REALISASI POSITIF UNTUK SISTEM DESKRIPTOR LINIER INVARIANT WAKTU

TESIS

NOVRIANTI
1121222004

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2013

Realisasi Positif untuk Sistem Deskriptor Linier *Invariant* Waktu

Oleh : Novrianti

(Di bawah bimbingan Dr. Muhafzan dan Dr. Admi Nazra)

RINGKASAN

Diberikan sistem kontrol linier berikut

$$\begin{aligned} E\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t), \end{aligned}$$

dimana $\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$. Dalam sistem di atas, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ menyatakan vektor keadaaan, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ menyatakan vektor *input* (kontrol), $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ menyatakan vektor *output*, $A,\ E \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, dan $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$.

Fungsi transfer dari sistem kontrol tersebut adalah $T(s) = C(sE - A)^{-1}B$. Fungsi transfer $T(s)$ dapat didekomposisikan menjadi $T(s) = G(s) + F(s) = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 + C_2(sN - I)^{-1}B_2$, dimana $G(s)$ merupakan bagian *strictly proper* dan $F(s)$ merupakan bagian polinomial. Realisasi dari $G(s)$ adalah $A_1,\ B_1,\ C_1$ dan realisasi dari $F(s)$ adalah $N,\ B_2,\ C_2$, dimana $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1\times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{p\times n_1}$, $N \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2\times m}$ dan $C_2 \in \mathbb{R}^{p\times n_2}$.

Sistem di atas dikatakan positif (internal) jika untuk setiap $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n_+$ dan untuk $\mathbf{u}^{(k)}(t) \in \mathbb{R}^m_+$, $t \geq 0$, $k = 0, 1, ..., q$, maka $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n_+$, dan $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p_+$. Tesis ini mengkaji tentang kriteria realisasi positif dari suatu fungsi transfer untuk sistem

deskriptor linier *invariant* waktu.

Jika diberikan fungsi transfer $T(s)$, maka realisasi positifnya adalah

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & N \end{bmatrix}, \mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_1 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & I_{n_2} \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \mathcal{C} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix},$$

jika dan hanya jika $C_2 \in \mathbb{R}_+^{p\times n_2}$, dimana $A_1 \in \mathcal{M}^{n_1\times n_1}$, $B_1 \in \mathbb{R}_+^{n_1\times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}_+^{p\times n_1}$, $N \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2\times m}$.

REALISASI POSITIF UNTUK SISTEM DESKRIPTOR LINIER *INVARIANT* WAKTU

OLEH

NOVRIANTI

11 212 22 004

TESIS

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister
pada Program Studi Magister Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Andalas

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

PADANG

2013

Judul Penelitian	**: Realisasi Positif untuk Sistem Deskriptor Linier *Invariant* Waktu**
Nama Mahasiswa	**: Novrianti**
Nomor Buku Pokok	**: 1121222004**
Program Studi	**: Matematika**

Tesis ini telah diuji dan dipertahankan di depan sidang panitia ujian akhir Magister Matematika pada Program Pascasarjana Universitas Andalas dan dinyatakan lulus pada tanggal 02 Agustus 2013.

Menyetujui,

1. Komisi Pembimbing

Dr. Muhafzan **Ketua**	**Dr. Admi Nazra** **Anggota**

2. Koord. Pendidikan Pascasarjana Jurusan Matematika	**3. Dekan FMIPA Universitas Andalas**
Dr. Muhafzan **NIP.196706021993021001**	**Prof.Dr.Eng.Edison Munaf** **NIP.195807221983031002**

Bismillaahir rahmaanir rahiiM

Allah SWT akan meninggikan orang-orang yang beriman diantaramu
dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat,
dan Allah SWT maha mengetahui apa yang kamu kerjakan
As. Mujaadilah ayat:11

Hidup tanpa perjuangan adalah kematian
Mati dalam perjuangan adalah kehidupan
"Alm. Buya Hamka"

Sesungguhnya bagiku ilmu jauh lebih baik daripada harta, karena
Ilmu membuat kita selalu disegani, harta selalu membuat kita dicurigai
Ilmu bila ditimba akan semakin dalam, harta bila bila ditimba semakin kering
Ilmu melindungi pemiliknya, harta membahayakan pemiliknya
Ilmu menentramkan pewarisnya, harta memecah belah pewarisnya
Satu ilmu dihargai dimana saja, satu harta dihargai kaum yang mengenalnya saja.
"Saydina Umar bin Khafan"

Segala puji dan syukur kehadirat Allah SWT atas segala nikhmat hidup
yang tak terhingga hamba rasakan di setiap hela nafas.
Shalawat dan salam untuk baginda Nabi besar Muhammad saw,
para keluarga serta para sahabatnya.

Terima kasih ananda haturkan kepada kedua orangtuaku Mama dan Papa(Alm), yang telah memberikan dukungan penuh kepada ananda. Semua tangis dalam do'a, harapan dalam setiap kata, motivasi dikala duka, dsb. *Mom and Dad, You're everything in my life.* Senyummu bahagiaku...

Abang, Kak novi, Kak Ipeb, Aci. Terimakasih atas segala sesuatu yang telah diberikan. Bantuan materil dan morilnya yang tampak maupun tak tampak. Makasih ya... Luv U all... Mari bersama kita bahagiakan orangtua kita...

Six years are too long to prove our best, but too short to end our friendship. I hope we can realize our ambicious to get the highest education abroad, Aamiin. Beside U make me confused who I am, but make me believe that I can do the best in future. You can change ur act in the sort time, and insya Allah none can change ur position in my heart, uhibbukifiilah. *U must remember that in front of us, life will be harder than before. Always hold Allah, and keep him in ur heart. We don't know how much time anymore which can we use together. We must take care ourselves well. nobody responsible on it. Best for us... Aamiin.*(i)

Kak sari, ni reno, kak ayu, kak siskha, echa, meri, novi, andra, dll. Terimakasih telah menjadi bagian dalam suka duka ian diperantauan. Semoga dilain waktu dan kesempatan kita bisa bertemu kembali dalam kesuksesan yang kita miliki. Aamiin.

Untuk semua orang yang pernah hadir dalam hidupku, terimakasih atas segalanya. Tak mungkin kita berjumpa hanya karena kebetulan, semua sudah diatur Allah. Sedikit banyak salah, mohon dimaafkan.

Thanks for all your love n support
I love all of you...

Novrianti
(Padang, 04 Agustus 2013)

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Dengan ini menyatakan bahwa tesis yang saya tulis dengan judul "**Realisasi Positif untuk Sistem Deskriptor Linier Invariant Waktu**" adalah hasil kerja/karya saya sendiri dan bukan merupakan jiplakan dari hasil kerja/karya orang lain, kecuali kutipan yang sumbernya dicantumkan. Jika dikemudian hari pernyataan ini tidak benar, maka status kelulusan dan gelar yang saya peroleh menjadi batal dengan sendirinya.

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Novrianti dilahirkan di Kota Jambi pada tanggal 27 November 1989. Penulis merupakan anak ketiga dari tiga bersaudara dari pasangan suami istri Aripin(Alm) dan Nurhayati. Penulis mengikuti pendidikan di TK Raudhatul Athfal Kota Jambi pada tahun 1994-1995, SDN 114/IV Kota Jambi pada tahun 1995-2001, SLTPN 14 Kota Baru Kota Jambi 2001-2004, SMAN 3 Kota Jambi 2004-2007, dan Jurusan Matematika Universitas Andalas pada tahun 2007-2011. Pada tahun 2011, penulis melanjutkan pendidikan sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Program Pascasarjana Universitas Andalas.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah wa syukurillah. Segala puji dan syukur hanyalah milik Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini. Shalawat dan salam semoga selalu tercurah kepada Baginda Rasulullah SAW yang telah menebarkan ilmu dan iman dalam cahaya Islam yang beliau bawa.

Syukur penulis ucapkan kepada Allah SWT, karena dengan ridho-Nya penulis dapat menyelesaikan tesis dengan judul **"Realisasi Positif untuk Sistem Deskriptor Linier *Invariant* Waktu"** yang merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains (M.Si) di Jurusan Matematika Program Pascasarjana Universitas Andalas Padang.

Dalam menyelesaikan tesis ini, penulis banyak menerima bantuan moril maupun materil dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Muhafzan, sebagai ketua komisi pembimbing dan Dr. Admi Nazra sebagai anggota komisi pembimbing yang selalu meluangkan waktu, membimbing serta memberi saran dan masukan kepada penulis dalam menyelesaikan tesis ini.

2. Bapak Dr. Syafrizal, Ibu Dr. Yanita dan Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan selaku penguji yang telah meluangkan waktu serta memberi saran dan masukan kepada penulis dalam penyempurnaan tesis ini.

3. Bapak Dr. Muhafzan selaku koordinator program studi Matematika Program Pascasarjana dan Bapak Dr. Admi Nazra selaku ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas.

4. Bapak dan Ibu dosen beserta staf Pascasarjana Universitas Andalas Padang, terima kasih atas ilmu yang telah diberikan kepada Penulis selama ini.

5. Teristimewa kepada kedua orangtuaku yang tercinta Mama dan Papa(Alm), dan seluruh keluarga besar yang selalu mendukung penulis yang sangat penulis cintai dan sayangi.

6. Seluruh mahasiswa program studi Matematika Pascasarjana Universitas Andalas khususnya teman-temanku angkatan 2011 dan Kak Misbahul usna.

7. Semua pihak yang telah memberikan do'a dan membantu penyelesaian tesis ini.

Penulisan tesis ini tentunya masih jauh dari kesempurnaan dan tidak luput dari berbagai kekurangan karena terbatasnya ilmu dan pengalaman yang penulis miliki, oleh karena itu penulis dengan sepenuh hati mengharapkan saran dan kritik agar kedepannya diperoleh hasil yang lebih baik.

Penulis berharap agar tesis ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkannya. Aamiin.

Padang, Agustus 2013

Novrianti

ABSTRAK

Sistem linier kontinu *invariant* waktu merupakan suatu model yang banyak dijumpai dalam aplikasi, di antaranya dalam model ekonomi, *engineering*, dan analisis numerik. Tulisan ini mengkaji kriteria realisasi positif dari fungsi transfer untuk sistem deskriptor dengan *multi input multi output* (MIMO). Dengan menggunakan aljabar, dibuktikan beberapa teorema agar diperoleh kriteria realisasi positif. Selain itu, diberikan juga beberapa contoh untuk memperkuat keberlakuan teorema.

Kata kunci : *realisasi positif, sistem deskriptor linier invariant waktu, sistem positif, sistem multi input multi output*

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Diberikan sistem kontrol linier berikut

$$\begin{aligned} E\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

dimana $\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$. Dalam sistem (1.1.1), $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ menyatakan vektor keadaaan, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ menyatakan vektor *input* (kontrol), $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ menyatakan vektor *output*, $A,\ E \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, dan $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$. Persamaan pertama dalam (1.1.1) disebut sebagai persamaan keadaan, sedangkan persamaan kedua disebut sebagai persamaan output. Sistem (1.1.1) sering juga disebut sebagai representasi ruang keadaan untuk sistem deskriptor linier kontinu [3]. Sistem (1.1.1) disebut *regular* jika $det(sE - A) \neq 0$ untuk suatu $s \in \mathbb{C}$, sebaliknya dikatakan *non regular*. Sistem (1.1.1) dikatakan positif (internal) jika untuk setiap $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n_+$ dan untuk $\mathbf{u}^{(k)}(t) \in \mathbb{R}^m_+$, $t \geq 0$, $k = 0, 1, ..., q$, maka $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n_+$, dan $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p_+$ [9]. Notasi $\mathbb{R}^{n\times m}$ menyatakan himpunan matriks riil berukuran $n \times m$, dan $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$. Himpunan matriks riil berukuran $n \times m$ dengan entri-entri non negatif, dinotasikan dengan $\mathbb{R}^{n\times m}_+$, dan $\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n\times 1}_+$.

Karakteristik hubungan antara *input* dan *output* dari suatu sistem kontrol biasanya dapat dilihat dari fungsi transfer. Fungsi transfer untuk suatu sistem kontrol linier *invariant* waktu didefinisikan sebagai perbandingan antara transformasi Laplace *output* dengan transformasi Laplace *input* dengan mengasumsikan syarat awal adalah nol [3]. Untuk sistem kontrol linier (1.1.1), jika sistem tersebut regular, maka fungsi transfernya adalah

$$T(s) = C(sE - A)^{-1}B.$$

Hal ini bermakna bahwa jika suatu representasi ruang keadaan dari suatu sistem kontrol linier diberikan, maka tidak sulit menentukan fungsi transfer yang terkait dengannya. Akan tetapi persoalan akan menjadi rumit jika yang terjadi adalah sebaliknya, yaitu jika diberikan suatu fungsi transfer, bagaimanakah bentuk representasi ruang keadaan dari fungsi transfer tersebut. Lebih jelasnya, jika diberikan suatu fungsi transfer $T(s)$, bagaimanakah bentuk matriks E, A, B, dan C sedemikian sehingga $T(s) = C(sE - A)^{-1}B$. Persoalan ini disebut sebagai masalah realisasi [3]. Selain itu untuk suatu fungsi transfer $T(s)$, masalah penentuan matriks E, A, B, dan C sedemikian sehingga $T(s) = C(sE - A)^{-1}B$ dan sistem (1.1.1) adalah positif disebut sebagai masalah realisasi positif.

Salah satu isu utama yang menjadi sorotan para peneliti dalam permasalahan realisasi adalah mengenai realisasi positif, beberapa diantaranya adalah Farina yang mengkaji tentang syarat perlu untuk realisasi positif sistem kontrol linear standar *single input single output* (SISO)[4], dan eksistensi realisasi positif [5], Kitano dan Maeda yang melaporkan tentang realisasi positif dari sistem kontrol linier waktu diskrit [11], Kaczorek yang mengkaji tentang realisasi positif untuk sistem deskriptor linier waktu diskrit [10]. Dalam tesis ini akan dikaji bagaimana kriteria realisasi positif untuk sistem deskriptor linier kontinu *invariant* waktu *multi input multi output* (MIMO).

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang, maka yang menjadi permasalahan dalam penelitian ini adalah bagaimanakah kriteria realisasi positif dari suatu fungsi transfer untuk sistem MIMO.

1.3 Tujuan Penelitian

Penulisan tesis ini bertujuan untuk mendapatkan kriteria realisasi positif dari suatu fungsi transfer untuk sistem MIMO.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat menambah wawasan tentang realisasi positif dari suatu fungsi transfer untuk sistem MIMO bagi penulis khususnya dan pembaca pada umumnya. Diharapkan juga penelitian ini dapat memberikan sumbangan terhadap perkembangan ilmu pengetahuan tentang realisasi positif fungsi transfer dengan *multi input multi output* (MIMO).

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diuraikan beberapa definisi dan teorema yang berkaitan dengan realisasi positif dari suatu fungsi transfer untuk sistem deskriptor kontinu *invariant* waktu.

2.1 Teori Matriks

Matriks merupakan susunan bilangan-bilangan dalam bentuk baris dan kolom yang membentuk jajaran persegi panjang. Bilangan-bilangan dalam jajaran persegi panjang tersebut disebut entri matriks. Ukuran dari suatu matriks didefinisikan sebagai banyaknya baris dikali banyaknya kolom yang terdapat dalam matriks tersebut. Jika banyaknya baris dari suatu matriks A adalah m, dan banyaknya kolom adalah n, maka ukuran dari matriks A ditulis $m \times n$.

Invers dari suatu matriks A berukuran $n \times n$ didefinisikan sebagai matriks B berukuran $n \times n$ sedemikian sehingga $AB = BA = I$ dimana I adalah matriks identitas berukuran $n \times n$. Untuk selanjutnya, invers dari matriks A dinotasikan dengan A^{-1}. Jika tidak ada matriks B yang memenuhi sifat ini, maka A disebut tidak mempunyai invers. Jika invers matriks A ada, maka A disebut matriks nonsingular, sebaliknya disebut matriks singular. Matriks A adalah nonsingular jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.

Suatu matriks bujursangkar A dikatakan matriks Metzler jika $a_{ij} \geq 0,\ \forall\, i \neq j$. Himpunan matriks Metzler berukuran $n \times n$ ditulis $\mathcal{M}^{n \times n}$.

Suatu matriks A berukuran $n \times n$ dikatakan nilpoten dengan indeks q jika $A^q = \mathcal{O}$ dan $A^{q-1} \neq \mathcal{O}$, untuk suatu bilangan asli q, dimana $\mathcal{O}$ adalah matriks yang semua entrinya adalah nol. Bilangan terkecil $q \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $A^q = \mathcal{O}$ disebut sebagai indeks nilpotensi dari A [1,6]. Sebagai contoh, $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ merupakan suatu matriks nilpoten dengan indeks nilpotensi 2, karena $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{O}$.

2.2 Sistem Deskriptor Linier *Invariant* Waktu

Perhatikan kembali sistem deskriptor (1.1.1). Jika matriks E adalah non singular, maka sistem (1.1.1) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \bar{A}\mathbf{x}(t) + \bar{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

dimana $\bar{A} = E^{-1}A$ dan $\bar{B} = E^{-1}B$. Sistem (2.2.1) disebut dengan sistem kontrol linier standar. Solusi untuk sistem (2.2.1) adalah [13]

$$\mathbf{x}(t) = e^{\bar{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\bar{A}(t-\tau)}\bar{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{2.2.2}$$

Definisi 2.2.1. [9] *Sistem* (2.2.1) *dikatakan positif (internal) jika untuk setiap* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}_+^n$ *dan untuk* $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}_+^m$, $t \geq 0$, *maka* $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}_+^n$, *dan* $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}_+^p$.

Dalam [2], dinyatakan bahwa (2.2.1) adalah positif jika dan hanya jika $\bar{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}$, $\bar{B} \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$ dan $C \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$.

Selanjutnya, jika matriks E singular, maka sistem (1.1.1) harus didekomposisikan sedemikian sehingga solusi sistem (1.1.1) dapat dicari. Teorema berikut berguna untuk mendekomposisikan sistem (1.1.1) yang regular.

Teorema 2.2.2. [3] *Sistem deskriptor* (1.1.1) *adalah regular jika dan hanya jika terdapat matriks nonsingular* $Q, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *sedemikian sehingga*

$$QEP = \begin{bmatrix} I_{n_1} & O \\ O & N \end{bmatrix} \text{ dan } QAP = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & I_{n_2} \end{bmatrix} \tag{2.2.3}$$

dimana $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}, N \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}, n_1 + n_2 = n$, *dan matriks* N *adalah nilpoten dengan indeks nilpotensi* q.

Berdasarkan Teorema 2.2.2 dapat dilihat bahwa jika sistem (1.1.1) adalah regular, maka matriks $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dapat didekomposisikan menjadi

$$E = Q^{-1}\begin{bmatrix} I_{n_1} & O \\ O & N \end{bmatrix} P^{-1} \text{ dan } A = Q^{-1}\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & I_{n_2} \end{bmatrix} P^{-1}$$

untuk suatu matriks nonsingular $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Selanjutnya misalkan $\mathbf{x}(t) = P\mathbf{z}(t)$ untuk suatu $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $QB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$, dan $CP = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$. Jelas bahwa $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1\times m}, B_2 \in \mathbb{R}^{n_2\times m}, C_1 \in \mathbb{R}^{p\times n_1}$, dan $C_2 \in \mathbb{R}^{p\times n_2}$. Maka persamaan dalam sistem (1.1.1) dapat ditulis menjadi

$$EP\dot{\mathbf{z}}(t) = AP\mathbf{z}(t) + B\mathbf{u}(t). \tag{2.2.4}$$

Dengan mengalikan kedua ruas (2.2.4) dengan matriks non singular Q dan dengan menggunakan Teorema 2.2.2 diperoleh

$$\begin{aligned} QEP\dot{\mathbf{z}}(t) &= QAP\mathbf{z}(t) + QB\mathbf{u}(t) \\ &= QAP\mathbf{z}(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\mathbf{u}(t), \end{aligned}$$

sehingga persamaan keadaan sistem (1.1.1) dapat ditulis menjadi

$$\begin{bmatrix} I_{n_1} & O \\ O & N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{z}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & I_{n_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t) \\ \mathbf{z}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\mathbf{u}(t), \tag{2.2.5}$$

dimana $\mathbf{z}_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}, \mathbf{z}_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$. Selain itu, persamaan output menjadi

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t) \\ \mathbf{z}_2(t) \end{bmatrix}. \tag{2.2.6}$$

Persamaan (2.2.5) memperlihatkan bahwa persamaan keadaan pada sistem (1.1.1) dapat direduksi menjadi dua subsistem, yaitu

$$\dot{\mathbf{z}}_1(t) = A_1\mathbf{z}_1(t) + B_1\mathbf{u}(t) \tag{2.2.7}$$

$$N\dot{\mathbf{z}}_2(t) = \mathbf{z}_2(t) + B_2\mathbf{u}(t), \tag{2.2.8}$$

dan persamaan (2.2.6) memperlihatkan bahwa persamaan *output* pada sistem (1.1.1) dapat direduksi menjadi dua subsistem pula, yaitu

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(t) &= C_1\mathbf{z}_1(t) && (2.2.9) \\ \mathbf{y}_2(t) &= C_2\mathbf{z}_2(t), && (2.2.10) \end{aligned}$$

$C_1 \in \mathbb{R}^{p\times n_1}$ dan $C_2 \in \mathbb{R}^{p\times n_2}$, dengan $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_1(t)+\mathbf{y}_2(t)$. Penyelesaian persamaan (2.2.7) dan (2.2.8) adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1(t) &= e^{tA_1}\mathbf{z}_1(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)A_1}B_1\mathbf{u}(\tau)d\tau, && (2.2.11) \\ \mathbf{z}_2(t) &= -\sum_{i=0}^{q-1} N^i B_2\mathbf{u}^{(i)}(t). && (2.2.12) \end{aligned}$$

2.3 Fungsi Transfer

Seperti yang telah disajikan dalam Bab I, karakteristik hubungan antara *input* dan *output* dari suatu sistem kontrol dapat diperoleh dari fungsi transfernya. Fungsi transfer dari sistem linier *invariant* waktu didefinisikan sebagai rasio antara transformasi Laplace *output* dengan transformasi Laplace *input* (kontrol) dengan mengasumsikan syarat awal adalah nol.

Berikut ini disajikan beberapa hal tentang transformasi Laplace.

Definisi 2.3.3. [12] *Misalkan bahwa fungsi f terdefinisi pada $0 \leqslant t < \infty$. Transformasi Laplace dari f, dinyatakan dengan F atau $\mathcal{L}\{f\}$, didefinisikan oleh integral tak wajar*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(t) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt, \qquad (2.3.13)$$

asalkan integral (2.3.13) *ada.*

Dengan menggunakan definisi ini, transformasi Laplace untuk beberapa fungsi yang diberikan dapat ditentukan. Sebagai contoh $\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s) - f(0)$. Selain itu, dengan menggunakan Definisi 2.3.3, fungsi transfer untuk sistem kontrol linier dapat pula ditentukan. Sebagai contoh, diberikan sistem kontrol linier berikut

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= cx(t) \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

dimana $x,\ y \in \mathbb{R}$. Maka

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= aX(s) + bU(s) \\ (s-a)X(s) &= bU(s) + x(0). \end{aligned}$$

Karena syarat awal diasumsikan sama dengan nol, maka

$$X(s) = \frac{b}{s-a}U(s),$$

dan

$$Y(s) = \frac{bc}{s-a}U(s) \tag{2.3.15}$$

sehingga

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bc}{s-a}.$$

Untuk sistem dengan *multi input* dan *multi output* (MIMO), fungsi tansfer didefinisikan sebagai fungsi $T(s)$ yang memenuhi hubungan

$$\mathbf{Y}(s) = T(s)\mathbf{U}(s) \tag{2.3.16}$$

dengan syarat awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, dimana $\mathbf{Y}(s)$ adalah transformasi Laplace *output* dan $\mathbf{U}(s)$ adalah transformasi Laplace *input*.

Untuk sistem standar MIMO

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

fungsi transfernya adalah

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

yang memenuhi

$$\mathbf{Y}(s) = G(s)\mathbf{U}(s).$$

Selain itu, untuk sistem deskriptor (1.1.1), fungsi transfernya adalah

$$T(s) = C(sE - A)^{-1}B \tag{2.3.18}$$

yang memenuhi

$$\mathbf{Y}(s) = T(s)\mathbf{U}(s).$$

Definisi berikut diperlukan untuk menentukan realisasi dari sistem deskriptor *invariant* waktu.

Definisi 2.3.4. [13] *Suatu fungsi transfer* $T(s)$ *dikatakan proper jika* $\lim_{s\to\infty} T(s) = K$, $K \in \mathbb{R}^{p\times m}$, *dan dikatakan strictly proper jika* $\lim_{s\to\infty} T(s) = \mathcal{O}$.

BAB III

REALISASI POSITIF UNTUK SISTEM DESKRIPTOR LINIER *INVARIANT* WAKTU

Pada bab ini akan dikaji kriteria realisasi positif dari fungsi transfer yang diberikan.

3.1 Realisasi dari Fungsi Transfer

Dalam Bab II telah diperoleh bahwa sistem deskriptor regular (1.1.1) dapat direduksi menjadi dua subsistem, yaitu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_1(t) &= A_1\mathbf{z}_1(t) + B_1\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_1(t) &= C_1\mathbf{z}_1(t) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

dan

$$\begin{aligned} N\dot{\mathbf{z}}_2(t) &= \mathbf{z}_2(t) + B_2\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_2(t) &= C_2\mathbf{z}_2(t) \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

dimana $\mathbf{y}_1(t) + \mathbf{y}_2(t) = \mathbf{y}(t)$. Misalkan fungsi transfer untuk subsistem (3.1.1) adalah $G(s) = C_1(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1$ dan fungsi transfer untuk subsistem (3.1.2) adalah $F(s) = C_2(sN - I_{n_2})^{-1}B_2$. Dari (2.3.18) telah diketahui bahwa fungsi transfer untuk sistem deskriptor (1.1.1) adalah $T(s) = C(sE - A)^{-1}B$. Akan ditunjukkan bahwa

$$T(s) = G(s) + F(s).$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
G(s)+F(s) &= C_1(sI_{n_1}-A_1)^{-1}B_1 + C_2(sN-I_{n_2})^{-1}B_2 \\
&= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI_{n_1}-A_1)^{-1}B_1 \\ (sN-I_{n_2})^{-1}B_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI_{n_1}-A_1)^{-1} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & (sN-I_{n_2})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \\
&= CP \begin{bmatrix} (sI_{n_1}-A_1)^{-1} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & (sN-I_{n_2})^{-1} \end{bmatrix} QB. \qquad (3.1.3)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, dari (3.1.3) akan ditunjukkan bahwa

$$P \begin{bmatrix} (sI_{n_1}-A_1)^{-1} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & (sN-I_{n_2})^{-1} \end{bmatrix} Q = (sE-A)^{-1}.$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
P \begin{bmatrix} (sI_{n_1}-A_1)^{-1} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & (sN-I_{n_2})^{-1} \end{bmatrix} Q &= P \begin{bmatrix} (sI_{n_1}-A_1) & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & (sN-I_{n_2}) \end{bmatrix}^{-1} Q \\
&= P \begin{bmatrix} s \begin{bmatrix} I_{n_1} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_1 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & I_{n_2} \end{bmatrix} \end{bmatrix}^{-1} Q \\
&= P \begin{bmatrix} sQEP - QAP \end{bmatrix}^{-1} Q.
\end{aligned}$$

Selanjutnya dengan menginverskan kedua ruas diperoleh

$$
\begin{aligned}
Q^{-1}\begin{bmatrix} (sI_{n_1}-A_1) & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & (sN-I_{n_2}) \end{bmatrix}P^{-1} &= Q^{-1}\begin{bmatrix} sQEP-QAP \end{bmatrix}P^{-1} \\
&= sQ^{-1}QEPP^{-1}-Q^{-1}QAPP^{-1} \\
&= sE-A.
\end{aligned}
$$

Jadi, $G(s)+F(s)=C(sE-A)^{-1}B=T(s)$.

Teorema 3.1.1. [7] *Realisasi dari $G(s)$ ada jika dan hanya jika $G(s)$ merupakan fungsi transfer yang strictly proper.*

Bukti.

($\Rightarrow$) Misalkan realisasi dari $G(s)$ ada, sebutlah realisasi tersebut adalah A_1, B_1, C_1 sedemikian sehingga $G(s)=C_1(sI-A_1)^{-1}B_1$. Akan ditunjukkan bahwa $G(s)$ merupakan fungsi transfer yang *strictly proper.* Perhatikan bahwa

$$G(s)=C_1(sI-A_1)^{-1}B_1=\frac{C_1(adj[sI-A_1])B_1}{det(sI-A_1)}. \tag{3.1.4}$$

Karena derajat entri-entri dari $adj[sI-A_1]$ selalu kurang dari derajat $det(sI-A_1)$, maka

$$\lim_{s\to\infty} G(s)=\mathcal{O}.$$

Jadi $G(s)$ adalah *strictly proper.*

($\Leftarrow$) Misalkan $G(s)$ merupakan fungsi transfer yang *strictly proper*, sebutlah

$$G(s)=\frac{L(s)}{d(s)},$$

dimana

$$L(s) = s^{n-1}L_{n-1} + \cdots + L_0, \quad (3.1.5)$$

$$d(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_1 s + d_0, \quad (3.1.6)$$

untuk suatu $n \in \mathbb{N}$, dengan $L_0, L_1, ..., L_{n-1}$ adalah matriks-matriks berukuran $p \times m$. Maka

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{s^{n-1}L_{n-1} + \cdots + L_0}{s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_0} \\ &= \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} L_0 & L_1 & \cdots & L_{n-2} & L_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m \\ sI_m \\ s^2 I_m \\ \vdots \\ s^{n-1}I_m \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

dimana I_m adalah matriks identitas berukuran $m \times m$. Misalkan

$$Z = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} I_m \\ sI_m \\ s^2 I_m \\ \vdots \\ s^{n-1}I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \\ Z_n \end{bmatrix}. \quad (3.1.7)$$

Dari (3.1.7) diperoleh

$$Z_1 = \frac{1}{d(s)} I_m, \quad (3.1.8)$$

yang mengakibatkan $Z_{i+1} = sZ_i$ dengan $i = 1, 2, ..., n-1$. Selain itu diperoleh juga

$$Z_n = s^{n-1} Z_1, \tag{3.1.9}$$

yang dapat ditulis

$$sZ_n = s^n Z_1. \tag{3.1.10}$$

Dari (3.1.8) diperoleh

$$\begin{aligned} I_m &= (d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + \cdots + d_{n-1} s^{n-1} + s^n) Z_1 \\ &= d_0 Z_1 + d_1 s Z_1 + d_2 s^2 Z_1 + \cdots + d_{n-1} s^{n-1} Z_1 + s^n Z_1 \\ &= d_0 Z_1 + d_1 Z_2 + d_2 Z_3 + \cdots + d_{n-1} Z_n + sZ_n \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

atau dapat ditulis

$$sZ_n = I_m - d_0 Z_1 - d_1 Z_2 - d_2 Z_3 + \cdots - d_{n-1} Z_n. \tag{3.1.12}$$

Selanjutnya (3.1.7) dapat ditulis menjadi

$$\begin{bmatrix} sZ_1 \\ sZ_2 \\ \vdots \\ sZ_{n-1} \\ sZ_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_2 \\ Z_3 \\ \vdots \\ Z_n \\ -d_0 Z_1 - d_1 Z_2 - d_2 Z_3 + \cdots - d_{n-1} Z_n + I_m \end{bmatrix} \tag{3.1.13}$$

atau

$$sZ = A_1 Z + B_1, \tag{3.1.14}$$

dimana

$$A_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{O} & I_m & \mathcal{O} & \cdots & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & I_m & \cdots & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \cdots & \mathcal{O} & I_m \\ -d_0 I_m & -d_1 I_m & -d_2 I_m & \cdots & -d_{n-2} I_m & -d_{n-1} I_m \end{bmatrix}, \quad (3.1.15)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{O} \\ \mathcal{O} \\ \vdots \\ \mathcal{O} \\ I_m \end{bmatrix}. \quad (3.1.16)$$

Dari (3.1.14) diperoleh $Z = (sI - A_1)^{-1}B_1$. Jadi, dengan memilih matriks A_1 seperti (3.1.15), B_1 seperti (3.1.16), dan

$$C_1 = \begin{bmatrix} L_0 & L_1 & \cdots & L_{n-2} & L_{n-1} \end{bmatrix},$$

maka $G(s) = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1$ yang menunjukkan bahwa A_1, B_1, dan C_1 merupakan realisasi dari $G(s)$.■

Teorema 3.1.2. *Realisasi dari $F(s)$ ada jika dan hanya jika $F(s)$ merupakan fungsi transfer yang entri-entrinya adalah polinomial.*

Bukti. ($\Rightarrow$) Misalkan realisasi dari $F(s)$ ada, sebutlah realisasi tersebut adalah N, B_2, C_2 sedemikian sehingga $F(s) = C_2(sN - I)^{-1}B_2$. Akan ditunjukkan bahwa $F(s)$ merupakan fungsi transfer entri-entrinya adalah polinomial.

Ambil sebarang matriks

$$B_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n_21} & b_{n_22} & b_{n_23} & \cdots & b_{n_2m} \end{bmatrix}, \; C_2 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n_2} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & c_{p3} & \cdots & c_{pn_2} \end{bmatrix},$$

dan sebarang matriks nilpoten

$$N = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & \cdots & n_{1n_2} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & \cdots & n_{2n_2} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & \cdots & n_{3n_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_{n_21} & n_{n_22} & n_{n_23} & \cdots & n_{n_2n_2} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} F(s) &= C_2(sN - I)^{-1}B_2 \\ &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sn_{11} - 1 & sn_{12} & \cdots & sn_{1n_2} \\ sn_{21} & sn_{22} - 1 & \cdots & sn_{2n_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ sn_{n_21} & sn_{n_22} & \cdots & sn_{n_2n_2} - 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n_21} & b_{n_22} & \cdots & b_{n_2m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

karena N matriks nilpoten, maka entri-entri dari $F(s)$ dapat ditulis menjadi

$$f_{ij} = f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + \cdots + f_{n_2} s^{n_2}, \ (i = 1, ..., p; \ j = 1, ..., m).$$

Jadi $F(s)$ merupakan matriks yang berisikan polinomial-polinomial.

($\Leftarrow$) Misalkan $F(s)$ merupakan fungsi transfer dengan entri-entri polinomial. Tulis

$$F(s) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots & f_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{p1} & f_{p2} & f_{p3} & \cdots & f_{pm} \end{bmatrix}, \tag{3.1.17}$$

dengan

$$f_{ij} = a_{ij}^{k_j} s^{k_j} + \cdots + a_{ij}^{1} s + a_{ij}^{0}, \quad (i = 1, ..., p; \ j = 1, ..., m). \tag{3.1.18}$$

dimana k_j adalah derajat tertinggi dari kolom ke-j dari $F(s)$. Selanjutnya definisikan matriks

$$\bar{S} = diag[\bar{S}_1, \bar{S}_2, \cdots, \bar{S}_m], \ \bar{S}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{k_j} \end{bmatrix}. \tag{3.1.19}$$

Dengan menggunakan (3.1.18) dan (3.1.19), diperoleh

$$F(s) = C_2 \bar{S}, \tag{3.1.20}$$

dimana

$$C_2 = \begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{11}^1 & \cdots & a_{11}^{k_1} & \cdots & a_{1m}^0 & a_{1m}^1 & \cdots & a_{1m}^{k_m} \\ a_{21}^0 & a_{21}^1 & \cdots & a_{21}^{k_1} & \cdots & a_{2m}^0 & a_{2m}^1 & \cdots & a_{2m}^{k_m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p1}^0 & a_{p1}^1 & \cdots & a_{p1}^{k_1} & \cdots & a_{pm}^0 & a_{pm}^1 & \cdots & a_{pm}^{k_m} \end{bmatrix}, \qquad (3.1.21)$$

dan $\bar{S}$ dapat ditulis sebagai

$$\bar{S} = (sN - I)^{-1}B_2, \qquad (3.1.22)$$

dimana

$$N = diag[N_1, N_2, \cdots, N_m], \; N_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (3.1.23)$$

$$B_2 = diag[b_1, b_2, ..., b_m], \; b_j = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (3.1.24)$$

$N_j \in \mathbb{R}^{(k_j+1)\times(k_j+1)}$ dan $b_j \in \mathbb{R}^{(k_j+1)\times m}$, untuk $j = 1, ..., m$. Jadi, dengan memilih matriks N seperti (3.1.23), B_2 seperti (3.1.24), dan C_2 seperti (3.1.21), maka $F(s) = C_2(sN - I_{n_2})^{-1}B_2$, yang menunjukkan bahwa N, B_2, C_2 merupakan realisasi dari $F(s)$.■

Fungsi transfer $F(s)$ dalam Teorema 3.1.2 disebut fungsi transfer polinomial.

3.2 Realisasi Positif dari Fungsi Transfer

Teorema 3.2.3. *Misalkan $A_1 \in \mathcal{M}^{n_1 \times n_1}$, $B_1 \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}_+^{p \times n_1}$ adalah realisasi positif dari fungsi transfer strictly proper $G(s)$, dan $N \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{p \times n_2}$ adalah realisasi dari fungsi transfer polinomial $F(s)$, dengan N adalah matriks nilpoten dengan indeks nilpotensi q. Maka ada realisasi positif dari $T(s)$ dengan bentuk*

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & O \\ O & N \end{bmatrix}, \mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & I_{n_2} \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \mathcal{C} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad (3.2.25)$$

jika dan hanya jika

$$C_2 \in \mathbb{R}_+^{p \times n_2}. \quad (3.2.26)$$

Bukti. ($\Rightarrow$) Misalkan ada realisasi positif dari $T(s)$ dengan bentuk (3.2.25), maka sistem

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathcal{A}\mathbf{x}(t) + \mathcal{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathcal{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

adalah positif untuk setiap $\mathbf{u}^{(i)}(t) \in \mathbb{R}_+^m$, $i = 0, 1, ..., q-1$. Karena A_1, B_1, C_1 adalah realisasi positif dari $G(s)$, maka sistem

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1(t) &= A_1\mathbf{x}_1(t) + B_1\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}_1(t) &= C_1\mathbf{x}_1(t) \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

adalah positif. Selanjutnya, karena N, B_2, C_2 adalah realisasi dari $F(s)$, maka

$F(s) = C_2(sN - I)^{-1}B_2$ merupakan fungsi transfer dari sistem

$$\begin{aligned} N\dot{\mathbf{x}}_2(t) &= \mathbf{x}_2(t) + B_2\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}_2(t) &= C_2\mathbf{x}_2(t). \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

Dengan menggunakan (3.1.23) dan (3.1.24), solusi sistem (3.2.29) adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2(t) &= -\sum_{i=0}^{q-1} N^i B_2 \mathbf{u}^{(i)}(t) \\ &= -\sum_{i=0}^{q-1} diag\begin{bmatrix} N_1^i b_1, \cdots, N_m^i b_m \end{bmatrix} \mathbf{u}^{(i)}(t). \end{aligned}$$

Jelas bahwa $\mathbf{x}_2(t) \in \mathbb{R}_+^{n_2}$. Selanjutnya akan ditunjukkan $C_2 \in \mathbb{R}_+^{p\times n_2}$. Andaikan $C_2 \notin \mathbb{R}_+^{p\times n_2}$. Karena

$$\mathbf{y}(t) = C_1\mathbf{x}_1(t) + C_2\mathbf{x}_2(t), \text{ dan } \mathbf{x}_2(t) \in \mathbb{R}_+^{n_2},$$

maka untuk $C_1\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{0}$ akan menghasilkan $\mathbf{y}(t) \notin \mathbb{R}_+^p$ yang kontradiksi dengan pernyataan bahwa sistem (3.2.27) adalah positif. Dengan demikian, haruslah $C_2 \in \mathbb{R}_+^{p\times n_2}$.

($\Leftarrow$) Misalkan $C_2 \in \mathbb{R}_+^{p\times n_2}$. Maka

$$\begin{aligned}
G(s)+F(s) &= C_1(sI_{n_1}-A_1)^{-1}B_1 + C_2(sN-I_{n_2})^{-1}B_2 \\
&= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI_{n_1}-A_1)^{-1}B_1 \\ (sN-I_{n_2})^{-1}B_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_{n_1}-A_1 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & sN-I_{n_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \left[s \begin{bmatrix} I_{n_1} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_1 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & I_{n_2} \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \\
&= \mathcal{C}(s\mathcal{E}-\mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} \\
&= T(s).
\end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\mathcal{E}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ adalah realisasi dari $T(s)$. Tetapi, karena $C_2 \in \mathbb{R}_+^{p\times n_2}$ maka realisasi $T(s)$ tersebut adalah positif. ■

Contoh:

1. Tentukan realisasi dari

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^4-s^3-5s^2-2s+2}{s^2-2s-3} & s+1 \\ \frac{2s^3-4s^2-5s}{s^2-2s-3} & \frac{s^3-3s^2+s-2}{s-3} \end{bmatrix},$$

dan tentukan juga realisasi positifnya jika ada.

Penyelesaian.

$T(s)$ dapat ditulis menjadi.

$$\begin{aligned} T(s) &= G(s) + F(s) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2-2s-3} & 0 \\ \frac{s}{s^2-2s-3} & \frac{1}{s-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s^2+s & s+1 \\ 2s & s^2+1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

Misalkan

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2-2s-3} & 0 \\ \frac{s}{s^2-2s-3} & \frac{1}{s-3} \end{bmatrix}, \tag{3.2.31}$$

dan

$$F(s) = \begin{bmatrix} s^2+s & s+1 \\ 2s & s^2+1 \end{bmatrix} \tag{3.2.32}$$

Berdasarkan (3.2.31), diperoleh polinomial bersama dari penyebutnya sebagai berikut

$$d(s) = s^2 - 2s - 3 \tag{3.2.33}$$

sehingga

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dari (3.2.31) dan (3.2.33) diperoleh

$$d(s)G(s) = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ s & s+1 \end{bmatrix}. \tag{3.2.34}$$

Persamaan (3.2.34) dapat ditulis menjadi

$$d(s)G(s) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} s,$$

sehingga

$$C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.2.35}$$

Selain itu, berdasarkan (3.2.32) terlihat bahwa derajat tertinggi dari kolom pertama $F(s)$ adalah $k_1 = 2$ dan derajat tertinggi dari kolom kedua adalah $k_2 = 2$, sehingga diperoleh

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karena $A_1 \in \mathcal{M}^{4\times 4}$, $B_1 \in \mathbb{R}_+^{4\times 2}$, $C_1 \in \mathbb{R}_+^{2\times 4}$ dan $C_2 \in \mathbb{R}_+^{2\times 6}$ maka realisasi positif dari $T(s)$ adalah:

$$\mathcal{E}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix},\ \mathcal{A}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\3&0&2&0&0&0&0&0&0&0\\0&3&0&2&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\\-1&0\\0&0\\0&0\\0&-1\\0&0\\0&0\end{bmatrix},\ \mathcal{C}=\begin{bmatrix}2&0&1&0&0&1&1&1&1&0\\0&0&1&1&0&2&0&1&0&1\end{bmatrix}.$$

2. Tentukan realisasi dari

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^3-s^2+1}{s-1} & \frac{s^5-3s^4-3s^3-3s^2-4s}{s^3-3s^2-4s} \\ s^3 & \frac{s^3-6s^2+9s+2}{s-4} \end{bmatrix},$$

dan tentukan juga realisasi positifnya jika ada.

Penyelesaian.

$T(s)$ dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} T(s) &= G(s) + F(s) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{s^2-1}{s^3-3s^2-4s} \\ 0 & \frac{2}{s-4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s^2 & s^2+1 \\ s^3 & s^2-2s+1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.2.36}$$

Misalkan

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{s^2-1}{s^3-3s^2-4s} \\ 0 & \frac{2}{s-4} \end{bmatrix} \tag{3.2.37}$$

dan

$$F(s) = \begin{bmatrix} s^2 & s^2+1 \\ s^3 & s^2-2s+1 \end{bmatrix} \tag{3.2.38}$$

Berdasarkan (3.2.37), maka diperoleh polinomial bersama dari penyebutnya sebagai berikut

$$d(s) = s^4 - 4s^3 - s^2 + 4s \tag{3.2.39}$$

dan

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dari (3.2.37) dan (3.2.39) diperoleh

$$d(s)G(s) = \begin{bmatrix} s^3 - 3s^2 - 4s & s^3 - s^2 - s + 1 \\ 0 & 2s^3 - 2s \end{bmatrix}. \qquad (3.2.40)$$

Persamaan (3.2.40) dapat ditulis menjadi

$$d(s)G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} s^3,$$

sehingga

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & -1 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \qquad (3.2.41)$$

Selain itu, berdasarkan (3.2.38) terlihat bahwa derajat tertinggi dari kolom pertama dari $F(s)$ adalah $k_1 = 3$ dan derajat tertinggi dari kolom kedua adalah

$k_2 = 2$, sehingga diperoleh

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \; N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karena $A_1 \notin \mathcal{M}^{8\times 8}$, $C_1 \notin \mathbb{R}_+^{2\times 8}$ dan $C_2 \notin \mathbb{R}_+^{2\times 7}$, maka

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} I_8 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \; \mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_7 \end{bmatrix}, \; \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \; \mathcal{C} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

bukan merupakan realisasi positif dari $T(s)$.

BAB IV

KESIMPULAN

Realisasi positif dari suatu fungsi transfer untuk sistem deskriptor tidak selalu ada. Jika ada, salah satu bentuk realisasi positifnya adalah

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & N \end{bmatrix}, \mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_1 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & I_{n_2} \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \mathcal{C} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix},$$

dimana matriks $A_1 \in \mathcal{M}^{n_1 \times n_1}, B_1 \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times m}, C_1 \in \mathbb{R}_+^{p \times n_1}$ merupakan realisasi dari $G(s)$ dan $N \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}, B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$, dan $C_2 \in \mathbb{R}_+^{p \times n_2}$ merupakan realisasi dari $F(s)$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H., 1991: *Aljabar Linier Elementer edisi kedelapan.* Erlangga. Jakarta.

[2] Astolfi, A., dan Colaneri, P., 2004: A Note on The Exixtence of Positive Realizations, *Linear Algebra and Its Applications.* 390. 329-343.

[3] Duan, G. R., 2010: *Analysis and Design of Descriptor Linear Systems.* Springer. New York.

[4] Farina, L., 1994: Necessary for Positive Realizability of Continuous-Time Linear Systems, *Systems and Control Letters,* **25**, 121-124.

[5] Farina, L., 1996: On the Existence of a Positive Realization, *System and Control Letters.* **28**, 219-226.

[6] Goldberg, J.L., 1991: *Matrix Theory with Applications.* McGraw-Hill. USA.

[7] Hendricks, E., Jannerup, O., dan Sensen, P.H., 2008: *Linear Systems Control.* Springer. Verlag Berlin Heidelberg.

[8] Kaczorek, T., 1992: *Linear Control Systems.* Vol 1. Research Studies Press LTD. England.

[9] Kaczorek, T., 2012: Positive Stable Realizations for Fractional Descriptor Continuous-Time Linear Systems. *Archieves of Control Sciences.* Vol 22, **3**, 303-313.

[10] Kaczorek, T., 2012: Positive Realizations for Descriptor Discrete-Time Linear Systems. *Acta Mechanica et Outomatica.* Vol 6, **2**, 58-61.

[11] Kitano, T., dan Maeda, H., 1998: Positive Realization of Discrete-Time Systems by Geometric Approach. *IEEE Transactions on Circuits and Systems.* Vol.45, **3**, 308-311.

[12] Ladas, F., Terjemahan oleh Santoso,W. 1998: *Persamaan Differensial Biasa dengan Penerapan Modern.* Erlangga. Jakarta.

[13] Sinha, A., 2007: *Linear Systems Optimal and Robust Control.* CRC Press. New York.