# SOLUSI POSITIF EVENTUAL SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER HOMOGEN ORDE SATU

**SKRIPSI**

**YULIAN SARI**
**07134018**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS ANDALAS PADANG 2011**

**DAFTAR ISI**

# ABSTRAK

Skripsi ini membicarakan tentang solusi positif *eventual* sistem persamaan diferensial linier orde satu. Syarat cukup agar solusi sistem persamaan diferensial linier orde satu adalah positif *eventual* diajukan. Beberapa sifat dari suatu matriks $A$ yang eksponensial positif *eventual* juga dibicarakan. Sifat-sifat *strong* Perron-Frobenius digunakan dalam membuktikan syarat cukup agar solusi sistem persamaan diferensial linier orde satu positif *eventual*. Hasil akhir dari skripsi adalah untuk sistem persamaan diferensial linier $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ dengan syarat awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, jika $A + aI$ adalah matriks positif eventual untuk suatu $a \geq 0$, maka solusi $\mathbf{x}(t)$ untuk sistem tersebut adalah positif *eventual* untuk setiap $\mathbf{x}_0 > 0$.

**Kata Kunci** : *Matriks eksponensial positif eventual, Matriks positif eventual, Strong Perron-Frobenius.*

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Diberikan suatu sistem persamaan diferensial linier orde satu sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{1.1.1}$$

dimana $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{x} : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$, dan $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}$. Dalam literatur [2,3,6] dinyatakan bahwa solusi sistem (1.1.1) adalah

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}_0 \tag{1.1.2}$$

Perlu diperhatikan bahwa solusi (1.1.2) dapat bernilai positif atau nonpositif. Salah satu cara agar $\mathbf{x}(t)$ dalam (1.1.2) bernilai positif adalah $e^{tA} > 0$ dan $\mathbf{x}_0 > 0$. Dalam situasi tertentu, $e^{tA}$ tidak selalu positif, tetapi mungkin saja ada $t_0 \in [0,\infty)$ sedemikian sehingga $e^{tA} > 0,\ \forall\, t \geq t_0$. Matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ yang mempunyai sifat ada $t_0 \in [0,\infty)$ sedemikian sehingga $e^{tA} > 0\ \forall\, t \geq t_0$ disebut sebagai matriks eksponensial positif *eventual*. Untuk sistem (1.1.1) dengan $\mathbf{x}_0 > 0$, jika matriks $A$ adalah eksponensial positif *eventual*, maka solusi $\mathbf{x}(t)$ untuk sistem tersebut dinamakan sebagai solusi positif *eventual*.

Asumsikan bahwa $\mathbf{x}_0$ positif. Jika diinginkan solusi $\mathbf{x}(t)$ untuk sistem (1.1.1) adalah positif *eventual*, maka perlu dikaji syarat-syarat agar terdapat

$t_0 \in [0, \infty)$ sedemikian sehingga $e^{tA} > 0,\ \forall\, t \geq t_0$. Pengkajian hal tersebut menjadi topik yang menarik.

Dalam [6] dinyatakan bahwa $A$ adalah matriks eksponensial positif *eventual* jika dan hanya jika ada $a \in \mathbb{R}$ dengan $a \geq 0$ sedemikian sehingga $A + aI$ mempunyai sifat *strong* Perron-Frobenius. Skripsi ini memaparkan kembali tentang syarat-syarat yang harus dipenuhi oleh matriks $A$ sedemikian sehingga solusi $\mathbf{x}(t)$ untuk sistem (1.1.1) adalah positif *eventual*. Beberapa contoh diberikan untuk mengilustrasikan hal tersebut dengan menggunakan perangkat lunak, Matlab 6.5, untuk mempermudah penghitungan.

## 1.2 Perumusan Masalah

Untuk sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, syarat apakah yang harus dipenuhi oleh matriks $A$, agar solusi sistem tersebut adalah positif *eventual*.

## 1.3 Pembatasan Masalah

Permasalahan dibatasi dengan mengasumsikan syarat awal $\mathbf{x}_0$ adalah positif.

## 1.4 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan penulisan ini adalah untuk mengkaji syarat-syarat yang harus dipenuhi oleh matriks $A$ agar solusi sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ adalah positif *eventual*.

## 1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan ini terdiri dari empat bab, yakni:

BAB I : PENDAHULUAN

Bab pertama ini berisi latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan.

BAB II : LANDASAN TEORI

Bab kedua ini berisi teori-teori yang diperlukan dalam pembahasan, yaitu: sistem persamaan diferensial orde satu, beberapa tinjauan teori matriks, dan matriks eksponensial.

BAB III :SOLUSI POSITIF *EVENTUAL* SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER ORDE SATU

Bab ketiga ini membicarakan syarat cukup agar matriks $A$ adalah eksponensial positif *eventual*. Selain itu terdapat beberapa contoh penyelesaian dari persoalan yang memperlihatkan keberlakuan syarat cukup matriks eksponensial positif *eventual* dengan menggunakan Matlab 6.5.

BAB IV : KESIMPULAN

Bab terakhir ini berisi kesimpulan dari hasil dan pembahasan.

# BAB II

# LANDASAN TEORI

Bab ini mengungkapkan beberapa definisi dan fakta-fakta yang berguna untuk mendapatkan syarat yang harus dipenuhi oleh matriks $A$ sedemikian sehingga $e^{At}$ bernilai positif. Sistem persamaan diferensial linier orde satu disajikan pada Subbab 2.1. Kemudian pada Subbab 2.2, diberikan beberapa tinjauan tentang teori matriks. Terakhir, Subbab 2.3 menjelaskan tentang matriks eksponensial.

## 2.1 Sistem Persamaan Diferensial Linier Orde Satu

Bentuk umum sistem persamaan diferensial linier orde satu adalah sebagai berikut :

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}(t)x_1(t) + \cdots + A_{1n}(t)x_n(t) + g_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = A_{21}(t)x_2(t) + \cdots + A_{2n}(t)x_n(t) + g_2(t)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = A_{n1}(t)x_n(t) + \cdots + A_{nn}(t)x_n(t) + g_n(t)$$

Dalam bentuk matriks dapat ditulis:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t) \qquad (2.1.1)$$

dimana $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$, $A(t) = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & \cdots & A_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}(t) & \cdots & A_{nn}(t) \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$.

Suatu vektor $\mathbf{x}(t)$ dikatakan solusi (penyelesaian) dari sistem (2.1.1) , jika $\mathbf{x}(t)$ memenuhi sistem persamaan (2.1.1).

Untuk sistem pada persamaan (2.1.1) dinamakan sebagai sistem persamaan nonhomogen. Secara khusus, jika $\mathbf{g}(t) = 0$ dan diberikan syarat awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, maka sistem (2.1.1) membentuk suatu masalah nilai awal yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t), \;\; \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \tag{2.1.2}$$

Persamaan (2.1.2) disebut sebagai persamaan homogen [2]. Jika sistem (2.1.2) secara eksplisit tidak bergantung pada $t$, maka sistem tersebut dapat ditulis sebagai

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \;\; \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \tag{2.1.3}$$

Dalam [1,2,4,7] dinyatakan bahwa solusi sistem (2.1.3) adalah

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}_0. \tag{2.1.4}$$

## 2.2 Tinjauan Teori Matriks

Dalam tinjauan berikut, simbol $\mathbb{R}^{n\times n}$ menyatakan himpunan matriks riil berukuran $n \times n$. Untuk $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, juga lazim ditulis $A = [a_{ij}]$, untuk $i = 1,2,\dots,n$ dan $j = 1,2,\dots,n$.

Jika $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ memenuhi $AB = BA = I$, maka $B$ merupakan invers dari $A$. Jika $A$ mempunyai invers, maka $A$ dikatakan matriks nonsingular. Jika $A$ tidak mempunyai invers, maka $A$ dikatakan matriks singular [1]. Suatu matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dikatakan matriks permutasi, jika hanya satu entri dalam setiap baris dan kolomnya bernilai 1, sedangkan entri yang lainnya bernilai 0 [6].

**Definisi 2.2.1** [7] *Misalkan $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Matriks $A$ dikatakan:*

1. *positif, ditulis $A > 0$, jika $a_{ij} > 0$ untuk setiap $i$ dan $j$*
2. *nonnegatif, ditulis $A \geq 0$, jika $a_{ij} \geq 0$ untuk setiap $i$ dan $j$*

3. *nonnegatif eventual, dinotasikan dengan* $A \geq_v 0$, *jika terdapat bilangan bulat positif* $k_0$ *sedemikian sehingga* $A^k \geq 0$ *untuk setiap* $k \geq k_0$. *Bilangan bulat positif terkecil* $k_0 = k_0(A)$ *disebut sebagai indeks pangkat dari* $A$
4. *positif eventual, dinotasikan dengan* $A >_v 0$, *jika terdapat bilangan bulat positif* $k_0$ *sedemikian sehingga* $A^k > 0$ *untuk setiap* $k \geq k_0$. *Bilangan bulat positif terkecil* $k_0 = k_0(A)$ *disebut sebagai indeks pangkat dari* $A$.

**Definisi 2.2.2** [1] *Jika* $A$ *sebuah matriks* $n \times n$, *maka sebuah vektor tak nol* $\mathbf{x}$ *pada* $\mathbb{R}^n$ *disebut vektor eigen dari* $A$, *jika* $A\mathbf{x}$ *adalah sebuah kelipatan skalar dari* $\mathbf{x}$, *yakni*

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \qquad (2.2.1)$$

*untuk skalar sebarang* $\lambda$. *Skalar* $\lambda$ *disebut nilai eigen dari* $A$ *dan* $\mathbf{x}$ *disebut sebagai vektor eigen dari* $A$ *yang terkait dengan* $\lambda$.

Untuk memperoleh nilai eigen dari suatu matriks $A$, dapat dituliskan kembali persamaan (2.2.1) sebagai

$$A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x},$$

atau dapat ditulis menjadi

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0. \qquad (2.2.2)$$

Agar $\lambda$ dapat menjadi nilai eigen, harus terdapat satu solusi tak nol dari persamaan (2.2.2). Persamaan (2.2.2) memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0 \qquad (2.2.3)$$

Di dalam [1] dinyatakan bahwa persamaan (2.2.3) disebut persamaan karakteristik dari $A$ dan skalar-skalar yang memenuhi persamaan tersebut merupakan nilai-nilai eigen dari $A$.

Himpunan semua nilai eigen dari $A$ berukuran $n \times n$ disebut sebagai spektrum dari $A$ yang dinotasikan dengan $\sigma(A)$. Radius spektral dari $A$, dinotasikan dengan $\rho(A)$, didefinisikan sebagai $\rho(A) = max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$. Suatu nilai eigen $\lambda$ dari $A$ dikatakan dominan jika $|\lambda| = \rho(A)$. Absis spektral dari $A$, ditulis $\lambda(A)$, didefinisikan sebagai $\lambda(A) = \max\{Re\ (\lambda) |\ \lambda \in \sigma(A)\}$.

**Definisi** 2.2.3 [7] *Suatu matriks $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dikatakan memiliki:*

1. *sifat Perron-Frobenius, jika nilai eigen dominannya adalah positif dan vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen dominannya adalah nonnegatif*
2. *sifat strong Perron-Frobenius, jika nilai eigen dominan positifnya berjumlah satu buah dan vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen dominannya adalah positif.*

**Teorema** 2.2.4 [5] *Misalkan $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dengan $A > 0$ dan $r = \rho(A)$. Maka $r$ adalah nilai eigen dari $A$ dan ada vektor eigen $\mathbf{x} > 0$ yang berkaitan dengan $r$.*

## 2.3 Matriks Eksponensial

Matriks $e^{tA}$ dalam persamaan (2.1.4) merupakan matriks eksponensial yang didefinisikan sebagai berikut.

**Definisi** 2.3.1 [3] *Untuk sebarang matriks $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matriks eksponensial dari $A$ didefinisikan sebagai*

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = I + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \frac{(tA)^3}{3!} + \cdots$$

*untuk suatu $t \in \mathbb{R}$, dengan $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ adalah matriks identitas.*

**Definisi 2.3.2** [7] *Misalkan $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Matriks A dikatakan:*

1. *nonnegatif eksponensial, jika*

$$\forall\, t \geq 0, e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \geq 0$$

2. *positif eksponensial, jika*

$$\forall\, t > 0, e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} > 0$$

3. *eksponensial nonnegatif eventual, jika* $\exists t_0 \in [0, \infty)$ *sedemikian sehingga* $e^{tA} \geq 0, \forall t \geq t_0$

4. *eksponensial positif eventual, jika* $\exists t_0 \in [0, \infty)$ *sedemikian sehingga* $e^{tA} > 0, \forall t \geq t_0$.

**Definisi 2.3.3** [3] *Dua matriks persegi A dan B dikatakan similar, ditulis $A \approx B$, jika dan hanya jika terdapat matriks nonsingular X sedemikian sehingga*

$$B = X^{-1}AX.$$

**Proposisi 2.3.4** [9] *Jika matriks $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, maka ada matriks nonsingular $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sedemikian sehingga*

$$J = X^{-1}AX,$$

*dengan J berbentuk salah satu dari yang berikut*

(i) $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1 > \lambda_2$

(ii) $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$

(iii) $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$

(iv) $J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \beta > 0,$

*dimana* $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$ *dan* $\lambda = \alpha + i\beta$ *adalah nilai eigen matriks A. Matriks J dikatakan bentuk Jordan dari matriks A.*

Untuk suatu matriks $A$ berukuran $n \times n$, teorema berikut dapat digunakan untuk menghitung $e^A$.

**Teorema 2.3.5** [3] *Jika A similar dengan suatu matriks diagonal D, yakni ada matriks nonsingular X sedemikian sehingga*

$$A = XDX^{-1}, \tag{2.3.1}$$

*dimana*

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,\dots,n$$

*maka* $e^A = Xe^DX^{-1}$, *dimana*

$$e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.3.5 tidak dapat digunakan untuk menghitung $e^{tA}$, jika $A$ tidak similar dengan matriks diagonal.

# BAB III

## SOLUSI POSITIF *EVENTUAL* SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER ORDE SATU

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, salah satu cara agar solusi $\mathbf{x}(t)$ pada sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ bernilai positif adalah $e^{tA} > 0$ dan $\mathbf{x}_0 > 0$. Bab ini membicarakan syarat perlu dan cukup agar matriks $A$ adalah eksponensial positif *eventual*.

**Lema 3.1** *Misalkan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Jika $A$ adalah matriks positif eventual, maka $A^T$ juga matriks positif eventual.*

**Bukti**

Misalkan $A$ adalah matriks positif *eventual*. Akan dibuktikan $A^T$ matriks positif *eventual*. Jika $A$ adalah matriks positif *eventual*, maka $\exists\, k_0 \in \mathbb{Z}_+ \ni A^k > 0, \forall\, k \geq k_0$. Karena $(A^T)^k = (A^k)^T$ maka untuk $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ di atas, berlaku juga $(A^T)^k > 0, \forall\, k \geq k_0$. Jadi, $A^T$ merupakan matriks positif *eventual*. ∎

**Teorema 3.2** *Misalkan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pernyataan berikut ekivalen:*

i). *Matriks $A$ dan $A^T$ memiliki sifat strong Perron-Frobenius.*

ii). *$A$ merupakan matriks positif eventual.*

**Bukti**

(i) $\Rightarrow$ (ii) Misalkan matriks $A$ dan $A^T$ memiliki sifat *strong* Perron-Frobenius. Berdasarkan Teorema 2.3.5, ada suatu matriks nonsingular $X$ sedemikian sehingga $A = XJX^{-1}$, dimana $J$ adalah matriks Jordan yang berkaitan dengan matriks $A$.

Misalkan $\lambda_1$ adalah nilai eigen dari $A$ dengan $\lambda_1 = \rho(A)$ merupakan entri pertama pada diagonal utama untuk matriks $J$. Maka matriks $A$ dapat ditulis menjadi

$$A = [\mathbf{x}_1 \quad X_{n,n-1}] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & J_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^T \\ Y_{n-1,n} \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

dengan $\mathbf{y}_1^T$ merupakan baris pertama dari matriks $X^{-1}$ dan $Y_{n-1,n}$ merupakan matriks yang dibentuk oleh $(n-1)$ baris terakhir dari matriks $X^{-1}$. Karena matriks $A$ memiliki sifat *strong* Perron-Frobenius, maka vektor eigen $\mathbf{x}_1 > 0$. Transpos matriks $A$ dari persamaan (3.1) adalah

$$A^T = [\mathbf{y}_1 \quad Y_{n-1,n}^T] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & J_{n-1,n-1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ X_{n,n-1}^T \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Untuk matriks $J_{n-1,n-1}$, ada matriks permutasi $P \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$ sedemikian sehingga $J_{n-1,n-1} = P^T J_{n-1,n-1}^T P$. Akibatnya, persamaan (3.2) dapat ditulis sebagai berikut:

$$A^T = [\mathbf{y}_1 \quad Y_{n-1,n}^T] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & J_{n-1,n-1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ X_{n,n-1}^T \end{bmatrix}$$

$$= [\mathbf{y}_1 \quad Y'^T_{n-1,n}] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & J_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1{}^T \\ X'^T_{n,n-1} \end{bmatrix},$$

(3.3)

dengan $Y'^T_{n-1,n} = Y_{n-1,n}^T P$ dan $X'^T_{n,n-1} = P^T X_{n,n-1}^T$. Persamaan (3.3) memperlihatkan bahwa matriks $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & J_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$ merupakan matriks Jordan yang berkaitan dengan matriks $A^T$. Akibatnya, $\mathbf{y}_1$ merupakan vektor eigen yang berkaitan dengan nilai eigen dominan $\lambda_1$. Karena $A^T$ memiliki sifat *strong* Perron-Frobenius, maka $\mathbf{y}_1$ merupakan vektor eigen positif. Dari persamaan (3.1), diperoleh

$$A^k = [\mathbf{x}_1 \quad X_{n,n-1}] \begin{bmatrix} {\lambda_1}^k & 0 \\ 0 & J_{n-1,n-1}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^T \\ Y_{n-1,n} \end{bmatrix}.$$

Akibatnya

$$\frac{1}{{\lambda_1}^k} A^k = [\mathbf{x}_1 \quad X_{n,n-1}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{{\lambda_1}^k} J_{n-1,n-1}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^T \\ Y_{n-1,n} \end{bmatrix}.$$

Karena $\lambda_1$ merupakan nilai eigen dominan, maka

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{{\lambda_1}^k} J^k{}_{n-1,n-1} = 0.$$

Akibatnya

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{{\lambda_1}^k} A^k = \mathbf{x}_1 {\mathbf{y}_1}^T > 0. \tag{3.4}$$

Persamaan (3.4) memberikan makna bahwa terdapat bilangan bulat $k_0 > 0$ sedemikian sehingga $A^k > 0,\ \forall\, k \geq k_0$. Jadi, $A$ merupakan matriks positif *eventual*.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Misalkan $A$ adalah matriks positif *eventual*. Akan dibuktikan bahwa matriks $A$ memiliki sifat *strong* Perron-Frobenius. Karena $A$ adalah matriks positif *eventual*, maka ada $k_0 > 0$ sedemikian sehingga $A^k > 0, \forall\, k \geq k_0$. Untuk $A^k > 0$, maka berdasarkan Teorema 2.2.4, matriks $A^k$ memiliki nilai eigen dominan positif, sebutlah $\lambda_1$, dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1$ adalah positif, sebutlah $\mathbf{x}_1 > 0$. Oleh sebab $\lambda_1$ adalah nilai eigen dari $A^k$, maka ${\lambda_1}^{\frac{1}{k}} > 0$ adalah nilai eigen dari $A$ dengan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen ${\lambda_1}^{\frac{1}{k}}$ adalah $\mathbf{x}_1$. Karena ini terjadi $\forall\, k \geq k_0$, maka $A$ memiliki sifat *strong* Perron-Frobenius.

Berikutnya akan dibuktikan bahwa $A^T$ memiliki sifat *strong* Perron-Frobenius. Karena $A$ adalah matriks positif *eventual*, maka berdasarkan Lema 3.1, matriks $A^T$ juga positif *eventual*. Akibatnya, ada $k_0 > 0$ sedemikian sehingga $(A^T)^k > 0 \; \forall \; k \geq k_0$. Karena $(A^T)^k > 0$, maka matriks $(A^T)^k$ memiliki nilai eigen dominan positif, sebutlah $\lambda_1$, dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1$ adalah positif, sebutlah $\mathbf{x}_1 > 0$. Karena $\lambda_1$ adalah nilai eigen dari $(A^T)^k$, maka $\lambda_1^{\frac{1}{k}} > 0$ adalah nilai eigen dari $A^T$ dengan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1^{\frac{1}{k}}$ adalah $\mathbf{x}_1$. Karena ini terjadi $\forall \; k \geq k_0$, maka $A^T$ memiliki sifat *strong* Perron-Frobenius. ■

**Teorema 3.3** *Misalkan* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. *Pernyataan berikut ekivalen:*

(i) $A + aI$ *merupakan matriks positif eventual untuk suatu* $a \geq 0$.

(ii) $A$ *merupakan matriks eksponensial positif eventual.*

**Bukti**

(i) $\Rightarrow$ (ii) Misalkan $A + aI$ merupakan positif *eventual* untuk suatu $a \geq 0$ dan $k_0$ merupakan bilangan bulat positif sedemikian sehingga $(A + aI)^k > 0, \; \forall k \geq k_0$. Maka terdapat $t_0 > 0$ sedemikian sehingga $k_0 - 1$ suku pertama dari deret pangkat

$$e^{t(A+aI)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m (A + aI)^m}{m!}$$

didominasi oleh suku-suku sisanya, sehingga setiap elemen dari $e^{t(A+aI)}$ adalah positif untuk setiap $t \geq t_0$. Oleh karena itu, $e^{tA} = e^{-ta} e^{t(A+aI)}$ adalah positif untuk setiap $t \geq t_0$. Jadi terbukti bahwa $A$ merupakan matriks eksponensial positif *eventual*.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Misalkan $A$ adalah matriks eksponensial positif *eventual*. Karena $(e^A)^k = e^{Ak}$, maka $e^A$ adalah matriks positif *eventual*. Menurut Teorema 3.2, karena $e^A$ adalah matriks positif *eventual*, maka $e^A$ memilki sifat *strong* Perron-Frobenius. Perhatikan himpunan $\sigma(e^A) = \{e^\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$, maka $\rho(e^A) = e^\lambda$ untuk suatu $\lambda \in \sigma(A)$. Untuk setiap $\mu \in \sigma(A)$ dengan $\mu \neq \lambda$, berlaku

$$e^\lambda > |e^\mu| = |e^{Re(\mu)+iIm(\mu)}| = e^{Re(\mu)}$$

dimana $Re(\mu)$ menyatakan bagian riil dari $\mu$ dan $Im(\mu)$ menyatakan bagian imajiner dari $\mu$. Sehingga $\lambda$ adalah absis spektral dari $A$, yakni $\lambda > Re(\mu)$ untuk setiap $\mu \in \sigma(A)$ dengan $\mu \neq \lambda$. Ini bermakna bahwa ada $a > 0$ sedemikian sehingga

$$\lambda + a > |\mu + a| \quad \forall\ \mu \in \sigma(A), \mu \neq \lambda.$$

Berikutnya perlu dibuktikan bahwa ruang eigen dari matriks $A + aI$ sama dengan ruang eigen dari matriks $e^A$. Misalkan $\lambda$ adalah nilai eigen matriks $A + aI$ dengan vektor eigen yang berkaitan adalah $\mathbf{x}$, maka $e^\lambda$ adalah nilai eigen matriks $e^{A+aI}$ dengan vektor eigen yang berkaitan dengan nilai eigen $e^\lambda$ adalah $\mathbf{x}$. Ini bermakna bahwa $e^{A+aI}\mathbf{x} = e^\lambda\mathbf{x}$. Akibatnya, $\beta e^{A+aI}\mathbf{x} = \beta e^\lambda\mathbf{x}$ untuk suatu $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Pernyataan terakhir menyatakan bahwa $\beta e^\lambda$ adalah adalah nilai eigen dari matriks $\beta e^{A+aI}$ dengan vektor eigen yang berkaitan adalah $\mathbf{x}$. Karena

$$\beta e^{A+aI}\mathbf{x} = \beta e^\lambda\mathbf{x}$$

$$\beta e^a e^A\mathbf{x} = \beta e^\lambda\mathbf{x},$$

untuk $\mathbf{x}$ adalah vektor eigen dari matriks $\beta e^a e^A$ yang berkaitan dengan nilai eigen $\beta e^\lambda$. Akibatnya, $\mathbf{x}$ juga vektor eigen dari matriks $e^A$. Dengan demikian ruang eigen dari matriks $A + aI$ sama dengan ruang eigen dari matriks $e^A$. Karena ruang eigen dengan $A + aI$ dan $e^A$ sama, maka $A + aI$ memiliki sifat *strong* Perron-Frobenius. Berdasarkan Teorema 3.2, $A + aI$ adalah positif *eventual.*■

**Akibat 3.4** *Untuk sistem (1.1.1), jika* $A + aI$ *adalah matriks positif eventual untuk suatu* $a \geq 0$, *maka solusi* $\mathbf{x}(t)$ *untuk sistem tersebut adalah positif eventual untuk setiap* $\mathbf{x}_0 > 0$.

**Bukti**

Misalkan $A + aI$ adalah matriks positif *eventual* untuk suatu $a \geq 0$, maka berdasarkan teorema 3.3, matriks $A$ adalah matriks eksponensial positif *eventual.* Akibatnya $\exists t_0 \in [0, \infty)$ sedemikian sehingga $e^{tA} > 0 \ \forall\, t \geq t_0$. Karena $\mathbf{x}_0 > 0$, maka

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}_0 > 0 \quad \forall\, t \geq t_0.$$

Dengan demikian, solusi sistem (1.1.1) adalah positif *eventual.*■

Contoh-contoh berikut mengilustrasikan keberlakuan dari Akibat 3.4.

**Contoh 1.** Diberikan sistem persamaan diferensial linier berikut

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Akan ditunjukan bahwa solusi sistem tersebut adalah positif *eventual.* Pada permasalahan di atas, dimisalkan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Untuk $a = 1$, maka diperoleh matriks $A + aI$ adalah sebagai berikut

$$A + aI = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Akan dicari bilangan bulat positif $k_0$ sedemikian sehingga $A^k > 0 \ \forall\, k \geq k_0$.

Karena nilai pada matriks $A + aI$ sudah bernilai positif untuk nilai $k = 1$, dengan demikian, matriks $A + aI$ merupakan matriks positif *eventual* dengan $k_0 = 1$. Berdasarkan Akibat 3.4, karena syarat awal yang digunakan adalah positif, maka solusi sistem pada Contoh 1 adalah positif *eventual*. Selanjutnya, kita boleh mencari nilai solusi $\mathbf{x}(t)$ untuk beberapa nilai $t$. Matriks $e^{tA}$ dapat diperoleh dengan menggunakan Teorema 2.3.5 sehingga

$$e^{tA}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}}{12}(4e^{-3t} + 3e^{-4t} + 5) & -\frac{e^{3t}}{12}(-5 + 9e^{-4t} - 4e^{-3t}) & \frac{e^{3t}}{12}(5 + 3e^{-4t} - 8e^{-3t}) \\ -\frac{e^{3t}}{4}(e^{-4t} - 1) & \frac{e^{3t}}{4}(1 + 3e^{-4t}) & -\frac{e^{3t}}{4}(e^{-4t} - 1) \\ \frac{1}{3}(e^{3t} - 1) & \frac{1}{3}(e^{3t} - 1) & \frac{1}{3}(2 + e^{3t}) \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan perhitungan pada Matlab 6.5.

Untuk $t = 0.00001$, diperoleh

$$e^{0.00001A} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}.$$

Untuk $t = 0.00009$, diperoleh

$$e^{0.00009A} = \begin{bmatrix} 1.0001 & 0.0002 & 0.0001 \\ 0.0001 & 1.0000 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0001 & 1.0001 \end{bmatrix}.$$

Untuk $t = 0.0001$, diperoleh

$$e^{0.0001A} = \begin{bmatrix} 1.0001 & 0.0002 & 0.0001 \\ 0.0001 & 1.0000 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0001 & 1.0001 \end{bmatrix}.$$

Untuk $t = 0.0002$, diperoleh

$$e^{t=0.0002A} = \begin{bmatrix} 1.0002 & 0.0004 & 0.0002 \\ 0.0002 & 1.0000 & 0.0002 \\ 0.0002 & 0.0002 & 1.0002 \end{bmatrix}.$$

Kecendrungan nilai pada entri-entri pada matriks-matriks di atas memperlihatkan bahwa $\exists t_0 \in (0.00001, 0.0002)$ sedemikian sehingga $e^{tA} > 0\ \forall\, t \geq t_0$. Jadi, matriks $A$ adalah matriks eksponensial positif *eventual*.

Dengan menggunakan syarat awal $\mathbf{x}_0$ yang telah diberikan, solusi dari sistem tersebut untuk beberapa nilai $t$ yang telah digunakan pada contoh ini sebagai berikut.

Untuk $t = 0.00009$, diperoleh

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1.0001 & 0.0002 & 0.0001 \\ 0.0001 & 1.0000 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0001 & 1.0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0007 \\ 2.0004 \\ 3.0005 \end{bmatrix},$$

untuk $t = 0.0001$, diperoleh

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1.0001 & 0.0002 & 0.0001 \\ 0.0001 & 1.0000 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0001 & 1.0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0008 \\ 2.0004 \\ 3.0006 \end{bmatrix},$$

untuk $t = 0.0002$, diperoleh

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1.0002 & 0.0004 & 0.0002 \\ 0.0002 & 1.0000 & 0.0002 \\ 0.0002 & 0.0002 & 1.0002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0016 \\ 2.0008 \\ 3.0012 \end{bmatrix}.$$

Karena nilai $\mathbf{x}_0$ yang digunakan positif, berdasarkan Akibat 3.4, maka solusi $\mathbf{x}(t)$ untuk sistem tersebut adalah positif *eventual*.

**Contoh 2.** Diberikan sistem persamaan diferensial linier berikut

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Akan ditunjukkan bahwa solusi sistem tersebut adalah positif *eventual*. Pada permasalahan di atas, dimisalkan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Untuk $a = 1$, maka matriks $A + aI$ adalah sebagai berikut

$$A + aI = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Akan dicari bilangan bulat positif $k_0$ sedemikian sehingga $A^k > 0, \forall\, k \geq k_0$. Perhatikan matriks-matriks berikut

$$(A + aI)^2 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 6 & 6 \\ 4 & 6 & 6 & 6 \\ -2 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

$$(A + aI)^3 = \begin{bmatrix} 15 & 21 & 28 & 28 \\ 14 & 22 & 28 & 28 \\ -2 & 9 & 15 & 14 \\ 9 & 12 & 21 & 22 \end{bmatrix},$$

$$(A + aI)^4 = \begin{bmatrix} 51 & 85 & 120 & 120 \\ 50 & 86 & 120 & 120 \\ 4 & 31 & 51 & 50 \\ 31 & 54 & 85 & 86 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian, matriks $A + aI$ merupakan matriks positif *eventual* dengan $k_0 = 4$. Berdasarkan Akibat 3.4, maka solusi sistem pada Contoh 2 adalah positif *eventual*. Selanjutnya, kita boleh mencari nilai solusi $\mathbf{x}(t)$ untuk beberapa nilai $t$. Matriks $e^{tA}$ dapat diperoleh dengan menggunakan Teorema 2.3.5 sehingga

$$e^{tA}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}+\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{6}e^{3t} & \frac{1}{3}e^{3t}-\frac{1}{3} & \frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{t} & \frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{t} \\ \frac{1}{2}e^{t}-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}e^{3t} & \frac{2}{3}+\frac{1}{3}e^{3t} & \frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{t} & \frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{t} \\ -\frac{1}{2}e^{t}+\frac{4}{9}+\frac{1}{18}e^{3t}-\frac{2}{3}t & -\frac{1}{9}+\frac{1}{9}e^{3t}+\frac{2}{3}t & \frac{1}{3}+\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{6}e^{3t} & \frac{1}{2}e^{t}-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}e^{3t} \\ -\frac{1}{9}+\frac{1}{9}e^{3t}+\frac{2}{3}t & \frac{2}{9}e^{3t}-\frac{2}{9}-\frac{2}{3}t & \frac{1}{3}e^{3t}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}+\frac{1}{3}e^{3t} \end{bmatrix}$$

Untuk $t = 1$, diperoleh



$$e^{A} = \begin{bmatrix} 5.0401 & 6.3618 & 8.6836 & 8.6836 \\ 4.0401 & 7.3618 & 8.6836 & 8.6836 \\ -0.4655 & 2.7873 & 5.0401 & 4.0401 \\ 2.7873 & 3.5746 & 6.3618 & 7.3618 \end{bmatrix}.$$

Untuk $t = 1.19$, diperoleh

$$e^{1.19A} = \begin{bmatrix} 7.8963 & 11.5055 & 16.1148 & 16.1148 \\ 6.8963 & 12.5055 & 16.1148 & 16.1148 \\ -0.0193 & 4.6285 & 7.8963 & 6.8963 \\ 4.6285 & 6.8770 & 11.5055 & 12.5055 \end{bmatrix}.$$

Untuk $t = 1.2$, diperoleh

$$e^{1.2A} = \begin{bmatrix} 8.0931 & 11.8661 & 16.6391 & 16.6391 \\ 7.0931 & 12.8661 & 16.6391 & 16.6391 \\ 0.0176 & 4.7554 & 8.0931 & 7.0931 \\ 4.7554 & 7.1107 & 11.8661 & 12.8661 \end{bmatrix}.$$

Untuk $t = 1.5$, diperoleh

$$e^{1.5A} = \begin{bmatrix} 17.5770 & 29.6724 & 42.7677 & 42.7677 \\ 16.5770 & 30.6724 & 42.7677 & 42.7677 \\ 2.2046 & 10.8908 & 17.5770 & 16.5770 \\ 10.8908 & 18.7816 & 29.6724 & 30.6724 \end{bmatrix}.$$

Untuk $t = 2$, diperoleh

$$e^{2A} = \begin{bmatrix} 71.2660 & 134.1429 & 198.0199 & 198.0199 \\ 70.2660 & 135.1429 & 198.0199 & 198.0199 \\ 18.4960 & 45.3810 & 71.2660 & 70.2660 \\ 45.3810 & 88.7620 & 134.1429 & 135.1429 \end{bmatrix}.$$

Kecendrungan nilai entri-entri pada matriks-matriks di atas memperlihatkan bahwa $\exists t_0 \in (1,2)$ sedemikian sehingga $e^{tA} > 0 \ \forall t \geq t_0$. Jadi, matriks $A$ adalah eksponensial positif *eventual*.

Dengan menggunakan syarat awal $\mathbf{x}_0$ yang telah diberikan, solusi dari sistem tersebut untuk beberapa nilai $t$ adalah sebagai berikut.

Untuk $t = 1.2$, diperoleh

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 8.0931 & 11.8661 & 16.6391 & 16.6391 \\ 7.0931 & 12.8661 & 16.6391 & 16.6391 \\ 0.0176 & 4.7554 & 8.0931 & 7.0931 \\ 4.7554 & 7.1107 & 11.8661 & 12.8661 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65.1034 \\ 66.1034 \\ 24.7145 \\ 43.7090 \end{bmatrix},$$

untuk $t = 1.5$, diperoleh

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 17.5770 & 29.6724 & 42.7677 & 42.7677 \\ 16.5770 & 30.6724 & 42.7677 & 42.7677 \\ 2.2046 & 10.8908 & 17.5770 & 16.5770 \\ 10.8908 & 18.7816 & 29.6724 & 30.6724 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 162.4572 \\ 163.4572 \\ 58.1402 \\ 108.7987 \end{bmatrix},$$

untuk $t = 2$, diperoleh

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 71.2660 & 134.1429 & 198.0199 & 198.0199 \\ 70.2660 & 135.1429 & 198.0199 & 198.0199 \\ 18.4960 & 45.3810 & 71.2660 & 70.2660 \\ 45.3810 & 88.7620 & 134.1429 & 135.1429 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 735.5916 \\ 736.5916 \\ 251.4566 \\ 491.5241 \end{bmatrix},$$

Karena nilai $\mathbf{x}_0$ yang digunakan positif, berdasarkan Akibat 3.4, maka solusi $\mathbf{x}(t)$ untuk sistem tersebut adalah positif *eventual*.

# BAB IV

# KESIMPULAN

Berdasarkan uraian yang telah dibuat dan dibahas pada bab-bab sebelumnya, maka syarat cukup agar solusi sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ dengan syarat awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 > 0$ positif *eventual* adalah matriks $A + aI$ positif *eventual* untuk suatu $a \geq 0$.

**DAFTAR PUSTAKA**


[1] Anton, H. 1991. *Aljabar Linear Elementer*. Erlangga. Jakarta.

[2] Boyce, W. E and R. C. Diprima. 2001. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems*. Eight edition. John Wiley, New York.

[3] Cullen, C. G. 1990. *Linear Algebra and Differential Equations*. Second edition. PWS-KENT. Massachusetts.

[4] Finizio, N dan G. Ladas. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Erlangga. Jakarta.

[5] Gentle, James E. 2007. *Matrix Algebra Theory, Computations, and Applications in Statistics*. Springer. New York.

[6] Horn, R. A. and Johnson R. C. 1985. *Matrix Analysis*. Cambridge University. Cambridge.

[7] Noutsos, D. and M. J. Tsatsomeros. 2008. Reachability and Holdability of Nonnegatif States. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 30:700-712.

[8] Noutsos, D. 2006. On Perron-Frobenius Property of Matrices Having Some Negative Entries. *Linear Algebra and Its Applications*. 412:132-153.

[9] Arrowsmith, D. K. and C. M. Place. 1990. *Ordinary Differential Equations*. Chapter and Hall. London.

# RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis dilahirkan di Padang pada tanggal 17 Juli 1989 sebagai anak ketiga dari empat bersaudara dari ayah yang bernama Busril dan ibu bernama Ramanus. Penulis menamatkan Sekolah Dasar pada tahun 2001 di SD Kartika 1-11 Padang, SMP Negeri 8 Padang pada tahun 2004, dan SMA Negeri 2 Padang pada tahun 2007. Penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas pada tahun 2007 melalui Seleksi Penerimaan Mahasiswa Baru (SPMB).

Penulis pernah praktek Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kenagarian Salimpauang, Kabupaten Tanah Datar, Sumatera Barat pada tahun 2010. Penulis pernah menjadi pengurus Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) KM FMIPA Unand masa bakti 2008-2009 sebagai staf Departemen Pengembangan Sumber Daya Mahasiswa. Beberapa kepanitiaan yang pernah penulis jabati, yaitu: sebagai sekretaris umum pada Latihan Kepemimpinan Manajemen Mahasiswa Tingkat Dasar (LKMM-TD) BEM KM FMIPA Unand pada tahun 2008, sebagai bendahara umum pada Pekan Kreatifitas Mahasiswa (PKM) "Pesta Rakyat MIPA (PRM)" BEM KM FMIPA Unand pada tahun 2008. Selain itu, penulis pernah menjadi anggota Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) dan menjadi pengurus pada periode 2009-2010. Penulis juga ikut pada kepanitiaan Pekan Seni Bermatematika (PSB) VI, VII, dan VIII yang diselenggarakan oleh HIMATIKA Unand pada tahun 2009, 2010, dan 2011 sebagai tim soal pada Lomba Cerdas Tangkas (LCT). Penulis juga pernah bekerja pada salah satu lembaga bimbingan belajar dan privat di Kota Padang pada tahun 2008 sebagai pengajar matematika.