



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar Unand.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Unand.

PELABELAN SISI AJAIB PADA GRAF $2C_n$

SKRIPSI



INGMA MARDELIZA

06934007

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU
PENGETAHUAN ALAM UNIVERSITAS
ANDALAS PADANG 2011**

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa :

Nama : Ingma Mardeliza
No. Buku Pokok : 06934007
Jurusan : Matematika
Bidang : Kombinatorik
JuduL Skripsi : **Pelabelan sisi ajaib pada graf $2C_n$**

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal 18 juli 2011 berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing/Penguji

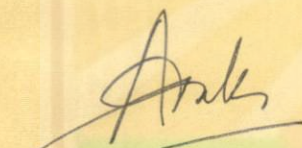
1.



Narwen, M. Si

NIP: 19670410 199702 1 001

2.

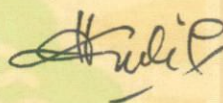


Zulakmal, M. Si

NIP: 19671108 199802 1 001

Penguji

1.



Dr. Lyra Yulianti

NIP: 1975070661999032003

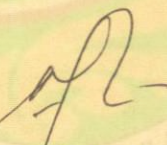
2.



Dr. Dodi Devianto

NIP: 197712272000121002

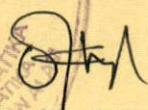
3.



Effendi, M. Si

NIP: 197807172002121002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand


Dr. Syafrizal Sy
NIP: 19670807 199309 1 001

5. Seluruh staf pengajar Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas yang telah memberikan bekal ilmu yang sangat bermanfaat.
6. Keluarga tercinta yang senantiasa memberikan dukungan dan semangat selama ini.
7. Teman-teman mahasiswa di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas, khususnya angkatan 2006, yang telah banyak menyumbangkan tenaga, inspirasi, dan motivasi selama penulis mengikuti studi.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat-Nya kepada mereka sebagai balasan atas semua kebaikan yang telah diberikan.

Penulis menyadari bahwa tulisan ini masih mempunyai banyak kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran sangat diharapkan demi penyempurnaannya. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat dalam perkembangan ilmu matematika, khususnya di Universitas Andalas.

Wassalamu 'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

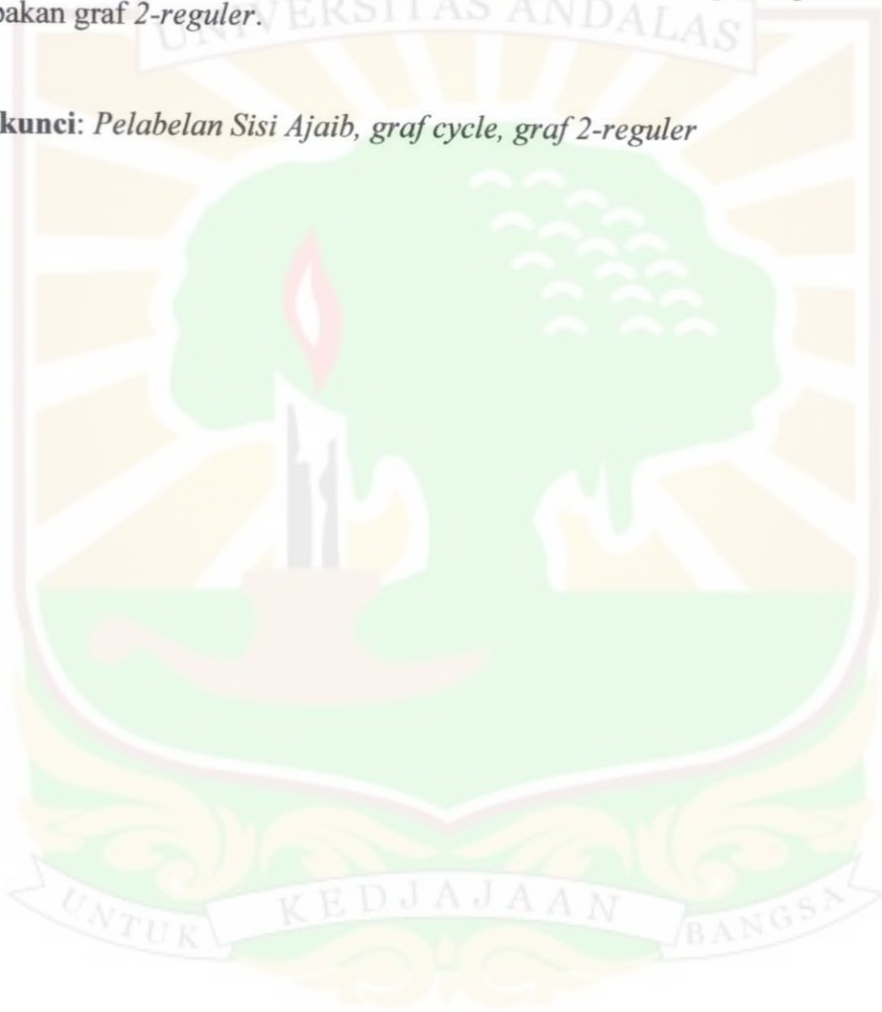
Padang, Juli 2011

Penulis

ABSTRAK

Pelabelan sisi ajaib (*edge magic labeling*) pada suatu graf $G = (V, E)$ dengan order p dan ukuran q adalah fungsi bijektif f dari $(V \cup E)$ ke himpunan $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$ sehingga untuk masing-masing titik u , v , dan sisi uv di G berlaku $f(u) + f(uv) + f(v) = k$ dengan k adalah konstanta ajaib. Pelabelan sisi ajaib yang memetakan V ke $\{1, 2, \dots, p\}$ disebut pelabelan super sisi ajaib (*super edge magic labeling*). Graf yang dikenakan pelabelan super sisi ajaib disebut graf super sisi ajaib. Pelabelan sisi ajaib berlaku pada graf $2C_n$ yang merupakan graf 2-regular.

Kata kunci: Pelabelan Sisi Ajaib, graf cycle, graf 2-regular



DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	i
ABSTRAK.....	iii
DAFTAR ISI.....	iv
DAFTAR GAMBAR.....	v
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan masalah	2
1.3 Pembatasan Masalah	2
1.4 Tujuan Penulisan	2
1.5 Sistematika Penulisan.....	2
BAB II LANDASAN TEORI	4
2.1 Definisi Graf	4
2.2 Graf Lingkaran	7
2.3 Graf Reguler (Regular Graph)	9
2.4 Pelabelan pada Graf	10
2.5 Pelabelan Sisi Ajaib	12
BAB III PEMBAHASAN.....	14
BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN.....	49
DAFTAR KEPUSTAKAAN	50

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1.1	Suatu Graf, Ketetanggaan, Keterkaitan, dan derajat titik sebuah graf	5
Gambar 2.1.2	Suatu Graf dengan Subgrafnya	6
Gambar 2.1.3	Graf Lengkap $K_n, 1 \leq n \leq 4$	7
Gambar 2.2.1	Suatu Graf Lingkaran C_6	8
Gambar 2.2.2	Suatu Graf Lingkaran C_3, C_4, C_8	9
Gambar 2.3.1	Graf Reguler	9
Gambar 2.3.2	Graf 2-Reguler	10
Gambar 2.5.1	Graf Sisi Ajaib yang belum dilabeli	12
Gambar 2.5.2	Graf Sisi Ajaib yang sudah diberi label	13
Gambar 3.1.1	Graf $2C_n$ dengan n titik	13
Gambar 3.1.2	Graf $2C_5$ dengan 5 titik	18
Gambar 3.1.3	Pelabelan Titik dan Sisi Ajaib pada Graf $2C_5$	21
Gambar 3.1.4	Graf $2C_{17}$ dengan 17 titik	21
Gambar 3.1.5	Pelabelan Titik dan Sisi Ajaib pada Graf $2C_{17}$	26
Gambar 3.1.6	Graf $2C_7$ dengan 7 titik	27
Gambar 3.1.7	Pelabelan Titik dan Sisi Ajaib pada Graf $2C_7$	30
Gambar 3.1.8	Graf $2C_{19}$ dengan 19 titik	30
Gambar 3.1.9	Pelabelan Titik dan Sisi Ajaib pada Graf $2C_{19}$	35
Gambar 3.1.10	Graf $2C_{13}$ dengan 13 titik	36
Gambar 3.1.11	Pelabelan Titik dan Sisi Ajaib pada Graf $2C_{13}$	40

Gambar 3.1.12	Graf $2C_{25}$ dengan 25 titik	41
Gambar 3.1.13	Pelabelan Titik dan Sisi Ajaib pada Graf $2C_{25}$	47



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Masalah pelabelan dalam teori graf mulai dikembangkan pada pertengahan tahun 1960-an. Pelabelan pada graf muncul pertama kali dalam karya Rosa (1967). Pelabelan pada suatu graf adalah sebarang pemetaan satu-satu yang memetakan dari elemen-elemen graf pada himpunan bilangan (biasanya himpunan bilangan bulat) yang disebut *label*. Jika domain dari fungsi adalah titik, maka pelabelan disebut **pelabelan titik** (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi, maka pelabelan disebut **pelabelan sisi** (*edge labeling*), dan jika domainnya titik dan sisi, maka pelabelan disebut **pelabelan total** (*total labeling*). (Miller, 2000: 165).

Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Pengaitan titik-titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola graf tertentu diantaranya graf reguler.

Graf reguler (*regular graphs*) adalah graf yang setiap titiknya mempunyai derajat yang sama. Apabila derajat setiap simpul adalah r , maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur derajat r .

Graf 2-reguler (2-regular graphs) adalah graf yang setiap titiknya berderajat 2(dua).

Para penulis [8] telah menunjukkan bahwa graf 2-reguler mC_n adalah super sisi-ajaib jika dan hanya jika m dan n adalah ganjil. Oleh karena itu, mC_n adalah sisi-ajaib jika m ganjil. Untuk kasus dimana m genap, kita hanya tahu

bahwa mC_n sisi-ajaib jika $m \equiv 2(\text{mod } 4)$ dan $n = 4$ atau 6 , atau $n \equiv 1, 5, \text{atau } 7 (\text{mod } 12)$.

Pada tugas akhir ini, penulis melakukan kajian pelabelan sisi-ajaib (*edge-magic labeling*) pada graf $2C_n$ dengan n banyak titik pada graf tersebut.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah bagaimana memberikan pelabelan sisi ajaib pada graf $2C_n$ dengan n titik dimana $n \equiv 1, 5, 7 (\text{mod } 12)$.

1.3 Pembatasan Masalah

Dalam Tugas akhir ini permasalahan dibatasi untuk menentukan pelabelan sisi-ajaib pada graf $2C_n$ dengan n titik dimana $n \equiv 1, 5, 7 (\text{mod } 12)$.

1.4 Tujuan

Memahami pelabelan sisi ajaib dan konstanta ajaib yang ada didalamnya serta menentukan pelabelan sisi ajaib pada graf $2C_n$ dengan n titik dimana $n \equiv 1, 5, 7 (\text{mod } 12)$.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini secara keseluruhan disajikan dalam empat bab. Bab I berisikan pendahuluan yang didalamnya tercakup latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan skripsi ini. Konsep dasar dari teori graf berupa definisi dan terminologi, graf teratur, graf

lingkaran, pelabelan pada graf dan pelabelan super sisi ajaib, serta beberapa definisi pendukung yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan skripsi ini disajikan pada Bab II sebagai landasan teori. Kemudian, pembahasan dari permasalahan tersebut akan diuraikan pada Bab III mengenai pelabelan sisi ajaib pada graf $2C_n$, untuk $n \equiv 1, 5, 7 \pmod{12}$. Penulisan skripsi ini diakhiri dengan bagian kesimpulan disajikan pada Bab IV.



BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas beberapa konsep dasar dan istilah dalam graf serta notasi-notasi yang akan digunakan pada bab-bab selanjutnya. Kajian diawali dengan pendefinisian graf, dan graf teratur, pelabelan pada graf, pelabelan sisi-ajaib.

2.1 Definisi Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, dalam hal ini V adalah himpunan (tidak kosong) titik-titik (*vertices* atau *node*) di graf G dan E adalah himpunan sisi-sisi (*edges*) yang menghubungkan dua titik di graf G tersebut. Himpunan titik-titik pada graf G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi-sisi pada graf G dinotasikan dengan $E(G)$. Misalkan, graf G terdiri dari n titik dan m sisi, maka dinotasikan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ dimana $e_i = \{v_j, v_k\}$ dengan $v_j, v_k \in V(G)$, $j \neq k$ dan $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Banyaknya titik pada graf G dinotasikan sebagai $|V(G)|$, dan disebut **orde** (**orde**) dari G , sedangkan banyaknya sisi pada graf G dinotasikan sebagai $|E(G)|$, dan disebut **size** (**ukuran**) dari G . **Graf sederhana** tidak boleh mempunyai **sisi rangkap** dan **loop**. **Sisi rangkap** adalah sisi yang diwakili oleh dua pasangan tak berurutan yang sebenarnya sama, misal (a, b) dan (b, a) . Suatu sisi e disebut **loop**, jika $e = \{v_j, v_k\}$ untuk suatu $v_j, v_k \in V(G)$, $j \neq k$ dan suatu sisi disebut sisi berganda (*multiple edge*), jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan 2 titik. Graf G disebut **graf sederhana** jika $E(G)$ tidak memuat *loop* dan $E(G)$

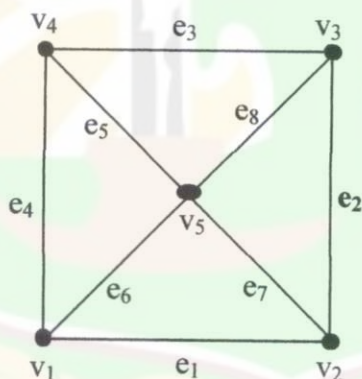
bukan sisi berganda. Suatu graf G yang tidak sederhana disebut **graf ganda atau multigraf**.

Jika sisi $e = uv$ dengan $u, v \in V(G)$, maka titik u disebut **bertetangga** dengan titik v dan demikian sebaliknya. Dalam hal ini, sisi e dikatakan **terkait** dengan titik u dan v , juga titik u dan v dikatakan terkait dengan sisi e .

Derajat dari titik x di G adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik x , dinotasikan dengan $d(x)$. Jika $d(x) = 0$, maka x dikatakan **titik terisolasi**.

Derajat minimum dari G , dinotasikan dengan $\delta(G)$, yaitu derajat terkecil dari titik-titik di G , sedangkan derajat terbesarnya disebut **derajat maksimum** dari G , dinotasikan dengan $\Delta(G)$.

Sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 2.1.1

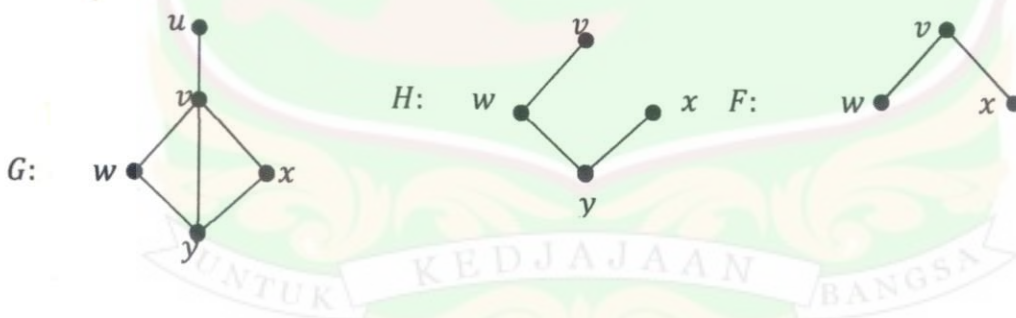


Gambar 2.1.1 : Graf G_1

Gambar 2.1.1 menunjukkan sebuah graf, misal graf G_1 yang mempunyai titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$. Jadi, $|V(G)| = 5$ dan $|E(G)| = 8$. Titik v_1 bertetangga dengan titik v_2, v_4 , dan v_5 , tetapi tidak bertetangga dengan titik v_3 . Sisi e_1 terkait dengan titik v_1 dan v_2 . Dengan $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) =$ dan $d(v_5) = 4$, dengan demikian graf G_1 mempunyai derajat maksimum adalah 4 dan derajat minimum adalah 3.

Jalan (walk) dari titik u_0 ke titik u_n di G adalah barisan hingga titik dan sisi di G $u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, \dots, u_{n-1}, e_n, u_n$ sedemikian sehingga $u_{i-1}u_i \in E(G)$ untuk, $i = 1, 2, \dots, n$. **Panjang** (length) dari jalan adalah banyaknya sisi dari barisan tersebut. Jalan dikatakan **tertutup** (closed) jika $u_0 = u_n$, dan dikatakan **terbuka** (open) jika $u_0 \neq u_n$. **Lintasan** (path) adalah jalan yang semua sisinya berbeda dan **jalur** (trail) adalah jalan yang semua titiknya berbeda. Graf G dikatakan **terhubung** jika untuk setiap dua titik di G terdapat lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Jika tidak demikian, maka G dikatakan graf **tidak terhubung**.

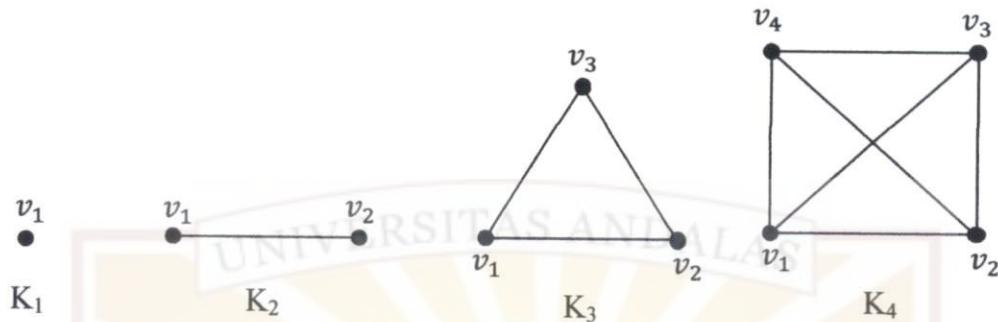
Graf $H = (V_1, E_1)$ disebut **subgraf** dari $G(V, E)$ jika $E_1 \subseteq E$ dan $V_1 \subseteq V$. Subgraf F dikatakan **subgraf yang diinduksi** dari graf G jika F subgraf dari G dan juga untuk $u, v \in V(F)$ dan $uv \in E(G)$, mengakibatkan $uv \in E(F)$. Subgraf terinduksi F dari G dinotasikan dengan $\langle F \rangle$.



Gambar 2.1.2 : Graf G

Pada Gambar 2.1.2 graf H dan F merupakan subgraf dari G . Graf F merupakan subgraf terinduksi dari G , karena untuk $u, v \in V(F)$ dan $uv \in E(G)$. Tetapi graf H bukan induksi subgraf dari G , karena untuk $u, v \in V(H)$, dan $uv \notin E(G)$.

Graf **lengkap** adalah graf sederhana yang setiap titiknya mempunyai sisi ke semua titik lainnya. Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n . Setiap titik pada K_n berderajat $n - 1$.



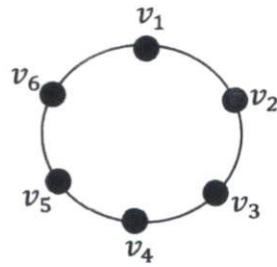
Gambar 2.1.3 : Graf Lengkap K_n , $1 \leq n \leq 4$

Graf G yang himpunan titiknya dapat dikelompokkan menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2 , demikian sehingga setiap sisi di dalam G menghubungkan sebuah titik di V_1 ke sebuah titik di V_2 disebut **Graf Bipartit** dan dinyatakan sebagai $G(V_1, V_2)$. Dengan kata lain, setiap pasang titik di V_1 (demikian pula dengan titik-titik di V_2) tidak bertetangga. Apabila setiap titik di V_1 bertetangga dengan semua titik V_2 , maka $G(V_1, V_2)$ disebut sebagai **Graf Bipartit Lengkap**.

2.2 Graf Lingkaran

Definisi 2.2.1

Graf **lingkaran** adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n titik dilambangkan dengan C_n . jika titik-titik pada C_n adalah $v_1, v_2, \dots, v_n$ maka sisinya adalah $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)$. Sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 2.1.8



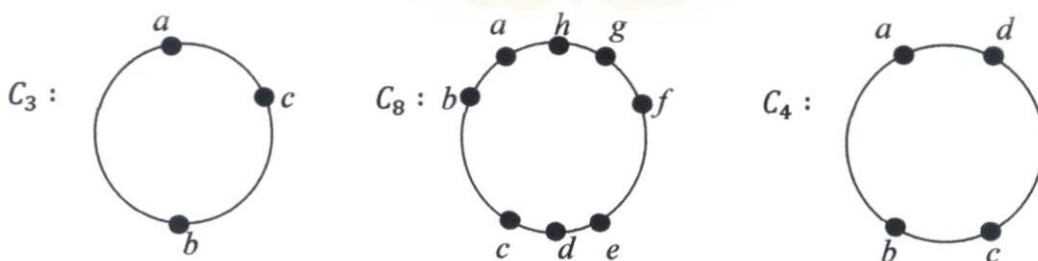
C_6

Gambar 2.2.1 : Graf Lingkaran

Graf yang berbentuk **siklus** dengan titik sebanyak n , $n \geq 3$, disebut **graf siklus** dan ditulis dengan C_n (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28). **Graf siklus** sering juga disebut sebagai **graf lingkaran**, karena gambarnya dapat dibentuk menjadi lingkaran. Perlu dicatat bahwa tidak selamanya **graf siklus** digambar dalam bentuk suatu lingkaran.

Graf siklus dapat juga digambar dalam bentuk polygon. C_3 dapat disebut segitiga, C_4 disebut segiempat, dan secara umum C_n dapat disebut segi- n . **Siklus** yang banyak titiknya ganjil disebut **siklus ganjil** dan **siklus** yang banyak titiknya genap disebut **siklus genap**.

Perhatikan beberapa gambar **graf siklus** berikut :



Gambar 2.2.2

Definisi 2.2.2

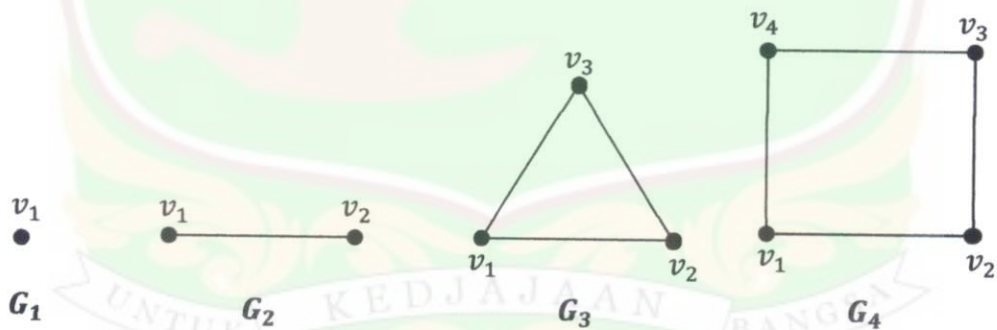
Gabungan $G = G_1 \cup G_2$ adalah graf dengan $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$, dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Maka $G_1, G_2, \dots, G_n$ adalah n buah graf dimana $V(G_i) \cap V(G_j) = \emptyset$ untuk $i \neq j$, kita definisikan gabungan $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n = \bigcup_{i=1}^n G_i$ untuk graf G maka $V(G) = \bigcup_{i=1}^n V(G_i)$ dan $E(G) = \bigcup_{i=1}^n E(G_i)$.

2.3 Graf Reguler (Regular Graph)

Definisi 2.3.1

Graf reguler (regular graphs) adalah graf yang setiap titiknya mempunyai derajat yang sama. Apabila derajat setiap titik adalah r , maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur derajat r .

Sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 2.2.1



Gambar 2.3.1 : Graf Teratur

Pada gambar 2.2.1 menunjukkan graf teratur, G_1 berderajat 0, G_2 berderajat 1, dan G_3, G_4 berderajat 2.

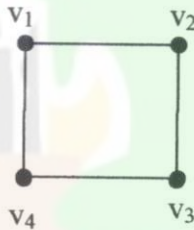
Definisi 2.2.2

Sebuah graf G adalah k -reguler jika $d(v) = k$ untuk setiap $v \in V$, graf reguler adalah graf k -reguler untuk suatu k . Graf lengkap dan graf bipartit lengkap $K_{n,n}$ adalah reguler juga k -kubik.

Definisi 2.2.3

Graf 2-reguler (2-regular graphs) adalah graf yang setiap titiknya berderajat 2 (dua).

Sebagai contoh dapat dilihat pada gambar 2.2.2



Gambar 2.3.2 : Graf G

Definisi 2.2.4

Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot).

2.4 Pelabelan Pada Graf

Kotzig dan Rosa mendefinisikan pelabelan ajaib pada graf G pasangan himpunan (V, E) , sebagai fungsi bijektif yang memetakan $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, v + e\}$ adalah pelabelan sisi-ajaib pada G jika $f(u) + f(v) + f(uv) = k$

adalah sebuah konstanta, untuk setiap sisi u, v di $E(G)$ sebagai pelabelan ajaib untuk pelabelan tsb.

Pelabelan pada suatu graf adalah sebarang pemetaan (fungsi) yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat). Jika domain dari fungsi adalah titik, maka pelabelan disebut **pelabelan titik** (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi, maka disebut **pelabelan sisi** (*edge labeling*), dan jika domainnya titik dan sisi maka disebut **pelabelan total** (*total labeling*) (Miller, 2000:165).

Berikut ini beberapa jenis pelabelan ajaib pada suatu graf :

- a. Misalkan G graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E . Banyaknya titik di G adalah p dan banyaknya sisi di G adalah q . **Pelabelan titik sisi ajaib** (*edge-magic vertex labeling*) pada graf G adalah fungsi bijektif f dari V pada himpunan $\{1, 2, 3, \dots, p\}$ sehingga untuk sebarang sisi (u, v) di G berlaku

$$f(u) + f(v) = k$$

untuk suatu konstanta k . Selanjutnya k disebut **bilangan ajaib** pada G dan G disebut **titik sisi ajaib** (Miller, 2000: 168).

- b. Misalkan G graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E . Banyaknya titik di G adalah p dan banyak sisi di G adalah q . **Pelabelan total titik ajaib** (*vertex-magic total labeling*) pada graf G adalah fungsi bijektif f dari $V \cup E$ pada himpunan $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$ sehingga untuk sebarang titik u di G berlaku

$$f(u) + \sum_{v \in N(v)} f(uv) = k$$

untuk suatu konstanta k . Selanjutnya k disebut **bilangan ajaib** pada G dan G disebut **total titik ajaib** (Miller, 2000: 168).

- c. Misalkan G graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E . Banyaknya titik di G adalah p dan banyak sisi di G adalah q . **Pelabelan sisi titik ajaib** (*vertex-magic edge labeling*) pada graf G adalah fungsi bijektif f dari E pada himpunan $\{1, 2, 3, \dots, q\}$ sehingga untuk sebarang titik u di G berlaku

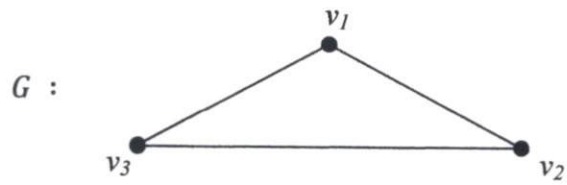
$$\sum_{v \in N(u)} f(uv) = k$$

untuk suatu konstanta k . Selanjutnya k disebut **bilangan ajaib** pada G dan G disebut **sisi titik ajaib** (Miller, 2000: 168).

2.5 Pelabelan Sisi Ajaib

Untuk sebuah graf G pada pasangan himpunan (p, q) , sebagai fungsi bijektif yang memetakan $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ adalah pelabelan sisi-ajaib pada G jika $f(u) + f(v) + f(uv) = k$ adalah sebuah konstanta, untuk setiap sisi $uv \in E(G)$. Maka G dikatakan sebuah graf sisi-ajaib, dan k konstan disebut valensi pelabelan sisi-ajaib pada graf G [8]. Banyaknya titik di G adalah p dan banyak sisi di G adalah q .

Sebagai contoh, perhatikan graf G berikut dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3\}$. Jadi **order** G adalah 3 dan **ukuran** G adalah 3. Akan ditunjukkan bahwa graf G adalah *sisi-ajaib*.



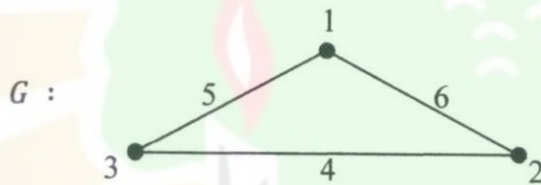
Gambar 2.5.1 : G sebelum dilabeli

diperoleh

$$f(v_1) + f(v_1v_2) + f(v_2) = 1 + 6 + 2 = 9$$

$$f(v_1) + f(v_1v_3) + f(v_3) = 1 + 5 + 3 = 9$$

$$f(v_2) + f(v_2v_3) + f(v_3) = 2 + 4 + 3 = 9$$



Gambar 2.5.2 : G dengan label

BAB III

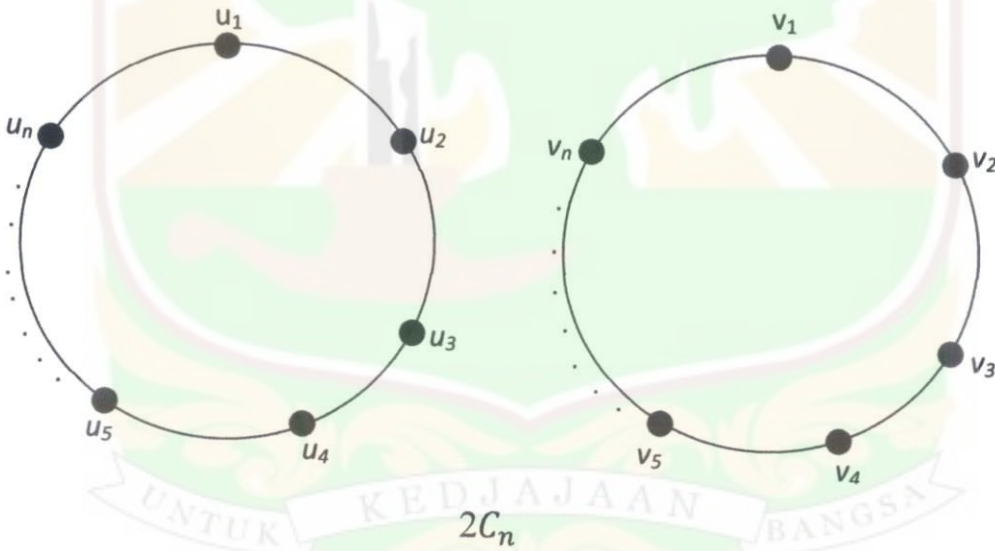
PELABELAN SISI AJAIB PADA GRAF 2-REGULER

Pada Bab ini akan dikaji mengenai pelabelan sisi-ajaib pada graf $2C_n$ dengan $n \equiv 1, 5$ atau $7 \pmod{12}$. Hasil tersebut disajikan dalam bentuk teorema sebagai berikut.

Teorema 3.1

Untuk setiap n bilangan bulat positif $n \equiv 1, 5$ atau $7 \pmod{12}$, Graf 2-Reguler $G \cong 2C_n$ adalah sisi-ajaib.

Bukti. Asumsikan bahwa $n \equiv 1, 5$ atau $7 \pmod{12}$, dan misalkan graf $G \cong 2C_n$ adalah graf 2-reguler, seperti gambar 3.1.1 berikut ini.



Gambar 3.1.1 : Graf $2C_n$ dengan n titik

Misalkan titik-titik dari graf G sebagai berikut :

$$V(G) = \{u_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

dan misalkan sisi-sisi dari graf G sebagai berikut :

$$E(G) = \{u_1u_n, v_1v_n\} \cup \{u_iu_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_iv_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$$

Karena untuk n yang lain tidak memenuhi pada pelabelan sisi-ajaib maka teorema di atas dibagi menjadi tiga kasus dalam pembuktian teorema ini, yaitu.

Kasus 1 : $n \equiv 5 \pmod{12}$.

Kasus 2 : $n \equiv 7 \pmod{12}$.

Kasus 3 : $n \equiv 1 \pmod{12}$.

Selanjutnya akan diselidiki untuk masing-masing kasus.

Kasus 1 : Misalkan $n \equiv 5 \pmod{12}$, bentuk ini ekuivalen dengan menyatakan $n = 12l + 5$ untuk suatu l bilangan bulat positif.

Selanjutnya diperoleh

$$\begin{aligned} n &= 12(l + 1 - 1) + 5 \\ &= 12(l + 1) - 12 + 5 \\ &= 12(l + 1) - 7 \end{aligned}$$

Tulis $k = l + 1$. Karena l bilangan bulat positif, maka $k = l + 1$ juga bilangan bulat positif. Ini berarti

$$n = 12k - 7, \text{ untuk } k \text{ bilangan positif}$$

Definisikan $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 48k - 28\}$ untuk pelabelan titik sehingga

$$f(u_j) = \begin{cases} 24k - 3i - 10, & \text{jika } j = 2i - 1 \text{ dan } 1 \leq i \leq 3k - 1 \\ 6k + 3i - 5, & \text{jika } j = 2i - 1 \text{ dan } 3k \leq i \leq 6k - 3 \\ 12k - 3i - 5, & \text{jika } j = 2i \text{ dan } 1 \leq i \leq 3k - 2 \\ 3i - 6k + 3, & \text{jika } j = 2i \text{ dan } 3k - 1 \leq i \leq 6k - 4 \end{cases}$$

dan

$$f(v_j) = \begin{cases} 12k - 3i - 4, & \text{jika } j = 2i - 1 \text{ dan } 1 \leq i \leq 3k - 2 \\ 24k - 3i - 12, & \text{jika } j = 2i \text{ dan } 1 \leq i \leq 3k - 2 \\ 3k - 3i + 1, & \text{jika } j = 6k + 6i - 9 \text{ dan } 1 \leq i \leq k \\ 15k - 3i - 5, & \text{jika } j = 6k + 6i - 8 \text{ dan } 1 \leq i \leq k \\ 3k - 3i + 2, & \text{jika } j = 6k + 6i - 7 \text{ dan } 1 \leq i \leq k \\ 15k - 3i - 7, & \text{jika } j = 6k + 6i - 6 \text{ dan } 1 \leq i \leq k - 1 \\ 3k - 3i, & \text{jika } j = 6k + 6i - 5 \text{ dan } 1 \leq i \leq k - 1 \\ 15k - 3i - 6, & \text{jika } j = 6k + 6i - 4 \text{ dan } 1 \leq i \leq k - 1 \end{cases}$$

Didefinisikan konstanta ajaibnya sebagai valensi $5n + 2$.

Maka pelabelan sisi-ajaib dengan valensi $5n + 2$ untuk kasus di atas dapat diperoleh sebagai berikut,

$$f(u_r u_s) = (5n + 2) - f(u_r) - f(u_s),$$

dan

$$f(v_r v_s) = (5n + 2) - f(v_r) - f(v_s).$$

Dimana u_r, u_s, v_r, v_s di $V(G)$ dan $u_r u_s, v_r v_s$ di $E(G)$ untuk $r \neq s$

Kasus 2 : Misalkan $n \equiv 7 \pmod{12}$, bentuk ini ekuivalen dengan menyatakan $n = 12l + 7$ untuk suatu l bilangan bulat positif.

Selanjutnya diperoleh,

$$\begin{aligned} n &= 12(l + 1 - 1) + 7 \\ &= 12(l + 1) - 12 + 7 \\ &= 12(l + 1) - 5. \end{aligned}$$

Tulis $k = l + 1$. Karena l bilangan bulat positif, maka $k = l + 1$ juga bilangan bulat positif. Ini berarti

$n = 12k - 5$, untuk k bilangan bulat positif

Definisikan $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 48k - 20\}$ untuk pelabelan titik sehingga

$$f(u_j) = \begin{cases} 24k - 3i - 6, & \text{jika } j = 2i - 1 \text{ dan } 1 \leq i \leq 3k - 1 \\ 6k + 3i - 4, & \text{jika } j = 2i - 1 \text{ dan } 3k \leq i \leq 6k - 2 \\ 12k - 3i - 3, & \text{jika } j = 2i \text{ dan } 1 \leq i \leq 3k - 1 \\ 3i - 6k + 2, & \text{jika } j = 2i \text{ dan } 3k \leq i \leq 6k - 3 \end{cases}$$

dan

$$f(v_j) = \begin{cases} 12k - 3i - 2, & \text{jika } j = 2i - 1 \text{ dan } 1 \leq i \leq 3k - 1 \\ 24k - 3i - 8, & \text{jika } j = 2i \text{ dan } 1 \leq i \leq 3k - 2 \\ 15k - 3i - 3, & \text{jika } j = 6k + 6i - 8 \text{ dan } 1 \leq i \leq k \\ 3k - 3i + 2, & \text{jika } j = 6k + 6i - 7 \text{ dan } 1 \leq i \leq k - 1 \\ 15k - 3i - 2, & \text{jika } j = 6k + 6i - 6 \text{ dan } 1 \leq i \leq k \\ 3k - 3i, & \text{jika } j = 6k + 6i - 5 \text{ dan } 1 \leq i \leq k - 1 \\ 15k - 3i - 4, & \text{jika } j = 6k + 6i - 4 \text{ dan } 1 \leq i \leq k - 1 \\ 3k - 3i + 1, & \text{jika } j = 6k + 6i - 3 \text{ dan } 1 \leq i \leq k - 1 \\ i, & \text{jika } j = 12k + 2i - 9 \text{ dan } 1 \leq i \leq 2 \end{cases}$$

Didefinisikan konstanta ajaibnya sebagai valensi $5n + 2$.

Maka pelabelan sisi-ajaib dengan valensi $5n + 2$ untuk kasus di atas dapat diperoleh sebagai berikut,

$$f(u_r u_s) = (5n + 2) - f(u_r) - f(u_s),$$

dan

$$f(v_r v_s) = (5n + 2) - f(v_r) - f(v_s).$$

Dimana u_r, u_s, v_r, v_s di $V(G)$ dan $u_r u_s, v_r v_s$ di $E(G)$ untuk $r \neq s$

Kasus 3 : Misalkan $n \equiv 1 \pmod{12}$, bentuk ini ekuivalen dengan menyatakan $n = 12k + 1$ untuk suatu k bilangan bulat positif.

Definisikan $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 48k + 4\}$ untuk pelabelan titik sehingga

$$f(u_j) = \begin{cases} 24k - 3i + 6, & \text{jika } j = 2i - 1 \text{ dan } 1 \leq i \leq 3k + 1 \\ 6k + 3i - 1, & \text{jika } j = 2i - 1 \text{ dan } 3k + 2 \leq i \leq 6k + 1 \\ 12k - 3i + 3, & \text{jika } j = 2i \text{ dan } 1 \leq i \leq 3k \\ 3i - 6k - 1, & \text{jika } j = 2i \text{ dan } 3k + 1 \leq i \leq 6k \end{cases}$$

dan

$$f(v_j) = \begin{cases} 12k - 3i + 4, & \text{jika } j = 2i - 1 \text{ dan } 1 \leq i \leq 3k \\ 24k - 3i + 4, & \text{jika } j = 2i \text{ dan } 1 \leq i \leq 3k \\ 3k - 3i + 3, & \text{jika } j = 6k + 6i - 5 \text{ dan } 1 \leq i \leq k \\ 15k - 3i + 5, & \text{jika } j = 6k + 6i - 4 \text{ dan } 1 \leq i \leq k \\ 3k - 3i + 4, & \text{jika } j = 6k + 6i - 3 \text{ dan } 1 \leq i \leq k \\ 15k - 3i + 3, & \text{jika } j = 6k + 6i - 2 \text{ dan } 1 \leq i \leq k \\ 3k - 3i + 2, & \text{jika } j = 6k + 6i - 1 \text{ dan } 1 \leq i \leq k - 1 \\ 15k - 3i + 4, & \text{jika } j = 6k + 6i \text{ dan } 1 \leq i \leq k \\ i, & \text{jika } j = 12k + 2i - 3 \text{ dan } 1 \leq i \leq 2 \end{cases}$$

Didefinisikan konstanta ajaibnya sebagai valensi $5n + 2$.

Maka pelabelan sisi-ajaib dengan valensi $5n + 2$ untuk kasus di atas dapat diperoleh sebagai berikut,

$$f(u_r u_s) = (5n + 2) - f(u_r) - f(u_s),$$

dan

$$f(v_r v_s) = (5n + 2) - f(v_r) - f(v_s).$$

Dimana u_r, u_s, v_r, v_s di $V(G)$ dan $u_r u_s, v_r v_s$ di $E(G)$ untuk $r \neq s$ ■

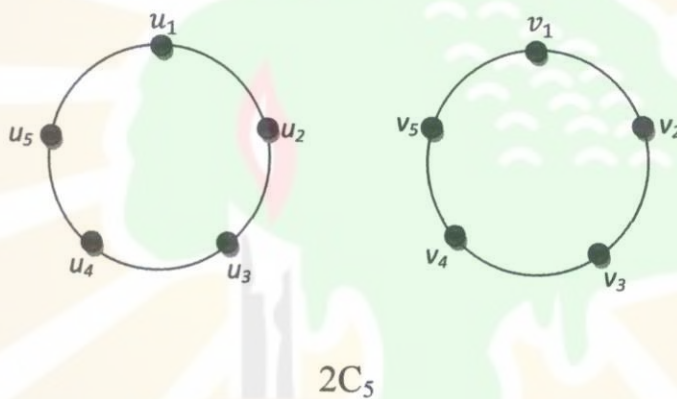
Contoh Kasus 1

Misalkan $n \equiv 5(\text{mod } 12)$, hal ini ekuivalen dengan $n = 12k - 7$, dimana k adalah bilangan bulat positif, dan definisikan $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 48k - 28\}$.

➤ Untuk $k = 1$

Maka $n = 12(1) - 7 = 5$

Graf G memiliki $n = 5$, dimana n adalah banyaknya titik dari graf G seperti gambar berikut.



Gambar 3.1.2 : Graf $2C_5$ dengan 5 titik

❖ Pelabelan titik dari Graf pada gambar 3.1.2 dengan menggunakan rumus berikut

$$f(u_j) = \begin{cases} 24k - 3i - 10, & \text{jika } j = 2i - 1 \text{ dan } 1 \leq i \leq 2 \\ 6k + 3i - 5, & \text{jika } j = 2i - 1 \text{ dan } 3 \leq i \leq 3 \\ 12k - 3i - 5, & \text{jika } j = 2i \text{ dan } 1 \leq i \leq 1 \\ 3i - 6k + 3, & \text{jika } j = 2i \text{ dan } 2 \leq i \leq 2 \end{cases}$$

$$f(v_j) = \begin{cases} 12k - 3i - 4, & \text{jika } j = 2i - 1 & \text{dan } 1 \leq i \leq 1 \\ 24k - 3i - 12, & \text{jika } j = 2i & \text{dan } 1 \leq i \leq 1 \\ 3k - 3i + 1, & \text{jika } j = 6k + 6i - 9 & \text{dan } 1 \leq i \leq 1 \\ 15k - 3i - 5, & \text{jika } j = 6k + 6i - 8 & \text{dan } 1 \leq i \leq 1 \\ 3k - 3i + 2, & \text{jika } j = 6k + 6i - 7 & \text{dan } 1 \leq i \leq 1 \\ 15k - 3i - 7, & \text{jika } j = 6k + 6i - 6 & \text{dan } 1 \leq i \leq 0 \\ 3k - 3i, & \text{jika } j = 6k + 6i - 5 & \text{dan } 1 \leq i \leq 0 \\ 15k - 3i - 6, & \text{jika } j = 6k + 6i - 4 & \text{dan } 1 \leq i \leq 0 \end{cases}$$

Sehingga diperoleh :

$$f(u_1) = 24k - 3i - 10 = 24 - 3 - 10 = 11, \quad j = 2i - 1 = 1, \quad i = 1$$

$$f(u_2) = 12k - 3i - 5 = 12 - 3 - 5 = 4, \quad j = 2i = 2, \quad i = 1$$

$$f(u_3) = 24k - 3i - 10 = 24 - 6 - 10 = 8, \quad j = 2i - 1 = 3, \quad i = 2$$

$$f(u_4) = 3i - 6k + 3 = 6 - 6 + 3 = 3, \quad j = 2i = 4, \quad i = 2$$

$$f(u_5) = 6k + 3i - 5 = 6 + 9 - 5 = 10, \quad j = 2i - 1 = 5, \quad i = 3$$

$$f(v_1) = 12k - 3i - 4 = 12 - 3 - 4 = 5, \quad j = 2i - 1 = 1, \quad i = 1$$

$$f(v_2) = 24k - 3i - 12 = 24 - 3 - 12 = 9, \quad j = 2i = 2, \quad i = 1$$

$$f(v_3) = 3k - 3i + 1 = 3 - 3 + 1 = 1, \quad j = 6k + 6i - 9 = 3, \quad i = 1$$

$$f(v_4) = 15k - 3i - 5 = 15 - 3 - 5 = 7, \quad j = 6k + 6i - 8 = 4, \quad i = 1$$

$$f(v_5) = 3k - 3i + 2 = 3 - 3 + 2 = 2, \quad j = 6k + 6i - 7 = 5, \quad i = 1$$

❖ **Pelabelan sisi-ajaib pada graf G adalah**

Nilai valensi atau konstanta ajaib dari graf di atas adalah $5n + 2$, karena

$n = 5$ maka nilai valensi adalah $5(5) + 2 = 27$

Akibatnya,

rumus umum pelabelan sisi-ajaib

$$f(u_r) + f(u_s) + f(u_ru_s) = 27$$

atau

$$f(u_ru_s) = 27 - f(u_r) - f(u_s)$$

Untuk kasus diatas diperoleh pelabelan sisinya adalah

$$f(u_1u_2) = 27 - f(u_1) - f(u_2) = 27 - 11 - 4 = 12$$

$$f(u_2u_3) = 27 - f(u_2) - f(u_3) = 27 - 4 - 8 = 15$$

$$f(u_3u_4) = 27 - f(u_3) - f(u_4) = 27 - 8 - 3 = 16$$

$$f(u_4u_5) = 27 - f(u_4) - f(u_5) = 27 - 3 - 10 = 14$$

$$f(u_5u_1) = 27 - f(u_5) - f(u_1) = 27 - 10 - 11 = 6$$

$$f(v_1v_2) = 27 - f(v_1) - f(v_2) = 27 - 5 - 9 = 13$$

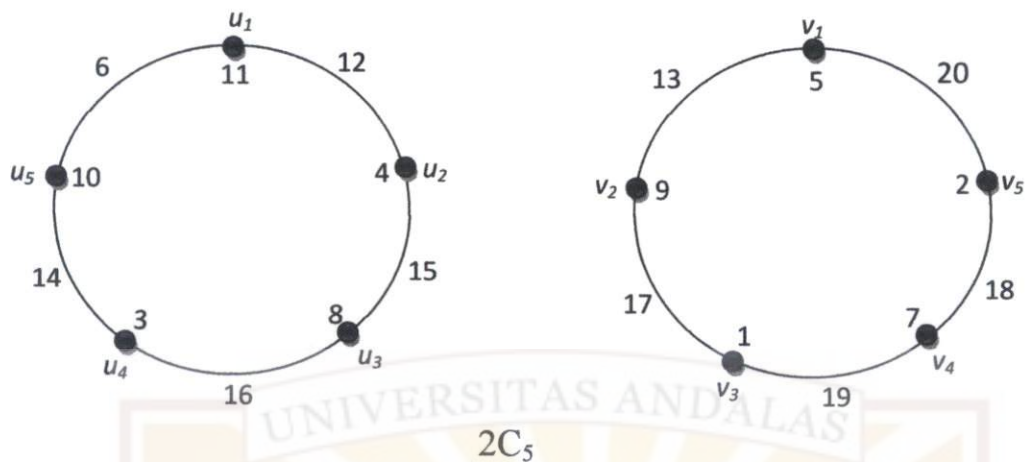
$$f(v_2v_3) = 27 - f(v_2) - f(v_3) = 27 - 9 - 1 = 17$$

$$f(v_3v_4) = 27 - f(v_3) - f(v_4) = 27 - 1 - 9 = 19$$

$$f(v_4v_5) = 27 - f(v_4) - f(v_5) = 27 - 7 - 2 = 18$$

$$f(v_5v_1) = 27 - f(v_5) - f(v_1) = 27 - 2 - 5 = 20$$

Sehingga pelabelan titik dan pelabelan sisi dapat digambarkan sebagai berikut.

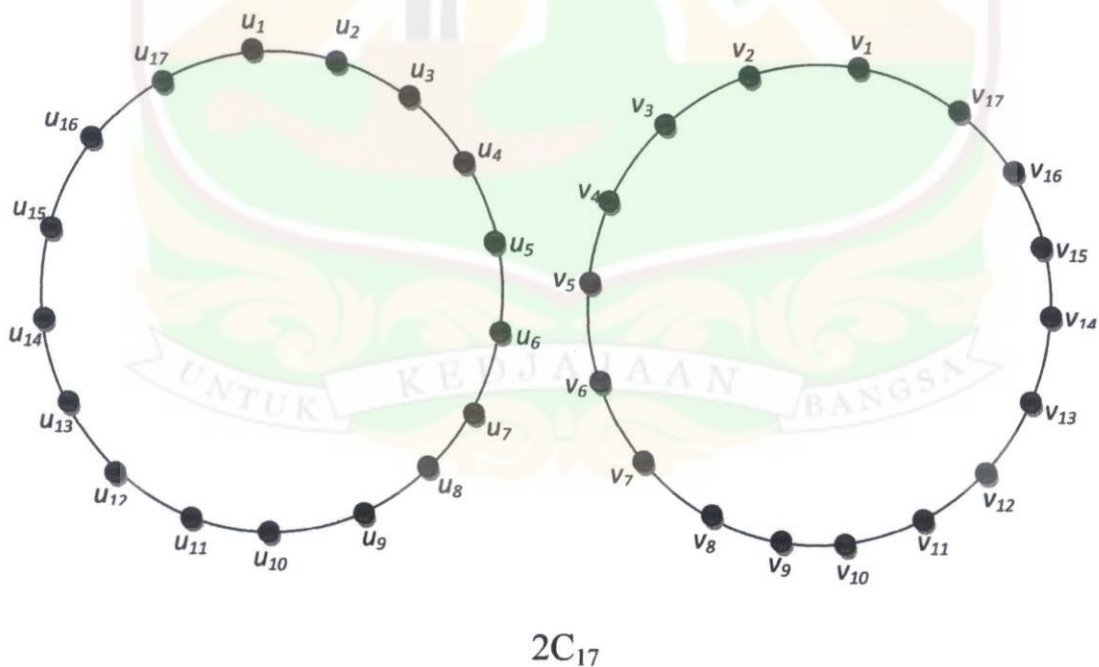


Gambar 3.1.3 : Pelabelan titik dan sisi ajaib pada graf $2C_5$

➤ Untuk $k = 2$

Maka $n = 12(2) - 7 = 17$

Graf G memiliki $n = 17$, dimana n adalah jumlah titik dari graf G seperti gambar berikut.



Gambar 3.1.4 : Graf $2C_{17}$ dengan 17 titik

❖ Pelabelan titik dari Graf pada gambar 3.1.4 dengan menggunakan rumus berikut

$$f(u_j) = \begin{cases} 24k - 3i - 10, & \text{jika } j = 2i - 1 \text{ dan } 1 \leq i \leq 5 \\ 6k + 3i - 5, & \text{jika } j = 2i - 1 \text{ dan } 6 \leq i \leq 9 \\ 12k - 3i - 5, & \text{jika } j = 2i \text{ dan } 1 \leq i \leq 4 \\ 3i - 6k + 3, & \text{jika } j = 2i \text{ dan } 5 \leq i \leq 8 \end{cases}$$

dan

$$f(v_j) = \begin{cases} 12k - 3i - 4, & \text{jika } j = 2i - 1 \text{ dan } 1 \leq i \leq 4 \\ 24k - 3i - 12, & \text{jika } j = 2i \text{ dan } 1 \leq i \leq 4 \\ 3k - 3i + 1, & \text{jika } j = 6k + 6i - 9 \text{ dan } 1 \leq i \leq 2 \\ 15k - 3i - 5, & \text{jika } j = 6k + 6i - 8 \text{ dan } 1 \leq i \leq 2 \\ 3k - 3i + 2, & \text{jika } j = 6k + 6i - 7 \text{ dan } 1 \leq i \leq 2 \\ 15k - 3i - 7, & \text{jika } j = 6k + 6i - 6 \text{ dan } 1 \leq i \leq 1 \\ 3k - 3i, & \text{jika } j = 6k + 6i - 5 \text{ dan } 1 \leq i \leq 1 \\ 15k - 3i - 6, & \text{jika } j = 6k + 6i - 4 \text{ dan } 1 \leq i \leq 1 \end{cases}$$

Sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} f(u_1) &= 24k - 3i - 10 = 48 - 3 - 10 = 35, & j &= 2i - 1 = 1, & i &= 1 \\ f(u_2) &= 12k - 3i - 5 = 24 - 3 - 5 = 16, & j &= 2i = 2, & i &= 1 \\ f(u_3) &= 24k - 3i - 10 = 48 - 6 - 10 = 32, & j &= 2i - 1 = 3, & i &= 2 \\ f(u_4) &= 12k - 3i - 5 = 24 - 6 - 5 = 13, & j &= 2i = 4, & i &= 2 \\ f(u_5) &= 24k - 3i - 10 = 48 - 9 - 10 = 29, & j &= 2i - 1 = 5, & i &= 3 \\ f(u_6) &= 12k - 3i - 5 = 24 - 9 - 5 = 10, & j &= 2i = 6, & i &= 3 \\ f(u_7) &= 24k - 3i - 10 = 48 - 12 - 10 = 26, & j &= 2i - 1 = 7, & i &= 4 \\ f(u_8) &= 12k - 3i - 5 = 24 - 12 - 5 = 7, & j &= 2i = 8, & i &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(u_9) &= 24k - 3i - 10 = 48 - 15 - 10 = 23, & j &= 2i - 1 = 3, & i &= 5 \\
f(u_{10}) &= 3i - 6k + 3 = 15 - 12 + 3 = 6, & j &= 2i = 10, & i &= 5 \\
f(u_{11}) &= 6k + 3i - 5 = 12 + 18 - 5 = 25, & j &= 2i - 1 = 11, & i &= 6 \\
f(u_{12}) &= 3i - 6k + 3 = 18 - 12 + 3 = 9, & j &= 2i = 12, & i &= 6 \\
f(u_{13}) &= 6k + 3i - 5 = 12 + 21 - 5 = 28, & j &= 2i - 1 = 13, & i &= 7 \\
f(u_{14}) &= 3i - 6k + 3 = 21 - 12 + 3 = 12, & j &= 2i = 14, & i &= 7 \\
f(u_{15}) &= 6k + 3i - 5 = 12 + 24 - 5 = 31, & j &= 2i - 1 = 15, & i &= 8 \\
f(u_{16}) &= 3i - 6k + 3 = 24 - 12 + 3 = 15, & j &= 2i = 16, & i &= 8 \\
f(u_{17}) &= 6k + 3i - 5 = 12 + 27 - 5 = 34, & j &= 2i - 1 = 17, & i &= 9 \\
\\
f(v_1) &= 12k - 3i - 4 = 24 - 3 - 4 = 17, & j &= 2i - 1 = 1, & i &= 1 \\
f(v_2) &= 24k - 3i - 12 = 48 - 3 - 12 = 33, & j &= 2i = 2, & i &= 1 \\
f(v_3) &= 12k - 3i - 4 = 24 - 6 - 4 = 14, & j &= 2i - 1 = 3, & i &= 2 \\
f(v_4) &= 24k - 3i - 12 = 48 - 6 - 12 = 30, & j &= 2i = 4, & i &= 2 \\
f(v_5) &= 12k - 3i - 4 = 24 - 9 - 4 = 11, & j &= 2i - 1 = 5, & i &= 3 \\
f(v_6) &= 24k - 3i - 12 = 48 - 9 - 12 = 27, & j &= 2i = 6, & i &= 3 \\
f(v_7) &= 12k - 3i - 4 = 24 - 12 - 4 = 8, & j &= 2i - 1 = 7, & i &= 4 \\
f(v_8) &= 24k - 3i - 12 = 48 - 12 - 12 = 24, & j &= 2i = 8, & i &= 4 \\
f(v_9) &= 3k - 3i + 1 = 6 - 3 + 1 = 4, & j &= 6k + 6i - 9 = 9, & i &= 1 \\
f(v_{10}) &= 15k - 3i - 5 = 30 - 3 - 5 = 22, & j &= 6k + 6i - 8 = 10, & i &= 1 \\
f(v_{11}) &= 3k - 3i + 2 = 6 - 3 + 2 = 5, & j &= 6k + 6i - 7 = 11, & i &= 1 \\
f(v_{12}) &= 15k - 3i - 7 = 30 - 3 - 7 = 20, & j &= 6k + 6i - 6 = 12, & i &= 1 \\
f(v_{13}) &= 3k - 3i = 6 - 3 = 3, & j &= 6k + 6i - 5 = 13, & i &= 1 \\
f(v_{14}) &= 15k - 3i - 6 = 30 - 3 - 6 = 21, & j &= 6k + 6i - 4 = 14, & i &= 1
\end{aligned}$$

$$f(v_{15}) = 3k - 3i + 1 = 6 - 6 + 1 = 1, \quad j = 6k + 6i - 9 = 15, i = 2$$

$$f(v_{16}) = 15k - 3i - 5 = 30 - 6 - 5 = 19, \quad j = 6k + 6i - 8 = 16, i = 2$$

$$f(v_{17}) = 3k - 3i + 2 = 6 - 6 + 2 = 2, \quad j = 6k + 6i - 7 = 17, i = 2$$

❖ **Pelabelan sisi-ajaib pada graf G adalah**

Nilai valensi atau konstanta ajaib dari graf di atas adalah $5n + 2$, karena

$$n = 17 \text{ maka nilai valensi adalah } 5(17) + 2 = 87$$

Akibatnya,

rumus umum pelabelan sisi-ajaib

$$f(u_r) + f(u_s) + f(u_r u_s) = 87$$

atau

$$f(u_r u_s) = 87 - f(u_r) - f(u_s)$$

Untuk kasus diatas diperoleh pelabelan sisinya sebagai berikut :

$$f(u_1 u_2) = 87 - f(u_1) - f(u_2) = 87 - 35 - 16 = 36$$

$$f(u_2 u_3) = 87 - f(u_2) - f(u_3) = 87 - 16 - 32 = 39$$

$$f(u_3 u_4) = 87 - f(u_3) - f(u_4) = 87 - 32 - 13 = 42$$

$$f(u_4 u_5) = 87 - f(u_4) - f(u_5) = 87 - 13 - 29 = 45$$

$$f(u_5 u_6) = 87 - f(u_5) - f(u_6) = 87 - 29 - 10 = 48$$

$$f(u_6 u_7) = 87 - f(u_6) - f(u_7) = 87 - 10 - 26 = 51$$

$$f(u_7 u_8) = 87 - f(u_7) - f(u_8) = 87 - 26 - 7 = 54$$

$$f(u_8 u_9) = 87 - f(u_8) - f(u_9) = 87 - 7 - 23 = 57$$

$$f(u_9 u_{10}) = 87 - f(u_9) - f(u_{10}) = 87 - 23 - 6 = 58$$

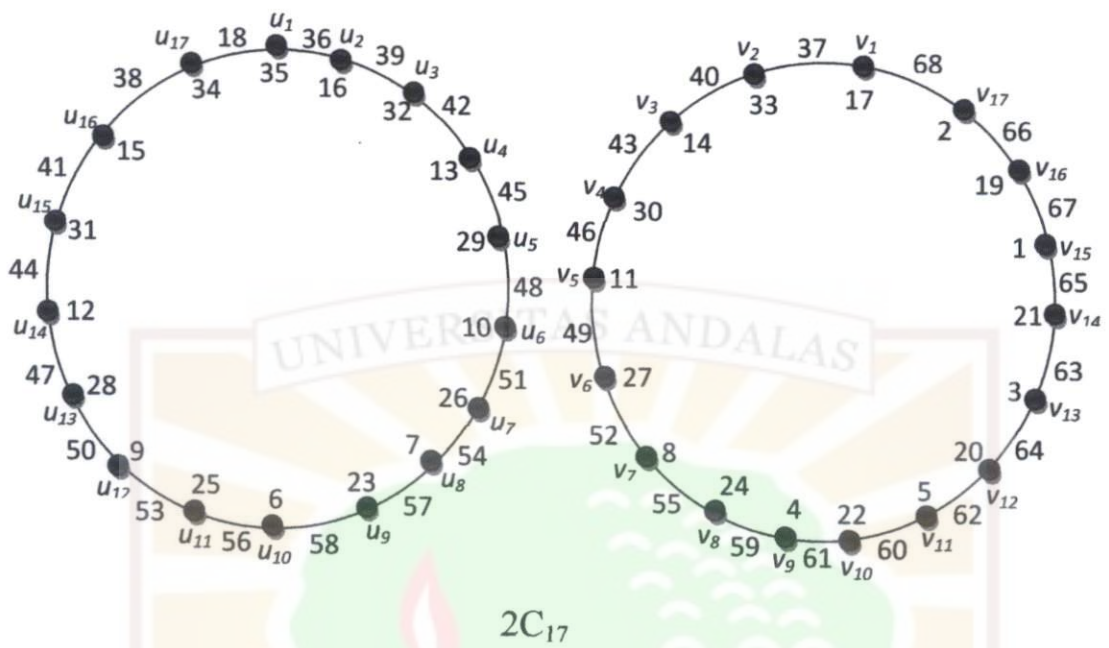
$$f(u_{10} u_{11}) = 87 - f(u_{10}) - f(u_{11}) = 87 - 6 - 25 = 56$$

$$f(u_{11} u_{12}) = 87 - f(u_{11}) - f(u_{12}) = 87 - 25 - 9 = 53$$

$$\begin{aligned}
f(u_{12}u_{13}) &= 87 - f(u_{12}) - f(u_{13}) = 87 - 9 - 28 = 50 \\
f(u_{13}u_{14}) &= 87 - f(u_{13}) - f(u_{14}) = 87 - 28 - 12 = 47 \\
f(u_{14}u_{15}) &= 87 - f(u_{14}) - f(u_{15}) = 87 - 12 - 31 = 44 \\
f(u_{15}u_{16}) &= 87 - f(u_{15}) - f(u_{16}) = 87 - 31 - 15 = 41 \\
f(u_{16}u_{17}) &= 87 - f(u_{16}) - f(u_{17}) = 87 - 15 - 34 = 38 \\
f(u_{17}u_1) &= 87 - f(u_{17}) - f(u_1) = 87 - 34 - 35 = 18
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(v_1v_2) &= 87 - f(v_1) - f(v_2) = 87 - 17 - 33 = 37 \\
f(v_2v_3) &= 87 - f(v_2) - f(v_3) = 87 - 33 - 14 = 40 \\
f(v_3v_4) &= 87 - f(v_3) - f(v_4) = 87 - 14 - 30 = 43 \\
f(v_4v_5) &= 87 - f(v_4) - f(v_5) = 87 - 30 - 11 = 46 \\
f(v_5v_6) &= 87 - f(v_5) - f(v_6) = 87 - 11 - 27 = 49 \\
f(v_6v_7) &= 87 - f(v_6) - f(v_7) = 87 - 27 - 8 = 52 \\
f(v_7v_8) &= 87 - f(v_7) - f(v_8) = 87 - 8 - 24 = 55 \\
f(v_8v_9) &= 87 - f(v_8) - f(v_9) = 87 - 24 - 4 = 59 \\
f(v_9v_{10}) &= 87 - f(v_9) - f(v_{10}) = 87 - 4 - 22 = 61 \\
f(v_{10}v_{11}) &= 87 - f(v_{10}) - f(v_{11}) = 87 - 22 - 5 = 60 \\
f(v_{11}v_{12}) &= 87 - f(v_{11}) - f(v_{12}) = 87 - 5 - 20 = 62 \\
f(v_{12}v_{13}) &= 87 - f(v_{12}) - f(v_{13}) = 87 - 20 - 3 = 64 \\
f(v_{13}v_{14}) &= 87 - f(v_{13}) - f(v_{14}) = 87 - 3 - 21 = 63 \\
f(v_{14}v_{15}) &= 87 - f(v_{14}) - f(v_{15}) = 87 - 21 - 1 = 65 \\
f(v_{15}v_{16}) &= 87 - f(v_{15}) - f(v_{16}) = 87 - 1 - 19 = 67 \\
f(v_{16}v_{17}) &= 87 - f(v_{16}) - f(v_{17}) = 87 - 19 - 2 = 66 \\
f(v_{17}v_1) &= 87 - f(v_{17}) - f(v_1) = 87 - 2 - 17 = 68
\end{aligned}$$

Sehingga pelabelan titik dan pelabelan sisi dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.1.5 : Pelabelan titik dan sisi ajaib pada Graf $2C_{17}$

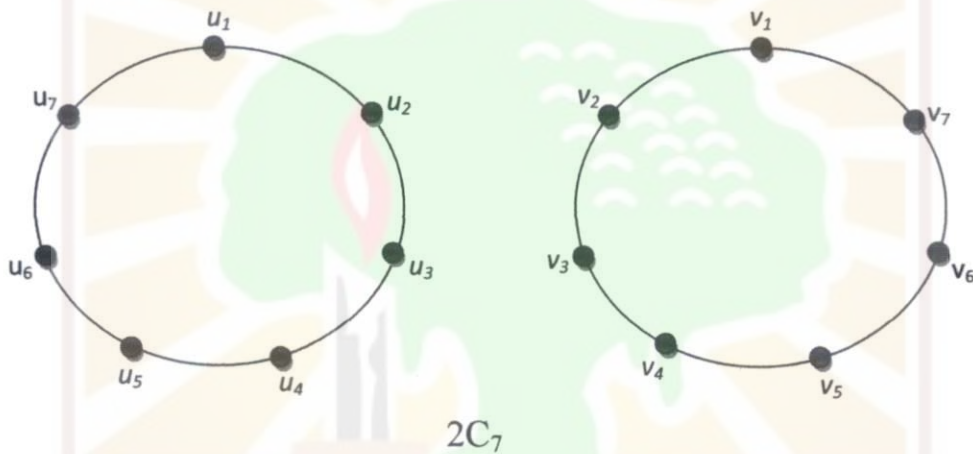
Contoh Kasus 2

Misalkan $n \equiv 7 \pmod{12}$, hal ini ekuivalen dengan $n = 12k - 5$, dimana k adalah bilangan bulat positif, dan definisikan $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 48k - 20\}$.

➤ Untuk $k = 1$

Maka $n = 12(1) - 5 = 7$

Graf G memiliki $n = 7$, dimana n adalah banyaknya titik dari graf G seperti gambar berikut.



Gambar 3.1.6 : Graf $2C_7$ dengan 7 titik

❖ Pelabelan titik dari Graf pada gambar 3.1.6 dengan menggunakan rumus berikut

$$f(u_j) = \begin{cases} 24k - 3i - 6, & \text{jika } j = 2i - 1 \text{ dan } 1 \leq i \leq 2 \\ 6k + 3i - 4, & \text{jika } j = 2i - 1 \text{ dan } 3 \leq i \leq 4 \\ 12k - 3i - 3, & \text{jika } j = 2i \text{ dan } 1 \leq i \leq 2 \\ 3i - 6k + 2, & \text{jika } j = 2i \text{ dan } 3 \leq i \leq 3 \end{cases}$$

dan

$$f(v_j) = \begin{cases} 12k - 3i - 2, & \text{jika } j = 2i - 1 & \text{dan } 1 \leq i \leq 2 \\ 24k - 3i - 8, & \text{jika } j = 2i & \text{dan } 1 \leq i \leq 1 \\ 15k - 3i - 3, & \text{jika } j = 6k + 6i - 8 & \text{dan } 1 \leq i \leq 1 \\ 3k - 3i + 2, & \text{jika } j = 6k + 6i - 7 & \text{dan } 1 \leq i \leq 0 \\ 15k - 3i - 2, & \text{jika } j = 6k + 6i - 6 & \text{dan } 1 \leq i \leq 1 \\ 3k - 3i, & \text{jika } j = 6k + 6i - 5 & \text{dan } 1 \leq i \leq 0 \\ 15k - 3i - 4, & \text{jika } j = 6k + 6i - 4 & \text{dan } 1 \leq i \leq 0 \\ 3k - 3i + 1, & \text{jika } j = 6k + 6i - 3 & \text{dan } 1 \leq i \leq 0 \\ i, & \text{jika } j = 12k + 2i - 9 & \text{dan } 1 \leq i \leq 2 \end{cases}$$

Sehingga diperoleh :

$$f(u_1) = 24k - 3i - 6 = 24 - 3 - 6 = 15, \quad j = 2i - 1 = 1, \quad i = 1$$

$$f(u_2) = 12k - 3i - 3 = 12 - 3 - 3 = 6, \quad j = 2i = 2, \quad i = 1$$

$$f(u_3) = 24k - 3i - 6 = 24 - 6 - 6 = 12, \quad j = 2i - 1 = 3, \quad i = 2$$

$$f(u_4) = 12k - 3i - 3 = 12 - 6 - 3 = 3, \quad j = 2i = 4, \quad i = 2$$

$$f(u_5) = 6k + 3i - 4 = 6 + 9 - 5 = 8, \quad j = 2i - 1 = 5, \quad i = 3$$

$$f(u_6) = 3i - 6k + 2 = 9 - 6 + 2 = 5, \quad j = 2i = 6, \quad i = 3$$

$$f(u_7) = 6k + 3i - 4 = 6 + 12 - 4 = 14, \quad j = 2i - 1 = 7, \quad i = 4$$

$$f(v_1) = 12k - 3i - 2 = 12 - 3 - 2 = 7, \quad j = 2i - 1 = 1, \quad i = 1$$

$$f(v_2) = 24k - 3i - 8 = 24 - 3 - 8 = 13, \quad j = 2i = 2, \quad i = 1$$

$$f(v_3) = 12k - 3i - 2 = 12 - 6 - 2 = 4, \quad j = 2i - 1 = 3, \quad i = 2$$

$$f(v_4) = 15k - 3i - 3 = 15 - 3 - 3 = 9, \quad j = 6k + 6i - 8 = 4, \quad i = 1$$

$$f(v_5) = i = 1 \quad j = 12k + 2i - 9 = 5 \quad i = 1$$

$$f(v_6) = 15k - 3i - 2 = 15 - 3 - 2 = 10, \quad j = 6k + 6i - 6 = 6, \quad i = 1$$

$$f(v_7) = i = 2 \quad j = 12k + 2i - 9 = 7 \quad i = 2$$

❖ Pelabelan sisi-ajaib pada graf G adalah

Nilai valensi atau konstanta ajaib dari graf di atas adalah $5n + 2$, karena

$n = 7$ maka nilai valensi adalah $5(7) + 2 = 37$

Akibatnya,

rumus umum pelabelan sisi-ajaib

$$f(u_r) + f(u_s) + f(u_ru_s) = 37$$

atau

$$f(u_ru_s) = 37 - f(u_r) - f(u_s)$$

Untuk kasus diatas diperoleh pelabelan sisinya adalah

$$f(u_1u_2) = 37 - f(u_1) - f(u_2) = 37 - 15 - 6 = 16$$

$$f(u_2u_3) = 37 - f(u_2) - f(u_3) = 37 - 6 - 12 = 19$$

$$f(u_3u_4) = 37 - f(u_3) - f(u_4) = 37 - 12 - 3 = 22$$

$$f(u_4u_5) = 37 - f(u_4) - f(u_5) = 37 - 3 - 11 = 23$$

$$f(u_5u_6) = 37 - f(u_5) - f(u_6) = 37 - 11 - 5 = 21$$

$$f(u_6u_7) = 37 - f(u_6) - f(u_7) = 37 - 5 - 14 = 18$$

$$f(u_7v_1) = 37 - f(u_7) - f(v_1) = 37 - 14 - 15 = 8$$

$$f(v_1v_2) = 37 - f(v_1) - f(v_2) = 37 - 7 - 13 = 17$$

$$f(v_2v_3) = 37 - f(v_2) - f(v_3) = 37 - 13 - 4 = 20$$

$$f(v_3v_4) = 37 - f(v_3) - f(v_4) = 37 - 4 - 9 = 24$$

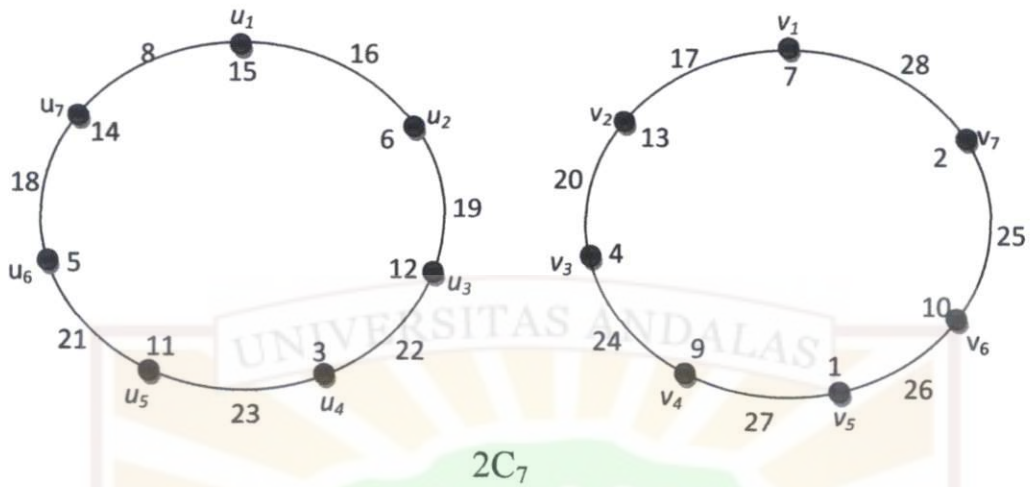
$$f(v_4v_5) = 37 - f(v_4) - f(v_5) = 37 - 9 - 1 = 27$$

$$f(v_5v_6) = 37 - f(v_5) - f(v_6) = 37 - 1 - 10 = 26$$

$$f(v_6v_7) = 37 - f(v_6) - f(v_7) = 37 - 10 - 2 = 25$$

$$f(v_7v_1) = 37 - f(v_7) - f(v_1) = 37 - 2 - 7 = 28$$

Sehingga pelabelan titik dan sisi dapat digambarkan sebagai berikut.

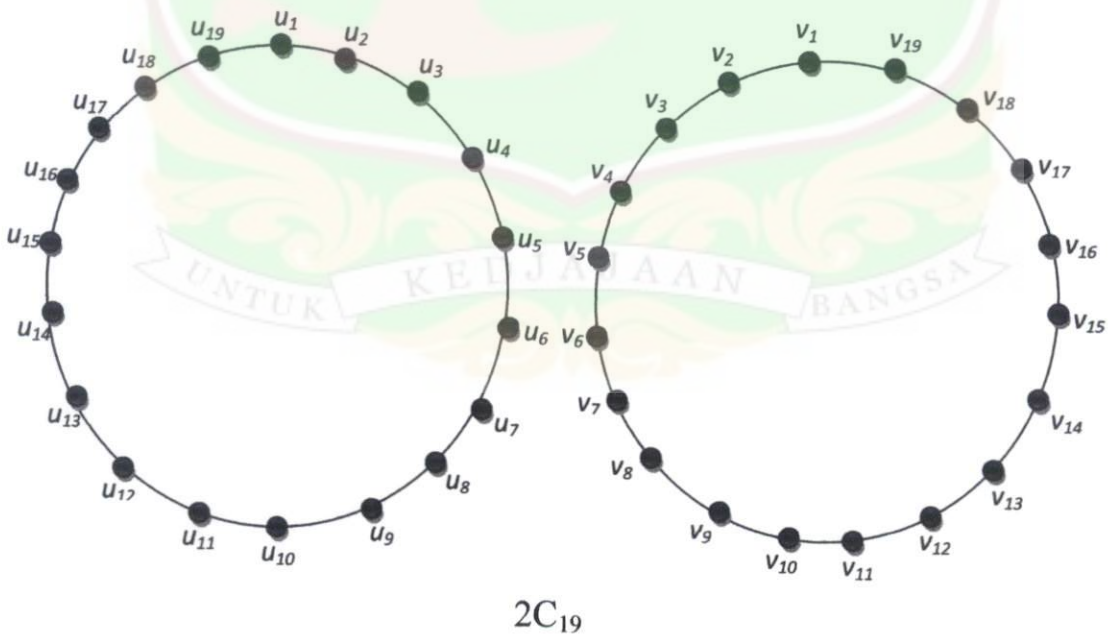


Gambar 3.1.7 : Pelabelan titik dan sisi ajaib pada graf $2C_7$

➤ Untuk $k = 2$

Maka $n = 12(2) - 5 = 19$

Graf G memiliki $n = 19$, dimana n adalah banyaknya titik dari graf G seperti gambar berikut.



Gambar 3.1.8 : Graf $2C_{19}$ dengan 19 titik

❖ Pelabelan titik dari Graf pada gambar 3.1.8 dengan menggunakan rumus berikut

$$f(u_j) = \begin{cases} 24k - 3i - 6, & \text{jika } j = 2i - 1 \text{ dan } 1 \leq i \leq 5 \\ 6k + 3i - 4, & \text{jika } j = 2i - 1 \text{ dan } 6 \leq i \leq 10 \\ 12k - 3i - 3, & \text{jika } j = 2i \text{ dan } 1 \leq i \leq 5 \\ 3i - 6k + 2, & \text{jika } j = 2i \text{ dan } 6 \leq i \leq 9 \end{cases}$$

dan

$$f(v_j) = \begin{cases} 12k - 3i - 2, & \text{jika } j = 2i - 1 \text{ dan } 1 \leq i \leq 5 \\ 24k - 3i - 8, & \text{jika } j = 2i \text{ dan } 1 \leq i \leq 4 \\ 15k - 3i - 3, & \text{jika } j = 6k + 6i - 8 \text{ dan } 1 \leq i \leq 2 \\ 3k - 3i + 2, & \text{jika } j = 6k + 6i - 7 \text{ dan } 1 \leq i \leq 1 \\ 15k - 3i - 2, & \text{jika } j = 6k + 6i - 6 \text{ dan } 1 \leq i \leq 2 \\ 3k - 3i, & \text{jika } j = 6k + 6i - 5 \text{ dan } 1 \leq i \leq 1 \\ 15k - 3i - 4, & \text{jika } j = 6k + 6i - 4 \text{ dan } 1 \leq i \leq 1 \\ 3k - 3i + 1, & \text{jika } j = 6k + 6i - 3 \text{ dan } 1 \leq i \leq 1 \\ i, & \text{jika } j = 12k + 2i - 9 \text{ dan } 1 \leq i \leq 2 \end{cases}$$

Sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} f(u_1) &= 24k - 3i - 6 = 48 - 3 - 6 = 39, & j &= 2i - 1 = 1, & i &= 1 \\ f(u_2) &= 12k - 3i - 3 = 24 - 3 - 3 = 18, & j &= 2i = 2, & i &= 1 \\ f(u_3) &= 24k - 3i - 6 = 48 - 6 - 6 = 36, & j &= 2i - 1 = 3, & i &= 2 \\ f(u_4) &= 12k - 3i - 3 = 24 - 6 - 3 = 15, & j &= 2i = 4, & i &= 2 \\ f(u_5) &= 24k - 3i - 6 = 48 - 9 - 6 = 33, & j &= 2i - 1 = 5, & i &= 3 \\ f(u_6) &= 12k - 3i - 3 = 24 - 9 - 3 = 12, & j &= 2i = 6, & i &= 3 \\ f(u_7) &= 24k - 3i - 6 = 48 - 12 - 6 = 30, & j &= 2i - 1 = 7, & i &= 4 \\ f(u_8) &= 12k - 3i - 3 = 24 - 12 - 3 = 9, & j &= 2i = 8, & i &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(u_9) &= 24k - 3i - 6 = 48 - 15 - 6 = 27, & j &= 2i - 1 = 9, & i &= 5 \\
f(u_{10}) &= 12k - 3i - 3 = 24 - 15 - 3 = 6, & j &= 2i = 10, & i &= 5 \\
f(u_{11}) &= 6k + 3i - 4 = 12 + 18 - 4 = 26, & j &= 2i - 1 = 11, & i &= 6 \\
f(u_{12}) &= 3i - 6k + 2 = 18 - 12 + 2 = 8, & j &= 2i = 12, & i &= 6 \\
f(u_{13}) &= 6k + 3i - 4 = 12 + 21 - 4 = 29, & j &= 2i - 1 = 13, & i &= 7 \\
f(u_{14}) &= 3i - 6k + 2 = 21 - 12 + 2 = 11, & j &= 2i = 14, & i &= 7 \\
f(u_{15}) &= 6k + 3i - 4 = 12 + 24 - 4 = 32, & j &= 2i - 1 = 15, & i &= 8 \\
f(u_{16}) &= 3i - 6k + 2 = 24 - 12 + 2 = 14, & j &= 2i = 16, & i &= 8 \\
f(u_{17}) &= 6k + 3i - 4 = 12 + 27 - 4 = 35, & j &= 2i - 1 = 17, & i &= 9 \\
f(u_{18}) &= 3i - 6k + 2 = 27 - 12 + 2 = 17, & j &= 2i = 18, & i &= 9 \\
f(u_{19}) &= 6k + 3i - 4 = 12 + 30 - 4 = 38, & j &= 2i - 1 = 19, & i &= 10 \\
\\
f(v_1) &= 12k - 3i - 2 = 24 - 3 - 2 = 19, & j &= 2i - 1 = 1, & i &= 1 \\
f(v_2) &= 24k - 3i - 8 = 48 - 3 - 8 = 37, & j &= 2i = 2, & i &= 1 \\
f(v_3) &= 12k - 3i - 2 = 24 - 6 - 2 = 16, & j &= 2i - 1 = 3, & i &= 2 \\
f(v_4) &= 24k - 3i - 8 = 48 - 6 - 8 = 34, & j &= 2i = 4, & i &= 2 \\
f(v_5) &= 12k - 3i - 2 = 24 - 9 - 2 = 13, & j &= 2i - 1 = 5, & i &= 3 \\
f(v_6) &= 24k - 3i - 8 = 48 - 9 - 8 = 31, & j &= 2i = 6, & i &= 3 \\
f(v_7) &= 12k - 3i - 2 = 24 - 12 - 2 = 10, & j &= 2i - 1 = 7, & i &= 4 \\
f(v_8) &= 24k - 3i - 8 = 48 - 12 - 8 = 28, & j &= 2i = 8, & i &= 4 \\
f(v_9) &= 12k - 3i - 2 = 24 - 15 - 2 = 7, & j &= 2i - 1 = 9, & i &= 5 \\
f(v_{10}) &= 15k - 3i - 3 = 30 - 3 - 3 = 24, & j &= 6k + 6i - 8 = 10, & i &= 1 \\
f(v_{11}) &= 3k - 3i + 2 = 6 - 3 + 2 = 5, & j &= 6k + 6i - 7 = 11, & i &= 1 \\
f(v_{12}) &= 15k - 3i - 2 = 30 - 3 - 2 = 25, & j &= 6k + 6i - 6 = 12, & i &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(v_{13}) &= 3k - 3i = 6 - 3 = 3, & j &= 6k + 6i - 5 = 13, i = 1 \\
f(v_{14}) &= 15k - 3i - 4 = 30 - 3 - 4 = 23, & j &= 6k + 6i - 4 = 14, i = 1 \\
f(v_{15}) &= 3k - 3i + 1 = 6 - 6 + 1 = 1, & j &= 6k + 6i - 3 = 15, i = 1 \\
f(v_{16}) &= 15k - 3i - 3 = 30 - 6 - 3 = 21, & j &= 6k + 6i - 8 = 16, i = 2 \\
f(v_{17}) &= i = 1, & j &= 12k + 2i - 9 = 17, i = 1 \\
f(v_{18}) &= 15k - 3i - 2 = 30 - 6 - 2 = 22, & j &= 6k + 6i - 6 = 18, i = 2 \\
f(v_{19}) &= i = 2, & j &= 12k + 2i - 9 = 17, i = 2
\end{aligned}$$

❖ **Pelabelan sisi-ajaib pada graf G adalah**

Nilai valensi atau konstanta ajaib dari graf di atas adalah $5n + 2$, karena

$n = 19$ maka nilai valensi adalah $5(19) + 2 = 97$

Akibatnya,

rumus umum pelabelan sisi-ajaib

$$f(u_r) + f(u_s) + f(u_r u_s) = 97$$

atau

$$f(u_r u_s) = 97 - f(u_r) - f(u_s)$$

Untuk kasus diatas diperoleh pelabelan sisinya adalah

$$f(u_1 u_2) = 97 - f(u_1) - f(u_2) = 97 - 39 - 18 = 40$$

$$f(u_2 u_3) = 97 - f(u_2) - f(u_3) = 97 - 18 - 36 = 43$$

$$f(u_3 u_4) = 97 - f(u_3) - f(u_4) = 97 - 36 - 15 = 46$$

$$f(u_4 u_5) = 97 - f(u_4) - f(u_5) = 97 - 15 - 33 = 49$$

$$f(u_5 u_6) = 97 - f(u_5) - f(u_6) = 97 - 33 - 12 = 52$$

$$f(u_6 u_7) = 97 - f(u_6) - f(u_7) = 97 - 12 - 30 = 55$$

$$f(u_7 u_8) = 97 - f(u_7) - f(u_8) = 97 - 30 - 9 = 58$$

$$\begin{aligned}
f(u_8u_9) &= 97 - f(u_8) - f(u_9) = 97 - 9 - 27 = 61 \\
f(u_9u_{10}) &= 97 - f(u_9) - f(u_{10}) = 97 - 27 - 6 = 64 \\
f(u_{10}u_{11}) &= 97 - f(u_{10}) - f(u_{11}) = 97 - 6 - 26 = 65 \\
f(u_{11}u_{12}) &= 97 - f(u_{11}) - f(u_{12}) = 97 - 26 - 8 = 63 \\
f(u_{12}u_{13}) &= 97 - f(u_{12}) - f(u_{13}) = 97 - 8 - 29 = 60 \\
f(u_{13}u_{14}) &= 97 - f(u_{13}) - f(u_{14}) = 97 - 29 - 11 = 57 \\
f(u_{14}u_{15}) &= 97 - f(u_{14}) - f(u_{15}) = 97 - 11 - 32 = 54 \\
f(u_{15}u_{16}) &= 97 - f(u_{15}) - f(u_{16}) = 97 - 32 - 14 = 51 \\
f(u_{16}u_{17}) &= 97 - f(u_{16}) - f(u_{17}) = 97 - 14 - 35 = 48 \\
f(u_{17}u_{18}) &= 97 - f(u_{17}) - f(u_{18}) = 97 - 35 - 17 = 45 \\
f(u_{18}u_{19}) &= 97 - f(u_{18}) - f(u_{19}) = 97 - 17 - 38 = 42 \\
f(u_{19}u_1) &= 97 - f(u_{19}) - f(u_1) = 97 - 38 - 39 = 20
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(v_1v_2) &= 97 - f(v_1) - f(v_2) = 97 - 19 - 37 = 41 \\
f(v_2v_3) &= 97 - f(v_2) - f(v_3) = 97 - 37 - 16 = 44 \\
f(v_3v_4) &= 97 - f(v_3) - f(v_4) = 97 - 16 - 34 = 47 \\
f(v_4v_5) &= 97 - f(v_4) - f(v_5) = 97 - 34 - 13 = 50 \\
f(v_5v_6) &= 97 - f(v_5) - f(v_6) = 97 - 13 - 31 = 53 \\
f(v_6v_7) &= 97 - f(v_6) - f(v_7) = 97 - 31 - 10 = 56 \\
f(v_7v_8) &= 97 - f(v_7) - f(v_8) = 97 - 10 - 28 = 59 \\
f(v_8v_9) &= 97 - f(v_8) - f(v_9) = 97 - 28 - 7 = 62 \\
f(v_9v_{10}) &= 97 - f(v_9) - f(v_{10}) = 97 - 7 - 24 = 66 \\
f(v_{10}v_{11}) &= 97 - f(v_{10}) - f(v_{11}) = 97 - 24 - 5 = 68 \\
f(v_{11}v_{12}) &= 97 - f(v_{11}) - f(v_{12}) = 97 - 5 - 25 = 67 \\
f(v_{12}v_{13}) &= 97 - f(v_{12}) - f(v_{13}) = 97 - 25 - 3 = 69 \\
f(v_{13}v_{14}) &= 97 - f(v_{13}) - f(v_{14}) = 97 - 3 - 23 = 71 \\
f(v_{14}v_{15}) &= 97 - f(v_{14}) - f(v_{15}) = 97 - 23 - 4 = 70 \\
f(v_{15}v_{16}) &= 97 - f(v_{15}) - f(v_{16}) = 97 - 4 - 21 = 72
\end{aligned}$$

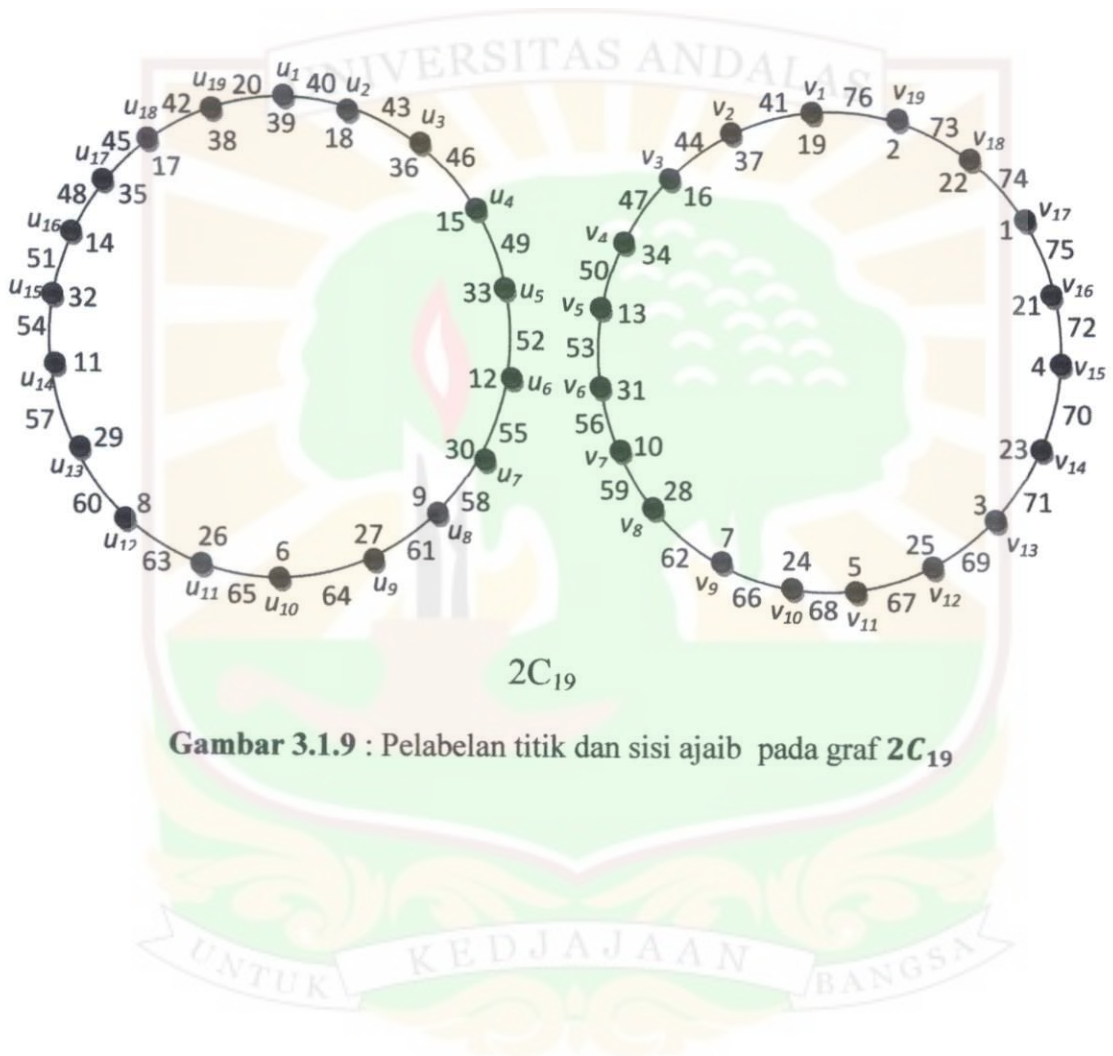
$$f(v_{16}v_{17}) = 97 - f(v_{16}) - f(v_{17}) = 97 - 21 - 1 = 75$$

$$f(v_{17}v_{18}) = 97 - f(v_{17}) - f(v_{18}) = 97 - 1 - 22 = 74$$

$$f(v_{18}v_{19}) = 97 - f(v_{18}) - f(v_{19}) = 97 - 22 - 2 = 73$$

$$f(v_{19}v_1) = 97 - f(v_{17}) - f(v_1) = 97 - 2 - 19 = 76$$

Sehingga pelabelan titik dan pelabelan sisi dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.1.9 : Pelabelan titik dan sisi ajaib pada graf $2C_{19}$

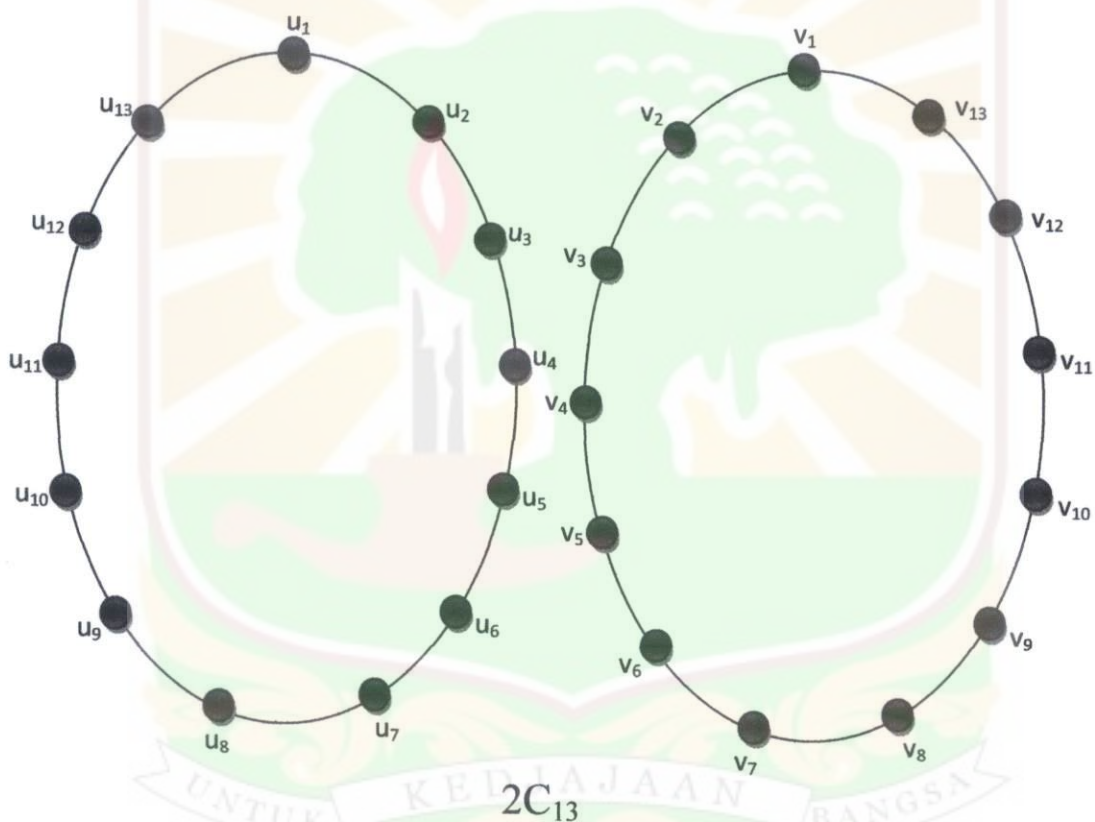
Contoh Kasus 3

Misalkan $n \equiv 1(\text{mod } 12)$, hal ini ekuivalen dengan $n = 12k + 1$, dimana k adalah bilangan bulat positif, dan definisikan $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 48k - 28\}$.

➤ Untuk $k = 1$

Maka $n = 12(1) + 1 = 13$

Graf G memiliki $n = 13$, dimana n adalah banyaknya titik dari graf G seperti gambar berikut.



Gambar 3.1.10 : Graf $2C_{13}$ dengan 13 titik

❖ Pelabelan titik dari Graf pada gambar 3.1.10 dengan menggunakan rumus berikut

$$f(u_j) = \begin{cases} 24k - 3i + 6, & \text{jika } j = 2i - 1 \text{ dan } 1 \leq i \leq 4 \\ 6k + 3i - 1, & \text{jika } j = 2i - 1 \text{ dan } 5 \leq i \leq 7 \\ 12k - 3i + 3, & \text{jika } j = 2i \text{ dan } 1 \leq i \leq 3 \\ 3i - 6k - 1, & \text{jika } j = 2i \text{ dan } 4 \leq i \leq 6 \end{cases}$$

dan

$$f(v_j) = \begin{cases} 12k - 3i + 4, & \text{jika } j = 2i - 1 \text{ dan } 1 \leq i \leq 3 \\ 24k - 3i + 4, & \text{jika } j = 2i \text{ dan } 1 \leq i \leq 3 \\ 3k - 3i + 3, & \text{jika } j = 6k + 6i - 5 \text{ dan } 1 \leq i \leq 1 \\ 15k - 3i + 5, & \text{jika } j = 6k + 6i - 4 \text{ dan } 1 \leq i \leq 1 \\ 3k - 3i + 4, & \text{jika } j = 6k + 6i - 3 \text{ dan } 1 \leq i \leq 1 \\ 15k - 3i + 3, & \text{jika } j = 6k + 6i - 2 \text{ dan } 1 \leq i \leq 1 \\ 3k - 3i + 2, & \text{jika } j = 6k + 6i - 1 \text{ dan } 1 \leq i \leq 0 \\ 15k - 3i + 4, & \text{jika } j = 6k + 6i \text{ dan } 1 \leq i \leq 1 \\ i, & \text{jika } j = 12k + 2i - 3 \text{ dan } 1 \leq i \leq 2 \end{cases}$$

Sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} f(u_1) &= 24k - 3i + 6 = 24 - 3 + 6 = 27, & j &= 2i - 1 = 1, & i &= 1 \\ f(u_2) &= 12k - 3i + 3 = 12 - 3 + 3 = 12, & j &= 2i = 2, & i &= 1 \\ f(u_3) &= 24k - 3i + 6 = 24 - 6 + 6 = 24, & j &= 2i - 1 = 3, & i &= 2 \\ f(u_4) &= 12k - 3i + 3 = 12 - 6 + 3 = 9, & j &= 2i = 4, & i &= 2 \\ f(u_5) &= 24k - 3i + 6 = 24 - 9 + 6 = 21, & j &= 2i - 1 = 5, & i &= 3 \\ f(u_6) &= 12k - 3i + 3 = 12 - 9 + 3 = 6, & j &= 2i = 6, & i &= 3 \\ f(u_7) &= 24k - 3i + 6 = 24 - 12 + 6 = 18, & j &= 2i - 1 = 7, & i &= 4 \\ f(u_8) &= 3i - 6k - 1 = 12 - 6 - 1 = 5, & j &= 2i = 8, & i &= 4 \end{aligned}$$

$$f(u_9) = 6k + 3i - 1 = 6 + 15 - 1 = 20, \quad j = 2i - 1 = 9, \quad i = 5$$

$$f(u_{10}) = 3i - 6k - 1 = 15 - 6 - 1 = 8, \quad j = 2i = 10, \quad i = 5$$

$$f(u_{11}) = 6k + 3i - 1 = 6 + 18 - 1 = 23, \quad j = 2i - 1 = 11, \quad i = 6$$

$$f(u_{12}) = 3i - 6k - 1 = 18 - 6 - 1 = 11, \quad j = 2i = 12, \quad i = 6$$

$$f(u_{13}) = 6k + 3i - 1 = 6 + 21 - 1 = 26, \quad j = 2i - 1 = 13, \quad i = 7$$

$$f(v_1) = 12k - 3i + 4 = 12 - 3 + 4 = 13, \quad j = 2i - 1 = 1, \quad i = 1$$

$$f(v_2) = 24k - 3i + 4 = 24 - 3 + 4 = 25, \quad j = 2i = 2, \quad i = 1$$

$$f(v_3) = 12k - 3i + 4 = 12 - 6 + 4 = 10, \quad j = 2i - 1 = 3, \quad i = 2$$

$$f(v_4) = 24k - 3i + 4 = 24 - 6 + 4 = 22, \quad j = 2i = 4, \quad i = 2$$

$$f(v_5) = 12k - 3i + 4 = 12 - 9 + 4 = 7, \quad j = 2i - 1 = 5, \quad i = 3$$

$$f(v_6) = 24k - 3i + 4 = 24 - 9 + 4 = 19, \quad j = 2i = 6, \quad i = 3$$

$$f(v_7) = 3k - 3i + 3 = 3 - 3 + 3 = 3, \quad j = 6k + 6i - 5 = 7, \quad i = 1$$

$$f(v_8) = 15k - 3i + 5 = 15 - 3 + 5 = 17, \quad j = 6k + 6i - 4 = 8, \quad i = 1$$

$$f(v_9) = 3k - 3i + 4 = 3 - 3 + 4 = 4, \quad j = 6k + 6i - 3 = 9, \quad i = 1$$

$$f(v_{10}) = 15k - 3i + 3 = 15 - 3 + 3 = 15, \quad j = 6k + 6i - 2 = 10, \quad i = 1$$

$$f(v_{11}) = i = 1, \quad j = 12k + 2i - 3 = 11, \quad i = 1$$

$$f(v_{12}) = 15k - 3i + 4 = 15 - 3 + 4 = 16, \quad j = 6k + 6i - 2 = 12, \quad i = 1$$

$$f(v_{13}) = i = 2, \quad j = 12k + 2i - 3 = 13, \quad i = 2$$

❖ **Pelabelan sisi-ajaib pada graf G adalah**

Nilai valensi atau konstanta ajaib dari graf di atas adalah $5n + 2$, karena

$$n = 13 \text{ maka nilai valensi adalah } 5(13) + 2 = 67$$

Akibatnya,

rumus umum pelabelan sisi-ajaib

$$f(u_r) + f(u_s) + f(u_ru_s) = 67$$

atau

$$f(u_ru_s) = 67 - f(u_r) - f(u_s)$$

Untuk kasus diatas diperoleh pelabelan sisinya adalah.

$$f(u_1u_2) = 67 - f(u_1) - f(u_2) = 67 - 27 - 12 = 28$$

$$f(u_2u_3) = 67 - f(u_2) - f(u_3) = 67 - 12 - 24 = 31$$

$$f(u_3u_4) = 67 - f(u_3) - f(u_4) = 67 - 24 - 9 = 34$$

$$f(u_4u_5) = 67 - f(u_4) - f(u_5) = 67 - 9 - 21 = 37$$

$$f(u_5u_6) = 67 - f(u_5) - f(u_6) = 67 - 21 - 6 = 40$$

$$f(u_6u_7) = 67 - f(u_6) - f(u_7) = 67 - 6 - 18 = 43$$

$$f(u_7u_8) = 67 - f(u_7) - f(u_8) = 67 - 18 - 5 = 44$$

$$f(u_8u_9) = 67 - f(u_8) - f(u_9) = 67 - 5 - 20 = 42$$

$$f(u_9u_{10}) = 67 - f(u_9) - f(u_{10}) = 67 - 20 - 8 = 39$$

$$f(u_{10}u_{11}) = 67 - f(u_{10}) - f(u_{11}) = 67 - 8 - 23 = 36$$

$$f(u_{11}u_{12}) = 67 - f(u_{11}) - f(u_{12}) = 67 - 23 - 11 = 33$$

$$f(u_{12}u_{13}) = 67 - f(u_{12}) - f(u_{13}) = 67 - 11 - 26 = 30$$

$$f(u_{13}u_1) = 67 - f(u_{13}) - f(u_1) = 67 - 26 - 27 = 14$$

$$f(v_1v_2) = 67 - f(v_1) - f(v_2) = 67 - 13 - 25 = 29$$

$$f(v_2v_3) = 67 - f(v_2) - f(v_3) = 67 - 25 - 10 = 32$$

$$f(v_3v_4) = 67 - f(v_3) - f(v_4) = 67 - 10 - 22 = 35$$

$$f(v_4v_5) = 67 - f(v_4) - f(v_5) = 67 - 22 - 7 = 38$$

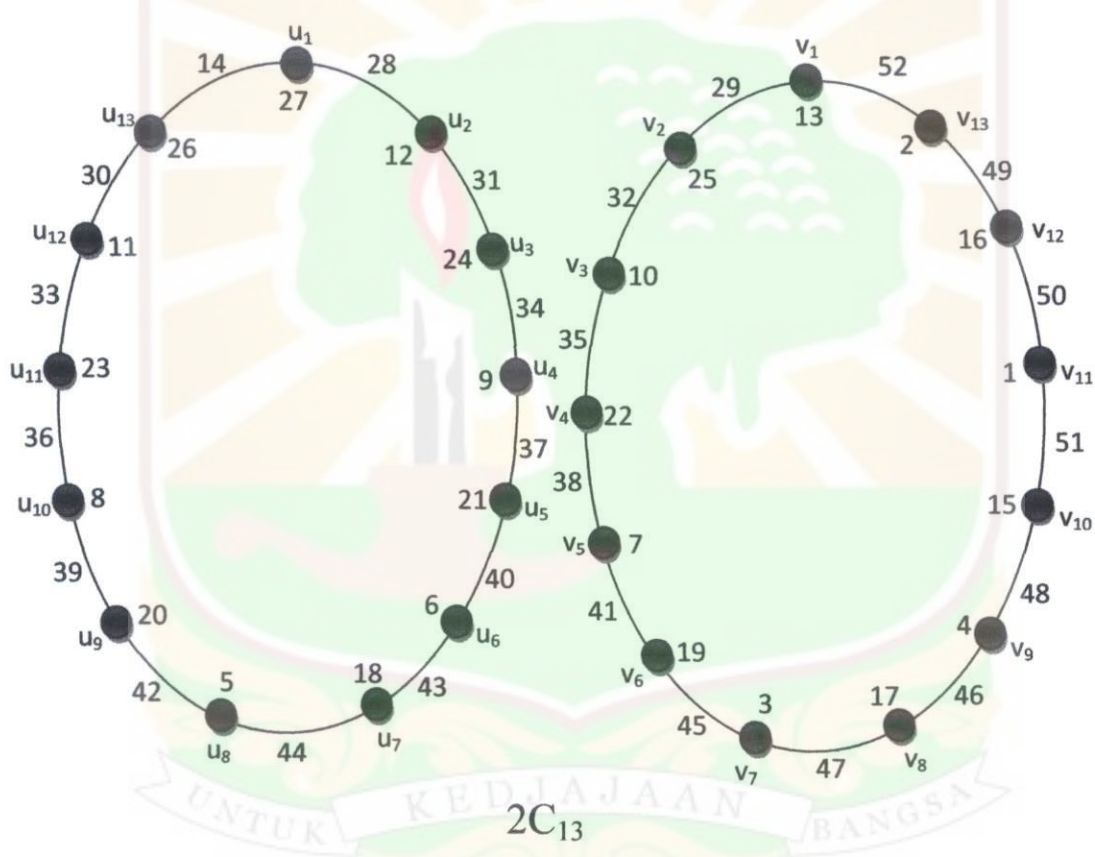
$$f(v_5v_6) = 67 - f(v_5) - f(v_6) = 67 - 7 - 19 = 41$$

$$f(v_6v_7) = 67 - f(v_6) - f(v_7) = 67 - 19 - 3 = 45$$

$$f(v_7v_8) = 67 - f(v_7) - f(v_8) = 67 - 3 - 17 = 47$$

$$\begin{aligned}
 f(v_8v_9) &= 67 - f(v_8) - f(v_9) = 67 - 17 - 4 = 46 \\
 f(v_9v_{10}) &= 67 - f(v_9) - f(v_{10}) = 67 - 4 - 15 = 48 \\
 f(v_{10}v_{11}) &= 67 - f(v_{10}) - f(v_{11}) = 67 - 15 - 1 = 51 \\
 f(v_{11}v_{12}) &= 67 - f(v_{11}) - f(v_{12}) = 67 - 1 - 16 = 50 \\
 f(v_{12}v_{13}) &= 67 - f(v_{12}) - f(v_{13}) = 67 - 16 - 2 = 49 \\
 f(v_{13}v_1) &= 67 - f(v_{13}) - f(v_1) = 67 - 2 - 13 = 52
 \end{aligned}$$

Sehingga pelabelan titik dan pelabelan sisi dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.1.11 : Pelabelan titik dan sisi ajaib pada graf $2C_{13}$

➤ Untuk $k = 2$

Maka $n = 12(2) + 1 = 25$

Graf G memiliki $n = 25$, dimana n adalah banyaknya titik dari graf G seperti gambar berikut.



Gambar 3.1.12 : Graf $2C_{25}$ dengan 25 titik

❖ Pelabelan titik dari Graf pada gambar 3.1.12 dengan menggunakan rumus berikut

$$f(u_j) = \begin{cases} 24k - 3i + 6, & \text{jika } j = 2i - 1 \text{ dan } 1 \leq i \leq 7 \\ 6k + 3i - 1, & \text{jika } j = 2i - 1 \text{ dan } 8 \leq i \leq 13 \\ 12k - 3i + 3, & \text{jika } j = 2i \text{ dan } 1 \leq i \leq 6 \\ 3i - 6k - 1, & \text{jika } j = 2i \text{ dan } 7 \leq i \leq 12 \end{cases}$$

dan

$$f(v_j) = \begin{cases} 12k - 3i + 4, & \text{jika } j = 2i - 1 \text{ dan } 1 \leq i \leq 6 \\ 24k - 3i + 4, & \text{jika } j = 2i \text{ dan } 1 \leq i \leq 6 \\ 3k - 3i + 3, & \text{jika } j = 6k + 6i - 5 \text{ dan } 1 \leq i \leq 2 \\ 15k - 3i + 5, & \text{jika } j = 6k + 6i - 4 \text{ dan } 1 \leq i \leq 2 \\ 3k - 3i + 4, & \text{jika } j = 6k + 6i - 3 \text{ dan } 1 \leq i \leq 2 \\ 15k - 3i + 3, & \text{jika } j = 6k + 6i - 2 \text{ dan } 1 \leq i \leq 2 \\ 3k - 3i + 2, & \text{jika } j = 6k + 6i - 1 \text{ dan } 1 \leq i \leq 1 \\ 15k - 3i + 4, & \text{jika } j = 6k + 6i \text{ dan } 1 \leq i \leq 2 \\ i, & \text{jika } j = 12k + 2i - 3 \text{ dan } 1 \leq i \leq 2 \end{cases}$$

sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} f(u_1) &= 24k - 3i + 6 = 48 - 3 + 6 = 51, & j &= 2i - 1 = 1, & i &= 1 \\ f(u_2) &= 12k - 3i + 3 = 24 - 3 + 3 = 24, & j &= 2i = 2, & i &= 1 \\ f(u_3) &= 24k - 3i + 6 = 48 - 6 + 6 = 48, & j &= 2i - 1 = 3, & i &= 2 \\ f(u_4) &= 12k - 3i + 3 = 24 - 6 + 3 = 21, & j &= 2i = 4, & i &= 2 \\ f(u_5) &= 24k - 3i + 6 = 48 - 9 + 6 = 45, & j &= 2i - 1 = 5, & i &= 3 \\ f(u_6) &= 12k - 3i + 3 = 24 - 9 + 3 = 18, & j &= 2i = 6, & i &= 3 \\ f(u_7) &= 24k - 3i + 6 = 48 - 12 + 6 = 42, & j &= 2i - 1 = 7, & i &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(u_8) &= 12k - 3i + 3 = 24 - 12 + 3 = 15, & j = 2i = 8, & i = 4 \\
f(u_9) &= 24k - 3i + 6 = 48 - 15 + 6 = 39, & j = 2i - 1 = 9, & i = 5 \\
f(u_{10}) &= 12k - 3i + 3 = 24 - 15 + 3 = 12, & j = 2i = 10, & i = 5 \\
f(u_{11}) &= 24k - 3i + 6 = 48 - 18 + 6 = 36, & j = 2i - 1 = 11, & i = 6 \\
f(u_{12}) &= 12k - 3i + 3 = 24 - 18 + 3 = 9, & j = 2i = 12, & i = 6 \\
f(u_{13}) &= 24k - 3i + 6 = 48 - 21 + 6 = 33, & j = 2i - 1 = 13, & i = 7 \\
f(u_{14}) &= 3i - 6k - 1 = 21 - 12 - 1 = 8, & j = 2i = 14, & i = 7 \\
f(u_{15}) &= 6k + 3i - 1 = 12 + 24 - 1 = 35, & j = 2i - 1 = 15, & i = 8 \\
f(u_{16}) &= 3i - 6k - 1 = 24 - 12 - 1 = 11, & j = 2i = 16, & i = 8 \\
f(u_{17}) &= 6k + 3i - 1 = 12 + 27 - 1 = 38, & j = 2i - 1 = 17, & i = 9 \\
f(u_{18}) &= 3i - 6k - 1 = 27 - 12 - 1 = 14, & j = 2i = 18, & i = 9 \\
f(u_{19}) &= 6k + 3i - 1 = 12 + 30 - 1 = 41, & j = 2i - 1 = 19, & i = 10 \\
f(u_{20}) &= 3i - 6k - 1 = 30 - 12 - 1 = 17, & j = 2i = 20, & i = 10 \\
f(u_{21}) &= 6k + 3i - 1 = 12 + 33 - 1 = 44, & j = 2i - 1 = 21, & i = 11 \\
f(u_{22}) &= 3i - 6k - 1 = 33 - 12 - 1 = 20, & j = 2i = 22, & i = 11 \\
f(u_{23}) &= 6k + 3i - 1 = 12 + 36 - 1 = 47, & j = 2i - 1 = 23, & i = 12 \\
f(u_{24}) &= 3i - 6k - 1 = 36 - 12 - 1 = 23, & j = 2i = 24, & i = 12 \\
f(u_{25}) &= 6k + 3i - 1 = 12 + 39 - 1 = 50, & j = 2i - 1 = 25, & i = 13
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(v_1) &= 12k - 3i + 4 = 24 - 3 + 4 = 25, & j = 2i - 1 = 1, & i = 1 \\
f(v_2) &= 24k - 3i + 4 = 48 - 3 + 4 = 49, & j = 2i = 2, & i = 1 \\
f(v_3) &= 12k - 3i + 4 = 24 - 6 + 4 = 22, & j = 2i - 1 = 3, & i = 2 \\
f(v_4) &= 24k - 3i + 4 = 48 - 6 + 4 = 46, & j = 2i = 4, & i = 2 \\
f(v_5) &= 12k - 3i + 4 = 24 - 9 + 4 = 19, & j = 2i - 1 = 5, & i = 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(v_6) &= 24k - 3i + 4 = 48 - 9 + 4 = 43, & j &= 2i = 6, & i &= 3 \\
f(v_7) &= 12k - 3i + 4 = 24 - 12 + 4 = 16, & j &= 2i - 1 = 7, & i &= 4 \\
f(v_8) &= 24k - 3i + 4 = 48 - 12 + 4 = 40, & j &= 2i = 8, & i &= 4 \\
f(v_9) &= 12k - 3i + 4 = 24 - 15 + 4 = 13, & j &= 2i - 1 = 9, & i &= 5 \\
f(v_{10}) &= 24k - 3i + 4 = 48 - 15 + 4 = 37, & j &= 2i = 10, & i &= 5 \\
f(v_{11}) &= 12k - 3i + 4 = 24 - 18 + 4 = 10, & j &= 2i - 1 = 11, & i &= 6 \\
f(v_{12}) &= 24k - 3i + 4 = 48 - 18 + 4 = 34, & j &= 2i = 12, & i &= 6 \\
f(v_{13}) &= 3k - 3i + 3 = 6 - 3 + 3 = 6, & j &= 6k + 6i - 5 = 13, & i &= 1 \\
f(v_{14}) &= 15k - 3i + 5 = 30 - 3 + 5 = 32, & j &= 6k + 6i - 4 = 14, & i &= 1 \\
f(v_{15}) &= 3k - 3i + 4 = 6 - 3 + 4 = 7, & j &= 6k + 6i - 3 = 15, & i &= 1 \\
f(v_{16}) &= 15k - 3i + 3 = 30 - 3 + 3 = 30, & j &= 6k + 6i - 2 = 16, & i &= 1 \\
f(v_{17}) &= 3k - 3i + 2 = 6 - 3 + 2 = 5, & j &= 6k + 6i - 1 = 17, & i &= 1 \\
f(v_{18}) &= 15k - 3i + 4 = 30 - 3 + 4 = 31, & j &= 6k + 6i = 18, & i &= 1 \\
f(v_{19}) &= 3k - 3i + 3 = 6 - 6 + 3 = 3, & j &= 6k + 6i - 5 = 19, & i &= 2 \\
f(v_{20}) &= 15k - 3i + 5 = 30 - 6 + 5 = 29, & j &= 6k + 6i - 4 = 20, & i &= 2 \\
f(v_{21}) &= 3k - 3i + 4 = 6 - 6 + 4 = 4, & j &= 6k + 6i - 3 = 21, & i &= 2 \\
f(v_{22}) &= 15k - 3i + 3 = 30 - 6 + 3 = 27, & j &= 6k + 6i - 2 = 22, & i &= 2 \\
f(v_{23}) &= i = 1, & j &= 12k + 2i - 3 = 23, & i &= 1 \\
f(v_{24}) &= 15k - 3i + 4 = 30 - 6 + 4 = 28, & j &= 6k + 6i = 24, & i &= 2 \\
f(v_{25}) &= i = 2, & j &= 12k + 2i - 3 = 25, & i &= 2
\end{aligned}$$

❖ Pelabelan sisi-ajaib pada graf G adalah

Nilai valensi atau konstanta ajaib dari graf di atas adalah $5n + 2$, karena

$$n = 25 \text{ maka nilai valensi adalah } 5(25) + 2 = 127$$

Akibatnya,

rumus umum pelabelan sisi-ajaib

$$f(u_r) + f(u_s) + f(u_ru_s) = 127$$

atau

$$f(u_ru_s) = 127 - f(u_r) - f(u_s)$$

Untuk kasus diatas diperoleh pelabelan sisinya adalah

$$f(u_1u_2) = 127 - f(u_1) - f(u_2) = 127 - 51 - 24 = 52$$

$$f(u_2u_3) = 127 - f(u_2) - f(u_3) = 127 - 24 - 48 = 55$$

$$f(u_3u_4) = 127 - f(u_3) - f(u_4) = 127 - 48 - 21 = 58$$

$$f(u_4u_5) = 127 - f(u_4) - f(u_5) = 127 - 21 - 45 = 61$$

$$f(u_5u_6) = 127 - f(u_5) - f(u_6) = 127 - 45 - 18 = 64$$

$$f(u_6u_7) = 127 - f(u_6) - f(u_7) = 127 - 18 - 42 = 67$$

$$f(u_7u_8) = 127 - f(u_7) - f(u_8) = 127 - 42 - 15 = 70$$

$$f(u_8u_9) = 127 - f(u_8) - f(u_9) = 127 - 15 - 39 = 73$$

$$f(u_9u_{10}) = 127 - f(u_9) - f(u_{10}) = 127 - 39 - 12 = 76$$

$$f(u_{10}u_{11}) = 127 - f(u_{10}) - f(u_{11}) = 127 - 12 - 36 = 79$$

$$f(u_{11}u_{12}) = 127 - f(u_{11}) - f(u_{12}) = 127 - 36 - 9 = 82$$

$$f(u_{12}u_{13}) = 127 - f(u_{12}) - f(u_{13}) = 127 - 9 - 33 = 85$$

$$f(u_{13}u_{14}) = 127 - f(u_{13}) - f(u_{14}) = 127 - 33 - 8 = 86$$

$$f(u_{14}u_{15}) = 127 - f(u_{14}) - f(u_{15}) = 127 - 8 - 35 = 84$$

$$f(u_{15}u_{16}) = 127 - f(u_{15}) - f(u_{16}) = 127 - 35 - 11 = 81$$

$$f(u_{16}u_{17}) = 127 - f(u_{16}) - f(u_{17}) = 127 - 11 - 38 = 78$$

$$\begin{aligned}
f(u_{17}u_{18}) &= 127 - f(u_{17}) - f(u_{18}) = 127 - 38 - 14 = 75 \\
f(u_{18}u_{19}) &= 127 - f(u_{18}) - f(u_{19}) = 127 - 14 - 41 = 72 \\
f(u_{19}u_{20}) &= 127 - f(u_{19}) - f(u_{20}) = 127 - 41 - 17 = 69 \\
f(u_{20}u_{21}) &= 127 - f(u_{20}) - f(u_{21}) = 127 - 17 - 44 = 66 \\
f(u_{21}u_{22}) &= 127 - f(u_{21}) - f(u_{22}) = 127 - 44 - 20 = 63 \\
f(u_{22}u_{23}) &= 127 - f(u_{22}) - f(u_{23}) = 127 - 20 - 47 = 60 \\
f(u_{23}u_{24}) &= 127 - f(u_{23}) - f(u_{24}) = 127 - 47 - 23 = 57 \\
f(u_{24}u_{25}) &= 127 - f(u_{24}) - f(u_{25}) = 127 - 23 - 50 = 54 \\
f(u_{25}u_1) &= 127 - f(u_{25}) - f(u_1) = 127 - 50 - 51 = 26
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(v_1v_2) &= 127 - f(v_1) - f(v_2) = 127 - 25 - 49 = 53 \\
f(v_2v_3) &= 127 - f(v_2) - f(v_3) = 127 - 49 - 22 = 56 \\
f(v_3v_4) &= 127 - f(v_3) - f(v_4) = 127 - 22 - 46 = 59 \\
f(v_4v_5) &= 127 - f(v_4) - f(v_5) = 127 - 46 - 19 = 62 \\
f(v_5v_6) &= 127 - f(v_5) - f(v_6) = 127 - 19 - 43 = 65 \\
f(v_6v_7) &= 127 - f(v_6) - f(v_7) = 127 - 43 - 16 = 68 \\
f(v_7v_8) &= 127 - f(v_7) - f(v_8) = 127 - 16 - 40 = 71 \\
f(v_8v_9) &= 127 - f(v_8) - f(v_9) = 127 - 40 - 13 = 74 \\
f(v_9v_{10}) &= 127 - f(v_9) - f(v_{10}) = 127 - 13 - 37 = 77 \\
f(v_{10}v_{11}) &= 127 - f(v_{10}) - f(v_{11}) = 127 - 37 - 10 = 80 \\
f(v_{11}v_{12}) &= 127 - f(v_{11}) - f(v_{12}) = 127 - 10 - 34 = 83 \\
f(v_{12}v_{13}) &= 127 - f(v_{12}) - f(v_{13}) = 127 - 34 - 6 = 87 \\
f(v_{13}v_{14}) &= 127 - f(v_{13}) - f(v_{14}) = 127 - 6 - 32 = 89 \\
f(v_{14}v_{15}) &= 127 - f(v_{14}) - f(v_{15}) = 127 - 32 - 7 = 88 \\
f(v_{15}v_{16}) &= 127 - f(v_{15}) - f(v_{16}) = 127 - 7 - 30 = 90 \\
f(v_{16}v_{17}) &= 127 - f(v_{16}) - f(v_{17}) = 127 - 30 - 5 = 92 \\
f(v_{17}v_{18}) &= 127 - f(v_{17}) - f(v_{18}) = 127 - 5 - 31 = 91 \\
f(v_{18}v_{19}) &= 127 - f(v_{18}) - f(v_{19}) = 127 - 31 - 3 = 93
\end{aligned}$$

$$f(v_{19}v_{20}) = 127 - f(v_{19}) - f(v_{20}) = 127 - 3 - 29 = 95$$

$$f(v_{20}v_{21}) = 127 - f(v_{20}) - f(v_{21}) = 127 - 29 - 4 = 94$$

$$f(v_{21}v_{22}) = 127 - f(v_{21}) - f(v_{22}) = 127 - 4 - 27 = 96$$

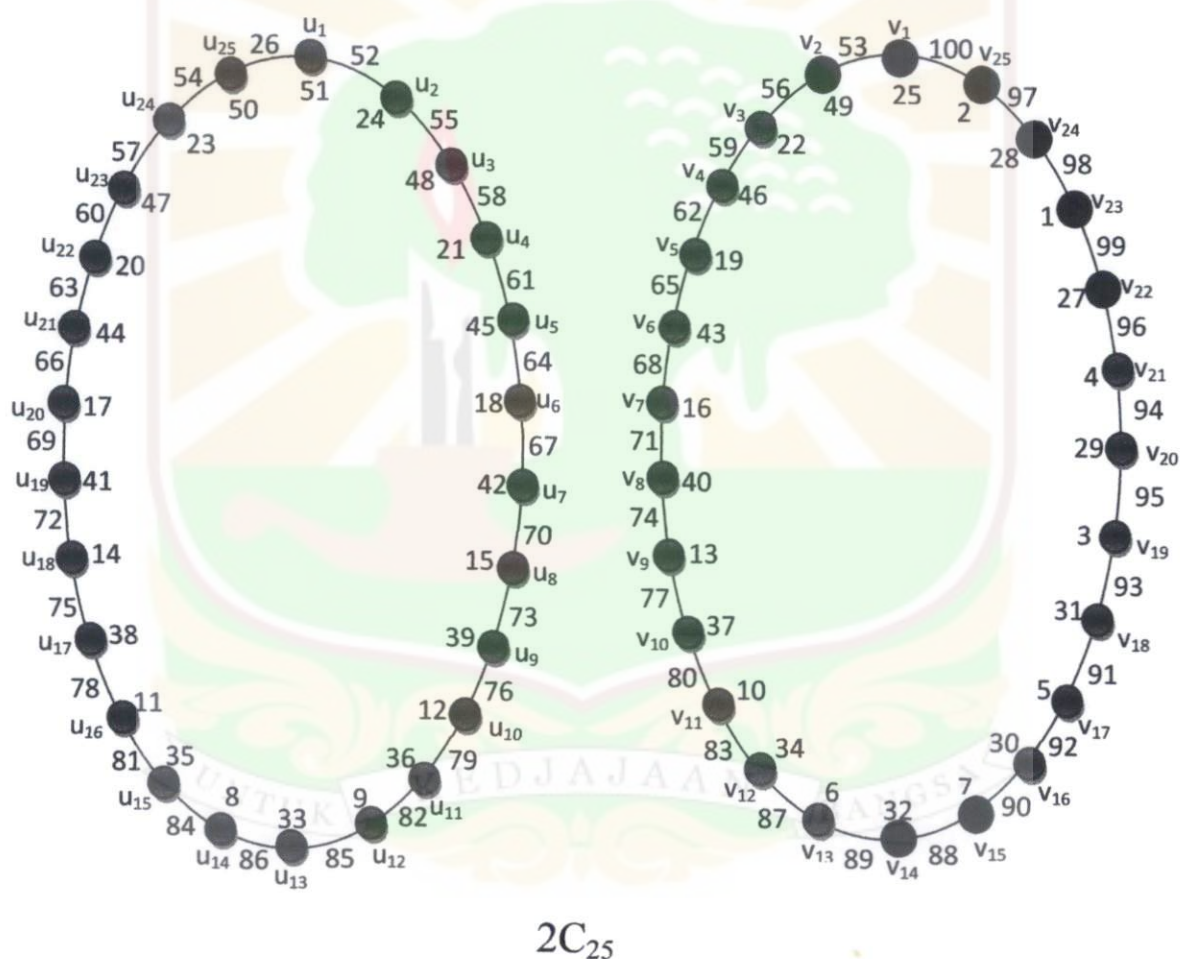
$$f(v_{22}v_{23}) = 127 - f(v_{22}) - f(v_{23}) = 127 - 27 - 1 = 99$$

$$f(v_{23}v_{24}) = 127 - f(v_{23}) - f(v_{24}) = 127 - 1 - 28 = 98$$

$$f(v_{24}v_{25}) = 127 - f(v_{24}) - f(v_{25}) = 127 - 28 - 2 = 97$$

$$f(v_{25}v_1) = 127 - f(v_{25}) - f(v_1) = 127 - 2 - 25 = 10$$

Sehingga pelabelan titik dan pelabelan sisi dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.1.13 : Pelabelan titik dan sisi ajaib pada graf $2C_{25}$

BAB IV

KESIMPULAN

Kesimpulan

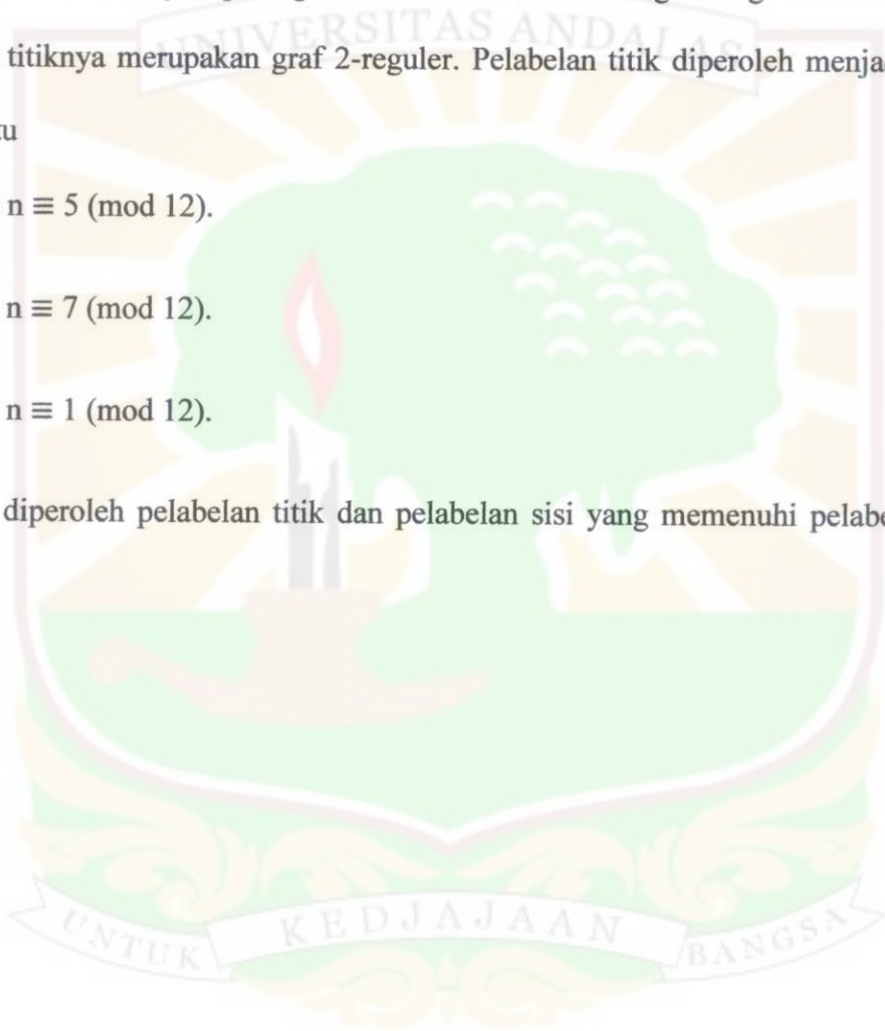
Berdasarkan hasil yang telah diperoleh pada Bab III, dapat disimpulkan bahwa pelabelan sisi-ajaib pada graf $2C_n$ dimana C_n adalah graf lingkaran dengan n banyak titiknya merupakan graf 2-reguler. Pelabelan titik diperoleh menjadi 3 kasus yaitu

Kasus 1 : $n \equiv 5 \pmod{12}$.

Kasus 2 : $n \equiv 7 \pmod{12}$.

Kasus 3 : $n \equiv 1 \pmod{12}$.

Sehingga diperoleh pelabelan titik dan pelabelan sisi yang memenuhi pelabelan sisi-ajaib.



DAFTAR KEPUSTAKAAN

- [1] Bondy, J.A. 1971. Pancyclic graphs I. *Journal of Combinatorial Theory*. **11**: 80-84
- [2] Bondy, J.A, and Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Applications*. Canada
- [3] Chartrand, G and Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition*. California: Wadsworth, Inc.
- [4] Chartrand, G. and P. Zhang. 2005. *Introduction to Graph Theory*. McGraw-Hill Press, Boston
- [5] Kotzig and A. Rosa. 1972. Magic valuations of complete graphs, *publication du Centre de Recherches Mathematiques Universite de montreal*.
- [6] Miler, Mirka. 2000. *Open Problems in Graph Theory : Labeling and Extremal Graph*. Prosiding Konferensi Nasional Himpunan Matematika Indonesia X di Institut Teknologi Bandung, 17-20 Juli.
- [7] Munir, R. 2005. *Matematika Diskrit*. Edisi 3. Penerbit Informatika, Bandung.
- [8] R. M. Figueroa-Centeno, R. Ichishima, and F. A. Muntaner-Batle. 2005. On edge-magic labeling of certain disjoint unions of graphs. *Australasian Journal Of Combinatorics*
- [9] West, D.B. 2001. *Introduction to Graph Theory*. Prentice-Hall, United States of America