KONVOLUSI DISTRIBUSI EKSPONESIAL

TESIS

MARNISYAH ANAS
1121222011

PROGRAM PASCASARJANA UNIVERSITAS ANDALAS
2013

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, rasa syukur pada Allah SWT yang telah memberikan kesehatan dan kesempatan pada Penulis untuk menuliskan sedikit ilmu-Nya. Sala-wat dan salam disampaikan kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah membawa cahaya kebenaran di muka bumi ini. Puji dan syukur Penulis haturkan kepada Allah SWT karena dengan nikmat-Nya Penulis dapat menyelesaikan tesis dengan judul **Konvolusi Distribusi Eksponensial** yang merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Matematika (M.Si) di Pascasarjana Universitas Andalas Padang.

Dalam menyelesaikan tesis ini, Penulis banyak menerima bantuan moril maupun materil dari berbagai pihak. Untuk itu, Penulis mengucapkan terima kasih kepada:

(1) Ibunda tercinta Mardiani yang cinta dan kasih sayangnya masih terus menemani setiap langkah Penulis. Ayahnda tercinta Anas yang tidak henti-hentinya mendo'akan, memberikan dukungan sepenuh cinta dan kasih sayang. Adik-adik tersayang Wahyuli Dwi Anas, Helda Febriani Anas dan Nurfadilla Anas yang selalu memberi semangat dan doa.

(2) Suamiku Septi Syahputra yang selalu memberikan semangat dan mengingatkan untuk terus mengerjakan tesis ini walau sehari hanya satu lembar halaman.

(2) Bapak Dr. Maiyastri sebagai ketua komisi pembimbing dan Bapak Dr. Dodi Devianto sebagai anggota komisi pembimbing yang telah membimbing dan

memberi saran serta masukan kepada Penulis dalam menyelesaikan tesis ini.

(3) Bapak Dr. Admi Nazra, Ibu Dr. Lyra Yulianti, dan Ibu Dr. Ferra Yanuar selaku penguji yang telah memberi saran dan masukan kepada Penulis dalam penyempurnaan tesis ini.

(4) Bapak Dr. Muhafzan sebagai Koordinator Pendidikan Matematika Pascasarjana Universitas Andalas Padang.

(5) Bapak dan Ibu dosen beserta staf Pascasarjana Universitas Andalas Padang, terima kasih atas ilmu yang telah diberikan kepada Penulis selama ini.

(6) Ni Dewi, Kak ina, Kak Ade, Kak Reni, Kak nia, Anah, Rian selaku teman senasib seperjuangan. Elva, makasi ya atas dukungan dan kata semangatnya. Akhirnya kita wisuda bareng.

(7) Sahabat-sahabat yang selalu memberi semangat.

(8) Semua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan tesis ini.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa tesis ini jauh dari kesempurnaan, oleh karena itu Penulis mengharapkan saran dan kritik yang bersifat membangun untuk kesempurnaan isi tesis ini. Akhirnya penulis berharap semoga tesis ini berguna bagi kita semua. Amin ya Robbal'alamin.

Padang, 5 November 2013

Marnisyah Anas

ABSTRAK

Konvolusi adalah penjumlahan dari peubah-peubah acak. Konvolusi dari peubah acak berdistribusi eksponensial dengan parameter berbeda dan sama dapat ditentukan dengan memperlihatkan fungsi kepadatan peluang dari peubah acaknya. Begitu juga dengan konvolusi dari peubah acak berdistribusi eksponensial yang dibangkitkan oleh konstanta penstabil dengan parameter sama juga dapat ditentukan dengan memperlihatkan fungsi kepadatan peluang dari peubah acaknya.

Kata Kunci : konvolusi, distribusi eksponensial, distribusi eksponensial dibangkitkan oleh konstanta penstabil.

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Distribusi eksponensial merupakan salah satu distribusi peluang kontinu yang menggunakan peubah acak X dan parameter β dengan fungsi kepadatan peluang (fkp) sebagai berikut

$$f_X(x_i;\beta) = \begin{cases} \beta\ exp(-x_i\beta) & ,jika\ 0 < x_i < \infty; \beta > 0 \\ 0 & ,jika\ x_i\ lainya. \end{cases} \tag{1.1}$$

Selanjutnya distribusi eksponensial dapat dibentuk kedalam distribusi eksponensial yang dibangkitkan oleh konstanta penstabil yang didefinisikan sebagai berikut, apabila terdapat suatu peubah acak X_i berdistribusi eksponensial ($X_i \sim EXP(\beta)$), dan nilai ke-i dengan $i = 1, 2, \cdots, n$ dari peubah acak tersebut didefinisikan W_i sebagai berikut

$$w_i = \frac{x_i}{x_m} \tag{1.2}$$

dimana

$$x_m = max\{x_1, ..., x_n\},\ x_i \in [0, x_m]; n \in \mathbb{Z}^+,$$

maka peubah acak W_i tersebut memiliki fkp

$$f_{W_i}(w_i;\beta) = \theta\ \beta\ exp(-w_i\beta) \tag{1.3}$$

untuk setiap $0 < w_i < 1$, $i = 1, 2, \cdots, n$ dan $\beta > 0$ dimana θ merupakan konstanta penstabil bentuk distribusi yang bergantung pada β.

Adanya distribusi eksponensial saat sekarang ini telah memberi kontribusi dalam statistika, seperti untuk memodelkan waktu tunggu suatu antrian dan lain-lain. Aplikasi dari distribusi eksponensial ini akan semakin meluas jika kita lakukan kajian yang lebih dalam tentang distribusi eksponensial. Salah satu contohnya melakukan konvolusi dari distribusi eksponesial.

Konvolusi adalah operasi penjumlahan dari peubah-peubah acak. Dengan menggunakan konvolusi dapat ditentukan distribusi baru dari suatu peubah acak yang merupakan jumlah dari peubah-peubah acak distribusi sebelumnya. Misalkan $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ adalah jumlah dari peubah acak X_i dengan $i = 1, 2, \cdots, n$, yang memiliki fungsi distribusi eksponesial. Dengan menggunakan fungsi kepadatan peluang untuk masing-masing peubah acak eksponensial maka dapat diperoleh fungsi kepadatan peluang f_{S_n}. Begitu juga dengan distribusi eksponesial yang dibangkitkan oleh konstanta penstabil. Jika dimisalkan peubah acak W_i dengan $i = 1, 2, \cdots, n$ merupakan peubah acak eksponensial yang dibangkitkan oleh konstanta penstabil. Misalkan $S_{p_n} = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ adalah jumlah dari peubah acak W_i maka akan diperoleh distribusi dari S_{p_n} yang memiliki fungsi kepadatan peluang $f_{S_{p_n}}$.

Berdasarkan uraian diatas, maka tesis ini akan membahas dua bentuk fungsi kepadatan peluang. Pertama, bentuk fungsi kepadatan peluang f_{S_n} dari distribusi S_n yang merupakan konvolusi peubah acak X_i yang berdistribusi eksponensial. Kedua, bentuk fungsi kepadatan peluang $f_{S_{p_n}}$ dari distribusi S_{p_n} yang merupakan peubah acak W_i yang berdistribusi eksponensial yang dibangkitkan oleh konstanta penstabil.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas pada tesis ini adalah

1. bagaimana bentuk fungsi kepadatan peluang dari konvolusi distribusi eksponensial dengan menggunakan parameter berbeda?

2. bagaimana bentuk fungsi kepadatan peluang dari konvolusi distribusi eksponensial dengan menggunakan parameter sama?

3. bagaimana bentuk fungsi kepadatan peluang dari konvolusi distribusi eksponensial yang dibangkitkan oleh konstanta penstabil dengan menggunakan parameter sama?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah

1. untuk menentukan fungsi kepadatan peluang dari konvolusi distribusi eksponensial dengan menggunakan parameter berbeda.
2. untuk menentukan fungsi kepadatan peluang dari konvolusi distribusi eksponensial dengan menggunakan parameter sama.
3. untuk menentukan fungsi kepadatan peluang dari konvolusi distribusi eksponensial yang dibangkitkan oleh konstanta penstabil dengan menggunakan parameter sama.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memperluas wawasan penulis serta pembaca pada umumnya dan diharapkan dapat memberikan sumbangan kepada para pembaca agar lebih memahami konvolusi distribusi eksponensial atau menjadikan referensi untuk menentukan fungsi kepadatan peluang dari konvolusi distribusi lainnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini memaparkan beberapa teori yang akan digunakan untuk menjawab permasalahan yang diajukan dalam Bab I yang bersumber dari beberapa literatur.

2.1 Pengertian Dasar dalam Teori Peluang

Himpunan semua kemungkinan hasil dari suatu percobaan disebut ruang contoh dan dilambangkan dengan Ω, sedangkan kejadian adalah suatu himpunan bagian dari ruang contoh*[2]*. Berikut ini akan dijelaskan beberapa pengertian dasar dalam teori peluang.

2.1.1 Ruang Peluang

Misalkan Ω suatu himpunan dari titik-titik dalam suatu ruang contoh dan misalkan F suatu himpunan yang anggotanya adalah himpunan bagian dari Ω. Himpunan bagian Ω dikatakan kejadian dan bisa dipandang sebagai suatu kemungkinan yang bisa terjadi. Jika dimisalkan P suatu fungsi yang memberikan peluang untuk sebarang kejadian dalam F, maka tripel (Ω, F, P) dinamakan ruang peluang. Kumpulan dari F dengan sifat-sifat tertentu dinamakan σ-algebra *[2]*. Berikut akan diberikan definisi dari σ-algebra.

Definisi 2.1. [4] *Keluarga dari subhimpunan dari ruang contoh Ω, dinamakan medan Borel (σ-algebra) dan dinotasikan dengan F jika memenuhi sifat-sifat berikut:*

1. *$\varnothing \in \mathsf{F}$ (himpunan kosong ada dalam medan Borel)*

2. *Jika $A \in \mathsf{F}$ maka $A^c \in \mathsf{F}$ (medan Borel tertutup terhadap komplemen)*

3. *Jika* $A_1, A_2, \cdots \in F$ *maka* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$ *(medan Borel tertutup terhadap gabungan tercacah (countable union))*

2.1.2 Peubah Acak dan Fungsi Distribusi

Berikut ini akan diberikan beberapa definisi dan teorema yang terkait dengan peubah acak dan fungsi distribusi.

Definisi 2.2. [2] *Suatu peubah acak, notasikan sebagai* X*, adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada suatu ruang contoh* Ω*, yang memetakan setiap anggota ruang contoh* e *dalam* Ω *ke suatu bilangan riil* x*, atau dapat ditulis sebagai* $X(e) = x, x \in \mathbb{R}$.

Dengan kata lain, peubah acak X adalah bilangan yang ditentukan oleh hasil suatu percobaan. Peubah acak dinotasikan dengan huruf kapital, sedangkan nilai yang mungkin bagi peubah acak (range)nya dinotasikan dengan huruf kecil yang bersesuaian*[2]*.

Definisi 2.3. [2] *Fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak* X *didefinisikan sebagai*

$$F(x) = P(X \leq x), untuk\ setiap\ x \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

Untuk selanjutnya $F(x)$ *disebut sebagai fungsi distribusi.*

Definisi 2.4. [2] *Suatu peubah acak* X *dikatakan peubah acak kontinu jika terdapat suatu fungsi* $f(x)$ *yang dinamakan fungsi kepekatan peluang (fkp) sehingga fungsi distribusi dapat dinyatakan sebagai*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad dan \quad f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = F'(x). \tag{2.2}$$

Teorema 2.5. [2] *Fungsi* $f(x)$ *adalah fkp bagi suatu peubah acak yang kontinu jika dan hanya jika memenuhi sifat-sifat berikut*

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \tag{2.4}$$

Definisi 2.6. [2] *Jika himpunan dari semua nilai yang mungkin bagi peubah acak X adalah himpunan tercacah $x_1, x_2, \cdots, x_n$ atau $x_1, x_2, \cdots$ maka X dinamakan peubah acak diskrit. Fungsi*

$$f(x) = P[X = x], \quad x = x_1, x_2, \cdots \tag{2.5}$$

yang memasangkan setiap nilai x dengan nilai peluang dinamakan sebagai fungsi kepekatan peluang diskrit. Untuk selanjutnya $f(x)$ disebut sebagai fkp diskrit.

Teorema 2.7. [2] *Suatu fungsi $f(x)$ merupakan fkp diskrit jika dan hanya jika untuk suatu himpunan bilangan riil takhingga yang tercacah $x_1, x_2, \cdots$ terpenuhi kedua sifat berikut*

$$f(x_i) \geq 0, \quad \textit{untuk} \quad \textit{setiap} \quad x_i \tag{2.6}$$

dan

$$\sum_{\forall x_i} f(x_i) = 1. \tag{2.7}$$

Berikut akan diberikan pengertian dari peubah acak menyebar identik dan peubah acak saling bebas

Definisi 2.8. [2] *Dua peubah acak X dan Y dikatakan menyebar identik jika $P(X \in A) = P(Y \in A)$ untuk setiap kejadian A.*

Definisi 2.9. [2] *Terdapat kejadian $A_1, \cdots, A_k$ dikatakan saling bebas jika untuk setiap $A_1, \cdots, A_k$, maka diperoleh*

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right] = \Pi_{i=1}^{k} P\left[A_j\right]. \tag{2.8}$$

2.1.3 Nilai Harapan dan Fungsi Pembangkit Momen

Pada pembahasan ini juga dibutuhkan pemahaman mengenai nilai harapan, variansi dan fungsi pembangkit momen seperti definisi berikut ini

Definisi 2.10. [4] *Jika suatu peubah acak yang mempunyai fkp $f(x)$ dan $g(x)$ adalah fungsi dari X, maka nilai harapan fungsi $g(X)$ dinotasikan oleh $E[g(X)]$*

adalah

$$E[g(X)] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx & , jika\ X\ peubah\ acak\ kontinu \\ \sum_{x\in X} g(x)f(x) & , jika\ X\ peubah\ acak\ diskrit \end{cases} \tag{2.9}$$

Definisi 2.11. [2] *Misal X merupakan peubah acak kontinu dengan fkp $f(x)$, maka nilai harapan dari X dinyatakan oleh*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \tag{2.10}$$

Definisi 2.12. [2] *Misal X merupakan peubah acak diskrit dengan fkp $f(x)$, maka nilai harapan dari X dinyatakan oleh*

$$E(X) = \sum_{\forall i} xP(X = x) = \sum_{\forall i} xf(x). \tag{2.11}$$

Definisi 2.13. [2] *Variansi dari peubah acak X dirumuskan sebagai*

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2];\ \mu = E(x) \tag{2.12}$$

Teorema 2.14. [2] *Jika X adalah peubah acak, maka*

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2;\ \mu = E(x) \tag{2.13}$$

Definisi 2.15. [2] *Misal X merupakan peubah acak maka fungsi pembangkit momen dari X didefinisikan sebagai berikut*

$$M_X(t) = E[e^{tX}]. \tag{2.14}$$

Fungsi ini dinamakan fungsi pembangkit momen dari peubah acak X jika nilai harapan itu ada untuk setiap t dalam selang $-h < t < h$ untuk suatu nilai $h > 0$.

2.2 Distribusi Eksponensial

Distribusi eksponensial adalah salah satu jenis distribusi kontinu yang banyak digunakan dalam statistika. Distribusi Eksponensial adalah kejadian khusus dari distribusi Gamma jika $X \sim GAM(\alpha, \kappa)$ dengan fungsi kepadatan peluang sebagai berikut

$$f_X(x;\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^{\kappa}\Gamma(\kappa)} x^{\kappa-1}\ exp(-x/\alpha) & ,\ jika\ 0 < x < \infty; \alpha > 0; \kappa > 0 \\ 0 & ,\ jika\ x\ lainya \end{cases} \tag{2.15}$$

Dengan menggunakan parameter $\kappa = 1$ sehingga berdasarkan sifat fungsi gamma, $\Gamma(1) = (1-1)! = 0! = 1$ dan memisalkan $\frac{1}{\alpha} = \beta$ maka fungsi kepadatan peluang distribusi gamma $(\alpha, 1)$ menjadi fungsi kepadatan peluang dari distribusi eksponensial (β). Berikut ini akan diberikan beberapa definisi yang terkait dengan distribusi eksponensial.

Definisi 2.16. [2] *Suatu peubah acak X dikatakan berdistribusi eksponensial dengan parameter β, dinotasikan $X \sim EXP(\beta)$ jika fungsi kepadatan peluang*

$$f_X(x;\beta) = \begin{cases} \beta\ exp(-x\beta) & , \ jika\ 0 < x < \infty; \beta > 0 \\ 0 & , \ jika\ x\ lainya \end{cases} \tag{2.16}$$

Fungsi Distribusi kumulatif X dapat dinyatakan sebagai

$$F_X(x;\beta) = 1 - exp(-x\beta),\ jika\ 0 < x. \tag{2.17}$$

Hal ini diperoleh dengan menghitung langsung integral dari $f_X(x;\beta)$ pada persamaan diatas sebagai berikut

$$\begin{aligned} F_X(x;\beta) &= \int_0^x \beta\ exp(-t\beta)dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{\beta}\beta\ d(-exp(-t\beta) \\ &= \int_0^x d(-exp(-t\beta)) \\ &= -exp(-t\beta)|_0^x \\ &= -exp(-x\beta) - (-exp(0)) \\ &= 1 - exp(-x\beta). \end{aligned}$$

Nilai tengah atau rata-rata dari $X \sim EXP(\beta)$ diperoleh dengan menghitung nilai harapan dari peubah acak X berdistribusi eksponensial sebagai berikut

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty x\ \beta\ exp(-x\beta)dx \\ &= Lim_{a\to\infty} \int_0^a x\ \beta\ exp(-x\beta)dx \\ &= Lim_{a\to\infty}[x(-exp(-x\beta)) - \frac{1}{\beta}exp(-x\beta)]|_0^a \\ &= \frac{1}{\beta}. \end{aligned}$$

Selanjutnya dilakukan perhitungan untuk menentukan nilai harapan dari X^2

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^\infty x^2\ \beta\ exp(-x\beta)dx \\
&= Lim_{a\to\infty} \int_0^a x^2\ \beta\ exp(-x\beta)dx \\
&= Lim_{a\to\infty}[x^2(-exp(-x\beta)) - \frac{2x}{\beta}exp(-x\beta) - \frac{2}{\beta^2}exp(-x\beta)]|_0^a \\
&= \frac{2}{\beta^2}.
\end{aligned}
$$

Dengan diperolehnya nilai harapan dari X dan X^2 maka variansi dari $X \sim EXP(\beta)$ diperoleh sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
&= \frac{2}{\beta^2} - \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 \\
&= \frac{1}{\beta^2}.
\end{aligned}
$$

Adapun fungsi pembangkit momen dari $X \sim EXP(\beta)$ diperoleh sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= \int_0^\infty exp(tx)\ \beta\ exp(-x\beta)dx \\
&= \int_0^\infty \beta\ exp(tx - x\beta)dx \\
&= Lim_{a\to\infty} \int_0^\infty \beta\ exp(-(\beta - t)xdx \\
&= Lim_{x\to\infty} \left[\beta \frac{-1}{\beta - t} exp(-(\beta - t)x)\right]_0^a \\
&= \frac{\beta}{\beta - t} \\
&= (1 - t\beta)^{-1}.
\end{aligned}
$$

dimana $t < \beta$.

2.3 Keluarga Distribusi Eksponensial

Berikut ini akan diberikan definisi yang terkait dengan keluarga distribusi eksponensial. Keluarga distribusi eksponensial ini, nantinya akan digunakan untuk melihat fungsi kepadatan peluang dari konvolusi pada distribusi eksponensial yang ditemukan merupakan keluarga distribusi eksponensial

Definisi 2.17. [4] *Suatu peubah acak X dengan fungsi kepadatan peluang $f_X(x)$ dan parameter $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k)$ dikatakan menjadi anggota keluarga eksponensial, jika $f_X(x)$ dapat dinyatakan sebagai*

$$f(x, \vec{\beta}) = h(x)c(\vec{\beta})exp(\Sigma_{i=1}^{k}\omega_i(\vec{\beta})t_i(x)). \tag{2.18}$$

dimana $h(x) \geq 0$ dan $t_1(x), \cdots, t_k(x) \in \mathbb{R}$. $h(x)$ dan $t_i(x)$ merupakan fungsi yang mengandung nilai x. $c(\vec{\beta}) \geq 0$ dan $\omega_1(\vec{\beta}), \cdots, \omega_k(\vec{\beta}) \in \mathbb{R}$. Sedangkan $c(\vec{\beta})$ dan $\omega_i(\vec{\beta})$ merupakan fungsi yang mengandung nilai $\vec{\beta}$. Nilai $i = 1, 2, \cdots, k$ merupakan jumlah parameter yang terdapat pada suatu distribusi.

Berdasarkan fungsi kepadatan peluang keluarga distribusi eksponensial ini dapat dilihat bahwa distribusi eksponensial berasal dari keluarga distribusi eksponensial. Karena fungsi kepadatan peluang distribusi eksponensial dapat dibentuk kedalam fungsi kepadatan peluang keluarga distribusi eksponensial seperti berikut

$$f(x, \beta) = 1 \ \beta \ exp\left(\Sigma_{i=1}^{1}(-x\beta)\right), \tag{2.19}$$

dimana $h(x) = 1$, $c(\beta) = \beta$, $\omega(\beta) = \beta$ dan $t(x) = -x$

2.4 Transformasi Bersama

Berikut ini akan diberikan teorema dan contoh dari transformasi bersama untuk peubah acak diskrit dan kontinu.

Teorema 2.18. [2] *Misalkan $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_k)$ adalah suatu vektor dari peubah acak diskrit dengan fkp bersama $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ pada himpunan A, misalkan $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_k(x)$ adalah fungsi dari x, dan $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$ didefinisikan oleh transformasi satu satu sebagai berikut*

$$Y_i = u_i(X_1, X_2, \cdots, X_k), \quad i = 1, 2, \cdots, k. \tag{2.20}$$

maka fkp bersama dari $\mathbf{Y}$ adalah

$$f_{\mathbf{Y}}(y_1, \cdots, y_k) = f_{\mathbf{X}}\left(u_1^{-1}(y_1), \cdots, u_k^{-1}(y_k)\right). \tag{2.21}$$

Teorema 2.19. [2] *Misalkan* $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_k)$ *adalah suatu vektor dari peubah acak kontinu dengan fkp bersama* $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ *pada himpunan* A, *misalkan* $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_k(x)$ *adalah fungsi dari* x *sebanyak* k, *dan* $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$ *didefinisikan oleh transformasi satu satu sebagai berikut*

$$Y_i = u_i(X_1, X_2, \cdots, X_k), \quad i = 1, 2, \cdots, k. \tag{2.22}$$

Jika Jacobian adalah kontinu dan taknol pada range transformasi, maka fkp bersama dari $\mathbf{Y}$ *adalah*

$$f_{\mathbf{Y}}(y_1, \cdots, y_k) = f_{\mathbf{X}}(x_1, \cdots, x_k)|J|. \tag{2.23}$$

dimana $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_k)$ *adalah solusi dari* $y = u(x)$ *dan* $|J|$ *merupakan Jacobian dari transformasi* Y_i.

Untuk kasus kontinu, transformasi peubah acak kontinu dapat diperoleh dengan memperluas notasi Jacobian. Suatu transformasi dengan k peubah $y = u(x)$ dengan suatu penyelesaian tunggal $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_k)$ memiliki Jacobian yang merupakan matriks turunan parsial $k \times k$.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_k} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_k}{\partial y_1} & \frac{\partial x_k}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_k}{\partial y_k} \end{vmatrix}.$$

Contoh 2.1. *Misalkan* X *dan* Y *merupakan dua peubah acak saling bebas berdistribusi eksponensial dengan fungsi kepekatan peluang masing-masing* $f_X(x)$ *dan* $f_Y(x)$ *yang terletak pada interval* $[0, \infty)$. *Maka*

$$f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \textit{jika } x > 0; \\ 0 \ , & \textit{jika } x \textit{ lainnya.} \end{cases} \tag{2.24}$$

dan $Z = X + Y$ *memiliki fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:*
Untuk $z > 0$, *fkp bersama dari* X *dan* Y *adalah*

$$f_{X,Y}(x, y) \ = \ \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \qquad (x, y) \in A \tag{2.25}$$

dimana $A = \{(x,y)|0 < x, 0 < y\}$. *Misalkan peubah acak* $W = X$ *dan* $Z = X+Y$ *bersesuaian dengan transformasi* $w = x$ *dan* $z = x+y$ *yang memiliki solusi tunggal* $x = w$ *dan* $y = z - w$.

Sehingga diperoleh Jacobiannya

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Selanjutnya fkp bersama dari peubah acak W *dan* Z *adalah*

$$\begin{aligned} f_{W,Z}(w,z) &= f_{X,Y}(w, z-w)|J| && (2.26) \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda z} \qquad (w,z) \in B && (2.27) \end{aligned}$$

dimana $B = \{(w,z)|0 < w < z < \infty\}$. *Sedangkan fkp marginal dari* Z *adalah sebagai berikut*

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^z f_{W,Z}(w,z)dw && (2.28) \\ &= \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda(z)} dw && (2.29) \\ &= \lambda^2 z e^{-\lambda z}. && (2.30) \end{aligned}$$

dan untuk $z < 0$, $f_Z(z) = 0$. *Jadi, fungsi kepadatan peluang dari peubah acak* Z *adalah*

$$f_Z(z) = \begin{cases} \lambda^2 z e^{-\lambda z}, & jika\ z > 0; \\ 0 \ , & jika\ z\ lainnya. \end{cases} \qquad (2.31)$$

2.5 Konvolusi

Peubah acak dapat dijumlahkan dengan menggunakan metode transformasi bersama namun apabila terdapat lebih dari dua peubah acak yang akan dijumlahkan, maka diperlukan bantuan suatu software untuk membantu menyelesaikan determinan dari jacobian transformasi tersebut. Sehingga diberikan sebuah metode konvolusi distribusi untuk menyelesaikan penjumlahan tersebut tanpa menggunakan bantuan suatu software. Berikut ini akan diberikan definisi dan teorema dari konvolusi distribusi.

Definisi 2.20. [5] *Misalkan X dan Y adalah dua peubah acak saling bebas dengan fungsi distribusi masing-masing $m_1(x)$ dan $m_2(x)$. Maka Konvolusi dari $m_1(x)$ dan $m_2(x)$ adalah fungsi distribusi $m(x) = m_1(x) * m_2(x)$ yang didefinisikan sebagai berikut*

$$m(j) = \Sigma_k m_1(k).m_2(j-k), \tag{2.32}$$

untuk $j = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2. \cdots$. Fungsi $m_3(x)$ merupakan fungsi distribusi dari peubah acak $Z = X + Y$.

Contoh 2.2. *Sebuah koin dilambungkan dua kali. Misalkan X_1 dan X_2 adalah hasil yang diperoleh dan misalkan $S_2 = X_1 + X_2$ adalah jumlah dari hasil ini. Maka X_1 dan X_2 mempunyai fungsi distribusi sebagai berikut:*

$$p(x_i) = \frac{1}{2} \text{ untuk } x_i = 1, 2 \text{ dan } i = 1, 2. \tag{2.33}$$

Berdasarkan Definisi 2.20, fungsi distribusi dari S_2 adalah konvolusi dari distribusi ini dengan dirinya sendiri. Sehingga

$$\begin{aligned} P(S_2 = 2) &= p(1)p(1) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ P(S_2 = 3) &= p(1)p(2) + p(2)p(1) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ P(S_2 = 4) &= p(2)p(2) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Definisi 2.21. [5] *Misalkan X dan Y adalah dua peubah acak kontinu dengan fungsi kepekatan peluang masing-masing adalah $f(x)$ dan $g(x)$. Asumsikan $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya terdefinisi pada setiap bilangan riil. Maka konvolusi $f * g$ dari fungsi f dan g didefinisikan sebagai berikut*

$$\begin{aligned} (f * g)(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y)dy && (2.34) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(z-x)f(x)dx && (2.35) \end{aligned}$$

Teorema 2.22. [5] *Misalkan X dan Y adalah dua peubah acak dengan fungsi kepekatan peluang $f_X(x)$ dan $f_Y(y)$ terdefinisi untuk setiap x. Maka $Z = X + Y$ merupakan peubah acak dengan fungsi kepekatan peluang $f_Z(z)$, dimana f_Z*

merupakan konvolusi dari f_X *dan* f_Y. *Maka* f_Z *sebagai berikut*

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy && (2.36)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(z-x)f_X(x)dx && (2.37)\end{aligned}$$

Contoh 2.3. *Misalkan* X *dan* Y *merupakan dua peubah acak berdistribusi eksponensial dengan fungsi kepekatan peluang masing-masing* $f_X(x)$ *dan* $f_Y(x)$ *yang terletak pada interval* $[0,\infty)$. *Maka*

$$f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & jika \quad x > 0 \\ 0, & untuk \quad x \quad lainnya \end{cases} \tag{2.38}$$

dan $Z = X + Y$ *memiliki fungsi kepekatan peluang sebagai berikut:*
Untuk $z > 0$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy && (2.39)\\ &= \int_0^z \lambda e^{-\lambda(z-y)}\lambda e^{-\lambda y}dy && (2.40)\\ &= \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda z}dy && (2.41)\\ &= \lambda^2 z e^{-\lambda z}, && (2.42)\end{aligned}$$

dan untuk $z < 0$, $f_Z(z) = 0$. *Jadi, fungsi kepadatan peluang dari peubah acak* Z *adalah sebagai berikut*

$$f_Z(z) = \begin{cases} \lambda^2 z e^{-\lambda z}, & jika \quad z > 0 \\ 0, & untuk \quad z \quad lainnya \end{cases} \tag{2.43}$$

BAB III

KONVOLUSI DISTRIBUSI EKSPONENSIAL

Pada Bab ini akan dibahas jawaban dari perumusan masalah yang telah dijelaskan pada Bab I. Permasalahan tersebut akan dijawab dengan subbab-subbab berikut ini.

3.1 Konvolusi Distribusi Eksponensial dengan Parameter Berbeda

Pada Subbab ini akan dibahas tentang konvolusi pada distribusi eksponensial dengan menggunakan parameter yang berbeda.

Teorema 3.1. [1] *Misalkan terdapat n peubah acak yang saling bebas yaitu X_i untuk $i = 1, 2, \cdots, n$ sedemikian sehingga X_i mempunyai fungsi kepadatan peluang f_{X_i} yang didefinisikan sebagai berikut*

$$f_{X_i}(x_i) = \beta_i \ exp(-x_i\beta_i), \tag{3.1}$$

untuk $0 < x_i < \infty$ dan $\beta_i > 0$. Maka penjumlahan peubah acak X_i yaitu $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ mempunyai fungsi kepadatan peluang sebagai berikut

$$f_{S_n}(s_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_1\beta_2 \cdots \beta_n}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n}(\beta_j - \beta_i)} exp(-s_n\beta_i). \tag{3.2}$$

Bukti. Teorema di atas akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika. Pertama-tama persamaan (3.2) akan dibuktikan untuk kasus $n = 2$. Misalkan g adalah suatu fungsi kontinu pada garis bilangan real, akan dihitung integral

$$I_2(g) = E[g(x_1 + x_2)], \tag{3.3}$$

yang didefinisikan sebagai berikut

$$I_2(g) = \int_0^\infty \int_0^\infty g(x_1 + x_2)\ \beta_1\ \beta_2\ e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}\ dx_1\ dx_2. \tag{3.4}$$

Dengan melakukan transformasi variabel pada persamaan (3.4), misalkan $x_i = y_i^2$ untuk $i = 1, 2$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} I_2(g) &= \int_0^\infty \int_0^\infty g(y_1^2 + y_2^2)\ \beta_1\ \beta_2\ e^{-(\beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_2^2)}\ dy_1^2\ dy_2^2 & (3.5) \\ &= 4\beta_1\beta_2 \int_0^\infty \int_0^\infty g(y_1^2 + y_2^2)\ e^{-(\beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_2^2)}\ y_1\ y_2\ dy_1\ dy_2. & (3.6) \end{aligned}$$

Selanjutnya koordinat polar digunakan untuk penyelesaian persamaan (3.6), misalkan

$$\begin{aligned} y_1 &= r sin\theta \\ y_2 &= r cos\theta, \end{aligned}$$

dimana $0 \leq r < \infty$ dan $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Sehingga persamaan (3.6) menjadi

$$\begin{aligned} I_2(g) &= 4\beta_1\beta_2 \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(r^2 sin^2\theta + r^2 cos^2\theta) \\ &\quad e^{-(\beta_1\ r^2 sin^2\theta + \beta_2\ r^2 cos^2\theta)} r^2\ sin\theta\ cos\theta\ d(r sin\theta)\ d(r cos\theta) \\ &= 4\beta_1\beta_2 \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(r^2(sin^2\theta + cos^2\theta)) \\ &\quad e^{-r^2(\beta_1\ sin^2\theta + \beta_2\ cos^2\theta)} r^2\ sin\theta\ cos\theta\ d(r sin\theta)\ d(r cos\theta), \quad (3.7) \end{aligned}$$

atau persamaan (3.7) diatas dapat dituliskan kedalam bentuk integral sebagai berikut

$$I_2(g) = 4\beta_1\beta_2 \int_0^\infty g(r^2) r^3 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_1\ sin^2\theta + \beta_2\ cos^2\theta)} sin\theta\ cos\theta\ d\theta \right] dr. \tag{3.8}$$

Selanjutnya untuk setiap bilangan r positif, kita notasikan

$$\begin{aligned} L_2(r) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_1\ sin^2\theta + \beta_2\ cos^2\theta)} sin\theta\ cos\theta\ d\theta & (3.9) \\ &= e^{-r^2\beta_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_1\ sin^2\theta - \beta_2\ sin^2\theta)} sin\theta\ cos\theta\ d\theta & (3.10) \\ &= e^{-r^2\beta_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_1 - \beta_2) sin^2\theta} sin\theta\ cos\theta\ d\theta. & (3.11) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa dengan menotasikan

$$u = -r^2(\beta_1 - \beta_2)sin^2\theta, \tag{3.12}$$

pada persamaan

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_1-\beta_2)sin^2\theta} sin\theta\ cos\theta\ d\theta, \tag{3.13}$$

maka persamaan (3.13) dapat dituliskan kedalam bentuk persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_1-\beta_2)sin^2\theta} sin\theta\ cos\theta\ d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^u sin\theta\ cos\theta \frac{du}{-2r^2(\beta_1-\beta_2)sin\theta\ cos\theta} \\ &= \frac{1}{-2r^2(\beta_1-\beta_2)} e^{-r^2(\beta_1-\beta_2)sin^2\theta}|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1-e^{-r^2(\beta_1-\beta_2)}}{2r^2(\beta_1-\beta_2)}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Selanjutnya dengan mensubsitusi persamaan (3.14) diatas ke persamaan (3.11) maka persamaan tersebut menjadi

$$L_2(r) = e^{-r^2\beta_2}\left(\frac{1-e^{-r^2(\beta_1-\beta_2)}}{2r^2(\beta_1-\beta_2)}\right) \tag{3.15}$$

$$= \left(\frac{e^{-r^2\beta_2} - e^{-r^2\beta_1}}{2r^2(\beta_1-\beta_2)}\right). \tag{3.16}$$

Berdasarkan persamaan (3.16) yang disubsitusikan kembali kedalam persamaan (3.8) maka diperoleh persamaan sebagai berikut,

$$I_2(g) = 4\beta_1\beta_2 \int_0^\infty g(r^2)r^3 \left(\frac{e^{-r^2\beta_2} - e^{-r^2\beta_1}}{2r^2(\beta_1-\beta_2)}\right) dr \tag{3.17}$$

$$= \frac{2\beta_1\beta_2}{\beta_1-\beta_2}\int_0^\infty g(r^2)(e^{-r^2\beta_2} - e^{-r^2\beta_1})rdr. \tag{3.18}$$

Selanjutnya dilakukan transformasi variabel $s_2 = r^2$ dan subsitusikan kedalam persamaan (3.18), sehingga diperoleh

$$I_2(g) = \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1-\beta_2}\int_0^\infty g(s_2)(e^{-s_2\beta_2} - e^{-s_2\beta_1})ds_2 \tag{3.19}$$

$$= \int_0^\infty g(s_2)\left[\frac{\beta_1\beta_2}{\beta_2-\beta_1}e^{-s_2\beta_1} - e^{-s_2\beta_2}\right] ds_2. \tag{3.20}$$

Berdasarkan persamaan (3.20) diatas, untuk setiap fungsi g kontinu dan berada pada $\mathbb{R}$ bahwa peubah acak S_2 mempunyai fungsi kepadatan peluang f_{S_2} diberikan untuk setiap bilangan real s_2 positif yaitu

$$f_{S_2}(s_2) = \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_2 - \beta_1}(e^{-s_2\beta_1} - e^{-s_2\beta_2}). \tag{3.21}$$

Hal ini dapat disimpulkan karena

$$\int_0^\infty f_{S_2}(s_2)ds_2 = \int_0^\infty \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_2 - \beta_1}(e^{-s_2\beta_1} - e^{-s_2\beta_2})ds_2 = 1. \tag{3.22}$$

sehingga formula diatas berlaku untuk $n = 2$.

Langkah selanjutnya akan dibuktikan persamaan (3.2) untuk kasus $n = 3$. Misalkan g adalah suatu fungsi kontinu pada garis bilangan real, dengan $S_3 = X_1 + X_2 + X_3$ atau dapat ditulis $S_3 = S_2 + X_3$. Berikut ini akan dihitung integral dari

$$I_3(g) = E[g(s_2 + x_3)], \tag{3.23}$$

yang didefinisikan sebagai berikut

$$I_3(g) = \int_0^\infty \int_0^\infty g(s_2 + x_2)\frac{\beta_1\beta_2}{\beta_2 - \beta_1}\beta_3(e^{-s_2\beta_1} - e^{-s_2\beta_2})e^{-\beta_3 x_3}\, ds_2\, dx_3. \tag{3.24}$$

Dengan melakukan transformasi variabel, misalkan $s_2 = y_1^2$ dan $x_3 = y_2^2$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} I_3(g) &= \int_0^\infty \int_0^\infty g(y_1^2 + y_2^2)\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\beta_2 - \beta_1}\left(e^{-(\beta_1 y_1^2 + \beta_3 y_2^2)} - e^{-(\beta_2 y_1^2 + \beta_3 y_2^2)}\right)\, dy_1^2\, dy_2^2 \\ &= 4\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\beta_2 - \beta_1}\int_0^\infty \int_0^\infty g(y_1^2 + y_2^2)\left(e^{-(\beta_1 y_1^2 + \beta_3 y_2^2)} - e^{-(\beta_2 y_1^2 + \beta_3 y_2^2)}\right) y_1\, y_2\, dy_1\, dy_2. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Persamaan (3.25) diatas selanjutnya akan dihitung dengan menggunakan koordinat polar, misalkan

$$\begin{aligned} y_1 &= r sin\theta \\ y_2 &= r cos\theta, \end{aligned}$$

dimana $0 \leq r < \infty$ dan $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Setelah dilakukan subsitusi y_1 dan y_2 kepada $I_3(g)$ pada persamaan (3.25) diatas, sehingga persamaan menjadi

$$\begin{aligned} I_3(g) &= 4\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\beta_2-\beta_1}\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(r^2sin^2\theta + r^2cos^2\theta) \\ &\quad \left(e^{-(\beta_1 r^2 sin^2\theta+\beta_3 r^2cos^2\theta)} - e^{-(\beta_2 r^2 sin^2\theta+\beta_3 r^2 cos^2\theta)}\right) r^2\ sin\theta\ cos\theta\ d(rsin\theta)\ d(rcos\theta) \\ &= 4\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\beta_2-\beta_1}\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(r^2)e^{-r^2(\beta_1 sin^2\theta+\beta_3cos^2\theta)}r^2\ sin\theta\ cos\theta\ d(rsin\theta)\ d(rcos\theta) \\ &\quad -4\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\beta_2-\beta_1}\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(r^2)e^{-r^2(\beta_2 sin^2\theta+\beta_3cos^2\theta)}r^2\ sin\theta\ cos\theta\ d(rsin\theta)\ d(rcos\theta), \end{aligned} \tag{3.26}$$

atau persamaan (3.26) diatas dapat dituliskan kedalam bentuk integral sebagai berikut

$$\begin{aligned} I_3(g) &= 4\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\beta_2-\beta_1}\int_0^\infty g(r^2)r^3\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_1 sin^2\theta+\beta_3cos^2\theta)}sin\theta\ cos\theta\ d\theta\right]dr \\ &\quad -4\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\beta_2-\beta_1}\int_0^\infty g(r^2)r^3\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_2 sin^2\theta+\beta_3cos^2\theta)}sin\theta\ cos\theta\ d\theta\right]dr. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Selanjutnya untuk setiap bilangan r positif, dinotasikan

$$L_3(r_1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_1 sin^2\theta+\beta_3cos^2\theta)}sin\theta\ cos\theta\ d\theta \tag{3.28}$$

$$= e^{-r^2\beta_3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_1 sin^2\theta-\beta_3 sin^2\theta)}sin\theta\ cos\theta\ d\theta \tag{3.29}$$

$$= e^{-r^2\beta_3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_1-\beta_3)sin^2\theta}sin\theta\ cos\theta\ d\theta. \tag{3.30}$$

Perhatikan bahwa dengan menotasikan

$$u = -r^2(\beta_1-\beta_3)sin^2\theta, \tag{3.31}$$

pada persamaan

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_1-\beta_3)sin^2\theta}sin\theta\ cos\theta\ d\theta, \tag{3.32}$$

maka persamaan (3.32) menjadi

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_1-\beta_3)sin^2\theta}sin\theta\ cos\theta\ d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^u sin\theta\ cos\theta\frac{du}{-2r^2(\beta_1-\beta_3)sin\theta\ cos\theta} \\ &= \frac{1}{-2r^2(\beta_1-\beta_3)}e^{-r^2(\beta_1-\beta_3)sin^2\theta}|_0^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1 - e^{-r^2(\beta_1-\beta_3)}}{2r^2(\beta_1 - \beta_3)}. \tag{3.33}$$

Selanjutnya dengan mensubsitusi persamaan (3.33) diatas ke persamaan (3.30) maka persamaan tersebut menjadi

$$L_3(r_1) = e^{-r^2\beta_3}\left(\frac{1 - e^{-r^2(\beta_1-\beta_3)}}{2r^2(\beta_1 - \beta_3)}\right) \tag{3.34}$$

$$= \frac{e^{-r^2\beta_3} - e^{-r^2\beta_1}}{2r^2(\beta_1 - \beta_3)}. \tag{3.35}$$

Langkah selanjutnya adalah dengan menotasikan $L_3(r_2)$ seperti pada persamaan (3.28) sehingga $L_3(r_2)$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$L_3(r_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(\beta_2 sin^2\theta+\beta_3 cos^2\theta)} sin\theta \; cos\theta \; d\theta. \tag{3.36}$$

Dengan langkah yang sama seperti pada persamaan (3.28) maka persamaan (3.36) dapat dituliskan sebagai berikut

$$L_3(r_2) = \frac{e^{-r^2\beta_3} - e^{-r^2\beta_2}}{2r^2(\beta_2 - \beta_3)}. \tag{3.37}$$

Berdasarkan persamaan (3.35) dan persamaan (3.37) yang disubsitusikan kembali kedalam persamaan $I_3(g)$ pada persamaan (3.27) maka diperoleh persamaan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} I_3(g) &= 4\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\beta_2 - \beta_1}\int_0^\infty g(r^2)r^3\left(\frac{e^{-r^2\beta_3} - e^{-r^2\beta_1}}{2r^2(\beta_1 - \beta_3)}\right)dr \\ &\quad -4\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\beta_2 - \beta_1}\int_0^\infty g(r^2)r^3\left(\frac{e^{-r^2\beta_3} - e^{-r^2\beta_2}}{2r^2(\beta_2 - \beta_3)}\right)dr \\ &= 2\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{(\beta_2 - \beta_1)(\beta_1 - \beta_3)}\int_0^\infty g(r^2)(e^{-r^2\beta_3} - e^{-r^2\beta_1})rdr \\ &\quad -2\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{(\beta_2 - \beta_1)(\beta_2 - \beta_3)}\int_0^\infty g(r^2)(e^{-r^2\beta_3} - e^{-r^2\beta_2})rdr. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Selanjutnya dilakukan transformasi variabel $s_3 = r^2$ dan subsitusikan kedalam persamaan (3.38) diatas, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} I_3(g) &= \frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{(\beta_2 - \beta_1)(\beta_1 - \beta_3)}\int_0^\infty g(s_3)\left(e^{-s_3\beta_3} - e^{-s_3\beta_1}\right)ds_3 \\ &\quad -\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{(\beta_2 - \beta_1)(\beta_2 - \beta_3)}\int_0^\infty g(s_3)\left(e^{-s_3\beta_3} - e^{-s_3\beta_2}\right)ds_3 \\ &= \int_0^\infty g(s_3)\left[\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{(\beta_2 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_1)}(e^{-s_3\beta_1} - e^{-s_3\beta_3})\right] \end{aligned}$$

$$- \left[\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{(\beta_2 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_2)} (e^{-s_3\beta_2} - e^{-s_3\beta_3}) \right] ds_3. \tag{3.39}$$

Berdasarkan persamaan (3.39) diatas untuk setiap fungsi g kontinu dan berada pada $\mathbb{R}$ terlihat peubah acak S_3 mempunyai fungsi kepadatan peluang f_{S_3} diberikan untuk setiap bilangan real s_3 positif yaitu

$$f_{S_3}(s_3) = \left[\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{(\beta_2 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_1)} (e^{-s_3\beta_1} - e^{-s_3\beta_3}) \right] - \left[\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{(\beta_2 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_2)} (e^{-s_3\beta_2} - e^{-s_3\beta_3}) \right]. \tag{3.40}$$

Fungsi kepadatan peluang f_{S_3} pada persamaan (3.40) dapat juga ditulis sebagai berikut

$$f_{S_3}(s_3) = \left[\frac{\beta_2}{(\beta_2 - \beta_1)} \frac{\beta_1\beta_3}{(\beta_3 - \beta_1)} (e^{-s_3\beta_1} - e^{-s_3\beta_3}) \right] - \left[\frac{\beta_1}{(\beta_2 - \beta_1)} \frac{\beta_2\beta_3}{(\beta_3 - \beta_2)} (e^{-s_3\beta_2} - e^{-s_3\beta_3}) \right],$$

karena $\frac{\beta_1\beta_3}{(\beta_3-\beta_1)} \left(e^{-s\beta_1} - e^{-s\beta_3}\right)$ merupakan konvolusi dari $f_{X_1} * f_{X_3}$ dan $\frac{\beta_2\beta_3}{(\beta_3-\beta_2)} \left(e^{-s\beta_2} - e^{-s\beta_3}\right)$ merupakan konvolusi dari $f_{X_2} * f_{X_3}$ maka fungsi kepadatan peluang f_{S_3} dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} f_{S_3} &= [\frac{\beta_2}{(\beta_2 - \beta_1)} f_{X_1} * f_{X_3}] - [\frac{\beta_1}{(\beta_2 - \beta_1)} f_{X_2} * f_{X_3}] && (3.41) \\ &= \prod_{j=1, j\neq 1}^{2} \frac{\beta_j}{(\beta_j - \beta_1)} f_{X_1} * f_{X_3} + \prod_{j=1, j\neq 2}^{2} \frac{\beta_j}{(\beta_j - \beta_2)} f_{X_2} * f_{X_3} && (3.42) \\ &= \sum_{i=1}^{2} \prod_{j=1, j\neq i}^{2} \frac{\beta_j}{(\beta_j - \beta_i)} f_{X_i} * f_{X_3}. && (3.43) \end{aligned}$$

Langkah selanjutnya, misalkan bahwa persamaan (3.2) berlaku benar untuk $n = k$ dan akan dibuktikan benar untuk $n = k+1$. Misal $X_1, \cdots, X_k, X_{k+1}$ adalah $k+1$ peubah acak yang mana, dimana X_i dengan $i = 1, \cdots, k+1$ memiliki fungsi kepadatan peluang f_{X_i} yang berdistribusi eksponensial, sedimikian sehingga

$$f_{X_i}(x_i) = \beta_i \, exp(-x_i\beta_i). \tag{3.44}$$

Diasumsikan bahwa S_k dan X_{k+1} saling bebas dengan $S_{k+1} = S_k + X_{k+1}$. Diperoleh bahwa S_{k+1} mempunyai fungsi kepadatan peluang $f_{S_{k+1}}$ untuk setiap $s \in \mathbb{R}^+$ dengan konvolusi

$$f_{S_{k+1}}(s_{k+1}) = f_{S_k} * f_{X_{k+1}}(s_{k+1}), \tag{3.45}$$

atau dapat juga ditulis kedalam bentuk persamaan sebagai berikut

$$f_{S_{k+1}}(s_{k+1}) = \Sigma_{i=1}^{k} \prod_{j=1, j\neq i}^{k} \frac{\beta_j}{(\beta_j - \beta_i)} f_{X_i} * f_{X_{k+1}}(s_{k+1}). \tag{3.46}$$

Pada kasus $n = 2$ seperti persamaan (3.21) telah dibuktikan bahwa

$$f_{X_i} * f_{X_{k+1}}(s_{k+1}) = \frac{\beta_i \beta_{k+1}}{\beta_{k+1} - \beta_i}(e^{-s_{k+1}\beta_i} - e^{-s_{k+1}\beta_{k+1}}). \tag{3.47}$$

Berdasarkan persamaan (3.47) diatas maka persamaan (3.46) dapat dituliskan seperti berikut

$$\begin{aligned} f_{S_{k+1}}(s_{k+1}) &= \Sigma_{i=1}^{k} \prod_{j=1, j\neq i}^{k} \frac{\beta_j}{(\beta_j - \beta_i)} \left[\frac{\beta_i \beta_{k+1}}{\beta_{k+1} - \beta_i}(e^{-s_{k+1}\beta_i} - e^{-s_{k+1}\beta_{k+1}}) \right] \\ &= \Sigma_{i=1}^{k} \prod_{j=1, j\neq i}^{k} \frac{\beta_j}{(\beta_j - \beta_i)} \left[\frac{\beta_i \beta_{k+1}}{\beta_{k+1} - \beta_i} e^{-s_{k+1}\beta_i} - \frac{\beta_i \beta_{k+1}}{\beta_{k+1} - \beta_i} e^{-s_{k+1}\beta_{k+1}} \right]. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Selanjutnya persamaan (3.48) menjadi bentuk berikut

$$\begin{aligned} f_{S_{k+1}}(s_{k+1}) &= \Sigma_{i=1}^{k} \frac{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{k+1}}{\prod_{j=1, j\neq i}^{k+1} (\beta_j - \beta_i)} e^{-s_{k+1}\beta_i} \\ &+ \left[\Sigma_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(\beta_i - \beta_{k+1}) \prod_{j=1, j\neq i}^{k+1} (\beta_j - \beta_i)} \right] \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{k+1} e^{-s_{k+1}\beta_i}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Perhatikan persamaan (3.50) berikut ini

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{k} (\beta_j - \beta_{k+1})} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(\beta_i - \beta_{k+1}) \prod_{j=1, j\neq 1}^{k} (\beta_j - \beta_i)}. \tag{3.50}$$

Persamaan (3.50) subsitusikan kepada persamaan (3.49) diatas. Sehingga fungsi kepadatan peluang $f_{S_{k+1}}$ menjadi

$$\begin{aligned} f_{S_{k+1}}(s_{k+1}) &= \Sigma_{i=1}^{k} \frac{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{k+1}}{\prod_{j=1, j\neq i}^{k+1} (\beta_j - \beta_i)} e^{-s_{k+1}\beta_i} \\ &+ \frac{1}{\prod_{j=1}^{k+1} (\beta_j - \beta_{k+1})} \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{k+1} e^{-s_{k+1}\beta_i} \end{aligned}$$

atau dapat dituliskan kedalam bentuk persamaan berikut ini,

$$f_{S_{k+1}}(s_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{k+1}}{\prod_{j=1, j\neq i}^{k+1} (\beta_j - \beta_i)} exp(-s_{k+1}\beta_i), \tag{3.51}$$

untuk setiap $s_{k+1} \in \mathbb{R}^+$. $\square$

Dengan diperolehnya persamaan (3.51) maka persamaan (3.2) terbukti benar untuk kasus $n = k + 1$. Berdasarkan induksi matematika, Teorema (3.1) telah dibuktikan. Bahwa konvolusi dari peubah acak X_i dengan $i = 1, \cdots, n$ mempunyai fungsi kepadatan peluang f_{S_n} sebagai berikut

$$f_{S_n}(s_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n}{\prod_{j=1, j \neq i}^{n} (\beta_j - \beta_i)} exp(-s_n \beta_i). \tag{3.52}$$

3.2 Konvolusi Distribusi Eksponensial dengan Parameter Sama

Pada Subbab (3.2) ini akan dibahas tentang konvolusi peubah acak X_i dengan $i = 1, \cdots, n$ yang berdistribusi eksponensial dengan menggunakan parameter β yang sama.

Teorema 3.2. [1] *Misalkan terdapat n peubah acak yang saling bebas yaitu X_i untuk $i = 1, 2, \cdots, n$ sedemikian sehingga X_i mempunyai fungsi kepadatan peluang f_{X_i} yang didefinisikan sebagai berikut*

$$f_{X_i}(x_i) = \beta \; exp(-x_i \beta), \tag{3.53}$$

untuk $0 < x_i < \infty$ dengan $i = 1, \cdots, n$ dan $\beta > 0$. Maka penjumlahan peubah acak X_i yaitu $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ mempunyai fungsi kepadatan peluang sebagai berikut

$$f_{S_n}(s_n) = \frac{\beta^n {s_n}^{n-1}}{(n-1)!} exp(-s_n \beta). \tag{3.54}$$

Bukti. Teorema ini akan dibuktikan dengan pembuktian langsung. Langkah awal dalam pembuktian teorama ini adalah dengan memisalkan g sebagai suatu fungsi kontinu pada garis bilangan real. Akan dihitung integral dari

$$I_n(g) = E[g(x_1 + \cdots + x_n)], \tag{3.55}$$

yang dapat didefinisikan sebagai berikut

$$I_n(g) = \beta^n \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} g(x_1 + \cdots + x_n) e^{-\beta(x_1 + \cdots + x_n)} dx_1 \cdots dx_n, \tag{3.56}$$

Selanjutnya dilakukan transformasi variabel dengan memisalkan $x_i = y_i^2$ dimana $0 \leq y_i < \infty$ untuk $i = 1, 2, \cdots, n$, maka diperoleh persamaan menjadi

$$\begin{aligned} I_n(g) &= \beta^n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty g(y_1^2 + \cdots + y_n^2) e^{-\beta(y_1^2+\cdots+y_n^2)} dy_1^2 \cdots dy_n^2 \\ &= 2^n \beta^n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty g(y_1^2 + \cdots + y_n^2)(y_1 \cdots y_n) e^{-\beta(y_1^2+\cdots+y_n^2)} dy_1 \cdots dy_n. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Integral pada persamaan (3.57) diatas dapat diselesaikan dengan memisalkan,

$$\begin{aligned} y_1 &= r \sin\phi_{n-1} \cdots \sin\phi_3 \sin\phi_2 \sin\phi_1 \\ y_2 &= r \sin\phi_{n-1} \cdots \sin\phi_3 \sin\phi_2 \cos\phi_1 \\ y_3 &= r \sin\phi_{n-1} \cdots \sin\phi_3 \cos\phi_2 \\ \cdots &= \cdots \\ y_{n-1} &= r \sin\phi_{n-1} \cos\phi_{n-2} \\ y_n &= r \cos\phi_{n-1}, \end{aligned}$$

dimana $0 \leq r < \infty$, dan $0 \leq \phi_k < \frac{\pi}{2}$, untuk setiap $k = 1, \cdots, n-1$. Selanjutnya misalkan $r_k^2 = y_1^2 + \cdots + y_k^2$ dan $r_k = r$, serta $\cos(\phi_k) = \frac{y_{k+1}}{r_{k+1}}$ dan $\sin(\phi_k) = \frac{r_k}{r_{k+1}}$. Berdasarkan pemisalan diatas maka diperoleh Jacobian dari perubahan variabel y_i dengan $i = 1, 2, \cdots, n$ diberikan sebagai berikut

$$r^{n-1} \sin_{\phi_{n-1}}^{n-2} \sin_{\phi_{n-2}}^{n-3} \cdots \sin_{\phi_2} = r^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin^{k-1}(\phi_k). \quad (3.58)$$

Selanjutnya, berdasarkan pemisalan diatas juga, maka diperoleh perkalian dari y_i sebagai berikut

$$\prod_{i=1}^{n} y_i = r^n \prod_{k=1}^{n-1} \sin^k(\phi_k) \cos(\phi_k). \quad (3.59)$$

Dengan mensubsitusikan persamaan (3.58) dan persamaan (3.59) ke persamaan (3.57) diatas, maka diperoleh

$$\begin{aligned} I_n(g) &= 2^n \beta^n \left[\prod_{k=1}^{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-1}(\phi_k) \cos(\phi_k) d\phi_k \right] \int_0^\infty g(r^2) r^{2n-1} e^{-\beta r^2} dr \\ &= \frac{2\beta^n}{(n-1)!} \int_0^\infty g(r^2) r^{2n-1} e^{-\beta r^2} dr. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Selanjutnya dilakukan transformasi variabel $s_n = r^2$ pada persamaan (3.60) diatas, maka diperoleh persamaan yaitu

$$\begin{aligned} I_n(g) &= \frac{2\beta^n}{(n-1)!}\int_0^\infty g(r^2)\frac{r^{2n}}{r}e^{-\beta r^2}dr\left(\frac{2r}{2r}\right) && (3.61)\\ &= \frac{2\beta^n}{(n-1)!}\frac{1}{2}\int_0^\infty g(r^2)\frac{r^{2n}}{r^2}e^{-\beta r^2}2rdr && (3.62)\\ &= \frac{\beta^n}{(n-1)!}\int_0^\infty g(r^2)r^{2n-2}e^{-\beta r^2}d(r^2) && (3.63)\\ &= \frac{\beta^n}{(n-1)!}\int_0^\infty g(s_n){s_n}^{n-1}e^{-s_n\beta}ds. && (3.64)\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3.64) diatas memperlihatkan bahwa peubah acak S_n mempunyai fungsi kepadatan peluang f_{S_n} sebagai berikut

$$f_{S_n}(s_n) = \frac{\beta^n {s_n}^{n-1}}{(n-1)!}exp(-s_n\beta). \tag{3.65}$$

□

Konvolusi dari peubah acak X_i dan $i = 1, \cdots, n$ berdistribusi eksponensial, dengan menggunakan parameter β yang sama untuk setiap peubah acak X_i mempunyai fungsi kepadatan peluang f_{S_n} seperti persamaan (3.65) diatas.

3.3 Distribusi Eksponensial yang dibangkitkan oleh Konstanta Penstabil

Pada Subbab (3.3) ini akan dibahas tentang konvolusi pada distribusi eksponensial yang dibangkitkan oleh konstanta penstabil dengan menggunakan parameter yang sama. Misalkan X_i adalah suatu peubah acak yang memiliki distribusi eksponensial ($X_i \sim Exp(\beta)$). Kemudian definisikan nilai ke-i dengan $i = 1, 2, \cdots, n$ dari peubah acak baru W_i sebagai berikut

$$w_i = \frac{x_i}{x_m}, \tag{3.66}$$

dimana

$$x_m = max\{x_1, ..., x_n\}, x_i \in [0, x_m]; n \in \mathbb{Z}^+,$$

maka peubah acak W_i tersebut memiliki fkp

$$f_{W_i}(w_i;\beta) = \theta\ \beta\ exp(-w_i\beta), \tag{3.67}$$

untuk setiap $0 < w_i < 1$, dan $\beta > 0$ dengan θ merupakan penstabil bentuk sebaran yang bergantung pada β yang dapat ditentukan sebagai berikut

$$\int_0^1 f(w_i;\beta)\, dw_i = 1 \tag{3.68}$$

$$\int_0^1 \theta\ \beta\ exp(-w_i\beta)\ dw_i = 1. \tag{3.69}$$

Terlebih dahulu ditentukan nilai θ, dengan menyelesaikan integral pada persamaan (3.69)

$$\int_0^1 \theta\ \beta\ exp(-w_i\beta)\ dw_i = 1 \tag{3.70}$$

$$\int_0^1 \theta\ exp(-w_i\beta)\ d(-w_i\beta) = 1 \tag{3.71}$$

$$-\theta exp(-w_i\beta)|_0^1 = 1, \tag{3.72}$$

dengan mensubsitusikan nilai w_i, maka diperoleh

$$-\theta(exp(-1\beta) - exp(-0\beta)) = 1 \tag{3.73}$$

$$-\theta(exp(-\beta) - 1) = 1 \tag{3.74}$$

$$\theta = \frac{-1}{exp(-\beta) - 1}. \tag{3.75}$$

Sehingga fungsi kepadatan peluang W_i dapat ditulis sebagai berikut

$$f_{W_i}(w_i;\beta) = \frac{-1}{(exp(-\beta) - 1)}\beta\ exp(-w_i\beta), \tag{3.76}$$

untuk setiap $0 < w < 1$, dan $\beta > 0$. Kehadiran konstanta penstabil pada distribusi eksponensial memberikan bentuk fungsi kepadatan peluang yang baru dari konvolusi pada distribusi eksponensial ($W \sim Exp_{penstabil}(\beta)$).

Teorema 3.3. *Misalkan terdapat* n *peubah acak yang saling bebas yaitu* W_i *untuk* $i = 1, 2, \cdots, n$ *sedemikian sehingga* W_i *mempunyai fungsi kepadatan peluang* f_{W_i} *yang didefinisikan sebagai berikut*

$$f_{W_i}(w_i) = \frac{-1}{(exp(-\beta) - 1)}\beta\ exp(-w_i\beta), \tag{3.77}$$

untuk $0 < w_i < \infty$ *dengan* $i = 1, \cdots, n$ *dan* $\beta > 0$. *Maka penjumlahan peubah acak* W_i *yaitu* $S_{p_n} = \sum_{i=1}^{n} W_i$ *mempunyai fungsi kepadatan peluang sebagai berikut*

$$f_{S_{p_n}}(s_{p_n}) = \left(\frac{-1}{exp(-\beta) - 1}\right)^n \frac{\beta^n {s_{p_n}}^{n-1}}{(n-1)!} exp(-s_{p_n}\beta). \tag{3.78}$$

Bukti. Teorema ini dapat dibuktikan dengan pembuktian langsung. Dengan asumsi parameter β yang sama maka dapat ditentukan fungsi kepadatan peluang dari konvolusi pada distribusi eksponensial ($W \sim Exp_{penstabil}$). Langkah awal dalam pembuktian teorama ini adalah dengan memisalkan g adalah suatu fungsi kontinu pada garis bilangan real, akan dihitung integral dari

$$I_n(g) = E[g(w_1 + \cdots + w_n)], \tag{3.79}$$

yang dapat didefinisikan sebagai berikut

$$I_n(g) = \left(\frac{-1}{e^{-\beta} - 1}\right)^n \beta^n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty g(w_1 + \cdots + w_n) e^{-\beta(w_1 + \cdots + w_n)} dw_1 \cdots dw_n, \tag{3.80}$$

Misalkan $w_i = y_i^2$ dimana $0 \leq y_i < \infty$ untuk $i = 1, 2, \cdots, n$, dengan variabel baru diperoleh persamaan

$$\begin{aligned} I_n(g) &= \left(\frac{-1}{e^{-\beta} - 1}\right)^n \beta^n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty g(y_1^2 + \cdots + y_n^2) e^{-\beta(y_1^2 + \cdots + y_n^2)} dy_1^2 \cdots dy_n^2 \\ &= \left(\frac{-1}{e^{-\beta} - 1}\right)^n 2^n \beta^n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty g(y_1^2 + \cdots + y_n^2)(y_1 \cdots y_n) e^{-\beta(y_1^2 + \cdots + y_n^2)} dy_1 \cdots dy_n. \end{aligned} \tag{3.81}$$

Integral pada persamaan diatas dapat diselesaikan dengan memisalkan

$$\begin{aligned} y_1 &= r \sin\phi_{n-1} \cdots \sin\phi_3 \sin\phi_2 \sin\phi_1 \\ y_2 &= r \sin\phi_{n-1} \cdots \sin\phi_3 \sin\phi_2 \cos\phi_1 \\ y_3 &= r \sin\phi_{n-1} \cdots \sin\phi_3 \cos\phi_2 \\ \cdots &= \cdots \\ y_{n-1} &= r \sin\phi_{n-1} \cos\phi_{n-2} \\ y_n &= r \cos\phi_{n-1}, \end{aligned}$$

dimana $0 \leq r < \infty$, dan $0 \leq \phi_k < \frac{\pi}{2}$ untuk setiap $k = 1, \cdots, n-1$. Misalkan $r_k^2 = y_1^2 + \cdots + y_k^2$ dan $r_k = r$, diperoleh $\cos(\phi_k) = \frac{y_{k+1}}{r_{k+1}}$ dan $\sin(\phi_k) = \frac{r_k}{r_{k+1}}$.

Berdasarkan pemisalan diatas maka diperoleh Jacobian dari perubahan variabel y_i dengan $i = 1, 2, \cdots, n$ diberikan sebagai berikut

$$r^{n-1} \sin^{n-2}_{\phi_{n-1}} \sin^{n-3}_{\phi_{n-2}} \cdots \sin_{\phi_2} = r^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin^{k-1}(\phi_k). \tag{3.82}$$

Selanjutnya, berdasarkan pemisalan diatas dilakukan perkalian y_i dengan $i = 1, 2, \cdots, n$ maka diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\prod_{i=1}^{n} y_i = r^n \prod_{k=1}^{n-1} \sin^k(\phi_k) \cos(\phi_k). \tag{3.83}$$

Selanjutnya dilakukan subsitusi persamaan (3.82) dan persamaan (3.83) ke persamaan (3.81) diatas, maka diperoleh persamaan

$$I_n(g) = \left(\frac{-1}{e^{-\beta} - 1}\right)^n 2^n \beta^n \left[\prod_{k=1}^{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-1}(\phi_k) \cos(\phi_k)\, d\phi_k\right] \int_0^{\infty} g(r^2) r^{2n-1} e^{-\beta r^2} dr \tag{3.84}$$

dengan diselesaikan integral pada persamaan (3.84) diatas maka diperoleh persamaan berikut

$$I_n(g) = \left(\frac{-1}{e^{-\beta} - 1}\right)^n \frac{2\beta^n}{(n-1)!} \int_0^{\infty} g(r^2) r^{2n-1} e^{-\beta r^2} dr. \tag{3.85}$$

Pada persamaan (3.85) dilakukan transformasi variabel $s_{p_n} = r^2$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
I_n(g) &= \left(\frac{-1}{e^{-\beta} - 1}\right)^n \frac{2\beta^n}{(n-1)!} \int_0^{\infty} g(r^2) \frac{r^{2n}}{r} e^{-\beta r^2}\, dr \left(\frac{2r}{2r}\right) && (3.86)\\
&= \left(\frac{-1}{e^{-\beta} - 1}\right)^n \frac{2\beta^n}{(n-1)!} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} g(r^2) \frac{r^{2n}}{r^2}\, e^{-\beta r^2}\, 2r\, dr && (3.87)\\
&= \left(\frac{-1}{e^{-\beta} - 1}\right)^n \frac{\beta^n}{(n-1)!} \int_0^{\infty} g(r^2) r^{2n-2}\, e^{-\beta r^2}\, d(r^2) && (3.88)\\
&= \left(\frac{-1}{e^{-\beta} - 1}\right)^n \frac{\beta^n}{(n-1)!} \int_0^{\infty} g(s_{p_n}) s_{p_n}^{n-1}\, e^{-s_{p_n}\beta}\, dx && (3.89)\\
&= \left(\frac{-1}{e^{-\beta} - 1}\right)^n \int_0^{\infty} g(s_{p_n}) \frac{\beta^n\, s_{p_n}^{n-1}}{(n-1)!} e^{-s_{p_n}\beta}\, dx. && (3.90)
\end{aligned}$$

□

Berdasarkan persamaan(3.90) memperlihatkan bahwa peubah acak S_{p_n} pada distribusi eksponensial ($W_i \sim Exp_{penstabil}$) mempunyai fungsi kepadatan peluang

$f_{S_{p_n}}$ sebagai berikut

$$f_{S_{p_n}}(s_{p_n}) = \left(\frac{-1}{exp(-\beta)-1}\right)^n \frac{\beta^n s_{p_n}^{n-1}}{(n-1)!} exp(-s_{p_n}\beta). \tag{3.91}$$

BAB IV

KESIMPULAN

Konvolusi adalah penjumlahan dari beberapa peubah acak. Misalkan $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ adalah jumlah dari peubah acak X_i dan $i = 1, 2, \cdots, n$, yang berdistribusi eksponensial dengan fungsi kepadatan peluang (fkp) sebagai berikut

$$f_{X_i}(x_i; \beta_i) = \beta_i \; exp(-x_i\beta_i). \tag{4.1}$$

dengan $0 < x_i < \infty$ dan $\beta_i > 0$. Fungsi kepadatan peluang (fkp) dari konvolusi distribusi eksponensial dengan menggunakan parameter berbeda adalah

$$f_{S_n}(s_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(\beta_j - \beta_i)} exp(-s_n\beta_i). \tag{4.2}$$

Fungsi kepadatan peluang (fkp) dari konvolusi distribusi eksponensial dengan menggunakan parameter sama adalah

$$f_{S_n}(s_n) = \frac{\beta^n s_n^{n-1}}{(n-1)!} e^{-s_n\beta}. \tag{4.3}$$

Misalkan $S_{p_n} = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ adalah jumlah dari peubah acak W_i dan $i = 1, 2, \cdots, n$, dimana $(W_i \sim Exp_{penstabil}(\beta))$ dengan fungsi kepadatan peluang (fkp) sebagai berikut

$$f_{W_i}(w_i; \beta) = \frac{-1}{(exp(-\beta) - 1)} \beta \; exp(-w_i\beta). \tag{4.4}$$

untuk setiap $0 < w_i < 1$, dan $\beta > 0$. Fungsi kepadatan peluang (fkp) dari konvolusi distribusi eksponensial yang dibangkitkan oleh konstanta penstabil dengan menggunakan parameter yang sama adalah

$$f_{S_{p_n}}(s_{p_n}) = \left(\frac{-1}{exp(-\beta) - 1}\right)^n \frac{\beta^n s_{p_n}^{n-1}}{(n-1)!} e^{-s_{p_n}\beta}. \tag{4.5}$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Akkouchi, Mohamed. 2008. *On The Convolution of Eksponensial Distributions.* Journal of the Chungcheong Mathematical Society, Vol. 21, No. 4

[2] Bain, L.J. dan M. Engelhardt. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics Second Edition.* Duxbury Press, California

[3] Barnet, S dan R, G, Cameron. 1985. *Introduction to Mathematical Control Treory Second Edition.* Clarendon Preess. Oxford

[4] Casella, G dan R. L, Berger. 1990.*Statistical Inference.* Ed. Ke-1, Pasific Grove, California

[5] Gnedenko, B. V. dan A. N. Kolmogorov. 1968. *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables.* 2^{nd}*ed*, Addison-Wesley, London

[6] Laha, R. G dan V. K. Rothatgi. 1979. *Probability Theory.* Jhon Wiley and Sons. New York

[7] Rao, M. M. dan R. J. Swift. 2006. *Probability with Applications Second Edition.* Springer, United States of America

[8] Tucker, H. G. 1967. *Probability and Mathematical Statistics.* Academic Press, London

LAMPIRAN 1

Pada lampiran ini akan dibahas beberapa formula yang digunakan pada pembuktian teorema. Berikut ini adalah formula yang digunakan untuk pembuktian teorema (3.1) tentang konvolusi distribusi eksponensial yang menggunakan parameter yang berbeda.

Formula 1. *Misalkan terdapat n bilangan komplek yaitu $z_1, z_2, \cdots, z_n$, dan dinotasikan fungsi bilangan komplek sebagai berikut*

$$F(z) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(z_j - z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(z_i - z)\prod_{j=1,j\neq 1}^{n}(z_j - z_i)}. \tag{4.6}$$

Bukti. Pembuktian untuk formula ini dilakukan dengan menggunakan induksi matematika. Pertama-tama akan dibuktikan untuk $n = 1$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{\prod_{j=1}^{1}(z_j - z)} \\ &= \frac{1}{(z_1 - z)} \\ &= \frac{1}{(z_1 - z)\prod_{j=1,j\neq i}^{1}(z_j - z_i)} \\ &= \sum_{1}^{1} \frac{1}{(z_1 - z)\prod_{j=1,j\neq i}^{1}(z_j - z_i)}. \end{aligned}$$

Selanjutnya akan dibuktikan untuk $n = 2$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{\prod_{j=1}^{2}(z_j - z)} && (4.7) \\ &= \frac{1}{(z_1 - z)(z_2 - z)}. && (4.8) \end{aligned}$$

Persamaan (4.8) akan dikalikan dengan persamaan $\frac{(z_2 - z_1)}{(z_2 - z_1)} = 1$ sehingga diperoleh

$$F(z) = \frac{(z_2 - z_1)}{(z_1 - z)(z_2 - z)(z_2 - z_1)}. \tag{4.9}$$

Selanjutnya persamaan (4.9) dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{(z_2 - z_1 - z + z)}{(z_1 - z)(z_2 - z)(z_2 - z_1)} \\ &= \frac{(z_2 - z) - (z_1 - z)}{(z_1 - z)(z_2 - z)(z_2 - z_1)} \\ &= \frac{1}{(z_1 - z)(z_2 - z_1)} + \frac{1}{(z_2 - z)(z_1 - z_2)} \\ &= \frac{1}{(z_1 - z)\prod_{j=1,j\neq 1}^{2}(z_j - z_1)} + \frac{1}{(z_2 - z)\prod_{j=1,j\neq 2}^{2}(z_j - z_2)} \\ &= \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{(z_i - z)\prod_{j=1,j\neq i}^{2}(z_j - z_i)}. \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan diatas terlihat bahwa persamaan (4.6) juga berlaku benar untuk $n = 2$. Langkah selanjutnya adalah dengan menyatakan benar untuk $n = k$, dan akan dibuktikan benar untuk $n = k + 1$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{\prod_{j=1}^{k+1}(z_j - z)} & (4.10) \\ &= \frac{1}{(z_1 - z)(z_2 - z)(z_3 - z)\cdots(z_{k+1} - z)}. & (4.11) \end{aligned}$$

Persamaan (4.11) akan dikalikan dengan

$$1 = \frac{(z_1 - z_2)\cdots(z_k - z_{k+1})(z_3 - z_1)\cdots(z_{k+1} - z_1)\cdots(z_{k+1} - z_{k-1})}{(z_1 - z_2)\cdots(z_k - z_{k+1})(z_3 - z_1)\cdots(z_{k+1} - z_1)\cdots(z_{k+1} - z_{k-1})},$$

sehingga diperoleh

$$F(z) = \frac{(z_1 - z_2)\cdots(z_k - z_{k+1})(z_3 - z_1)\cdots(z_{k+1} - z_1)\cdots(z_{k+1} - z_{k-1})}{F_a(z)}. \quad (4.12)$$

dimana $F_a(z) = (z_1 - z)\cdots(z_{k+1} - z)(z_1 - z_2)\cdots(z_k - z_{k+1})(z_3 - z_1)\cdots(z_{k+1} - z_1)\cdots(z_{k+1} - z_{k-1})$. Misalkan

$$\begin{aligned} F_1(z) &= -(z_2 - z)(z_3 - z)\cdots(z_{k+1} - z)(z_2 - z_3)(z_3 - z_4)\cdots(z_k - z_{k+1}) \\ &\quad (z_4 - z_2)(z_5 - z_2)\cdots(z_{k+1} - z_2)(z_5 - z_3)\cdots(z_{k+1} - z_3)\cdots(z_{k+1} - z_{k-1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(z) &= -(z_3 - z)(z_4 - z)\cdots(z_{k+1} - z)(z_1 - z)(z_3 - z_4)(z_4 - z_5)\cdots(z_k - z_{k+1}) \\ &\quad (z_3 - z_1)(z_4 - z_1)\cdots(z_{k+1} - z_1)(z_5 - z_3)\cdots(z_{k+1} - z_3)\cdots(z_{k+1} - z_{k-1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3(z) &= -(z_4-z)(z_5-z)\cdots(z_{k+1}-z)(z_1-z)(z_2-z)(z_4-z_5)\cdots(z_k-z_{k+1})\\
&\quad (z_4-z_1)(z_5-z_1)\cdots(z_{k+1}-z_1)(z_1-z_2)(z_4-z_2)\cdots(z_{k+1}-z_2)\\
&\quad (z_6-z_4)(z_7-z_4)\cdots(z_{k+1}-z_4)\cdots(z_{k+1}-z_{k-1}),
\end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned}
F_{k+1}(z) &= -(z_1-z)(z_2-z)\cdots(z_k-z)(z_1-z_2)(z_2-z_3)\cdots(z_{k-1}-z_k)\\
&\quad (z_3-z_1)(z_4-z_1)\cdots(z_k-z_1)(z_4-z_2)\cdots(z_k-z_2)\cdots(z_k-z_{k-2}),
\end{aligned}$$

Dengan mengikuti pola yang sama untuk $n = 1$ dan $n = 2$, maka persamaan (4.12) dapat dituliskan kembali kedalam bentuk persamaan sebagai berikut

$$F(z) = \frac{F_1(z) + F_2(z) + F_3(z) + \cdots + F_{k+1}(z)}{F_a(z)}. \tag{4.13}$$

Persamaan (4.13) dapat juga dituliskan kedalam bentuk persamaan seperti berikut

$$\begin{aligned}
F(z) &= \frac{1}{(z_1-z)(z_2-z_1)(z_3-z_1)\cdots(z_{k+1}-z_1)}\\
&\quad + \frac{1}{(z_2-z)(z_1-z_2)(z_3-z_2)\cdots(z_{k+1}-z_2)}\\
&\quad + \frac{1}{(z_3-z)(z_1-z_3)(z_2-z_3)\cdots(z_{k+1}-z_3)}\\
&\quad + \cdots + \frac{1}{(z_{k+1}-z)(z_1-z_{k+1})\cdots(z_k-z_{k+1})}\\
&= \frac{1}{(z_1-z)\prod_{j=1,j\neq 1}^{3}(z_j-z_1)} + \frac{1}{(z_2-z)\prod_{j=1,j\neq 2}^{3}(z_j-z_2)}\\
&\quad + \frac{1}{(z_3-z)\prod_{j=1,j\neq 2}^{3}(z_j-z_3)} + \cdots + \frac{1}{(z_{k+1}-z)\prod_{j=1,j\neq k+1}^{k+1}(z_j-z_{k+1})}.
\end{aligned}$$

Sehingga $F(z)$ dapat dituliskan dalam bentuk persamaan (4.14) yaitu

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(z_i-z)\prod_{j=1,j\neq i}^{k+1}(z_j-z_i)}. \tag{4.14}$$

Persamaan(4.14) memperlihat bahwa dengan mengikuti pola yang sama dari $n = 1$ dan $n = 2$, kita dapat memperoleh pembuktian persamaan (4.6) seperti yang dijabarkan diatas.