \in W_1$ dan $w_2 \in W_2$.

Bukti. Lihat [4] halaman 269.

2.4 Pemetaan Linier dan Nilai Eigen

Definisi 2.4.1 [1]

Jika $T : V \to W$ adalah sebuah fungsi yang memetakan sebuah ruang vektor V ke ruang vektor W, maka T disebut sebagai pemetaan linier dari V ke W jika untuk suatu vektor u dan v pada V dan semua skalar c, berlaku

a) $T(u + v) = T(u) + T(v)$

b) $T(cu) = c\,T(u)$.

Dalam kasus yang spesifik dimana $V = W$, pemetaan linier $T : V \to V$ disebut operator linier pada V.

Definisi 2.4.2 [4]

Misalkan $T : V \to W$ adalah pemetaan linier.

1. *Kernel* dari T, dinotasikan dengan $ker(T)$, didefinisikan sebagai

$$ker\ (T) = \{v \in V | T(v) = \mathbf{0}\}.$$

2. *Image* dari T, dinotasikan dengan $im(T)$, didefinisikan oleh

$$im(T) = \{T(v) | v \in V\}.$$

Definisi 2.4.3 [4]

Suatu pemetaan linier $T: V \to W$ disebut satu-satu jika $u, v \in V$ dan $T(u) = T(v)$ maka $u = v$. T dikatakan pada jika $im(T) = W$. T dikatakan isomorfisma jika T adalah satu-satu dan pada. Bila terdapat isomorfisma $T: V \to W$ maka ruang vektor V dan W disebut isomorfik.

Teorema 2.4.4 [4]

Misalkan bahwa V dan W adalah ruang vektor berdimensi hingga dan $T: V \to W$ adalah pemetaan linier, maka T adalah satu-satu jika dan hanya jika $ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Bukti.Lihat [4] halaman 188.

Definisi 2.4.5 [4]

Misal $T : V \to V$ adalah operator linier. Jika $v \in V$ adalah vektor tak nol dan terdapat skalar k sehingga $T(v) = kv$, maka v adalah vektor eigen dari T dan skalar k disebut nilai eigen dari T yang berkaitan dengan vektor eigen v .

Lema 2.4.6 [4]

Misalkan bahwa $T : V \to V$ adalah suatu operator linier, maka v adalah vektor eigen dari T yang berkaitan dengan nilai eigen r jika dan hanya jika

$$v \in ker(T - r1_v) \neq \{\mathbf{0}\}.$$

Bukti. Lihat [4] halaman 209.

Definisi 2.4.7 [5]

Suatu pemetaan linier dari suatu ruang vektor V ke dirinya sendiri dinamakan endomorfisma dari V.

Teorema 2.4.8 [5]

Misalkan V adalah suatu ruang vektor tak nol atas $\mathbb{C}$ dan θ suatu endomorfisma dari V, maka θ mempunyai nilai eigen.

Bukti. Lihat [5] halaman 25.

Definisi 2.4.9 [5]

Fungsi identitas 1_v didefinisikan oleh $1_v: V \to V$ untuk setiap $v \in V$ adalah endomorfisma dari V.

Selanjutnya akan dijelaskan definisi tentang representasi grup dan $\mathbb{C}$G-modul yang merupakan konsep penting dalam penulisan tugas akhir ini.

2.5 Representasi Grup

Definisi 2.5.1 [5]

Grup yang beranggotakan matriks $n \, x \, n$ yang dapat diinverskan dengan komponennya di $\mathbb{C}$ dinotasikan sebagai $GL_n(\mathbb{C})$ dan dinamakan grup linier umum berderajat n atas $\mathbb{C}$.

Definisi 2.5.2 [5]

Suatu representasi dari G adalah homomorfisma grup $\rho: G \to GL_n(\mathbb{C})$ untuk suatu $n \in N$, bilangan asli n dinamakan derajat dari ρ.

2.6 Modul Atas $\mathbb{C}G$

Definisi 2.6.1 [5]

Suatu ruang vektor berdimensi hingga V atas $\mathbb{C}$ adalah suatu $\mathbb{C}$G-modul jika perkalian gv (untuk setiap $g \in G$ dan $v \in V$) terdefinisi dan memenuhi kondisi berikut :

untuk setiap u, $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$, dan $g, h \in G$,

(i) $gv \in V$,

(ii) $(gh)v = g(hv)$,

(iii) $1v = v$,

(iv) $g(\lambda v) = \lambda(gv)$,

(v) $g(u + v) = gu + gv$.

Teorema 2.6.2 [5]

Jika $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ adalah suatu representasi dari G atas lapangan $\mathbb{C}$ dan $V = \mathbb{C}^n$, maka V menjadi $\mathbb{C}G$-modul jika didefinisikan perkalian gv oleh

$$gv = \rho(g)v \ , v \in V, g \in G.$$

Bukti. Lihat [5] halaman 40.

Berikutnya akan dijelaskan definisi dari $\mathbb{C}G$-submodul dan $\mathbb{C}G$-submodul yang tidak tereduksi.

Definisi 2.6.3 [5]

Misalkan V suatu $\mathbb{C}G$-modul. Suatu subhimpunan W dari V dikatakan $\mathbb{C}G$-submodul dari V jika W adalah subruang dan $gw \in W$ untuk setiap $w \in W$ dan $g \in G$.

Definisi 2.6.4 [5]

Misalkan V adalah suatu $\mathbb{C}G$- modul tak nol. V dikatakan tidak tereduksi jika tidak mempunyai $\mathbb{C}G$- submodul selain $\{\mathbf{0}\}$ dan V, dan tereduksi jika berlaku sebaliknya. Suatu representasi $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ dikatakan tidak tereduksi jika $\mathbb{C}G$- modul $\mathbb{C}^n$ yang didefinisikan dengan $gv = \rho(g)v$ untuk setiap $g \in G$ dan $v \in \mathbb{C}^n$ merupakan

$\mathbb{C}G$-modul tidak tereduksi, dan ρ dikatakan tereduksi jika $\mathbb{C}G$- modul $\mathbb{C}^n$ juga merupakan $\mathbb{C}G$-modul tereduksi.

2.7 Homomorfisma $\mathbb{C}G$-modul

Definisi 2.7.1 [5]

Misalkan V dan W $\mathbb{C}G$-modul. Suatu pemetaan $\theta : V \to W$ dikatakan $\mathbb{C}G$-homomorfisma jika θ adalah pemetaan linier dan $\theta(gv) = g\theta(v)$ untuk setiap $v \in V$ dan $g \in G$.

Proposisi 2.7.2 [5]

Jika V dan W merupakan $\mathbb{C}G$-modul dan $\theta : V \to W$ merupakan $\mathbb{C}G$-homomorfisma, maka $ker(\theta)$ merupakan $\mathbb{C}G$-submodul dari V dan $Im(\theta)$ merupakan $\mathbb{C}G$-submodul dari W .

Bukti. Lihat [5] halaman 62.

Definisi 2.7.3 [5]

Misalkan V dan W merupakan $\mathbb{C}G$-modul. Suatu pemetaan $\theta : V \to W$ adalah $\mathbb{C}G$-isomorfisma jika θ adalah $\mathbb{C}G$-homomorfisma dan θ dapat dibalik. Jika terdapat suatu $\mathbb{C}G$-isomorfisma maka V dan W dikatakan $\mathbb{C}G$-modul isomorfik dan ditulis $V \cong W$.

Proposisi 2.7.4 [5]

Misal V adalah $\mathbb{C}G$-modul dan misalkan bahwa $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_r$ dimana U_i adalah $\mathbb{C}G$-submodul dari V. Untuk setiap $v \in V$, maka $v = u_1 + u_2 + \cdots + u_r$ untuk suatu vektor tunggal $u_i \in U_i$. Definisikan $\pi_i : V \to V$ $(1 \leq i \leq r)$ dimana $\pi_i(v) = u_i$. Maka π_i adalah $\mathbb{C}G$-homomorfisma.

Bukti. Lihat [5] halaman 67.

Teorema berikut merupakan teorema yang penting dalam teori representasi yang menjelaskan tentang jumlah langsung dari $\mathbb{C}G$-submodul.

Teorema 2.7.5 [5] (Teorema Maschke)

Jika V adalah suatu $\mathbb{C}G$-modul dan U adalah suatu $\mathbb{C}G$-submodul dari V, maka terdapat suatu $\mathbb{C}G$-submodul W dari V sedemikian sehingga $V = U \oplus W$.

Bukti. Lihat [4] halaman 71.

BAB III

LEMA *SCHUR* DAN APLIKASINYA DALAM $\mathbb{C}G$ – MODUL

Pada bab ini akan dibahas hasil dari tugas akhir ini yaitu tentang Lema *Schur* dan aplikasinya dalam $\mathbb{C}G$-modul. Terlebih dahulu akan dibahas tentang Lema *Schur*.

3.1 Lema *Schur*

Lema 3.1.1 [5] (Lema *Schur*)

Misalkan V dan W $\mathbb{C}G$-modul tidak tereduksi .

1. Jika $\theta: V \rightarrow W$ adalah $\mathbb{C}G$-homomorfisma maka salah satu dari yang berikut berlaku yaitu θ adalah suatu $\mathbb{C}G$-isomorfisma atau $\theta(v) = \mathbf{0}$ untuk setiap $v \in V$.
2. Jika $\theta: V \rightarrow V$ adalah $\mathbb{C}G$-isomorfisma maka θ adalah sebuah perkalian skalar dari identitas endomorfisma 1_v.

Bukti.

1. Misalkan V dan W $\mathbb{C}G$-modul tidak tereduksi dan $\theta: V \rightarrow W$ adalah $\mathbb{C}G$-homomorfisma.

   Dalam hal ini, akan ditunjukkan θ adalah suatu $\mathbb{C}G$-isomorfisma

   Misalkan $\theta(v) \neq \mathbf{0}$ untuk $v \in V$ maka $im(\theta) \neq \{\mathbf{0}\}$.

   Karena V dan W adalah $\mathbb{C}G$-modul dan $\theta: V \rightarrow W$ adalah $\mathbb{C}G$-homomorfisma, maka :

   i) $im(\theta)$ adalah $\mathbb{C}G$-submodul dari W. Karena W adalah $\mathbb{C}G$-modul tidak tereduksi, akibatnya $im(\theta) = W$.

ii) $ker(\theta)$ adalah $\mathbb{C}G$-submodul dari V. Karena V adalah $\mathbb{C}G$-modul tidak tereduksi, akibatnya $ker(\theta) = \{\mathbf{0}\}$.

Berdasarkan i) dan ii) maka θ dapat dibalik.

Karena θ adalah $\mathbb{C}G$-homomorfisma dan θ dapat dibalik, berdasarkan Definisi 2.7.3 , θ adalah suatu $\mathbb{C}G$-isomorfisma.

2. Misalkan $\theta: V \to V$ adalah $\mathbb{C}G$-isomorfisma.

Akan ditunjukkan θ adalah sebuah perkalian skalar dari identitas endomorfisma 1_v.

Menurut Teorema 2.4.8, V ruang vektor atas $\mathbb{C}$ dan θ endomorfisma dari V maka θ mempunyai nilai eigen.

Misal nilai eigennya adalah λ, dengan $\lambda \in \mathbb{C}$.

Menurut Lema 2.4.6, λ adalah nilai eigen dari θ jika dan hanya jika

$$ker(\theta - \lambda 1_v) \neq \{\mathbf{0}\}.$$

Karena $\theta - \lambda 1_v$ adalah $\mathbb{C}G$-homomorfisma maka $ker(\theta - \lambda 1_v)$ adalah $\mathbb{C}G$-submodul dari V. Karena V tidak tereduksi, akibatnya $ker(\theta - \lambda 1_v) = V$.

Sehingga $(\theta - \lambda 1_v)(v) = \mathbf{0}$, untuk setiap $v \in V$ dan mengakibatkan

$$\theta - \lambda 1_v = \mathbf{0}$$

$$\theta = \lambda 1_v$$

Jadi terbukti bahwa θ merupakan perkalian skalar dengan 1_v. ■

Proposisi berikut ini merupakan konvers dari Lema *Schur*.

Proposisi 3.1.2 [5]

Misalkan V adalah $\mathbb{C}G$-modul tak nol dan misalkan bahwa setiap $\mathbb{C}G$-homomorfisma dari V ke V adalah suatu perkalian skalar dengan 1_v , maka V tidak tereduksi.

Bukti.

Misalkan V adalah $\mathbb{C}G$-modul tak nol dan misalkan bahwa setiap $\mathbb{C}G$-homomorfisma dari V ke V adalah suatu perkalian skalar dengan 1_v.

Akan ditunjukkkan V tidak tereduksi.

Andaikan V tereduksi, maka V mempunyai $\mathbb{C}G$-submodul U selain $\{\mathbf{0}\}$ dan V.

Berdasarkan teorema Maschke, maka terdapat suatu $\mathbb{C}G$-submodul W dari V sedemikian sehingga $V = U \oplus W$.

Misalkan pemetaan $\pi: V \to V$ didefinisikan oleh $\pi(u + w) = u$ untuk setiap $u \in U$, $w \in W$, maka berdasarkan Proposisi 2.7.4, π adalah $\mathbb{C}G$-homomorfisma dan π bukanlah suatu perkalian skalar dengan 1_v.

Hal ini kontradiksi dengan premis yang menyatakan bahwa setiap $\mathbb{C}G$-homomorfisma dari V ke V adalah suatu perkalian skalar dengan 1_v, jadi haruslah V tidak tereduksi.■

Akibat 3.1.3 [5]

Misalkan $\rho : G \rightarrow GL(n,\mathbb{C})$ representasi dari G. Maka ρ tidak tereduksi jika dan hanya jika setiap matriks A yang berukuran $n\ x\ n$ yang memenuhi

$\rho(g)A = A\rho(g)$ untuk setiap $g\epsilon\ G$ akan mempunyai bentuk $A = \lambda I_n$, $\lambda \epsilon \mathbb{C}$.

Bukti.

Berdasarkan Teorema 2.6.2, $\mathbb{C}^n$ merupakan $\mathbb{C}G$- modul dengan perkalian $gv = \rho(g)v$, $v \in \mathbb{C}^n, g \in G$.

i. Misalkan $\theta : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ dengan $\theta(v) = Av$. Akan ditunjukkan terlebih dahulu $\theta(gv) = g\theta(v) \Leftrightarrow A(gv) = g(Av)$.

   Misalkan $\theta(gv) = g\theta(v)$. Akan ditunjukkan $A(gv) = g(Av)$.

   Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} A(gv) &= A\rho(g)v \\ &= \theta(\rho(g)v) \\ &= \theta(gv) \\ &= g\theta(v) \\ &= g(Av). \end{aligned}$$

   Sebaliknya misalkan $A(gv) = g(Av)$. Akan ditunjukkan $\theta(gv) = g\theta(v)$.

   Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \theta(gv) &= Agv \\ &= g(Av) \\ &= g\theta(v) \end{aligned}$$

ii. Selanjutnya akan dibuktikan $\theta: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ dengan $\theta(v) = Av$ adalah $\mathbb{C}G$-homomorfisma jika dan hanya jika

$$\theta(gv) = g\theta(v) \Leftrightarrow A(gv) = g(Av).$$

Misalkan $\theta: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ dengan $\theta(v) = Av$ adalah $\mathbb{C}G$-homomorfisma .

Akan ditunjukkan $\theta(gv) = g\theta(v) \Leftrightarrow A(gv) = g(Av)$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} A(gv) &= \theta(gv) \\ &= g\theta(v) \\ &= g(Av). \end{aligned}$$

Berdasarkan (i) maka berlaku $\theta(gv) = g\theta(v) \Leftrightarrow A(gv) = g(Av)$.

Sebaliknya misalkan $\theta: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ dengan $\theta(v) = Av$ dan $A(gv) = g(Av)$.

Akan ditunjukkan θ adalah $\mathbb{C}G$-homomorfisma.

Berdasarkan (i), $A(gv) = g(Av)$ maka $\theta(gv) = g\theta(v)$. Akibatnya θ adalah $\mathbb{C}G$-homomorfisma.

Selanjutnya akan dibuktikan arah kekanan dan kekiri dari Akibat 3.1.3

Misalkan ρ tidak tereduksi.

Akan ditunjukkan untuk setiap A_{nxn} yang memenuhi $\rho(g)A = A\rho(g)$ untuk setiap $g \in G$ akan berbentuk $A = \lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Misalkan $\theta: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ dengan $\theta(v) = Av$ dan $\rho(g)A = A\rho(g)$. Akan ditunjukkan θ adalah $\mathbb{C}G$-homomorfisma.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} A(gv) &= A\rho(g)v \\ &= \rho(g)Av \\ &= g(Av). \end{aligned}$$

Berdasarkan (i), $A(gv) = g(Av)$ maka $\theta(gv) = g\theta(v)$. Akibatnya θ adalah $\mathbb{C}G$-homomorfisma.

Karena ρ tidak tereduksi maka $\mathbb{C}G$-modul $\mathbb{C}^n$ yang didefinisikan dengan perkalian $gv = \rho(gv), v \in \mathbb{C}^n, g \in G$ adalah $\mathbb{C}G$-modul tidak tereduksi dan karena θ adalah $\mathbb{C}G$-homomorfisma maka berdasarkan Lema 3.1.1, θ adalah perkalian skalar dengan 1_v yaitu $\theta = \lambda 1_v$.

Karena $\theta(v) = Av$ untuk setiap $v \in \mathbb{C}^n$ dan A_{nxn} adalah matriks yang mewakili pemetaan θ, akibatnya $A = \lambda I_n$.

Sebaliknya misalkan untuk setiap A_{nxn} dan $g \in G$ memenuhi $\rho(g)A = A\rho(g)$ akan berbentuk $A = \lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Misalkan $\theta: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dengan $\theta(v) = Av$.

Akan ditunjukkan ρ tidak tereduksi.

Berdasarkan (ii), θ adalah $\mathbb{C}G$-homomorfisma.

Karena A adalah matriks yang mewakili pemetaan θ , akibatnya $\theta = \lambda 1_v$.

Berdasarkan Proposisi 3.1.2 maka $V = \mathbb{C}^n$ yang dedefinisikan dengan perkalian $gv = \rho(g)v , v \in \mathbb{C}^n, g \in G$ adalah $\mathbb{C}G$-modul tidak tereduksi, akibatnya ρ juga tidak tereduksi. ■

Contoh :

Misalkan $G = C_2 = \langle a : a^2 = 1 \rangle$. Definisikan $\rho: G \to GL_2(\mathbb{C})$ dengan

$$\rho(a^r) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^r.$$

Akan ditunjukkan bahwa ρ adalah representasi dari grup G yaitu dengan menunjukkan bahwa ρ adalah homomorfisma grup.

Perhatikan bahwa $C_2 = \{1, a\}$, sehingga

$$\rho(1) = \rho(a^0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho(a) = \rho(a^1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}.$$

Akibatnya

$$\rho(1).\rho(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho(1)$$

$$\rho(1).\rho(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \rho(a).$$

Jadi $\rho: G \to GL_2(\mathbb{C})$ adalah suatu representasi.

Pilih $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$.

Perhatikan bahwa

$$\rho(1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

$$A\rho(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix},$$

$$\rho(a)A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ i-i^2 & i+i^2 \end{pmatrix}$$

$$A\rho(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ i-i^2 & i+i^2 \end{pmatrix}.$$

Akibatnya $\rho(g)A = A\rho(g)$ untuk setiap $g \in C_2$. Karena $A \neq \lambda I_n$ maka menurut Akibat 3.1.3, diperoleh bahwa ρ tereduksi.

Lema *Schur* merupakan teori dasar bagi $\mathbb{C}G$-modul tidak tereduksi sehingga banyak digunakan untuk membuktikan sifat-sifat dalam representasi grup. Berikut akan dibahas aplikasi dari Lema *Schur* dalam $\mathbb{C}G$-modul.

3.2 Aplikasi Lema *Schur* dalam $\mathbb{C}G$-modul

Proposisi 3.2.1 [5]

Jika G adalah grup abelian hingga maka setiap $\mathbb{C}G$-modul tidak tereduksi mempunyai dimensi 1.

Bukti.

Misalkan V $\mathbb{C}G$-modul tidak tereduksi.

Pilih $x \in G$.

Karena G abelian maka berlaku $gxv = xgv$ untuk setiap $g \in G$.

Misalkan endomorfisma $\theta: V \to V$ dengan $\theta(v) = xv$.

a. Akan dibuktikan bahwa $\theta: V \to V$ dengan $\theta(v) = xv$ adalah $\mathbb{C}G$-homomorfisma.

   1. Ambil $a, b \in V$, $k \in \mathbb{C}$.

      Akan ditunjukkan $\theta(a + b) = \theta(a) + \theta(b)$ dan $\theta(ka) = k\theta(a)$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\theta(a+b) &= x(a+b)\\ &= xa+xb\\ &= \theta(a)+\theta(b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta(ka) &= xka\\ &= kxa\\ &= k\theta(a)\,.\end{aligned}$$

Jadi θ adalah pemetaan linier.

2. Akan ditunjukkan $\theta(gv) = g\theta(v)$.

   Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\theta(gv) &= xgv\\ &= gxv\\ &= g\theta(v)\end{aligned}$$

   Berdasarkan 1 dan 2 maka θ adalah $\mathbb{C}G$-homomorfisma.

   Karena V adalah $\mathbb{C}G$-modul tidak tereduksi dan berdasarkan Lema 3.1.1, maka θ adalah $\mathbb{C}G$ -isomorfisma.

b. Berdasarkan Lema 3.1.1, maka θ adalah perkalian skalar dengan 1_v, akibatnya $xv = \lambda_x v$ untuk setiap $v \in V$.

   Akan ditunjukkan bahwa $W_{\lambda_x} = \{v \in V | xv = \lambda_x v\}$ adalah $\mathbb{C}G$-submodul dari $\mathbb{C}G$-modul V.

1. Karena V ruang vektor maka terdapat $\mathbf{0} \in V$.

   Akan dibuktikan terdapat $\mathbf{0} \in W_{\lambda_x}$ sehingga $x\mathbf{0} = \lambda_x v$.

   Perhatikan bahwa

$$x\mathbf{0} = \mathbf{0} = 0v \text{ untuk setiap } v \in V$$

2. Jelas bahwa $W_{\lambda_x} \subseteq V$.

3. Ambil $a, b \in W_{\lambda_x}$.

   Akan ditunjukkan $a + b \in W_{\lambda_x}$.

   Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} x(a+b) &= xa + xb \\ &= \lambda_x a + \lambda_x b \\ &= \lambda_x(a+b) \\ &= \lambda_x c \text{ , untuk suatu } c = a + b \text{ .} \end{aligned}$$

   Jadi $a + b \in W_{\lambda_x}$.

4. Ambil $a \in W_{\lambda_x}, k \in \mathbb{C}$.

   Akan ditunjukkan $ka \in W_{\lambda_x}$.

   $a \in W_{\lambda_x}$ artinya $a \in V$ sedemikian sehinnga $xa = \lambda_x a$.

   Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} xka &= kxa \\ &= k\lambda_x a \\ &= \lambda_x ka \text{ .} \end{aligned}$$

   Jadi $ka \in W_{\lambda_x}$.

5. Ambil $w \in W_{\lambda_x}$, dan $g \in G$.

Akan ditunjukkan $gw \in W_{\lambda_x}$.

$w \in W_{\lambda_x}$ artinya $w \in V$ sedemikian sehingga $xw = \lambda_x w$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} xgw &= gxw \\ &= g\lambda_x w \\ &= \lambda_x gw. \end{aligned}$$

Jadi $gw \in W_{\lambda_x}$.

Dari 1, 2, 3, 4 dan 5 maka W_{λ_x} adalah $\mathbb{C}G$-submodul dari V . Karena W_{λ_x} berlaku untuk setiap $x \in G$, akibatnya setiap subruang V adalah $\mathbb{C}G$-submodul.

Karena V tidak tereduksi maka $dim(V)$ haruslah 1.■

Contoh:

Misalkan $G = C_3 = \langle a : a^3 = 1 \rangle$ dan $V = \mathbb{C}^2$. Definisikan $\rho: G \to GL_2(\mathbb{C})$ dengan

$$\rho(a^r) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^r.$$

Akan diperiksa terlebih dahulu bahwa ρ adalah representasi yaitu dengan menunjukkan bahwa ρ adalah homomorfisma grup.

Perhatikan bahwa $C_3 = \{1, a, a^2\}$.

$$\rho(1) = \rho(a^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho(a) = \rho(a^1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rho(a^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Akibatnya

$$\rho(1).\rho(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho(1)$$

$$\rho(1).\rho(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \rho(a)$$

$$\rho(a).\rho(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \rho(a^2)$$

Jadi $\rho: G \to GL_2(\mathbb{C})$ adalah suatu representasi.

Dengan mendefinisikan $gv = \rho(g)v$ untuk setiap $v \in V, g \in G$ dengan

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

maka berdasarkan Teorema 2.6.2 , $V = \mathbb{C}^2$ menjadi $\mathbb{C}G$-modul yang berdimensi 2.

Berdasarkan Proposisi 3.2.1, maka V adalah $\mathbb{C}G$-modul tereduksi.

Proposisi 3.2.2 [5]

Misalkan V adalah $\mathbb{C}G$-modul dan tulis $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_s$, suatu jumlah langsung dari $\mathbb{C}G$-submodul tidak tereduksi U_i. Jika U adalah sebarang $\mathbb{C}G$-submodul tidak tereduksi dari V, maka $U \cong U_i$ untuk suatu i .

Bukti.

Misalkan $u \in U_i$ maka $u = u_1 + u_2 + \cdots + u_s$ untuk suatu vektor tunggal $u_i \in U_i$ dengan $1 \le i \le s$.

Definisikan pemetaan $\pi_i: U \to U_i$ dengan $\pi_i(u) = u_i$. Pilih i sehingga $u_i \neq 0$ untuk suatu $u \in U$. Akibatnya diperoleh $\pi_i \neq 0$.

Berdasarkan Proposisi 2.7.4, maka π_i adalah $\mathbb{C}G$-homomorfisma.

Karena U dan U_i tidak tereduksi dan $\pi_i \neq 0$, maka menurut Lema 3.1.1, π_i adalah $\mathbb{C}G$-isomorfisma.

Akibatnya U dan U_i adalah $\mathbb{C}G$-modul yang isomorfik, dengan kata lain $U \cong U_i$.■

BAB IV

KESIMPULAN

Dari penulisan tugas akhir ini dapat disimpulkan bahwa lema *Schur* menyatakan bahwa setiap $\mathbb{C}G$-homomorfisma pada $\mathbb{C}G$-modul tidak tereduksi adalah suatu $\mathbb{C}G$-isomorfisma. Dan $\mathbb{C}G$-isomorfisma pada $\mathbb{C}G$-modul tidak tereduksi V terhadap dirinya sendiri adalah sebuah perkalian skalar dari identitas endomorfisma 1_v.

Lema *Schur* memiliki konvers yaitu V adalah $\mathbb{C}G$-modul tak nol dan setiap $\mathbb{C}G$-homomorfisma dari V ke V adalah suatu perkalian skalar dengan 1_v, maka V tidak tereduksi. Selanjutnya salah satu akibat dari lema *Schur* yaitu misalkan $\rho : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ representasi dari G. Maka ρ tidak tereduksi jika dan hanya jika setiap matriks A yang berukuran $n \, x \, n$ yang memenuhi $\rho(g)A = A\rho(g)$ untuk setiap $g \epsilon G$ mempunyai bentuk $A = \lambda I_n$, $\lambda \epsilon \mathbb{C}$.

Lema *Schur* banyak digunakan dalam representasi grup. Adapun aplikasi lema *Schur* dalam $\mathbb{C}G$-modul yaitu setiap $\mathbb{C}G$-modul tidak tereduksi mempunyai dimensi 1 jika G merupakan grup abelian hingga. Aplikasi lainnya yaitu suatu jumlah langsung dari $\mathbb{C}G$-submodul tidak tereduksi U_i dan U adalah sebarang $\mathbb{C}G$-submodul tidak tereduksi dari V akan mengakibatkan $U \cong U_i$ untuk suatu i .

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Howard dan Chris Rorres.2004.*Aljabar Linear Elementer versi Aplikasi Edisi Kedelapan Jilid 1.* Erlangga, Jakarta.

[2] Arifin, Achmad. 2000. *Aljabar.* Penerbit ITB, Bandung

[3] Herstein, i.n. 1975. *Topics in Algebra* . Wiley,Jhon and Sons, Newyork.

[4] Jacob, Bill.1990.*Linear Algebra*. W.H Freeman and Company, New York.

[5] James, Gordon and Martin Liebeck. 2001. *Representation and Characters of Groups Second Edition.* Cambridge University Press, Cambridge.

[6] Budhi, Wono Setya dan Irawati. 2006. *Aljabar II.* Universitas Terbuka, Jakarta.