PENGGUNAAN TEORI KEKONGRUENAN TERHADAP SIFAT-SIFAT KEKONGRUENAN PADA MODULO 9

SKRIPSI

ILA DARMAWATI
07134079

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM UNIVERSITAS ANDALAS PADANG 2011

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa:

Nama	: Ila Darmawati
No. Buku Pokok	: 07134079
Jurusan	: Matematika
Bidang	: Matematika Teori
Judul Skripsi	: Penggunaan Teori Kekongruenan Terhadap Sifat-Sifat Kekongruenan Pada Modulo 9

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal 09 Juli 2011 berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing/Penguji

1.

Prof. Dr. I Made Arnawa, M.Si
NIP : 19630218 198903 1 004

Penguji

1.

Narwen, M.Si
NIP. 19671004 199609 1 001

2.

Efendi, M.Si
NIP. 19780717 200212 1 002

Mengetahui, Ketua Jurusan Matematika
FMIPA Universitas Andalas

Dr. Syafrizal Sy
NIP. 19670807 199309 1 001

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah hirabbil ' alamin. Berkat Rahmat dan rahim Allah SWT penulis berhasil menyelesaikan skripsi ini dengan judul: "PENGGUNAAN TEORI KEKONGRUENAN TERHADAP SIFAT-SIFAT KEKONGRUENAN PADA MODULO 9" Skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana Sain (Strata 1) Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang.

Dalam penulisan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak , untuk itu pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan Suatu ungkapan yang ikhlas dari hati penulis untuk mengucapkan Terima kasih kepada :

1. Ayah Maksuman (alm) dan Ibu Arnusa tersayang yang selalu tak henti-hentinya memberikan do'a dan kasih sayang
2. Bapak Dr.Syafrizal SY selaku Ketua Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas, Padang.
3. Bapak Prof. Dr.I Made Arnawa, M.Si selaku Pembimbing yang telah meluangkan waktunya dan dengan penuh kesabaran memberikan bimbingan arahan, masukan dan saran yang sangat berguna sekali selama penulisan skripsi ini.
4. Bapak Narwen, M.Si dan Bapak Efendi, M.Si yang telah memberikan masukan yang sangat berguna dalam pembuatan skripsi ini.
5. Bakwo Yogi yang selalu membantu, memotivasi, membimbing dengan sabar dan penuh ke ikhlasan.

6. Bapak Ir. Werman Kasoep, M.Kom selaku dosen pembimbing Akademik yang telah membantu dan mengarahkan studi ini agar selesai pada waktunya.
7. Bapak Zulakmal, M.Si selaku ketua Perpustakaan dan kepada staf Perpustakaan jurusan Matematika Universitas Andalas
8. Dosen dan staf jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas yang telah memerikan ilmu selama penulis menjalankan studi.
9. Rekan-rekan basic Science yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu terima kasih telah membantu penulis selama penulisan skripsi ini.

Sebagai manusia biasa yang tidak luput dari kesalahan, penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini mungkin terdapat kesalahan dan kekeliruan. oleh sebab itu penulis dengan sebesar hati menerima kritik dan saran yang bersifat membangun. Akhir kata semoga skripsi ini bermanfaat bagi kita semua terutama bagi penulis sendiri dan juga bagi pembaca sekalian

Padang, Juli 2011

Ila Darmawati

Abstrak

Dalam skripsi ini dipelajari sifat-sifat modulo 9. Selanjutnya ditemukan bahwa, setiap bilangan bulat positif adalah kongruen dengan modulo 9. Sifat ini digunakan untuk memeriksa kebenaran operasi penjumlahan, pembagian dan perkalian.

Kata Kunci :*Teori kekongruenan, sifat-sifat kekongruenan, modulo 9*

Abstract

In this paper we studied the properties of modulo 9. We found that the sum of number every positive integer is congruent to modulo 9. We also apply the property of modulo 9 to check sumation, division and multiplication of integers.

Key Words : *Theory of congruence, properties of congruence, modulo 9*

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori bilangan merupakan salah satu dasar dalam matematika himpunan semesta, dalam teori bilangan adalah himpunan semua bilangan bulat. Bahkan dalam beberapa pembahasan hanya terbatas pada himpunan bilangan asli. Teori bilangan berisi penelaahan sifat– sifat bilangan bulat dan penerapannya terutama dalam konsep kekongruenan.

Konsep kekongruenan pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan Jerman yaitu Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855) dalam aritmatikanya, Gauss memperkenalkan kongruenan dan modulus ke dalam teori bilangan tahun 1801. Kata modulus dalam bahasa latin berarti suatu ukuran atau satuan ukur, sedangkan pada teori bilangan modulus adalah satuan ukur yang digunakan dalam kongruen lebih tepatnya mengukur sesuatu menurut siklus panjangnya sebagai contoh, bulan dalam satu tahun terdapat 12 bulan disebut dengan modulus 12. Kata kongruen berasal dari bahasa latin yang berarti menyetujui atau bersesuaian. Dalam teori bilangan kongruen adalah dua angka yang memiliki modulo yang sama.

Pada skripsi ini akan ditunjukkan cara memeriksa kebenaran perkalian dan penjumlahan bilangan bulat dengan menggunakan kekongruenan modulo 9.

1.2 Perumusan Masalah.

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang dibahas Adalah “ Apa saja kegunaan Teori kekongruenan pada modulo 9”?

1.3 Batasan Masalah

Pembatasan masalah pada penulisan skripsi ini adalah hanya pada penggunaan teori kekongruenan khususnya pada modulo 9

1.4 Tujuan Penulisan

Penulisan ini bertujuan untuk mengetahui penggunaan teori kekongruenan pada modulo 9

1.5 Manfaat Penulisan

Tulisan ini diharapkan dapat memperluas wawasan penulis dalam memahami penggunaan Teori kekongruenan

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini dimulai dengan BAB I, membahas tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan dan sistematika penulisan.BAB II, memuat konsep yang digunakan untuk menyelesaikan masalah Teori Kekongruenan Terhadap sifat-sifat kekongruenan Pada Modulo 9. BAB III, akan dibahas tentang sifat-sifat kekongruenan pada modolu 9. BAB IV memuat kesimpulan mengenai tugas akhir ini.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dikemukakan pengertian dan konsep dasar yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah kekongruenan. Teori dasar tentang bilangan bulat menjadi landasan teori yang penting dalam memahami pembahasan tentang masalah kekongruenan. Berikut definisi-definisi serta teorema-teorema yang mendukung penyelesaian masalah pada penulisan ini.

2.1 Sifat-Sifat Bilangan Bulat

Sifat-sifat bilangan bulat dibagi kedalam dua kelompok, yaitu sifat aljabar dan sifat urutan. Menurut Budhi (2003) Sifat aljabar pada himpunan bilangan bulat mempunyai dua operasi yaitu operasi penjumlahan $(+)$ dan operasi perkalian $(\times)$ dengan sifat

a. Sifat Assosiatif untuk penjumlahan

   Untuk setiap bilangan bulat $a, b, c,$ berlaku, $(a+b) + c = a + (b + c),$

b. Sifat komutatif untuk penjumlahan

   Untuk setiap bilangan bulat a, b berlaku, $a + b = b + a,$

c. Unsur identitas terhadap penjumlahan

   Ada bilangan 0 sehingga untuk setiap bilangan bulat berlaku, $a + 0 = 0 + a = a,$

d. Unsur invers terhadap penjumlahan

   Untuk setiap bilangan bulat a ada bilangan bulat b sehingga, $a + b = 0,$

e. Sifat Assosiatif untuk perkalian

   Untuk setiap bilangan bulat a, b, c berlaku, $(a.\ b)\ .\ c = a\ .\ (b\ .\ c),$

f. Sifat komutatif untuk perkalian

   Untuk setiap bilangan bulat a, b berlaku, $a\ .\ b = b\ .\ a,$

g. Unsur identitas terhadap perkalian

Ada bilangan 1 sehingga untuk setiap bilangan bulat berlaku, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Sifat urutan menurut (Varberg,Purcel,Rigdom, 2004),didefinisikan sebagai bilangan-bilangan riil tak nol dipisahkan dengan baik menjadi dua himpunan terpisah, bilangan-bilangan riil positif dan bilangan–bilangan riil negatif. Fakta ini memungkinkan untuk memperkenalkan relasi urutan < (dibaca"lebih kecil dari") dengan $x < y \Leftrightarrow y - x$ adalah positif.

Contoh 1

$x < y = y > x$

Jadi $4 < 5 = 5 > 4$, $-4 < -3 = -3 > -4$

Beberapa Sifat Urutan (Varberg,Purcel,Rigdom, 2004)

1. Trikotomi

   Jika x dan y adalah bilangan-bilangan, maka pasti satu diantara yang berikut ini berlaku : $x < y$ atau $x = y$ atau $x > y$

2. Ketransitifan $x < y$ dan $y < z \Rightarrow x < z$

3. Penambahan $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$

4. Perkalian. - Bilamana z positif, $x < y \Leftrightarrow xz < y$

   - Bilamana z negatif, $x < y \Leftrightarrow xz > yz$ relasi urutan $\leq$ (dibaca kurang dari atau sama dengan") didefinisikan sebagai $x \leq y \Leftrightarrow y - x$ positif atau nol

2.2 Sifat-Sifat dan Teori keterbagian pada Bilangan Bulat

Definisi 2.2.1 (Sukirman, 2006)

Sebuah bilangan bulat $a \neq 0$ dikatakan membagi b jika terdapat bilangan bulat c sehingga $b = ac$.

jika a membagi b ditulis dengan $a \mid b$. Sebaliknya jika a tidak membagi b ditulis dengan $a \nmid b$. Disamping kata membagi dapat digunakan juga kata faktor,yaitu a faktor dari b. Selain itu dapat juga dikatakan bahwa a pembagi bilangan b (Arifin, 2000)

Contoh 2

1. 3 membagi 15, ditulis $3 \mid 15$, karena $15 = 3 . 5$
2. 7 tidak membagi 19, ditulis $7 \nmid 19$, karena tidak ada bilangan bulat jika dikalikan 7 menghasilkan 19.

Sifat – sifat keterbagian pada bilangan bulat adalah sebagai berikut

1. Sifat Refleksif

   Untuk setiap bilangan bulat a berlaku : $a \mid a$.

   Bukti

   Ambil $a \in Z$, $a \nmid 0$. Akan ditunjukan $a \mid a$.

   Karena $a = a . 1$ maka $a \mid a$

2. Sifat Transitif

   Untuk setiap bilangan bulat a, b, c berlaku : Jika $a \mid b$ dan $b \mid c$ maka $a \mid c$.

   Bukti

   Ambil $a, b, c \in Z$ dengan $a \mid b$ dan $b \mid c$.

   Akan ditunjukan $a \mid c$.

   Karena $a \mid b$ maka $a \neq 0$ dan ada $n_1 \in z$ sehingga $b = n_1 a$

Karena $b|c$ maka $b \neq 0$ dan ada $n_2 \in Z$ sehingga $c = n_2b$ Perhatikan $c = n_2b$

Akibatnya $c = n_2b$

$$c = n_2\,(n_1a)$$

$$c = (n_2n_1\,)\,a \text{ untuk } n_2, \in Z$$

$$c = n_3a \text{ untuk } n_3 \in Z$$

Karena $a \neq 0$ dan $c = n_3\,a$ untuk suatu $n_3 \in Z$ maka $a \mid c$.

3. Sifat Linear

   Untuk setiap bilangan bulat $a,b,c,x,$ dan y berlaku :

   Jika $a \mid b$ dan $a \mid c$ maka $a \mid (xb + yc\,\}$.

   Bukti

   Karena $a \mid b$ maka ada bilangan bulat k sehingga $b = ka$

   Karena $a \mid c$ maka ada bilangan bulat 1 sehingga $c = 1a$.

   Selanjutnya untuk setiap bilangan bulat x , y maka

   $$Bx + cy = kax + 1ay$$

   $$= a\,(\,kx + 1y\,)$$

   Jadi $bx + cy$ habis dibagi oleh a

4. Sifat Perkalian

   Untuk setiap bilangan bulat $a,b,$ dan c berlaku: Jika $a \mid b$ maka $ca \mid cb$.

5. Sifat Pencoretan

   Untuk setiap bilangan bulat $a,\ b$, dan c berlaku: Jika $ca \mid cb$ dan $c \neq 0$ maka $a \mid b$

6. Jika $a \mid b$ dan $b \mid a \Leftrightarrow a = \pm\, b$. Bilangan a dan b disebut berasosiasi.

   Bukti ($\rightarrow$)

   Ambil $a,b \in Z$ dengan $a \mid b$ dan $b \mid a$

Akan ditunjukkan $a = \pm b$ Karena $a|b$ maka $a \neq 0$, $a \in Z$ sehingga $b = n_1 a$

Karena $b \mid a$ maka $b \neq 0$, $b \in Z$ sehingga $a = n_2 b$

Perhatikan bahwa

$$a = n_2 b$$

$$a = n_2 (n_2 n_1) a$$

$$a = (n_2 n_1) a$$

Karena $a, n_1, n_2 \in Z$, $a \neq 0$ dan $a = (n_2 n_1) a$ *maka* $n_1 n_2 = 1$

Akibatnya 1. $n_1 = n_2 = 1$ atau

2. $n_1 = -1, n_2 = -1$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Untuk } n_{1=} n_2 = 1 \text{ diperoleh } a = b \\ \text{Untuk } n_1 = n_2 \text{diperoleh } a = -b \end{array}\right\} a = \pm b$$

Bukti ($\leftarrow$)

Ambil $a,b \in Z$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ dan $a = \pm b$

Akan ditunjukan $a \mid b$ dan $b \mid a$

Kasus 1 : $a = b$

Karena $a \neq 0$ dan $1 \in Z$ sehingga $b = 1.a$ maka $a \mid b$

Karena $b \neq 0$ dan $1 \in Z$ sehingga $a = 1.b$ maka $b \mid a$

Kasus 2 : $a = -b$

Karena $a \neq 0$ dan $-1 \in Z$ sehingga $b = -1.a$ maka $a \mid b$

Karena $b \neq 0$ dan $-1 \in Z$ sehingga $a = -1.b$ maka $b \mid a$

Dari kasus 1 dan 2 disimpulkan jika $a = \pm b$ maka $a \mid b$ dan $b \mid a$

Definisi 2.2.2 (Sukirman, 2006)

Bilangan bulat p, $p > 1$ dikatakan bilangan prima jika pembagi positif dari bilangan tersebut adalah 1 dan p itu sendiri.

Contoh 3

Misalkan nilai $p = 3$

Maka $3 \mid 3$ dan $1 \mid 3$, sehingga p adalah bilangan prima

Teorema 2.2.3 (Arnawa, 2010)

Setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dapat dibagi oleh suatu bilangan prima.

Bukti

Misalkan $n \in Z^+$, $n > 1$

Akan ditunjukkan n habis dibagi suatu bilangan prima

Jika $n \in$ bilangan prima, maka $n \mid n$

(berarti teorema terbukti)

Jika $n \in$ bilangan komposit, maka n mempunyai faktor bilangan positif selain dari 1 dan n sendiri

Misalkan d_1, dimana $d_1 \mid n$

Sehingga ada $n_1 \in Z^+$ sehingga $n = n_1.d_1$, $1 < n_1 < n$

Jika $n_1 \in$ bilangan prima, maka $n_1 \mid n$

(berarti teorema terbukti)

Jika $n_1 \in$ bilangan komposit, maka n_1 mempunyai faktor bulat positif selain 1 dan n_1

Misalkan d_2 yaitu $d_2 \mid n_1$

Sehingga ada $n_2 \in Z^+$ sehingga $n_1 = n_2..d_2$, $1 < n_2 < n_1$

Jika $n_2 \in$ bilangan prima maka $n_2 \mid n_1$

(berarti teorema terbukti)

Jika $n_2 \in$ bilangan komposit, maka n_2 mempunyai faktor bulat positif selain

1 dan n_2

Misalkan d_3, dimana $d_3 \mid n_2$

Sehingga ada $n_3 \in Z^+$ sehingga $n_2 = d_3.n_3$, $1 < n_3 < n_2$

Jika $n_3 \in$ bilangan prima, maka $n_3 \mid n_2$, $n_2 \mid n_1$, $n_1 \mid n$, artinya $n_3 \mid n$

(berarti teorema terbukti)

Jika $n_3 \in$ bilangan komposit maka n_3 mempunyai faktor bulat positif selain 1dan n_3 maka proses ini dapat dilanjutkan, sehingga diperoleh suatu barisan $n,n_1,n_2,n_3,...$dengan $n > n_1 > n_2 >....$

Misalkan pemfaktoran tersebut berakhir pada faktor prima n_k, maka $n_k \mid n_{k-1}, n_{k-1} \mid n_{k-2},..., n_1 \mid n$ sehingga $n_k \mid n$ (terbukti)

Teorema 2.2.4 (Arnawa, 2010)

Setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 adalah suatu bilangan prima atau bilangan itu dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan-bilangan prima

Bukti

Misalkan $n \in Z^+$, $n > 1$, $p \in$ bilangan prima

Akan ditunjukkan $n = p_1.p_2.p_3,..,pk$

Menurut teorema 4.1 ada $p_1 \in$ bilangan prima, ada $p_1 \mid n$ sehingga ada $n_1 \in Z^+$ sehingga ada $n = p_1.n_1$ dengan $1 \leq n_1 < n$

Jadi jika $n_1 = 1$ maka $n = p_1$ dengan n suatu bilangan prima

Jika $n_1 > 1$ maka menurut teorema 4.1 ada $p_2 \in$ bilangan prima sehingga $p_2 \mid n_1$

Sehingga ada $n_2 \in Z^+$, ada $n_1 = p_2.n_2$ dengan $1 \leq n_2 < n_1$

Jadi jika $n_2 = 1$ maka $n_1 = p_2$ dengan $n = p_1.p_2$

(teorema terbukti)

Tapi jika $n_2 > 1$ maka menurut teorema 4.1 ada $p_3 \in$ bilangan prima, ada $p_3 \mid n_2$

Sehingga $n_3 \in Z^+$, ada $n_2 = p_3.n_3$ dengan $1 \leq n_3 < n_2$

Jika $n_3 = 1$, maka $n_2 = p_3$ sehingga $n = p_1.p_2.p_3$

Jika $n_3 > 1$ maka proses dapat dilanjutkan sampai akhirnya akan diperole $n = p_1.p_2$ $P_3 \ldots p_k$, yaitu bilangan bulat positif $n > 1$, dan dapat dinyakan sebagai perkalian Bilangan prima.

Definisi 2.2.5 (Budhi, 2003)

Bilangan bulat *m* disebut bilangan komposit jika mempunyai sedikitnya satu pembagi yang berbeda dengan *1* dan *p*.

Contoh 4

Misal $m = 6$, 6 dikatakan bilangan komposit karena 6 = 3 . 2

Begitu juga kalau dimisalkan $m = 8$, 8 juga dikatakan bilangan komposit karena 8 = 2 . 4 dan 8 = 4 . 2

Sifat 2.2.6 (Budhi, 2003)

Suatu bilangan positif *N* habis dibagi

a. *2* jika dan hanya jika angka terakhirnya genap.

b. 4 jika dan hanya jika bilangan dengan dua angka terakhir habis dibagi *4*.

c. 3 jika dan hanya jika jumlah dari semua angka habis dibagi *3*.

d. *5* jika dan hanya jika angka terakhir *0* dan *5*.

Bukti

a. Bilangan $N = a_n a_{n-1} \ldots a_0$ mempunyai arti

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$= 10\ (a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \ldots a_1) + a_0$$

Suku pertama habis dibagi *2* karena mempunyai faktor *10*. Bilangan *N* habis dibagi *2* jika dan hanya jika a_0 habis dibagi *2*.

b. bilangan $N = a_n a_{n-1} \ldots a_0$ mempunyai arti

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

$$N = 100\ (\ a_n 10^{n-2} + a_{n-1} + a_{n-1} 10^{n-3} + \ldots + a_2\ ) + a_1 10 + a_2$$

Dua angka terakhir yaitu $a_1 10$ dan a_2 habis dibagi 4

c. Dengan cara yang sama diperoleh

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$N = a_n\ (\ 10^n - 1\ ) + a_{n-1} 10^{n-1} - 1\ ) + \ldots + a_1\ (\ 10 - 1\ )$$

Karena $10^k - 1$ selalu habis dibagi 3 untuk setiap k, maka keterbagian N bergantung pada suku kedua.

d. Dengan sedikit perubahan seperlunya, diperoleh

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$= 10\ (\ a_n 10^{n-1} + a_{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \ldots a_1\ ) + a_0$$

Suku pertama kelipatan 5, maka keterbagian N bergantung pada a_0

Teorema 2.2.7 (Budhi, 2003)

1. Jika $a \mid b$ maka $a \mid bx$ untuk setiap $x \in Z$
2. Jika $a \mid b$ dan $a \mid c$ maka $a \mid b + c$

Bukti

1.Jika $a \mid b$ maka $a \mid b$ maka $a \mid bx$ untuk setiap $x \in Z$

Ambil $a, b \in Z$ dengan $a \mid b$

Akan ditunjukan $a \mid bx$ untuk setiap $x \in Z$

Karena $a \mid b$ maka $a \mid b$ maka $a \neq 0$ dan ada $n_1 \in Z$ sehingga $b = n_1 a$

Karena $b = n_1 a$, maka

$$Bx = (n_1 a)x = \underbrace{(n_1 x)a}\in Z\,,\ n_2 a$$

Karena $a \neq 0$ dan ada $n_2 \in Z$ sehingga $bx = n_2a$ maka $a \mid bx$

2. Jika $a \mid b$ dan ada $a \mid c$ maka $a \mid b + c$.

Ambil $a, b, c \in Z$ dengan $a \mid b$ dan $a \mid c$.

Akan ditunjukan $a \mid b + c$.

Karena $a \mid c$ maka $a \neq 0$ dan ada $n_2 \in Z$ sehingga $c = n_2a$

Perhatikan bahwa : $b + c = n_1a + n_2a = \underbrace{(n_1 + n_2)}a$, $(n_1 + n_2)\, a \in Z$

dimana, $n_3 a = (n_1 + n_2)$, $n \in Z$

Karena $a \neq 0$ dan ada $n_3 \in Z$ asehingg $b + c = n_3\, a$ maka $a \mid b + c$

2.3 Pembagi Bersama Terbesar (PBT) dan Algoritma Pembagian

Definisi 2.3.1 (Frakleigh, 1994)

Bilangan bulat positif adalah Pembagi bersama Terbesar (PBT) dari $a, b \in Z$, $a,b \neq 0$ bila dipenuhi

1. $k \mid a$ dan $k \mid b$
2. Jika c bilangan bulat, sehingga $c \mid a$ dan $c \mid b$ maka $c \mid k$

Contoh 5

1. PBT (12 dan 6) = 3, sebab faktor dari dari 12 = 1, 2, 3, 4, 6, 12.dan faktor dari 6 = 1, 2, 3, 6 dan faktor 6 dan 12 diatas, diperoleh bahwa 3adalah faktor persekutuan terbesar dari 12 dan 6
2. PBT (2,13) = 1, sebab faktor dari 2 =1,2 dan faktor dari 13 =1,13 dari faktor 2 dan 13 diatas, diperoleh bahwa 1 adalah faktor persekutuan terbesar dari 2 dan13

Teorema 2.3.2 (Budhi, 2003)

Misalkan a, b adalah bilangan bulat dengan $b > 0$, maka terdapat bilangan bulat q dan r yang tunggal, sehingga : $a = qb + r$; $0\, r < b$.

Dalam hal ini q dan r masing- masing disebut sebagai hasil bagi dan sisa pembagian a dan b.

Bukti

Untuk bilangan bulat a , b, perhatikan himpunan

$A = \{ x = a{-}yb \mid x \geq 0,\ y \in B \}$. Akan dibuktikan: $A \neq \{\ \ \}$

Karena b bulat positif maka $b \geq 1$, dan $|a|\ b \geq |a|$, atau $-b\ |a| < a < b\ |a|$

jadi $0 < a \mid a \mid b$

Dengan mengambil $y = -\ |a|$, maka $x = a - yb \in A$.

Berdasarkan sifat terurut rapi, maka A mempunyai unsur terkecil. Misalkan s unsur terkecil himpunan A. Berdasarkan sifat himpunan A, maka ada bilangan bulat q sehingga $s = a - qb$.

jika dapat membuktikan bahwa $s < b$, maka berarti telah membuktikan hal yang diminta. Andaikan bahwa $s \geq b$, maka

$$a - (q + 1)\, b = a - qb - b$$

$$= s - b \geq 0$$

Jadi $a - (q + 1)\, b = s - b \in A$.

Karena s $- b < s$, maka hal ini berlawanan dengan asumsi bahwa s merupakan unsur terkecil dari A. Dengan demikian pengadaian bahwa $s \geq b$ tidak benar. Yang benar adalah $s < b$. Bilangan q disebut hasil bagi a oleh b dan s disebut sisa pembagian a oleh bilangan b.

Contoh 6

1. Misalkan nilai $a = 12$ dan $b = 4$

   Menurut teorema 2.3.2 nilai a $= qb + r$, $0 \leq r < b$

   Sehingga didapat bahwa $12 = 4.3 + 0$, dengan nilai $q = 4$ dan $r = 0$

2. Misalkan nilai $a = 0$ dan $b = 2$

   Menurut teorema 2.3.2 nilai $a = qb + r$, $0 \leq r < b$

   Sehingga didapat bahwa $0 = 0.2 + 0$, dengan nilai $q = 4$ dan $r = 0$

Definisi 2.3.3 (Arifin, 2000)

Jika $a, b \in Z$ dengan a dan b tidak keduanya nol, maka a dan b relatif prima.

Contoh 7

Misalkan nilai a = 8, b = 9, maka PBT (8,9) = 1, karena faktor persekutuan terbesar dari 8 dan 9 adalah 1

Teorema 2.3.4 (Herstein, 1997)

Jika a dan b relatif prima dan $a \mid bc$, maka $a \mid c$.

Bukti

Karena a dan b relatif prima, maka ada $m,n \in Z$ sehingga ditulis $am + bn = 1$....(1)

kemudian (2) dikalikan dengan c sehingga $amc + bnc = c \Leftrightarrow (ac)m + (bc)n = c$

Cara 1 : Jika $a \mid bc$ berarti $a \mid ((ac)m + (bc)n)$, karena $(ac)m + (bc)n = c$ maka $a \mid c$

Cara 2 : Kemudian $a \mid acm$ dan diasumsikan $a \mid bcn$ sehingga $a \mid acm + bcn$, dimana $acm + bcn = c$ sedemikian sehingga $a \mid c$.

Teorema 2.3.5 (Budhi, 2003)

Untuk setiap bilangan – bilangan bulat a, b dan c berlaku :

1. $a \mid 0$, $1 \mid a$, $a \mid a$

Bukti

- Ambil $a \in Z$ dengan $a \neq 0$. Akan ditunjukan $a \mid 0$

  Karena $0 = a.\ 0$ maka $a \mid 0$

- Ambil $a \in Z$. Akan ditunjukan $1 \mid a$

  Karena $a = 1\ .a$ maka $1 \mid a$

- Ambil $a \in Z$, $a \neq 0$. Akan ditunjukan $a \mid a$

  Karena $a = a \cdot 1$ maka $a \mid a$

2. $a \mid 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$

Bukti ($\rightarrow$)

Misalkan $a \in Z$ dan $a \mid 1$, Akan ditunjukkant. $a = \pm 1$

Karena $a \mid 1$ maka $a \neq 0$ dan $1 = ac$ untuk suatu $c \in Z$

Karena $1 = ac$ maka $1^2 = (ac)^2 = a^2 c^2$ atau $1 = a^2c^2$

Karena a , $c \in Z$ maka $a^2 = 1$, akibatnya $a = \pm \sqrt{1} = \pm 1$

Bukti ($\leftarrow$)

$a = \pm 1$. Akan ditunjukkant $a \mid 1$

Karena $1 \mid 1$ dan $-1 \mid 1$ maka $a \mid 1$

3. Jika $a \mid b$ dan $c \mid d$ maka $ac \mid bd$

Bukti

Ambil $a,b,c \in Z$ dengan $a \mid b$ dan $c \mid d$

Akan ditunjukkan $ac \mid bd$.

Karena $a \mid b$ maka $a \neq 0$ dan ada $n_1 \in Z$, sehingga $b = n_1a$

Karena $c \mid d$ maka $c \neq 0$ dan ada $n_2 \in Z$, sehingga $d = n_2c$

Karena $a \neq 0$, $c \neq 0$ maka $ac \neq 0$

Karena $ac \neq 0$ dan ada suatu $n_3 \in Z$

Sehingga $bd = n_3\, ac$ maka $ac \mid bd$

4. Jika $a \mid b$ dan $a \mid c$ maka $a \mid (bx + cy)$ untuk $x,y \in Z$

Bukti

Ambil $a,b,c \in Z$ dengan $a \mid b$ dan $a \mid c$

Akan ditunjukkan $a \mid (bx + cy)$ untuk sebarang $x,y \in z$

Karena $a \mid b$, maka $a \mid bx$ untuk setiap $x \in Z$

Karena $a \mid c$, maka $a \mid cy$ untuk setiap $y \in Z$

Karena $a \mid bx$ dan $a \mid cy$, maka $a \mid bx + cy$ untuk setiap $x,y \in Z$

Teorema 2.3.6 (Budhi, 2003)

Misalkan $a,b \in Z$ dengan $a,b \neq 0$ dan PBT $(a,b) = d$, maka ada $x,y \in Z$ sehingga

$d = ax + by$

Bukti

Ambil $a, b \in Z$ dengan a dan b tidak keduanya nol dan PBT $(a, b) = d$

Akan ditunjukkan ada $x,y \in Z$. Sehingga $d = ax + by$

Tulis S = $\{ au + bv \mid au + bv > 0,\ u,v \in Z \}$ $a \neq 0,\ b = 0$

Kasus 1 : $a \neq 0,\ b = 0$

Karena $a \neq 0$ maka $|a| > 0$

Sub Kasus 1.1 $a > 0$

Perhatikan bahwa $|a| = a = 1.a + 0.b > 0$

Ini berarti $|a| \in S$

Sub kasus 1.2 $a < 0$

Perhatikan bahwa $|a| = -1 .a + 0.b > 0$ Ini berarti $|a| \in S$

Kasus 2: $a = 0,\ b \neq 0$

Sub Kasus 2.1 $b > 0$

Perhatikan bahwa $|b| = 0.a + 1.b > 0$

Ini berari $|b| \in S$

Sub Kasus 2.2 $b < 0$

Perhatikan bahwa $|b| = -b = 0.a + (-1).b > 0$

Ini berarti $|b| \in S$

Kasus 3 : $a \neq 0,\ b \neq 0$

Sub Kasus 3.1 $a > 0$ *dan* $b > 0$

Perhatikan bahwa $|a| + |b| = a + b = 1.a + 1.b > 0$

Ini berarti $|a| + |b| \in S$

Sub Kasus 3.2 $a < 0$ *dan* $b < 0$

Perhatikan bahwa $|a| + |b| = a .(-1) + b. (-1) > 0$

Ini berarti $|a| + |b| \in S$

Sub Kasus 3.3 $a > 0$ *dan* $b < 0$

Perhatikan bahwa $|a| + |b| = a + (-b) = a.1 + b.1 < 0$

Ini berarti $|a| + |b| \in S$

Sub Kasus 3.4 $a < 0$ *dan* $b > 0$

Perhatikan bahwa $|a| + |b| = (-a) + b = a.(-1) + b.\ 1 > 0$

Ini berarti $|a| + |b| \in S$

Diketahui bahwa $S = \{ au + bv \mid au + bv > 0,\ u,v \in Z \} \neq \emptyset$

Karena unsur – unsur di S adalah bilangan – bilangan bulat positif, maka menurut sifat terurut dengan baik, S mempunyai unsur terkecil. misalkan unsur terkecil tersebut adalah d karena $d \in S$, maka d dapat ditulis sebagai $d = ax + by$ untuk suatu $x,y \in Z$. selanjutnya bagi a dengan d, diperoleh

$$a = qd + r\ ;\ 0 \leq r < d \quad \text{...} (1)$$

Andaikan $r > 0$

Dari (1) diperoleh $r = a - qd = a - q\ (ax + by) = a\underbrace{(1 - qx)}_{} \in Z + b\underbrace{(-qy)}_{} \in Z$

Ini berarti $r \in S$

Karena $r \in S$ dan $r < d$ maka d bukan unsur terkecil di s

Ini kontradiksi dengan pemisalan bahwa d adalah unsur terkecil di S

Jadi haruslah $r = 0$, atau $d \mid a$

Teorema 2.3.7 (Budhi, 2003)

Misalkan $a, b \in Z$ dengan $a, b \neq 0$, a dan b relatif prima jika dan hanya jika ada Bilangan bulat x, y sehingga $ax + by = 1$.

Bukti ($\rightarrow$)

Misalkan $a, b \in Z$ dengan $a, b \neq 0$, a dan b relatif prima. Karena a, b relatif prima maka PBT $(a, b) = 1$ karena 1 merupakan dari a dan b maka dapat ditulis sehingga $1 = ax + by$ untuk suatu $x, y \in Z$

Bukti ($\leftarrow$)

Misalkan $a, b \in Z$ dengan $a, b \neq 0$, dan ada bilangan bulat x, y sehingga $1 = ax + by$

Akan ditunjukkan a dan b relatif prima. yaitu PBT $(a, b) = 1$

Misalkan PBT $(a, b) = d$ akan ditunjukkan $d = 1$

Karena d = PBT (a, b) maka $d \mid a$ dan $d \mid b$

Karena $d \mid a$ dan $d \mid b$ maka $d \mid ax + by$ atau $d \mid 1$

Karena $d \mid 1$ dan $d \geq 1$ maka $d = 1$

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dikemukakan definisi dan teori dasar kekongruenan yang digunakan untuk menyelesaikan masalah teori bilangan. Bab ini terbagi ke dalam dua bagian yaitu pertama berisi tentang definisi dan teori dasar kekongruenan dan bagian kedua berisi tentang penggunaan teori dasar kekongruenan terhadap sifat-sifat pada modulo 9.

3.1 Definisi dan Teori Dasar Kekongruenan

Definisi 3.1.1 (Sukirman, 2006)

Misalkan a,b dan m bilangan bulat dengan $m > 0$. Bilangan a disebut kongruen dengan b modulo m jika $m \mid (a-b)$ dan ditulis $a \equiv b \pmod{m}$

Lemma 3.1.2 (Budhi, 2003)

Kongruen modulo m adalah relasi equivalen, ini berarti

1. $a \equiv a \pmod{m}$ (refleksif)
2. jika $a \equiv b \pmod{m}$ maka $b \equiv a \pmod{m}$ (simetri)
3. jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $b \equiv c \pmod{m}$ maka $a \equiv c \pmod{m}$ (transitif)

Bukti

1. $a \equiv a \pmod{m}$

   $a \equiv a \pmod{m}$, berarti $a - a = km$, k bilangan bulat

   $$a - a = 0 \text{ maka } m \mid a - a$$

2. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ maka $b \equiv a \pmod{m}$ (simetri)

   $a \equiv b \ (mod\ m)$, berarti $a - b = km$, k bilangan bulat

   $$a\ (a- b) = - km$$

   $$b - a = (-k)m, \ -k \text{ bilangan bulat } b \equiv a \pmod{m}$$

3. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $b \equiv c \pmod{m}$ maka $a \equiv c \pmod{m}$ (transitif)

$a \equiv b \pmod{m}$, berarti $a - b = k_1 m$

$b \equiv c \pmod{m}$, berarti $b - c = k_2 m$

$a - c = (a - c) + (b - c) = k_1 m + k_2 m = (k_1 + k_2)m$, k_1, k_2 bilangan bulat

$a \equiv c \pmod{m}$

Lemma 3.1.3 (Budhi, 2003)

Jika $a \equiv b \pmod{m}$ maka untuk setiap bilangan bulat p berlaku

(i). $a+p \equiv b+p \pmod{m}$

(ii). $ap \equiv bp \pmod{m}$

Bukti

$a \equiv b \pmod{m}$, berarti $a - b = km$

(i). $a + p \equiv b + p \pmod{m}$, berarti $(a + p) - (b + p) = a + p - b - p = a - b = km$

Ini berarti m membagi $(a+p) - (b+p)$ atau $a + p \equiv b + p \pmod{m}$

(ii). $ap \equiv bp \pmod{m}$, berarti $ap - bp = p(a - b) = pkm$

Maka $ap - bp$ habis dibagi m atau $ap \equiv bp \pmod{m}$

Lemma 3.1.4 (Budhi, 2003)

Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$, maka

(i). $a + c \equiv b + d \pmod{m}$

(ii). $ac \equiv bd \pmod{m}$

Bukti

$a \equiv b \pmod{m}$, berarti $a - b = k_1 m$

$c \equiv d \pmod{m}$, berarti $c - d = k_2 m$

(i). $a + c \equiv b + d \pmod{m}$, berarti $(a + c) - (b + d) = k_1 m + k_2 m$

$= (k_1 + k_2)m$

$= k_3m$, k_3 bilangan bulat Ini berarti $(a + c) - (b + d)$ habis dibagi oleh m atau $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.

(ii). $a - b = k_1m$, $a = b + k_1m$

$c - d = k_2m$, $c = d + k_2m$

$ac \equiv bd \pmod{m}$

$ac = (b + k_1m) . (d + k_2m) = bd + bk_2m + dk_1m + k_1.k_2.m_2$

$= bd + (bk_2 + dk_1 + k_1.k_2.m),m$

Ini berarti $ac - bd$ habis dibagi oleh m, atau $ac \equiv bd \pmod{m}$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa setiap bilangan bulat kongruen modulo 9 dengan jumlah angka-angkanya.

Contoh 8

$8.234 \equiv 8000 + 200 + 30 + 4 \pmod{9}$

$\equiv 8.(1000) + 2(100) + 3(10) + 4 \pmod{9}$

$\equiv 8(1) + 2(1) + 3(1) + 4 \pmod{9}$

$8.234 \equiv 17 \pmod{9}$

$\equiv 1 \pmod{9} + 7 \pmod{9}$

$\equiv (1 + 7) \pmod{9}$

Selanjutnya dengan cara yang sama

$17 \equiv 10 + 7 \pmod{9}$

$\equiv 17 \pmod{9}$

$\equiv 1 \pmod{9} + 7 \pmod{9}$

$\equiv (1+ 7) \pmod{9}$

$\equiv 8 \pmod{9}$

Jadi $8.234 \equiv 8 \pmod{9}$

Teorema 3.1.5 (Arnawa, 2010)

$10^n \equiv 1$ (mod 9) untuk n = $0, 1, 2,...$

Bukti

Untuk $n = 0$ perhatikan bahwa

$1 \equiv 1$ (mod 9)

$10^0 \equiv 1$

Ini berarti $10^n \equiv 1$ (mod 9) benar untuk $n=0$..(i)

Perhatikan bahwa untuk $n = 1, 2, 3,...$

$10^n - 1 = 999999........9$ (n angka 9) terbagi oleh 9 maka $9 \mid 10^n - 1$ atau

$10^n \equiv 1$ (mod 9) untuk $n = 1, 2,3,$...(ii)

Dari (i) dan (ii) terbukti bahwa $10^n \equiv 1$ (mod 9) untuk $n = 0, 1, 2, 3,....$

Teorema 3.1.6 (Arnawa, 2010)

Setiap bilangan bulat positif kongruen modulo 9 dengan jumlah angka-angkanya

(Suatu bilangan habis dibagi 9 jika jumlah angka-angkanya habis dibagi 9)

Bukti

$n \in \mathbf{Z}^+$ kongruen modulo 9 dengan jumlah angka-angkanya.

n berturut – turut adalah $n = d_k\text{-}d_{k-1}.d_{k-2}....d_2.d_1.d_0$ atau

$n = d_k \,.\, 10^k + d_{k-1}.10^{k-1} + d_{k-2} \,.\, 10^{k-2} + ... + d_2 \,.\, 10^2 + d_1 \,.\, 10^1 + d_0 \,.\, 10^0$

dengan $0 \leq$di ≤ 9, untuk $i = 0, 1, 2, 3,...k$ atau $dk \neq 0$

menurut teorema 3.1.5 $10^n \equiv 1$ (mod 9) untuk $n = 0, 1, 2, 3,...$

karena $10^k \equiv 1$ (mod 9) maka $d_k \,.\, 10^k$ (mod 9)

karena $10^{k-1} \equiv 1$ (mod 9) maka $d_{k-1}.\ 10^{k-1} = d_{k-1}$ (mod 9)

karena $10^0 \equiv 1$ (mod 9) maka $d_0 \,.\, 10^0 \equiv d_0$ (mod 9)

sehingga menurut teorema 2.2.3 Arnawa)

$d_k.10^k + d_{k-1}.10^{k-1} + d_{k-2} . 10^{k-2} +...+ d_2. 10^2 +d_1. 10^1 + d_0.10^0 \equiv d_k + d_{k-1} +d_{k-2}$

$+....+d_2 +d_1 + d_0$

Ini berarti bilangan bulat n kongruen modulo 9 dengan jumlah angka-angkanya.

Contoh 9

Periksalah kebenaran penjumlahan berikut

248 + 324 + 672 = 1244

Jawab

$248 \equiv 2 + 4 + 8 \pmod 9$

$\equiv 14 \pmod 9$

$\equiv 1 \pmod 9 + 4 \pmod 9$

$\equiv (1+4) \pmod 9$

$\equiv 5 \pmod 9$

$324 \equiv 3 + 2 + 4 \pmod 9$

$\equiv 9 \pmod 9$

$\equiv 0 \pmod 9$

$672 \equiv 6 + 7 + 2 \pmod 9$

$\equiv 15 \pmod 9$

$\equiv (1 + 5) \pmod 9$

$\equiv 6 \pmod 9$

Jadi $248 + 324 + 672 \equiv 5 + 0 + 6 \pmod 9$

$\equiv 11 \pmod 9$

$\equiv 1 \pmod 9 + 1 \pmod 9$

$\equiv (1 + 1) \pmod 9$

$\equiv 2 \pmod 9$..(1)

Sedangkan 1244 $\equiv$ 1+ 2 + 4 + 4 (mod 9)

$\equiv$ 11 (mod 9)

$\equiv$ 1(mod 9) + 1 (mod 9)

$\equiv$ 2 (mod 9) ....(2)

Dari kekongruenan (1) dan (2) berarti : 248 + 324 + 672 = 1244 (benar)

Contoh 10

Benarkah 84 x 428 = 35.952

Jawab

84 $\equiv$ 8 + 4 (mod 9)

$\equiv$12 (mod 9)

$\equiv$ 1 (mod 9) + 2 (mod 9)

$\equiv$ (1 + 2) (mod 9)

$\equiv$ 3 (mod 9)

428 $\equiv$ 4 + 2 + 8 (mod 9)

$\equiv$ 14 (mod 9)

$\equiv$ 1(mod 9) + 4(mod 9)

$\equiv$(1 + 4) (mod 9)

$\equiv$ 5 (mod 9)

Maka 84 x 428 $\equiv$ 3 x 5 (mod 9)

$\equiv$ 15 (mod 9)

$\equiv$ 1(mod 9) + 5(mod 9)

$\equiv$(1 + 5)

$\equiv$ 6 (mod 9) ....(1)

Sedangkan 35.952 $\equiv$ 3 + 5 + 9 + 5 + 2 (mod 9)

$\equiv 24 \pmod 9$

$\equiv 2 \pmod 9 + 4 \pmod 9$

$\equiv (2 + 4) \pmod 9$

$\equiv 6$ (mod 9) 9)..(2)

Dari (1) dan (2) disimpulkan bahwa 84 x 428 = 35.952 (benar)

BAB IV

KESIMPULAN

4.1. KESIMPULAN

Dari pembahasan, dapat disimpulkan bahwa teori kekongruen pada modulo 9 dapat digunakan untuk memeriksa kebenaran, penjumlahan, dan perkalian pada bilangan bulat, dan ciri bilangan bulat yang habis dibagi 9.

DAFTAR PUSTAKA

Arifin, A 2003. *Aljabar*. ITB Bandung

Budhi, S. Wono. 2003. *Langkah Awal Menuju olimpiade* : Ricardo. Jakarta

Frakleigh, J.B. 1994. *A first Course in Abstract Algebra* : Addison, New York

Herstein, I.N. 1997. *Topics in Algebra.*

M.Burton, Davit. 1980. *Elementary Number Theory : Allyn and Bacon* Inc.Boston. London

Varberg, Purcel, Rigdon. 2004. *Kalkulus Jilid I* : *Erlangga.Jakarta.*

Sukirman, 2005. *Teori Bilangan* : Hanggar Kreator.Yokyakarta

Arnawa,I Made, 2010. *Teori Bilangan.* Universitas Negeri Padang.