PELABELAN FACE (a+1) ANTI AJAIB UNTUK GRAF BIDANG $C_b a$

SKRIPSI

WITRI YULIANI
06 134 024

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2011

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa:

Nama	: WITRI YULIANI
Nomor Buku Pokok	: 06 134 024
Jurusan	: Matematika
Bidang	: Kombinatorik
Judul Skripsi	: **PELABELAN *FACE* $(a+1)$-ANTI AJAIB UNTUK GRAF BIDANG C_a^b.**

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal **31 Januari 2011** berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing/Penguji,

1.

Dr. Syafrizal Sy
NIP: 19670807 199309 1 001

Penguji,

1.

Narwen, M. Si
NIP: 19690308 199403 2 002

2.

Nova Noliza Bakar, M.Si
NIP: 19631104 199203 2 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand

Dr. Syafrizal Sy
NIP: 19670807 199309 1 001

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim,

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, hidayah serta kekuatan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul **PELABELAN *FACE* $(a+1)$-ANTI AJAIB UNTUK GRAF BIDANG C_a^b.**

Terwujudnya skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak yang telah mendorong dan membimbing penulis, baik tenaga, ide-ide, maupun pemikiran. Oleh karena itu dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Yth. Bapak Dr. Syafrizal Sy selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas Padang sekaligus dosen pembimbing yang telah menyediakan waktu membimbing dan memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama proses pengajuan judul hingga selesainya pembuatan skripsi ini.
2. Bapak Narwen, M.Si selaku penguji yang telah banyak meluangkan waktu, memberikan bimbingan, pengarahan dan saran dalam penulisan skripsi ini.
3. Ibu Nova Noliza Bakar, M.Si selaku Penasehat Akademik sekaligus penguji yang telah memberikan motivasi, pengarahan dan saran dalam penulisan skripsi ini kepada penulis.

4. Ibu Monika Rianti Helmi, M.Si selaku koordinator pendidikan Jurusan Matematika Universitas Andalas.
5. Seluruh staf pengajar Jurusan Matematika Universitas Andalas yang telah banyak memberikan ilmu yang bermanfaat bagi penulis. Dan seluruh staf tata usaha Jurusan Matematika yang telah banyak membantu selama penulis melaksanakan studi di Jurusan Matematika Universitas Andalas.
6. Seluruh teman-teman yang telah mendukung dan memberikan semangat kepada penulis terutama teman-teman angkatan 2006, serta senior-senior dan junior-junior di Jurusan Matematika Universitas Andalas.

Dengan segala keterbatasan yang ada, baik pengetahuan maupun pengalaman, penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan dalam hal materi, penulisan, maupun pembahasannya. Untuk itu penulis sangat mengharapkan sekali kritik dan saran atas kekurangan tersebut. Harapan penulis insyaallah skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Amin

Padang, 31 Januari 2011

Penulis,

WITRI YULIANI

06134024

ABSTRAK

Pada tulisan ini akan dikaji tentang pelabelan *face* $(a+1)$ anti ajaib untuk graf bidang C_a^b dengan himpunan titik $V(G)$, himpunan sisi $E(G)$, dan himpunan *face* $F(G)$ adalah pemetaan satu-satu

$$\lambda : V(G) \cup E(G) \cup F(G) \longrightarrow \{1, 2, \cdots, v+e+f\}$$

yang juga pelabelan tipe $(1,1,1)$.

Suatu graf $G = G(V,E)$ yang memiliki bobot titik, bobot sisi atau bobot *face* yang berbeda disebut graf dengan pelabelan anti ajaib. Pada skripsi ini, akan ditunjukkan bahwa graf bidang C_a^b memiliki pelabelan $(a+1)$ anti ajaib.

Kata kunci : *Pemetaan Satu-satu, Barisan Aritmatika, Graf Bidang, Pelabelan Anti Ajaib.*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pelabelan graf menjadi topik yang banyak mendapat perhatian, karena model-model yang ada pada pelabelan graf berguna untuk aplikasi yang luas, seperti dalam masalah teori koding, kristalografi sinar-x, radar, sistem alamat jaringan komunikasi, dan desain sirkuit. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Rosa dan Kotzig (1970).

Pelabelan dari suatu graf adalah suatu pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan titik, sisi, atau *face* ke himpunan bilangan bulat positif. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan *face* adalah pelabelan dengan domain himpunan *face*. Graf bidang $G = (V, E, F)$ memiliki himpunan titik $V(G)$, himpunan sisi $E(G)$, dan himpunan *face* $F(G)$. Jika domain dari graf G merupakan $V(G) \cup E(G) \cup F(G)$ maka pelabelan tersebut merupakan pelabelan dengan tipe (1,1,1).

Pada pelabelan, jumlah dari label *face* dan semua label titik dan sisi yang membentuk *face* disebut bobot *face*. Jika bobot titik, bobot sisi, atau bobot *face* berbeda dikatakan dengan pelabelan anti ajaib, dan bobot *face* yang membentuk barisan aritmatika dengan suku awal a dan beda d maka dinamakan pelabelan (a,d)-anti ajaib, sedangkan pelabelan ajaib jika memiliki bobot titik, bobot sisi, atau bobot *face* yang sama.

Pelabelan anti ajaib adalah perluasan dari pelabelan ajaib yang diperkenalkan oleh *Ko-wei Lih* [2] pada tahun 1983.

1.2 Perumusan Masalah

Pada skripsi ini akan dikaji pelabelan *d*-anti ajaib untuk $a \geq 3$, dan $b \geq 2$ untuk graf bidang C_a^b.

1.3 Pembatasan Masalah

Kajian pada perumusan masalah di atas adalah menentukan pelabelan *d*-anti ajaib untuk graf bidang $C_4^2, C_3^3,$ dan C_3^4 anti ajaib dengan tipe (1, 1, 1).

1.4 Tujuan

Adapun tujuan penulisan skripsi ini adalah menentukan pelabelan anti ajaib *face* untuk graf bidang C_a^bdimana $a \geq 3$, dan $b \geq 2$ sehingga memiliki pelabelan tipe (1, 1, 1) dengan $d = a + 1$

1.3 Sistematika Penulisan

Pada Bab I, diuraikan tentang latar belakang, permasalahan, pembatasan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan skripsi ini. Konsep dasar dari teori graf berupa defenisi dan terminologi, serta beberapa teori pendukung yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan skripsi ini disajikan pada Bab II sebagai landasan teori. Kemudian, pembahasan dari permasalahan tersebut akan diuraikan pada Bab III, yaitu pelabelan *d*-anti ajaib untuk graf bidang $C_4^2, C_3^3,$ dan C_3^4. Pada bab ini juga akan diberikan beberapa teorema pendukung untuk membantu proses pembuktian

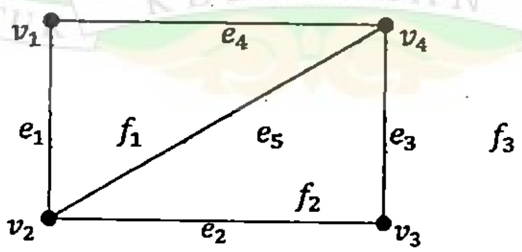
BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan disajikan beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan permasalahan yang telah dikemukan pada Bab I. Definisi dan terminologi dalam teori graf ada pada Subbab 2.1. Subbab 2.2, menguraikan tentang jenis-jenis graf, Subbab 2.3 menjelaskan tentang pelabelan graf dan Subbab 2.4, menjelaskan tentang graf bidang.

2.1 Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf

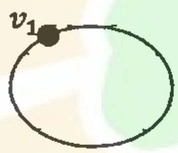
$G* = (V, E)$ disebut **graf** jika $G*$ terdiri dari pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan titik tak kosong dan E terdiri dari pasangan tak terurut dari elemen-elemen V. Elemen-elemen dari V disebut **titik** dari $G*$ dan elemen-elemen dari E disebut **sisi** dari G. Untuk graf bidang $G = (V, E, F)$ memiliki himpunan titik $V(G)$, himpunan sisi $E(G)$, dan himpunan *face* $F(G)$ yang merupakan ***face*** **(muka)** dari graf tersebut. Jumlah titik di G pada graf disebut sebagai kardinalitas graf, dan dinotasikan dengan v, jumlah sisi di G, dinotasikan dengan e, dan jumlah *face* di G dinotasikan dengan f. Perhatikan Gambar 2.1.1.



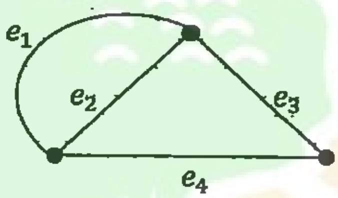
Gambar 2.1.1 Ilustrasi titik, sisi, dan *face* pada graf

Pada Gambar 2.1.1 terdapat graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, dan himpunan *face* $F(G) = \{f_1; f_2; f_3\}$, untuk $\{f_1, f_2\}$ sebagai f internal dan $\{f_3\}$ sebagai f eksternal. Sehingga diperoleh $v = 4$, $e = 5$, dan $f = 3$.

Sebuah sisi yang menghubungkan suatu titik dengan titik itu sendiri disebut ***loop*** dan suatu sisi disebut **sisi ganda** jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik yang sama. Gambar 2.1.2 berikut memperlihatkan sebuah *loop* dan graf dengan sisi ganda.



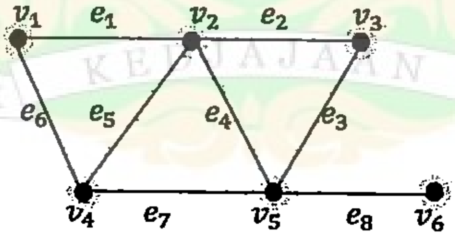
(a)



(b)

Gambar 2.1.2 (*a*) *loop* (*b*) graf dengan sisi ganda

Walk (jalan) pada suatu graf G adalah barisan hingga $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_n, v_n$ dari titik-titik dan sisi-sisi di G [5]. Perhatikan Gambar 2.1.3.

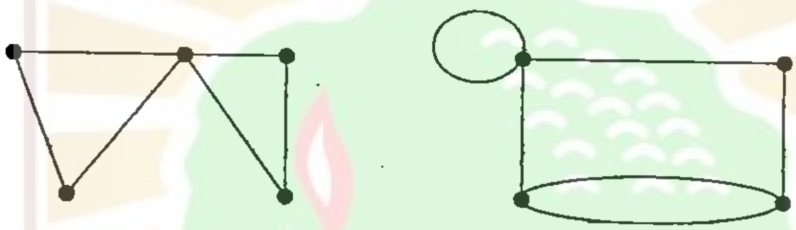


Gambar 2.1.3 *Walk* dalam graf

Pada Gambar 2.1.5 *walk* $v_1, v_2, v_3, v_5, v_4, v_1$ merupakan *walk* merupakan suatu *cycle* yang memiliki panjang 5.

2.2 Jenis-jenis Graf

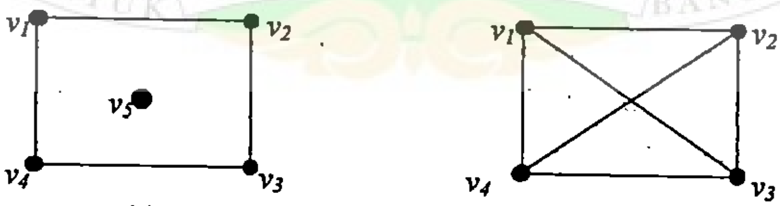
Suatu graf yang tidak mempunyai sisi ganda atau *loop* dinamakan **graf sederhana**. Sedangkan graf yang mempunyai sisi ganda dinamakan **graf tak sederhana**. Perhatikan Gambar 2.2.1.



(a) (b)

Gambar 2.2.1 (*a*) Graf sederhana (*b*) Graf tak sederhana

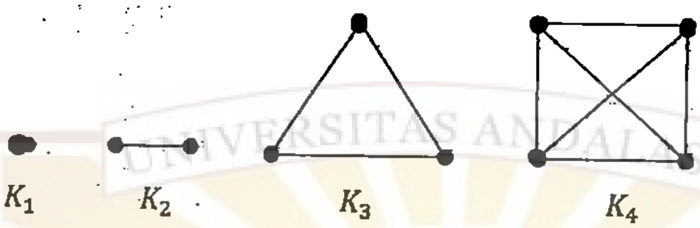
Suatu graf G disebut **graf terhubung *(connected graph)***, jika untuk setiap pasang titik v_i dan v_j di dalam himpunan V terdapat lintasan dari v_i ke v_j. Jika tidak, maka G disebut **graf tak terhubung *(disconnected graph)***. Graf yang hanya terdiri atas satu titik saja (tanpa sisi) juga dikatakan graf terhubung, karena titik tunggalnya terhubung dengan dirinya sendiri. Perhatikan Gambar 2.2.2



(a) (b)

Gambar 2.2.2 (*a*) Graf tak terhubung (*b*) Graf terhubung

Graf sederhana yang setiap titiknya mempunyai sisi ke semua titik lainnya dinamakan **graf lengkap**. Graf lengkap dengan *n* buah titik dilambangkan dengan K_n. Perhatikan Gambar 2.2.3.



Gambar 2.2.3. Graf lengkap $K_n, 1 \leq n \leq 4$

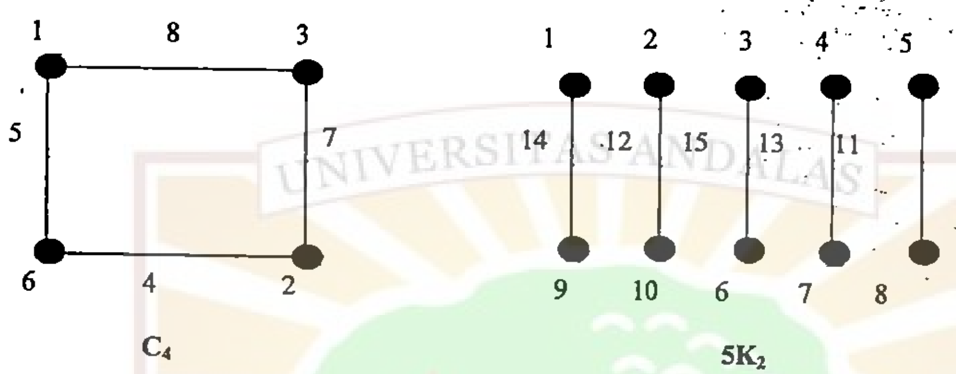
2.3 Pelabelan Graf

Pelabelan dari suatu graf adalah suatu pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan titik, sisi, atau *face* ke himpunan bilangan bulat positif. Domain dari pemetaan tersebut dapat berupa himpunan semua titik, himpunan semua sisi, himpunan semua *face*, dan himpunan semua titik, sisi, dan *face*.

Definisi 2.1.1 *Pemetaan satu-satu* λ *dari* $V(G) \cup E(G) \cup F(G)$ *ke* $\{1, 2, 3, \ldots, v + e + f\}$ *adalah pelabelan tipe (1, 1, 1).*

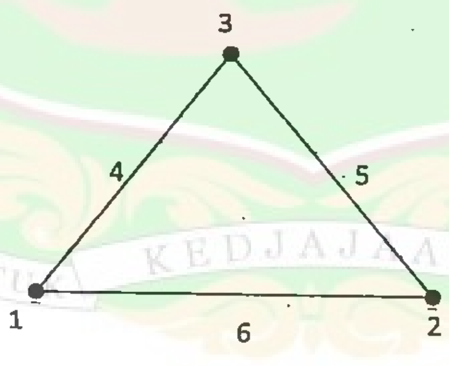
Jumlah label dari hasil pelabelan graf disebut **bobot. Bobot dari** ***face*** **pada pelabelan** adalah jumlah dari label-label yang dibawa oleh *face* tersebut, himpunan sisi dan titik disekitarnya.

Suatu graf dikatakan **pelabelan ajaib** jika memiliki bobot titik, bobot sisi, bobot *face* yang sama atau terdapat suatu konstanta k sedemikian sehingga didapatkan $k = \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y)$ untuk setiap $x, y \in V(G)$ dan $xy \in E(G)$. Pada Gambar 2.3.1, berturut-turut memperlihatkan ajaib untuk graf C_4 dan $5K_2$ yang mempunyai konstanta ajaib $k = 12$, $k = 24$.



Gambar 2.3.1. Pelabelan ajaib pada graf C_4 dan $5K_2$

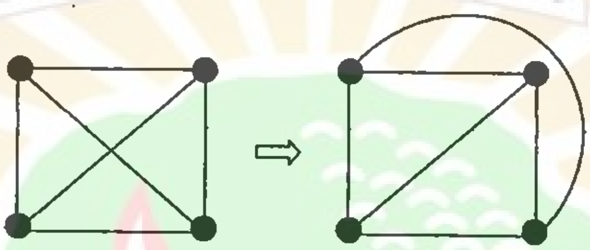
Suatu graf $G* = G*(V, E)$ yang memiliki bobot titik, bobot sisi atau bobot *face* yang berbeda disebut graf dengan **pelabelan anti ajaib.** Perhatikan Gambar 2.3.2.



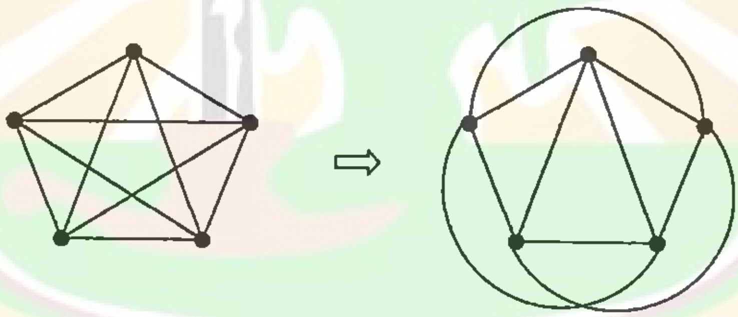
Gambar 2.3.2 Pelabelan anti ajaib pada graf $G*$.

2.4 Graf Bidang *(Plane Graphs)*

Suatu graf G dikatakan **graf planar** apabila graf G tersebut dapat digambarkan pada suatu bidang datar dengan sisi-sisi yang tidak saling bersilangan. Perhatikan Gambar 2.4.1 dan Gambar 2.4.2.



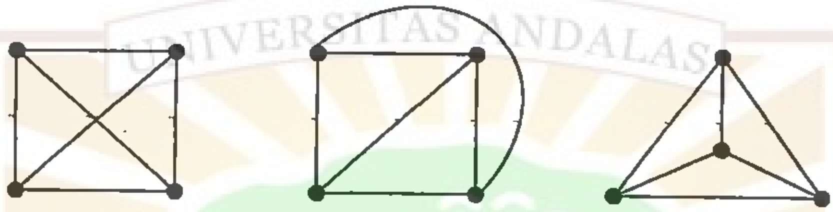
Gambar 2.4.1 K_4 adalah graf planar



Gambar 2.4.2 K_5 bukan graf planar

Graf K_4 pada Gambar 2.4.1 adalah graf planar karena graf tersebut dapat digambarkan kembali tanpa ada sisi-sisi yang bersilangan, sedangkan K_5 pada Gambar 2.4.2 bukan graf planar.

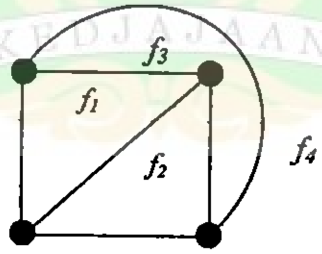
Graf planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling bersilangan disebut **graf bidang (*plane graph*).** Perhatikan Gambar 2.4.3, graf (a), (b), dan (c) adalah graf planar, tetapi graf (a) bukan graf bidang, sedangkan graf (b) dan (c) adlah graf bidang.



Gambar 2.4.3 Tiga buah graf planar, graf (*b*) dan (*c*) adalah graf bidang

Sisi-sisi pada graf planar membagi bidang menjadi beberapa *face*. Pada setiap graf bidang terdapat satu *face* **eksternal**, disingkat dengan f_{ext}. Untuk *face* yang lain dinamakan *face* **internal**, disingkat f_{int}.

Perhatikan Gambar 2.4.4, graf planar terdiri dari 4 *face* yaitu f_1, f_2, f_3 sebagai f_{int} dan f_4 sebagai f_{ext}.



Gambar 2.4.4 Graf planar yang terdiri dari 4 *face.*

Jumlah titik di $V(C_a^b)$ dinotasikan dengan v, dan jumlah sisi di $E(C_a^b)$ dinotasikan dengan e, yaitu:

$$v = \frac{ab(a+b)}{2} + a \qquad \text{dan} \qquad e = \frac{ab(a+3)}{2}$$

Untuk selanjutnya, tanpa mengurangi perumuman, kita dapat membatasi masalah hanya pada pelabelan *face d*-anti ajaib tipe (1,1,1) dari graf bidang C_a^b.

BAB III

PELABELAN *FACE* $(a+1)$-ANTI AJAIB

UNTUK GRAF BIDANG C_a^b

Pada bab ini akan dikaji pelabelan anti ajaib *face* untuk graf bidang C_a^b, untuk $a \geq 3$ dan $b \geq 2$ yang memiliki pelabelan $(a + 1)$ anti ajaib dengan tipe (1, 1, 1).

3.1 Graf Bidang (*Plane Graphs*) C_a^b

Misal $I = \{1,2,3,\ldots,a\}$ dan $J = \{1,2,3,\ldots,b\}$ adalah himpunan-himpunan indeks dan $y_1, y_2, \ldots, y_a$ adalah titik-titik tetap dari suatu graf C_a^b. Dengan menghubungkan titik-titik y_i dan y_{i+1} maka akan diperoleh lintasan $P_i^j = \{y_i, x_{i,j,1}, x_{i,j,2}, \ldots, x_{i,j,i}, y_{i+1}\}$ dengan panjang $i+1$, dimana $i \in J$ dan $j \in J$ dan $y_{a+1} = y_1$, maka diperoleh sebuah graf bidang C_a^b dengan:

$$V(C_a^b) = \{y_i : i \in I\} \cup \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in J} \{x_{i,j,k} : 1 \leq k \leq i\},$$

$$E(C_a^b) = \bigcup_{i\in I} \{y_i x_{i,j,1} : j \in J\} \cup \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in J} \{x_{i,j,k} x_{i,j,k+1} : 1 \leq k \leq i-1\}$$
$$\cup \bigcup_{i\in I} \{x_{i,j,i} y_{i+1} : j \in J\},$$

dengan

$$v = \frac{ab(a+b)}{2} + a \qquad \text{dan} \qquad e = \frac{ab(a+3)}{2}.$$

Misal *face* $f_{i,j}$ adalah suatu *face* yang dibentuk oleh path P_i^j dan P_i^{j+1} untuk $i \in I$ dan $j \in J - \{b\}$ dengan $(2i+2)$-sisi $face\ f_{i,j}$. Himpunan *face* $F(C_a^b)$ terdiri dari *face* $f_{i,j}$ sebanyak $a(b-1)$ $face\ f_{i,j}$, satu *face* internal dengan $\frac{a(a+3)}{2}$ -sisi *face* f_{int} yang ditentukan oleh *cycle* dengan titik-titiknya $\{y_i : i \in I\} \cup \cup_{i \in I} \{x_{i,b,k} : 1 \le k \le i\} =$ dan satu *face* eksternal dengan $\frac{a(a+3)}{2}$ -sisi face f_{ext} yang ditentukan oleh titik-titik $\{y_i : i \in I\} \cup \cup_{i \in I} \{x_{i,1,k} : 1 \le k \le i\}$.

3.2 Bobot Face

Misal pelabelan titik, sisi, dan *face* berturut-turut adalah α, β, dan γ. Bobot dari *face* $f_{i,j}$, *face* internal, dan *face* eksternal adalah sebagai berikut :

$$w(f_{i,j}) = \alpha(y_i) + \sum_{k=1}^{i} \alpha(x_{i,j,k}) + \alpha(y_{i+1}) + \sum_{k=1}^{i} \alpha(x_{i,j+1,k}) + \beta(y_i x_{i,j,1}) +$$

$$\sum_{k=1}^{i-1} \beta(x_{i,j,k} x_{i,j,k+1}) + \beta(x_{i,j,i} y_{i+1}) + \beta(y_i x_{i,j+1,1}) +$$

$$\sum_{k=1}^{i-1} \beta(x_{i,j+1,k} x_{i,j+1,k+1}) + \beta(x_{i,j+1,i} y_{i+1}) + \gamma(f_{i,j})$$

untuk $i \in I$ dan $j \in J - \{b\}$,

$$w(f_{ext}) = \sum_{i=1}^{a} \alpha(y_i) + \sum_{i=1}^{a} \sum_{k=1}^{i} \alpha(x_{i,1,k}) + \sum_{i=1}^{a} \beta(y_i x_{i,1,1}) +$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{i-1}\beta(x_{i,1,k}x_{i,1,k+1})+\sum_{i=1}^{a}\beta(x_{i,1,i}y_{i+1})+\gamma(f_{ext}),$$

$$w(f_{int})=\sum_{i=1}^{a}\alpha(y_i)+\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{i}\alpha(x_{i,b,k})+\sum_{i=1}^{a}\beta(y_i x_{i,b,1})+$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{i-1}\beta(x_{i,b,k}x_{i,b,k+1})+\sum_{i=1}^{a}\beta(x_{i,b,i}y_{i+1})+\gamma(f_{int}),$$

Pelabelan graf bidang G disebut ***d-antimagic*** jika untuk setiap s, bobot dari s-sisi adalah $W_s = \{a_s, a_s + d, a_s + 2d, \dots, a_s + (f_s - 1)d\}$, untuk beberapa a_s dan d bilangan bulat $(a_s > 0, d \geq 0)$, dimana f_s adalah jumlah s-sisi yang membentuk *face*.

Untuk selanjutnya, masalah dibatasi pada pelabelan *d-anti ajaib face* dari graf bidang (*plane graphs*) C_a^b yang memiliki tipe (1,1,1). Masalah tersebut akan disajikan dalam bentuk teorema sebagai berikut:

Teorema 3.2.1 *Untuk $a \geq 3$ dan $b \geq 2$ graf bidang C_a^b memiliki pelabelan $(a + 1)$ anti ajaib (1, 1, 1).*

Untuk membuktikan teorema ini perhatikan 3 kasus dibawah ini:

Kasus 1: Untuk a genap

Misalkan α_1 pelabelan titik, β_1 pelabelan sisi dan γ_1 pelabelan *face* dari graf bidang C_a^b

Formulakan pelabelan titik α_1, pelabelan sisi β_1 dan pelabelan face γ_1 dari C_a^b sebagai berikut:

$\alpha_1(yi) = v - a + e + i + 1$ dimana $1 \leq i \leq a.$

$$\alpha_1\left(x_{i,j,k}\right) = \begin{cases} \dfrac{bi(i-1)}{2} + b + \dfrac{1-j}{2} & \text{untuk } i \text{ dan } j \text{ ganjil}, k = 1, \\ \dfrac{bi(i-1)}{2} + \left\lfloor \dfrac{b}{2} \right\rfloor + \dfrac{2-j}{2} & \text{untuk } i \text{ ganjil dan } j \text{ genap}, k = 1, \\ \dfrac{bi(i-1)}{2} + b(k-1) + j & \text{untuk } i \text{ genap}, k \text{ ganjil atau} \\ & \text{untuk } i \text{ ganjil}, i \geq 3, k \text{ genap}, \\ \dfrac{bi(i-1)}{2} + kb + 1 - j & \text{untuk } i \text{ dan } k \text{ genap atau} \\ & \text{untuk } i \text{ dan } k \text{ ganjil}, i, k \geq 3, \end{cases}$$

untuk $i \in I, j \in J$ dan $1 \leq k \leq i.$

$$\beta_1\left(y_i x_{i,j,1}\right) = \begin{cases} \dfrac{b(i-1)(i+2)}{2} + j & \text{untuk } i \text{ ganjil}, \\ \dfrac{b(i-1)(i+2)}{2} + \dfrac{j+1}{2} & \text{untuk } i \text{ genap}, j \text{ ganjil}, \\ \dfrac{b(i-1)(i+2)}{2} + \left\lceil \dfrac{b}{2} \right\rceil + \dfrac{j}{2} & \text{untuk } i \text{ dan } j \text{ genap}, \end{cases}$$

untuk $i \in I, j \in J.$

$$\beta_1\left(x_{i,j,1} y_{i+1}\right) = \begin{cases} \dfrac{bi(i+3)}{2} + 1 - j & \text{untuk } i \text{ ganjil}, \\ \dfrac{bi(i+3)}{2} - b + j & \text{untuk } i \text{ genap}; \end{cases}$$

untuk $i \in I, j \in J.$

$$\beta_1(x_{i,j,k}x_{i,j,k+1}) = \begin{cases} \dfrac{bi(i+1)}{2} + kb + 1 - j & \text{untuk } k \text{ ganjil,} \\ \dfrac{bi(i+1)}{2} + b(k-1) + j & \text{untuk } k \text{ genap,} \end{cases}$$

untuk $i \in I, j \in J$ dan $1 \leq k \leq i-1$.

$$\gamma_1(f_{i,j}) = \begin{cases} v + e + f - (j-1)a - i + 1 & \text{untuk } i \text{ ganjil,} \\ v + e + f + (j + 1 - b)a - i + 1 & \text{untuk } i \text{ genap,} \end{cases}$$

untuk $i \in I, j \in J - \{b\}$.

$\gamma_1(f_{ext}) = v + e + 2$

$\gamma_1(f_{int}) = v - a + e + 1$

Berikan label pada titik, sisi, dan *face* dari C_a^b berturut-turut dengan α_1, $v - a + \beta_1$ dan γ_1, dapat dilihat bahwa hasil dari pelabelan adalah pelabelan dengan tipe (1,1,1) dimana bobot dari *face* $f_{i,j}$ dengan $(2i+2)$-sisi *face* membentuk barisan aritmatika dengan beda $d = a + 1$ dan $w(f_{ext}) - w(f_{int}) = a + 1$.

Contoh Kasus 1:

Misalkan diberikan graf C_a^b dengan $a = 4$ dan $b = 2$. Akan ditunjukkan graf bidang C_a^b memiliki pelabelan $(a+1)$ −anti ajaib dengan tipe (1, 1, 1).

Jawab :

Untuk $a = 4$ dan $b = 2$ dengan $I = \{1,2,3,4\}$ dan $J = \{1,2\}$, dan y_1, y_2, y_3, y_4 adalah titik-titik tetapnya, maka akan dikonstruksi *path-path* terputus P_i^j untuk $i \in I$ dan $j \in J$:

- Untuk $i = 1$, diperoleh:
  - $P_1^1 = \{y_1, x_{1,1,1}, y_2\}$
  - $P_1^2 = \{y_1, x_{1,2,1}, y_2\}$
- Untuk $i = 2$, diperoleh:
  - $P_2^1 = \{y_2, x_{2,1,1}, x_{2,1,2}, y_3\}$
  - $P_2^2 = \{y_2, x_{2,2,1}, x_{2,2,2}, y_3\}$
- Untuk $i = 3$, diperoleh:
  - $P_3^1 = \{y_3, x_{3,1,1}, x_{3,1,2}, x_{3,1,3}, y_4\}$
  - $P_3^2 = \{y_3, x_{3,2,1}, x_{3,2,2}, x_{3,2,3}, y_4\}$
- Untuk $i = 4$, diperoleh:
  - $P_4^1 = \{y_4, x_{4,1,1}, x_{4,1,2}, x_{4,1,3}, x_{4,1,4}, y_5\}$
  - $P_4^2 = \{y_4, x_{4,2,1}, x_{4,2,2}, x_{4,2,3}, x_{4,2,4}, y_5\}$

dimana $y_1 = y_{a+1}$, maka $y_1 = y_5$.

dan diperoleh:

$$v = \frac{ab(a+1)}{2} + a = \frac{4.2(4+1)}{2} + 4 = 24$$

$$e = \frac{ab(a+3)}{2} = \frac{4.2(4+3)}{2} = 28$$

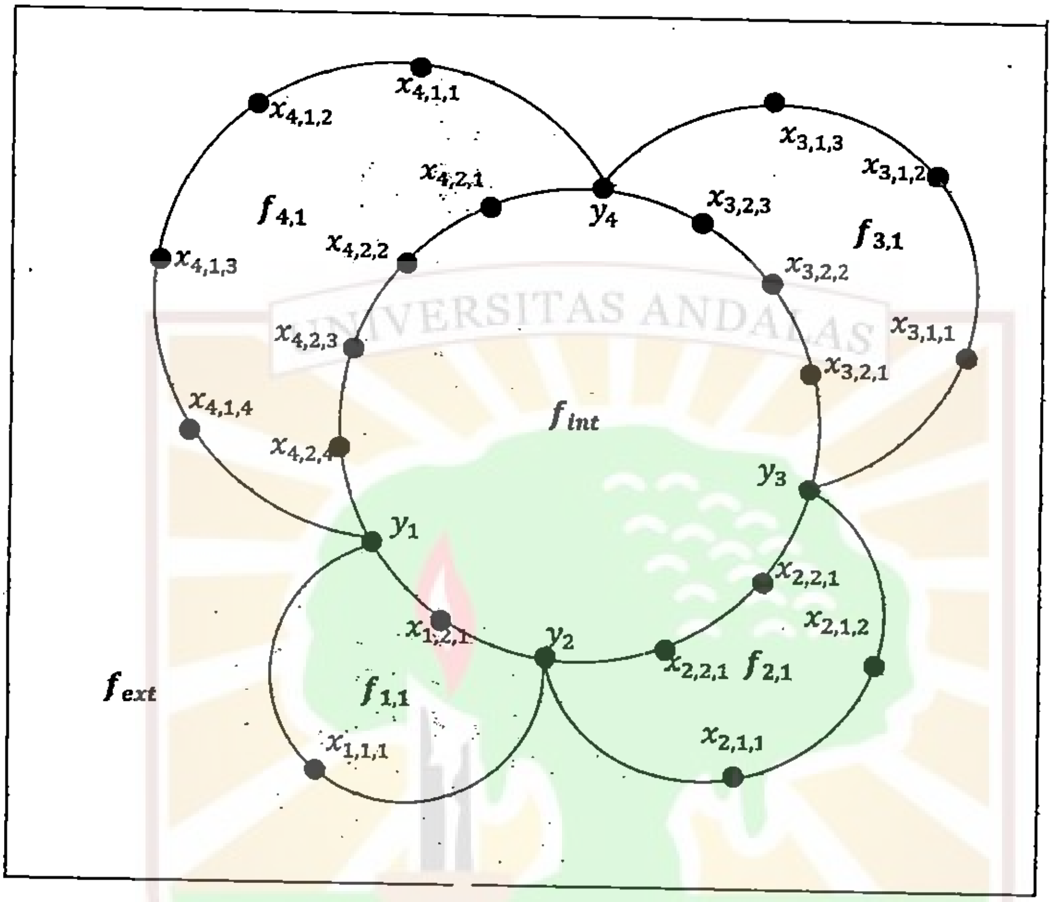
Himpunan *face* $F(C_4^2)$ memiliki $a(b-1)$ *face* $f_{i,j}$, yaitu $4(2-1) = 4$ *face* $f_{i,j}$ dengan $(2i+2)$-sisi *face* yang ditentukan oleh P_i^j dan P_i^{j+1} untuk $i \in I, j \in J - \{b\}$, satu f_{int} dengan $\frac{a(a+3)}{2}$ sisi f_{int} dan satu f_{ext} dengan $\frac{a(a+3)}{2}$ sisi f_{ext} yaitu :

- $f_{1,1} = (2.1 + 2) = 4$ sisi *face* yang ditentukan oleh P_1^1 dan P_1^2
- $f_{2,1} = (2.2 + 2) = 6$ sisi *face* yang ditentukan oleh P_2^1 dan P_2^2
- $f_{3,1} = (2.3 + 2) = 8$ sisi *face* yang ditentukan oleh P_3^1 dan P_3^2
- $f_{4,1} = (2.4 + 2) = 10$ sisi *face* yang ditentukan oleh P_4^1 dan P_4^2
- $f_{int} = \frac{4(4+3)}{2} = 14$ sisi *face*
- $f_{ext} = \frac{4(4+3)}{2} = 14$ sisi *face*

sehingga diperoleh himpunan $F(C_4^2) = \{f_{1,1}, f_{2,1}, f_{3,1}, f_{4,1}, f_{int}, f_{ext}\}$ dengan kardinalitas $f = 6$.

Perhatikan Gambar 3.2.1, dimisalkan gambar awal graf bidang C_4^2 dengan $v = 24$, $e = 28$ dan $f = 6$ sebelum dilakukan pelabelan titik, pelabelan sisi dan pelabelan pada *face*.

Misalkan gambar awal graf bidang C_4^2 seperti gambar berikut :



Gambar 3.2.1 Graf bidang C_4^2

1. **Dilakukan pelabelan disetiap titik**

❖ **Pada titik $\alpha_1(y_i)$**

Untuk $i = 1$, diperoleh $\alpha_1(y_1) = v - a + e + i + 1$

$= 24 - 4 + 28 + 1 + 1 = 50$

Untuk $i = 2$, diperoleh $\alpha_1(y_2) = v - a + e + i + 1$

$= 24 - 4 + 28 + 2 + 1 = 51$

Untuk $i = 3$, diperoleh $\alpha_1(y_3) = v - a + e + i + 1$

$= 24 - 4 + 28 + 3 + 1 = 52$

Untuk $i = 4$, diperoleh $\alpha_1(y_4) = v - a + e + i + 1$

$$= 24 - 4 + 28 + 4 + 1 = 53$$

❖ **Pada titik $\alpha_1(x_{i,j,k})$**

➢ **Untuk $i = 1$**

- Untuk i dan j ganjil, $k = 1$, diperoleh:

$$\alpha_1(x_{1,1,1}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b + \frac{1-j}{2} = \frac{2.1(1-1)}{2} + 2 + \frac{1-1}{2} = 2$$

- Untuk i ganjil dan j genap, $k = 1$, diperoleh:

$$\alpha_1(x_{1,2,1}) = \frac{bi(i-1)}{2} + \left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor + \frac{2-j}{2} = \frac{2.1(1-1)}{2} + \left\lfloor\frac{2}{2}\right\rfloor + \frac{2-2}{2} = 1$$

➢ **Untuk $i = 2$**

- Untuk i genap dan k ganjil, diperoleh:

$$\alpha_1(x_{2,1,1}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-1) + j = \frac{2.2(2-1)}{2} + 2(1-1) + 1 = 3$$

$$\alpha_1(x_{2,2,1}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-1) + j = \frac{2.2(2-1)}{2} + 2(1-1) + 2 = 4$$

- Untuk i dan k genap, diperoleh:

$$\alpha_1(x_{2,1,2}) = \frac{bi(i-1)}{2} + kb + 1 - j = \frac{2.2(2-1)}{2} + 2.2 + 1 - 1 = 6$$

$$\alpha_1(x_{2,2,2}) = \frac{bi(i-1)}{2} + kb + 1 - j = \frac{2.2(2-1)}{2} + 2.2 + 1 - 2 = 5$$

➤ **Untuk $i = 3$**

- Untuk i dan j ganjil, $k = 1$, diperoleh:

$$\alpha_1(x_{3,1,1}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b + \frac{1-j}{2} = \frac{2.3(3-1)}{2} + 2 + \frac{1-1}{2} = 8$$

- Untuk i ganjil dan j genap, $k = 1$, diperoleh:

$$\alpha_1(x_{3,2,1}) = \frac{bi(i-1)}{2} + \left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor + \frac{2-j}{2} = \frac{2.3(1-1)}{2} + \left\lfloor\frac{2}{2}\right\rfloor + \frac{2-2}{2} = 7$$

- Untuk i ganjil, $i \geq 3$, k genap, diperoleh:

$$\alpha_1(x_{3,1,2}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-1) + j = \frac{2.3(3-1)}{2} + 2(2-1) + 1 = 9$$

$$\alpha_1(x_{3,2,2}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-1) + j = \frac{2.3(3-1)}{2} + 2(2-1) + 2 = 10$$

- Untuk i dan k ganjil, $i, k \geq 3$, diperoleh:

$$\alpha_1(x_{3,1,3}) = \frac{bi(i-1)}{2} + kb + 1 - j = \frac{2.3(3-1)}{2} + 3.2 + 1 - 1 = 12$$

$$\alpha_1(x_{3,2,3}) = \frac{bi(i-1)}{2} + kb + 1 - j = \frac{2.3(3-1)}{2} + 3.2 + 1 - 2 = 11$$

➤ **Untuk $i = 4$**

- Untuk i genap dan k ganjil, diperoleh:

$$\alpha_1(x_{4,1,1}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-1) + j = \frac{2.4(4-1)}{2} + 2(1-1) + 1 = 13$$

$$\alpha_1(x_{4,1,3}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-1) + j = \frac{2.4(4-1)}{2} + 2(3-1) + 1 = 17$$

$$\alpha_1(x_{4,2,1}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-1) + j = \frac{2.4(4-1)}{2} + 2(1-1) + 2 = 14$$

$$\alpha_1(x_{4,2,3}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-1) + j = \frac{2.4(4-1)}{2} + 2(3-1) + 2 = 18$$

- Untuk i dan k genap, diperoleh:

$$\alpha_1(x_{4,1,2}) = \frac{bi(i-1)}{2} + kb + 1 - j = \frac{2.4(4-1)}{2} + 2.2 + 1 - 1 = 16$$

$$\alpha_1(x_{4,1,4}) = \frac{bi(i-1)}{2} + kb + 1 - j = \frac{2.4(4-1)}{2} + 4.2 + 1 - 1 = 20$$

$$\alpha_1(x_{4,2,2}) = \frac{bi(i-1)}{2} + kb + 1 - j = \frac{2.4(4-1)}{2} + 2.2 + 1 - 2 = 15$$

$$\alpha_1(x_{4,2,4}) = \frac{bi(i-1)}{2} + kb + 1 - j = \frac{2.4(4-1)}{2} + 4.2 + 1 - 2 = 19$$

2. **Dilakukan pelabelan disetiap sisi**

❖ **Untuk $i = 1$**

- **pada sisi $\beta_1(y_i x_{i,j,k})$**

  ▪ Untuk i ganjil, diperoleh:

$$\beta_1(y_1 x_{1,1,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + j = \frac{2(1-1)(1+2)}{2} + 1 = 1$$

$$\beta_1(y_1 x_{1,2,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + j = \frac{2(1-1)(1+2)}{2} + 2 = 2$$

- **pada sisi $\beta_1(x_{i,j,k} y_{i+1})$**

  ▪ Untuk i ganjil, diperoleh:

$$\beta_1(x_{1,1,1} y_2) = \frac{bi(i+3)}{2} + 1 - j = \frac{2.1(1+3)}{2} + 1 - 1 = 4$$

$$\beta_1(x_{1,2,1}y_2) = \frac{bi(i+3)}{2} + 1 - j = \frac{2.1(1+3)}{2} + 1 - 2 = 3$$

❖ **Untuk $i = 2$**

- **pada sisi $\beta_1(y_i x_{i,j,k})$**
  - Untuk i genap dan j ganjil, diperoleh:

$$\beta_1(y_2 x_{2,1,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + \frac{j+1}{2} = \frac{2(2-1)(2+2)}{2} + \frac{1+1}{2} = 5$$

  - Untuk i dan j genap, diperoleh:

$$\beta_1(y_2 x_{2,2,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + \left\lceil\frac{b}{2}\right\rceil + \frac{j}{2} = \frac{2(2-1)(2+2)}{2} + \left\lceil\frac{2}{2}\right\rceil + \frac{2}{2} = 6$$

- **pada sisi $\beta_1(x_{i,j,k} x_{i,j,k+1})$**
  - Untuk k ganjil, diperoleh:

$$\beta_1(x_{2,1,1} x_{2,1,2}) = \frac{bi(i+3)}{2} + kb + 1 - j = \frac{2.2(2+3)}{2} + 1.2 + 1 - 1 = 8$$

$$\beta_1(x_{2,2,1} x_{2,2,2}) = \frac{bi(i+3)}{2} + kb + 1 - j = \frac{2.2(2+3)}{2} + 1.2 + 1 - 2 = 7$$

- **pada sisi $\beta_1(x_{i,j,k} y_{i+1})$**
  - Untuk i genap, diperoleh:

$$\beta_1(x_{2,1,1} y_3) = \frac{bi(i+3)}{2} - b + j = \frac{2.2(2+3)}{2} - 2 + 1 = 9$$

$$\beta_1(x_{2,2,1} y_3) = \frac{bi(i+3)}{2} - b + j = \frac{2.2(2+3)}{2} - 2 + 2 = 10$$

❖ **Untuk $i = 3$**

- **pada sisi $\beta_1(y_i x_{i,j,k})$**
  - Untuk i ganjil, diperoleh:

$$\beta_1(y_3 x_{3,1,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + j = \frac{2(3-1)(3+2)}{2} + 1 = 11$$

$$\beta_1(y_3 x_{3,2,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + j = \frac{2(3-1)(3+2)}{2} + 2 = 12$$

- **pada sisi $\beta_1(x_{i,j,k} x_{i,j,k+1})$**
  - Untuk k ganjil, diperoleh:

$$\beta_1(x_{3,1,1} x_{3,1,2}) = \frac{bi(i+3)}{2} + kb + 1 - j = \frac{2.3(3+3)}{2} + 1.2 + 1 - 1 = 14$$

$$\beta_1(x_{3,2,1} x_{3,2,2}) = \frac{bi(i+3)}{2} + kb + 1 - j = \frac{2.3(3+3)}{2} + 1.2 + 1 - 2 = 13$$

  - Untuk k genap, diperoleh:

$$\beta_1(x_{3,1,2} x_{3,1,3}) = \frac{bi(i+3)}{2} + b(k-1) + j = \frac{2.3(3+3)}{2} + 2(2-1) + 1 = 15$$

$$\beta_1(x_{3,2,2} x_{3,2,3}) = \frac{bi(i+3)}{2} + b(k-1) + j = \frac{2.3(3+3)}{2} + 2(2-1) + 2 = 16$$

- **pada sisi $\beta_1(x_{i,j,k} y_{i+1})$**
  - Untuk i ganjil, diperoleh:

$$\beta_1(x_{3,1,3} y_4) = \frac{bi(i+3)}{2} + 1 - j = \frac{2.3(3+3)}{2} + 1 - 1 = 18$$

$$\beta_1(x_{3,2,3} y_4) = \frac{bi(i+3)}{2} + 1 - j = \frac{2.3(3+3)}{2} + 1 - 2 = 17$$

❖ **Untuk $i = 4$**

- **pada sisi $\beta_1(y_i x_{i,j,k})$**
  - Untuk i genap dan j ganjil, diperoleh:

$$\beta_1(y_4 x_{4,1,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + \frac{j+1}{2} = \frac{2(4-1)(4+2)}{2} + \frac{1+1}{2} = 19$$

  - Untuk i dan j genap, diperoleh:

$$\beta_1(y_4 x_{4,2,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + \left\lceil\frac{b}{2}\right\rceil + \frac{j}{2} = \frac{2(4-1)(4+2)}{2} + \left\lceil\frac{2}{2}\right\rceil + \frac{2}{2} = 20$$

- **pada sisi $\beta_1(x_{i,j,k} x_{i,j,k+1})$**
  - Untuk k ganjil, diperoleh:

$$\beta_1(x_{4,1,1} x_{4,1,2}) = \frac{bi(i+3)}{2} + kb + 1 - j = \frac{2.4(4+3)}{2} + 1.2 + 1 - 1 = 22$$

$$\beta_1(x_{4,1,3} x_{4,1,4}) = \frac{bi(i+3)}{2} + kb + 1 - j = \frac{2.4(4+3)}{2} + 3.2 + 1 - 1 = 26$$

$$\beta_1(x_{4,2,1} x_{4,2,2}) = \frac{bi(i+3)}{2} + kb + 1 - j = \frac{2.4(4+3)}{2} + 1.2 + 1 - 2 = 21$$

$$\beta_1(x_{4,2,3} x_{4,2,4}) = \frac{bi(i+3)}{2} + kb + 1 - j = \frac{2.4(4+3)}{2} + 3.2 + 1 - 2 = 25$$

  - Untuk k genap, diperoleh:

$$\beta_1(x_{4,1,2} x_{4,1,3}) = \frac{bi(i+3)}{2} + b(k-1) + j = \frac{2.4(4+3)}{2} + 2(2-1) + 1 = 23$$

$$\beta_1(x_{4,2,2} x_{4,2,3}) = \frac{bi(i+3)}{2} + b(k-1) + j = \frac{2.4(4+3)}{2} + 2(2-1) + 2 = 24$$

- **pada sisi $\beta_1(x_{i,j,k}y_{i+1})$**
  - Untuk *i* genap, diperoleh:

$$\beta_1(x_{4,1,4}y_5) = \frac{bi(i+3)}{2} - b + j = \frac{2.4(4+3)}{2} - 2 + 1 = 27$$

$$\beta_1(x_{4,2,4}y_5) = \frac{bi(i+3)}{2} - b + j = \frac{2.4(4+3)}{2} - 2 + 2 = 28$$

3. **Dilakukan pelabelan disetiap *face***

❖ Untuk *i* ganjil, diperoleh:

- $\gamma_1(f_{1,1}) = v + e + f - (j-1)a - i + 1$

$$= 24 + 28 + 6 - (1-1)4 - 1 + 1 = 58$$

- $\gamma_1(f_{3,1}) = v + e + f - (j-1)a - i + 1$

$$= 24 + 28 + 6 - (1-1)4 - 3 + 1 = 56$$

❖ Untuk *i* genap, diperoleh:

- $\gamma_1(f_{2,1}) = v + e + f + (j + 1 - b)a - i + 1$

$$= 24 + 28 + 6 + (1 + 1 - 2)4 - 2 + 1 = 57$$

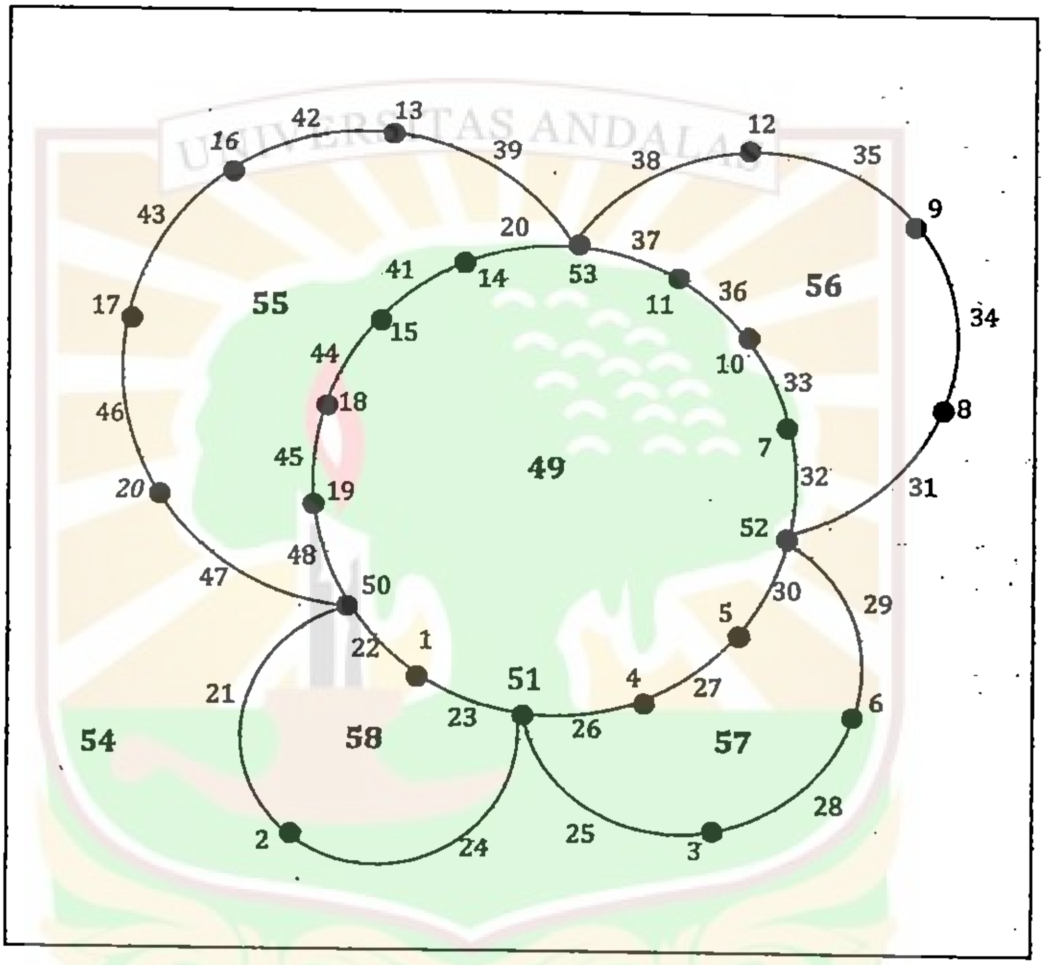
- $\gamma_1(f_{4,1}) = v + e + f + (j + 1 - b)a - i + 1$

$$= 24 + 28 + 6 + (1 + 1 - 2)4 - 4 + 1 = 55$$

❖ Untuk f_{int} dan f_{ext} , diperoleh:

- $\gamma_1(f_{int}) = v - a + e + 1 = 24 - 4 + 28 + 1 = 49$
- $\gamma_1(f_{ext}) = v + e + 2 = 24 + 28 + 2 = 54$

Berikan label titik, sisi, dan *face* berturut-turut dengan $\alpha_1, v - \alpha_1 + \beta_1$, dan γ_1. Hasil dari pelabelan adalah pelabelan dengan tipe (1,1,1) seperti pada Gambar 3.2.2



Gambar 3.2.2 Pelabelan tipe (1,1,1) pada graf bidang C_4^2

4. Bobot *face*

❖ **Untuk *face* $f_{i,j}$**

- $w(f_{1,1}) = \alpha_1(y_1) + \alpha_1(x_{1,1,1}) + \alpha_1(y_2) + \alpha_1(x_{1,2,1}) + \beta_1(y_1 x_{1,1,1}) +$

$$\beta_1(x_{1,1,1} y_2) + \beta_1(y_1 x_{1,2,1}) + \beta_1(x_{1,2,1} y_2) + \gamma_1(f_{1,1})$$

$\beta_1(y_4x_{4,1,1}) + \beta_1(x_{4,1,1}x_{4,1,2}) + \beta_1(x_{4,1,2}x_{4,1,3}) +$

$\beta_1(x_{4,1,3}x_{4,1,4}) + \beta_1(x_{4,1,4}y_5) + \beta_1(y_4x_{4,2,1}) +$

$\beta_1(x_{4,2,1}x_{4,2,2}) + \beta_1(x_{4,2,2}x_{4,2,3}) + \beta_1(x_{4,2,3}x_{4,2,4}) +$

$\beta_1(x_{4,2,4}y_5) + \gamma_1(f_{4,1})$

$= 53 + 14 + 15 + 18 + 19 + 50 + 13 + 16 + 17 + 20 + 41 + 44 + 45$

$+ 48 + 39 + 42 + 43 + 46 + 47 + 55 = 725$

❖ **Untuk** ***face*** f_{int} **dan** f_{ext}

- $w(f_{int}) = \alpha_1(y_1) + \alpha_1(x_{1,2,1}) + \alpha_1(y_2) + \alpha_1(x_{2,2,1}) + \alpha_1(x_{2,2,2}) +$

$\alpha_1(y_3) + \alpha_1(x_{3,2,1}) + \alpha_1(x_{3,2,2}) + \alpha_1(x_{3,2,3}) + \alpha_1(y_4) +$

$\alpha_1(x_{4,2,1}) + \alpha_1(x_{4,2,2}) + \alpha_1(x_{4,2,3}) + \alpha_1(x_{4,2,4}) +$

$\beta_1(y_1x_{1,2,1}) + \beta_1(x_{1,2,1}y_2) + \beta_1(y_2x_{2,2,1}) + \beta_1(x_{2,2,1}x_{2,2,2}) +$

$\beta_1(x_{2,2,2}y_3) + \beta_1(y_4x_{4,2,1}) + \beta_1(x_{4,2,1}x_{4,2,2}) +$

$\beta_1(x_{4,2,2}x_{4,2,3}) + \beta_1(x_{4,2,3}x_{4,2,4}) + \beta_1(x_{4,2,4}y_5) + \gamma_1(f_{int})$

$= 50 + 1 + 51 + 4 + 5 + 52 + 7 + 10 + 11 + 53 + 14 + 15 + 18 + 19$

$+ 22 + 23 + 26 + 27 + 30 + 32 + 33 + 36 + 37 + 40 + 41 + 44 +$

$45 + 48 + 49$

$= 843$

- $w(f_{ext}) = \alpha_1(y_1) + \alpha_1(x_{1,1,1}) + \alpha_1(y_2) + \alpha_1(x_{2,1,1}) + \alpha_1(x_{2,1,2}) +$

  $\alpha_1(y_3) + \alpha_1(x_{3,1,1}) + \alpha_1(x_{3,1,2}) + \alpha_1(x_{3,1,3}) + \alpha_1(y_4) +$

  $\alpha_1(x_{4,1,1}) + \alpha_1(x_{4,1,2}) + \alpha_1(x_{4,1,3}) + \alpha_1(x_{4,1,4}) +$

  $\beta_1(y_1 x_{1,1,1}) + \beta_1(x_{1,1,1} y_2) + \beta_1(y_2 x_{2,1,1}) + \beta_1(x_{2,1,1} x_{2,1,2}) +$

  $\beta_1(x_{2,1,2} y_3) + \beta_1(y_3 x_{3,1,1}) + \beta_1(x_{3,1,1} x_{3,1,2}) +$

  $\beta_1(x_{3,1,2} x_{3,1,3}) + \beta_1(x_{3,1,3} y_4) + \beta_1(y_4 x_{4,1,1}) +$

  $\beta_1(x_{4,1,1} x_{4,1,2}) + \beta_1(x_{4,1,2} x_{4,1,3}) + \beta_1(x_{4,1,3} x_{4,1,4}) +$

  $\beta_1(x_{4,1,4} y_5) + \gamma_1(f_{ext})$

  $= 50 + 2 + 51 + 3 + 6 + 52 + 8 + 9 + 12 + 53 + 13 + 16 + 17 +$

  $20 + 21 + 24 + 25 + 28 + 29 + 31 + 34 + 35 + 38 + 39 + 42 +$

  $43 + 46 + 47 + 54$

  $= 848$

Diperoleh bobot dari $F(C_4^2) = \{w(f_{1,1}), w(f_{2,1}), w(f_{3,1}), w(f_{4,1}), w(f_{int}), w(f_{ext})\}$

$= \{252, 343, 494, 725, 843, 848\}$

Dapat dilihat bahwa $w(f_{ext}) - w(f_{int}) = a + 1$, untuk $a = 4$ sehingga $4 + 1 = 5$, yaitu:

- $w(f_{ext}) - w(f_{int}) = 848 - 843 = 5$

Kasus 2: Untuk a dan b ganjil

Formulakan pelabelan titik α_2, pelabelan sisi β_2 dan pelabelan face γ_2 dari C_a^b sebagai berikut:

$$\alpha_2(y_i) = \begin{cases} v+f-a-1+\mathrm{i} & \text{untuk } 1 \le i \le a \le -1, \\ v+f & \text{untuk } i = a. \end{cases}$$

$$\alpha_2(x_{i,j,k}) = \begin{cases} v-a-\dfrac{j-1}{2} & \text{untuk } i=1 \text{ dan } j \text{ ganjil}, \\ v-a-\dfrac{b+j-1}{2} & \text{untuk } i=1 \text{ dan } j \text{ genap}, \\ \dfrac{bi(i-1)-b+2-j}{2} & \text{untuk } i \text{ dan } j \text{ ganjil}, i \ge 3, k=1, \\ \dfrac{bi(i-1)-j+2}{2} & \text{untuk } i \text{ ganjil dan } j \text{ genap } i \ge 3, k=1, \\ \dfrac{bi(i-1)}{2}+b(k-2)+j & \text{untuk } i \text{ genap dan } k \text{ ganjil atau untuk } i \text{ ganjil}, i \ge 3 \text{ dan } k \text{ genap}, \\ \dfrac{bi(i-1)}{2}+b(k-1)+1-j & \text{untuk } i \text{ dan } k \text{ genap atau untuk } i \text{ dan } k \text{ ganjil}, i,k \ge 3, \end{cases}$$

Untuk $i \in I, j \in J$ dan $1 \le k \le i$.

$\beta_2(y_i x_{i,j,1}) = \beta_1(y_i x_{i,j,1})$ dan

$\beta_2(x_{i,j,i} y_{i+1}) = \beta_1(x_{i,j,i} y_{i+1})$ untuk $i \in I, j \in J$.

$\beta_2(x_{i,j,k} x_{i,j,k+1}) = \beta_1(x_{i,j,k} x_{i,j,k+1})$ untuk $i \in I, j \in J$ dan $1 \le k \le i-1$.

Jawab:

Untuk $a = 3$ dan $b = 3$ dengan $I = \{1,2,3\}$ dan $J = \{1,2,3\}$, dan y_1, y_2, y_3 adalah titik-titik tetapnya, maka akan dikonstruksi *path-path* terputus P_i^j untuk $i \in I$ dan $j \in J$:

- Untuk $i = 1$, diperoleh:
  - $P_1^1 = \{y_1, x_{1,1,1}, y_2\}$
  - $P_1^2 = \{y_1, x_{1,2,1}, y_2\}$
  - $P_1^3 = \{y_1, x_{1,3,1}, y_2\}$
- Untuk $i = 2$, diperoleh:
  - $P_2^1 = \{y_2, x_{2,1,1}, x_{2,1,2}, y_3\}$
  - $P_2^2 = \{y_2, x_{2,2,1}, x_{2,2,2}, y_3\}$
  - $P_2^3 = \{y_2, x_{2,3,1}, x_{2,3,2}, y_3\}$
- Untuk $i = 3$, diperoleh:
  - $P_3^1 = \{y_3, x_{3,1,1}, x_{3,1,2}, x_{3,1,3}, y_4\}$
  - $P_3^2 = \{y_3, x_{3,2,1}, x_{3,2,2}, x_{3,2,3}, y_4\}$
  - $P_3^3 = \{y_3, x_{3,3,1}, x_{3,3,2}, x_{3,3,3}, y_4\}$

dimana $y_1 = y_{a+1}$, maka $y_1 = y_4$.

dan diperoleh :

$$v = \frac{ab(a+1)}{2} + a = \frac{3.3(3+1)}{2} + 3 = 21$$

$$e = \frac{ab(a+3)}{2} = \frac{3.3(3+3)}{2} = 27$$

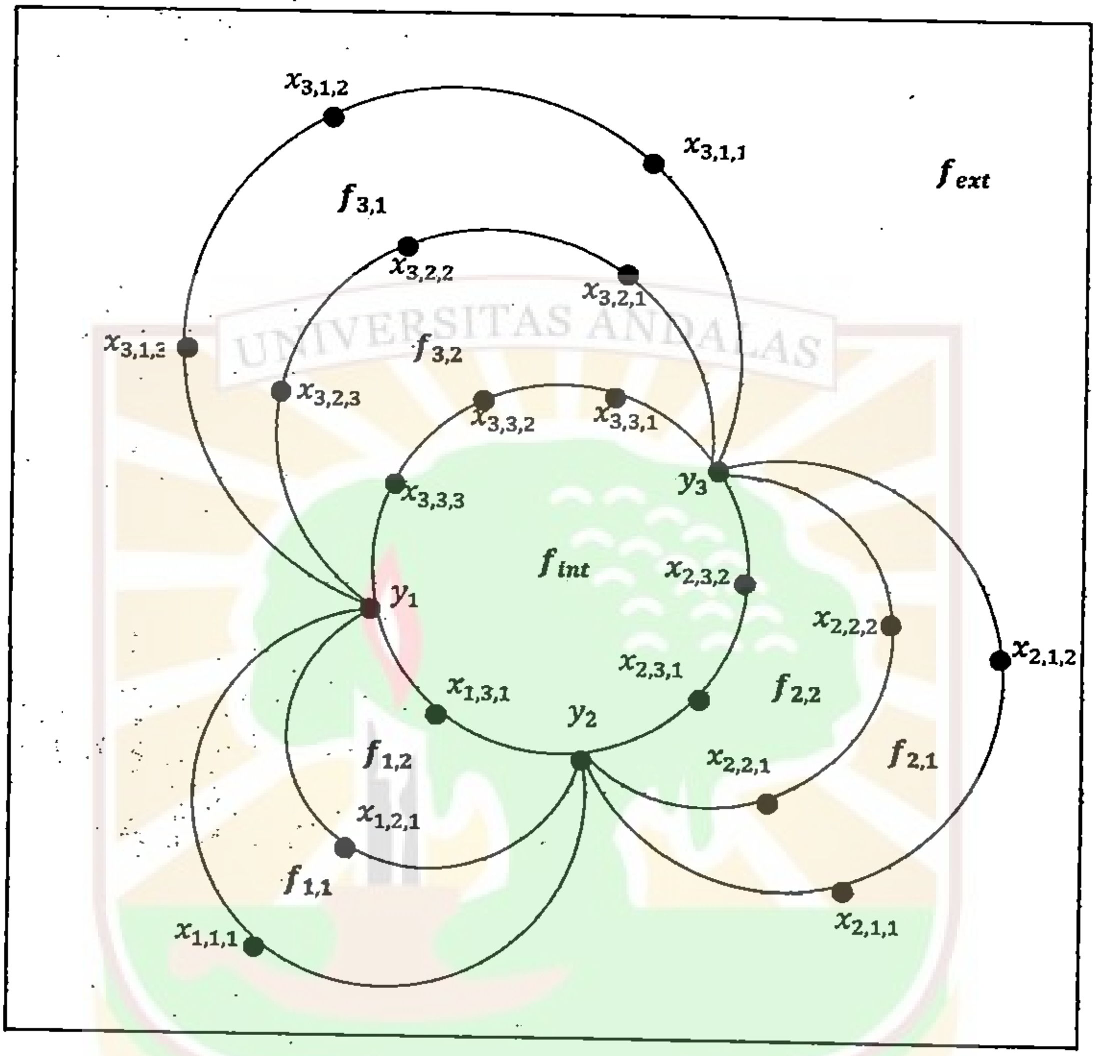
Himpunan *face* $F(C_3^3)$ memiliki $a(b-1)$ *face* $f_{i,j}$, yaitu $3(3-1) = 6$ *face* $f_{i,j}$ dengan $(2i+2)$-sisi *face* yang ditentukan oleh P_i^j dan P_i^{j+1} untuk $i \in I, j \in J - \{b\}$, satu f_{int} dengan $\frac{a(a+3)}{2}$ sisi f_{int} dan satu f_{ext} dengan $\frac{a(a+3)}{2}$ sisi f_{ext} yaitu :

- $f_{1,1} = (2.1+2) = 4$ sisi *face* yang ditentukan oleh P_1^1 dan P_1^2
- $f_{1,2} = (2.1+2) = 4$ sisi *face* yang ditentukan oleh P_1^2 dan P_1^3
- $f_{2,1} = (2.2+2) = 6$ sisi *face* yang ditentukan oleh P_2^1 dan P_2^2
- $f_{2,2} = (2.2+2) = 6$ sisi *face* yang ditentukan oleh P_2^2 dan P_2^3
- $f_{3,1} = (2.3+2) = 8$ sisi *face* yang ditentukan oleh P_3^1 dan P_3^2
- $f_{3,2} = (2.3+2) = 8$ sisi *face* yang ditentukan oleh P_3^2 dan P_3^3
- $f_{int} = \frac{3(3+3)}{2} = 9$ sisi *face*
- $f_{ext} = \frac{3(3+3)}{2} = 9$ sisi *face*

Jadi diperoleh himpunan $F(C_3^3) = \{f_{1,1}, f_{1,2}, f_{2,1}, f_{2,2}, f_{3,1}, f_{3,2}, f_{int}, f_{ext}\}$ dengan kardinalitas $f = 8$.

Perhatikan Gambar 3.2.3, dimisalkan gambar awal graf bidang C_3^3 dengan $v = 21$, $e = 27$ dan $f = 8$ sebelum dilakukan pelabelan titik, pelabelan sisi dan pelabelan pada *face*.

Misalkan gambar awal graf bidang C_3^3 seperti gambar berikut :



Gambar 3.2.3 Graf bidang C_3^3

1. **Dilakukan pelabelan disetiap titik**

❖ Pada titik $\alpha_2(y_i)$

Untuk $i = 1$, diperoleh $\alpha_2(y_1) = v + f - a - 1 + i$

$$= 21 + 8 - 3 - 1 + 1 = 26$$

Untuk $i = 2$, diperoleh $\alpha_2(y_2) = v + f - a - 1 + i$

$$= 21 + 8 - 3 - 1 + 2 = 27$$

Untuk $i = 3$, diperoleh $\alpha_3(y_3) = v + f = 21 + 8 = 29$

❖ **Pada titik $\alpha_2(y_{i,j,k})$**

➢ **Untuk $i = 1$**

- Untuk $i = 1$ dan j ganjil, diperoleh:

$$\alpha_2(y_{1,1,1}) = v - a - \frac{j-1}{2} = 21 - 3 - \frac{1-1}{2} = 18$$

$$\alpha_2(y_{1,3,1}) = v - a - \frac{j-1}{2} = 21 - 3 - \frac{3-1}{2} = 17$$

- Untuk $i = 1$ dan j genap, diperoleh:

$$\alpha_2(y_{1,2,1}) = v - a - \frac{b+j-1}{2} = 21 - 3 - \frac{3+2-1}{2} = 16$$

➢ **Untuk $i = 2$**

- Untuk i genap dan k ganjil, diperoleh:

$$\alpha_2(y_{2,1,1}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-2) + j = \frac{3.2(2-1)}{2} + 3(1-2) + 1 = 1$$

$$\alpha_2(y_{2,2,1}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-2) + j = \frac{3.2(2-1)}{2} + 3(1-2) + 2 = 2$$

$$\alpha_2(y_{2,3,1}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-2) + j = \frac{3.2(2-1)}{2} + 3(1-2) + 3 = 3$$

- Untuk i dan k genap, diperoleh:

$$\alpha_2(y_{2,1,2}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-1) + 1 - j$$

$$= \frac{3.2(2-1)}{2} + 3(2-1) + 1 - 1 = 6$$

$$\alpha_2(y_{2,2,2}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-1) + 1 - j$$

$$= \frac{3.2(2-1)}{2} + 3(2-1) + 1 - 2 = 5$$

$$\alpha_2(y_{2,3,2}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-1) + 1 - j$$

$$= \frac{3.2(2-1)}{2} + 3(2-1) + 1 - 3 = 4$$

- **Untuk $i = 3$**

  - Untuk i dan j ganjil, $i \geq 3$, $k = 1$, diperoleh:

    $$\alpha_2(y_{3,1,1}) = \frac{bi(i-1)-b+2-j}{2} = \frac{3.3(3-1)-3+2-1}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

    $$\alpha_2(y_{3,3,1}) = \frac{bi(i-1)-b+2-j}{2} = \frac{3.3(3-1)-3+2-3}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

  - Untuk i ganjil dan j genap, $i \geq 3$, $k = 1$, diperoleh:

    $$\alpha_2(y_{3,2,1}) = \frac{bi(i-1)-j+2}{2} = \frac{3.3(3-1)-2+2}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

  - Untuk i ganjil, $i \geq 3$ dan k genap, diperoleh:

    $$\alpha_2(y_{3,1,2}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-2) + j = \frac{3.3(3-1)}{2} + 3(2-2) + 1 = 10$$

    $$\alpha_2(y_{3,2,2}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-2) + j = \frac{3.3(3-1)}{2} + 3(2-2) + 2 = 11$$

    $$\alpha_2(y_{3,3,2}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-2) + j = \frac{3.3(3-1)}{2} + 3(2-2) + 3 = 12$$

  - Untuk i dan k ganjil, $i, k \geq 3$, diperoleh:

    $$\alpha_2(y_{3,1,3}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-1) + 1 - j$$

    $$= \frac{3.3(3-1)}{2} + 3(3-1) + 1 - 1 = 15$$

    $$\alpha_2(y_{3,2,3}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-1) + 1 - j$$

❖ **Untuk $i = 2$**

- **pada sisi $\beta_2(y_i x_{i,j,k})$**
  - Untuk i genap dan j ganjil, diperoleh:

$$\beta_2(y_2 x_{2,1,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + \frac{j+1}{2} = \frac{3(2-1)(2+2)}{2} + \frac{1+1}{2} = 7$$

$$\beta_2(y_2 x_{2,3,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + \frac{j+1}{2} = \frac{3(2-1)(2+2)}{2} + \frac{3+1}{2} = 8$$

  - Untuk i dan j genap, diperoleh:

$$\beta_2(y_2 x_{2,2,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + \left\lceil\frac{b}{2}\right\rceil + \frac{j}{2} = \frac{3(2-1)(2+2)}{2} + \left\lceil\frac{3}{2}\right\rceil + \frac{2}{2} = 9$$

- **pada sisi $\beta_2(x_{i,j,k} x_{i,j,k+1})$**
  - Untuk k ganjil, diperoleh:

$$\beta_2(x_{2,1,1} x_{2,1,2}) = \frac{bi(i+3)}{2} + kb + 1 - j$$

$$= \frac{3.2(2+3)}{2} + 1.3 + 1 - 1 = 12$$

$$\beta_2(x_{2,2,1} x_{2,2,2}) = \frac{bi(i+3)}{2} + kb + 1 - j$$

$$= \frac{3.2(2+3)}{2} + 1.3 + 1 - 2 = 11$$

$$\beta_2(x_{2,3,1} x_{2,3,2}) = \frac{bi(i+3)}{2} + kb + 1 - j$$

$$= \frac{3.2(2+3)}{2} + 1.3 + 1 - 3 = 10$$

- **pada sisi $\beta_2(x_{i,j,k}y_{i+1})$**
  - Untuk *i* genap, diperoleh:

$$\beta_2(x_{2,1,1}y_3) = \frac{bi(i+3)}{2} - b + j = \frac{3.2(2+3)}{2} - 3 + 1 = 13$$

$$\beta_2(x_{2,2,1}y_3) = \frac{bi(i+3)}{2} - b + j = \frac{3.2(2+3)}{2} - 3 + 2 = 14$$

$$\beta_2(x_{2,3,1}y_3) = \frac{bi(i+3)}{2} - b + j = \frac{3.2(2+3)}{2} - 3 + 3 = 15$$

❖ **Untuk $i = 3$**

- **pada sisi $\beta_2(y_i x_{i,j,k})$**
  - Untuk *i* ganjil, diperoleh:

$$\beta_2(y_3x_{3,1,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + j = \frac{3(3-1)(3+2)}{2} + 1 = 16$$

$$\beta_2(y_3x_{3,2,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + j = \frac{3(3-1)(3+2)}{2} + 2 = 17$$

$$\beta_2(y_3x_{3,3,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + j = \frac{3(3-1)(3+2)}{2} + 3 = 18$$

- **pada sisi $\beta_2(x_{i,j,k}x_{i,j,k+1})$**
  - Untuk *k* ganjil, diperoleh:

$$\beta_2(x_{3,1,1}x_{3,1,2}) = \frac{bi(i+3)}{2} + kb + 1 - j$$

$$= \frac{3.3(3+3)}{2} + 1.3 + 1 - 1 = 21$$

$$\beta_2(x_{3,2,1}x_{3,2,2}) = \frac{bi(i+3)}{2} + kb + 1 - j$$

$$= \frac{3.3(3+3)}{2} + 1.3 + 1 - 2 = 20$$

$$\beta_2(x_{3,3,1}x_{3,3,2}) = \frac{bi(i+3)}{2} + kb + 1 - j$$

$$= \frac{3.3(3+3)}{2} + 1.3 + 1 - 3 = 19$$

- Untuk k genap, diperoleh:

$$\beta_2(x_{3,1,2}x_{3,1,3}) = \frac{bi(i+3)}{2} + b(k-1) + j$$

$$= \frac{3.3(3+3)}{2} + 3(2-1) + 1 = 22$$

$$\beta_2(x_{3,2,2}x_{3,2,3}) = \frac{bi(i+3)}{2} + b(k-1) + j$$

$$= \frac{3.3(3+3)}{2} + 3(2-1) + 2 = 23$$

$$\beta_2(x_{3,3,2}x_{3,3,3}) = \frac{bi(i+3)}{2} + b(k-1) + j$$

$$= \frac{3.3(3+3)}{2} + 3(2-1) + 3 = 24$$

- **pada sisi $\beta_2(x_{i,j,k}y_{i+1})$**
  - Untuk i ganjil, diproleh:

$$\beta_2(x_{3,1,3}y_4) = \frac{bi(i+3)}{2} + 1 - j = \frac{3.3(3+3)}{2} + 1 - 1 = 27$$

$$\beta_2(x_{3,2,3}y_4) = \frac{bi(i+3)}{2} + 1 - j = \frac{3.3(3+3)}{2} + 1 - 2 = 26$$

$$\beta_2(x_{3,3,3}y_4) = \frac{bi(i+3)}{2} + 1 - j = \frac{3.3(3+3)}{2} + 1 - 3 = 25$$

3. **Dilakukan pelabelan pada setiap *face***

❖ Untuk i ganjil, diperoleh:

- $\gamma_2(f_{1,1}) = v + e + f - (j+1)a + i - 2$

  $= 21 + 27 + 8 - (1+1)3 + 1 - 2 = 49$

- $\gamma_2(f_{1,2}) = v + e + f - (j+1)a + i - 2$

  $= 21 + 27 + 8 - (2+1)3 + 1 - 2 = 46$

- $\gamma_2(f_{3,1}) = v + e + f - (j+1)a + i - 2$

  $= 21 + 27 + 8 - (1+1)3 + 3 - 2 = 51$

- $\gamma_2(f_{3,2}) = v + e + f - (j+1)a + i - 2$

  $= 21 + 27 + 8 - (2+1)3 + 3 - 2 = 48$

❖ Untuk i genap, diperoleh:

- $\gamma_2(f_{2,1}) = v + e + f + (j - 1 - b)a + i - 2$

  $= 21 + 27 + 8 + (1 - 1 - 3)3 + 2 - 2 = 47$

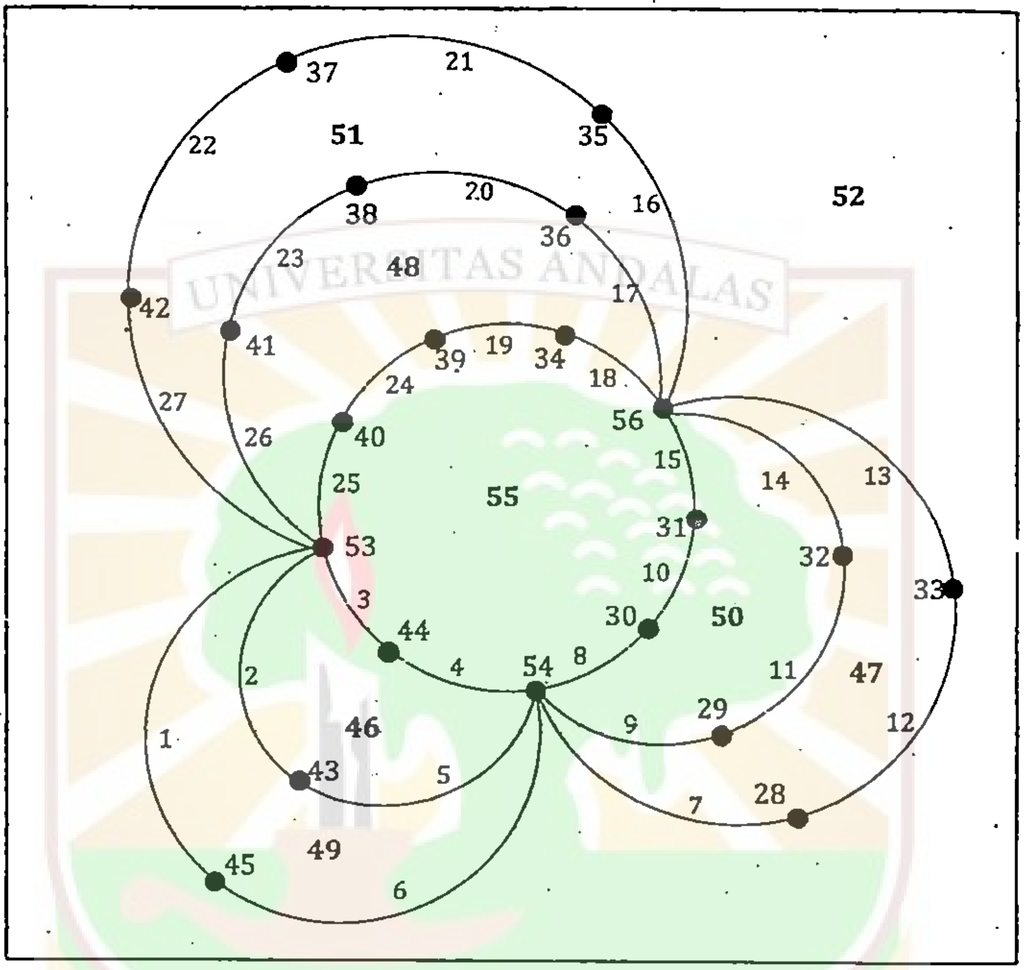
- $\gamma_2(f_{2,2}) = v + e + f + (j - 1 - b)a + i - 2$

  $= 21 + 27 + 8 + (2 - 1 - 3)3 + 2 - 2 = 50$

❖ Untuk f_{int} dan f_{ext} , diperoleh:

- $\gamma_2(f_{int}) = v + e + f - 1 = 21 + 27 + 8 - 1 = 55$
- $\gamma_2(f_{int}) = v + e + f - a - 1 = 21 + 27 - 3 - 1 = 52$

Berikan label titik, sisi, dan *face* berturut-turut dengan $e + \alpha_2$, β_2, γ_2, maka akan kita peroleh pelabelan dengan tipe (1,1,1) seperti pada Gambar 3.2.4



Gambar 3.2.4 Pelabelan tipe (1,1,1) pada graf bidang C_3^3

4. **Bobot *face***

❖ **Untuk *face* $f_{i,j}$**

- $w(f_{1,1}) = \alpha_2(y_1) + \alpha_2(x_{1,1,1}) + \alpha_2(y_2) + \alpha_2(x_{1,2,1}) + \beta_2(y_1x_{1,1,1}) +$

$$\beta_2(x_{1,1,1}y_2) + \beta_2(y_1x_{1,2,1}) + \beta_2(x_{1,2,1}y_2) + \gamma_2(f_{1,1})$$

$= 53 + 45 + 54 + 43 + 1 + 6 + 2 + 5 + 49$

$= 258$

- $w(f_{1,2}) = \alpha_2(y_1) + \alpha_2(x_{1,2,1}) + \alpha_2(y_2) + \alpha_2(x_{1,3,1}) + \beta_2(y_1x_{1,2,1}) + \beta_2(x_{1,2,1}y_2) + \beta_2(y_1x_{1,3,1}) + \beta_2(x_{1,3,1}y_2) + \gamma_2(f_{1,2})$

  $= 53 + 43 + 54 + 44 + 2 + 5 + 3 + 4 + 46$

  $= 254$

- $w(f_{2,1}) = \alpha_2(y_2) + \alpha_2(x_{2,1,1}) + \alpha_2(x_{2,1,2}) + \alpha_2(y_3) + \alpha_2(x_{2,2,1}) + \alpha_2(x_{2,2,2}) + \beta_2(y_2x_{2,1,1}) + \beta_2(x_{2,1,1}x_{2,1,2}) + \beta_2(x_{2,1,2}y_3) + \beta_2(y_2x_{2,2,1}) + \beta_2(x_{2,2,1}x_{2,2,2}) + \beta_2(x_{2,2,2}y_3) + \gamma_2(f_{2,1})$

  $= 54 + 28 + 33 + 56 + 29 + 32 + 7 + 12 + 13 + 9 + 11 + 14 + 47$

  $= 345$

- $w(f_{2,2}) = \alpha_2(y_2) + \alpha_2(x_{2,2,1}) + \alpha_2(x_{2,2,2}) + \alpha_2(y_3) + \alpha_2(x_{2,3,1}) + \alpha_2(x_{2,3,2}) + \beta_2(y_2x_{2,2,1}) + \beta_2(x_{2,2,1}x_{2,2,2}) + \beta_2(x_{2,2,2}y_3) + \beta_2(y_2x_{2,3,1}) + \beta_2(x_{2,3,1}x_{2,3,2}) + \beta_2(x_{2,3,2}y_3) + \gamma_2(f_{2,2})$

  $= 54 + 29 + 32 + 56 + 30 + 31 + 9 + 11 + 14 + 8 + 10 + 15 + 50$

  $= 349$

- $w(f_{3,1}) = \alpha_2(y_3) + \alpha_2(x_{3,1,1}) + \alpha_2(x_{3,1,2}) + \alpha_2(x_{3,1,3}) + \alpha_2(y_4) +$

  $\alpha_2(x_{3,2,1}) + \alpha_2(x_{3,2,2}) + \alpha_2(x_{3,2,3}) + \beta_2(y_3x_{3,1,1}) +$

  $\beta_2(x_{3,1,1}x_{3,1,2}) + \beta_2(x_{3,1,2}x_{3,1,3}) + \beta_2(x_{3,1,3}y_4) +$

  $\beta_2(y_3x_{3,2,1}) + \beta_2(x_{3,2,1}x_{3,2,2}) + \beta_2(x_{3,2,2}x_{3,2,3}) +$

  $\beta_2(x_{3,2,3}y_4) + \gamma_2(f_{3,1})$

  $= 56 + 35 + 37 + 42 + 53 + 36 + 38 + 41 + 16 + 21 + 22 + 27 +$

  $17 + 20 + 23 + 26 + 5 = 561$

- $w(f_{3,2}) = \alpha_2(y_3) + \alpha_2(x_{3,2,1}) + \alpha_2(x_{3,2,2}) + \alpha_2(x_{3,2,3}) + \alpha_2(y_4) +$

  $\alpha_2(x_{3,3,1}) + \alpha_2(x_{3,3,2}) + \alpha_2(x_{3,3,3}) + \beta_2(y_3x_{3,2,1}) +$

  $\beta_2(x_{3,2,1}x_{3,2,2}) + \beta_2(x_{3,2,2}x_{3,2,3}) + \beta_2(x_{3,2,3}y_4) +$

  $\beta_2(y_3x_{3,3,1}) + \beta_2(x_{3,3,1}x_{3,3,2}) + \beta_2(x_{3,3,2}x_{3,3,3}) +$

  $\beta_2(x_{3,3,3}y_4) + \gamma_2(f_{3,2})$

  $= 56 + 36 + 38 + 41 + 53 + 34 + 39 + 40 + 17 + 20 + 23 + 26 +$

  $18 + 19 + 24 + 25 + 48 = 557$

❖ **Untuk *face* f_{int} dan f_{ext}**

- $w(f_{int}) = \alpha_2(y_1) + \alpha_2(x_{1,3,1}) + \alpha_2(y_2) + \alpha_2(x_{2,3,1}) + \alpha_2(x_{2,3,2}) +$

  $\alpha_2(y_3) + \alpha_2(x_{3,3,1}) + \alpha_2(x_{3,3,2}) + \alpha_2(x_{3,3,3}) + \beta_2(y_1x_{1,3,1}) +$

$\beta_2(x_{1,3,1}y_2) + \beta_2(y_2x_{2,3,1}) + \beta_2(x_{2,3,1}x_{2,3,2}) + \beta_2(x_{2,3,2}y_3) +$

$\beta_2(y_3x_{3,3,1}) + \beta_2(x_{3,3,1}x_{3,3,2}) + \beta_2(x_{3,3,2}x_{3,3,3}) +$

$\beta_2(x_{3,3,3}y_4) + \gamma_2(f_{int})$

$= 53 + 44 + 54 + 30 + 31 + 56 + 34 + 39 + 40 + 3 + 4 + 8 +$

$10 + 15 + 18 + 19 + 24 + 25 + 55 = 562$

- $w(f_{ext}) = \alpha_2(y_1) + \alpha_2(x_{1,1,1}) + \alpha_2(y_2) + \alpha_2(x_{2,1,1}) + \alpha_2(x_{2,1,2}) +$

  $\alpha_2(y_3) + \alpha_2(x_{3,1,1}) + \alpha_2(x_{3,1,2}) + \alpha_2(x_{3,1,3}) + \beta_2(y_1x_{1,1,1}) +$

  $\beta_2(x_{1,1,1}y_2) + \beta_2(y_2x_{2,1,1}) + \beta_2(x_{2,1,1}x_{2,1,2}) + \beta_2(x_{2,1,2}y_3) +$

  $\beta_2(y_3x_{3,1,1}) + \beta_2(x_{3,1,1}x_{3,1,2}) + \beta_2(x_{3,1,2}x_{3,1,3}) +$

  $\beta_2(x_{3,1,3}y_4) + \gamma_2(f_{ext})$

  $= 53 + 45 + 54 + 28 + 33 + 56 + 35 + 37 + 42 + 1 + 6 + 7 +$

  $12 + 13 + 16 + 21 + 22 + 27 + 52 = 560$

diperoleh bobot dari $F(C_3^3)$:

$F(C_3^3) = \{w(f_{1,1}), w(f_{1,2}), w(f_{2,1}), w(f_{2,2}), w(f_{3,1}), w(f_{3,2}), w(f_{int}), w(f_{ext})\}$

$= \{258, 254, 345, 349, 561, 557, 562, 560\}$

Dapat dilihat bahwa bobot dari *face* $f_{i,j}$ dengan $(2i + 2)$-sisi *face* untuk $i \in I$ membentuk barisan aritmatika dengan beda $a + 1$ maka $d = 3 + 1 = 4$, yaitu:

- **Untuk $i = 1$, diperoleh:**

  $\{w(f_{1,1}), w(f_{1,2})\} = \{258{,}254\}$

- **Untuk $i = 2$, diperoleh:**

  $\{w(f_{2,1}), w(f_{2,2})\} = \{245{,}249\}$

- **Untuk $i = 3$, diperoleh:**

  $\{w(f_{3,1}), w(f_{3,2})\} = \{561{,}557\}$

dan $w(f_{int}) - w(f_{ext}) = a - \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor$, untuk $a = 3$ dan $b = 3$ sehingga didapatkan $3 - \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 3 - 1 = 2$, yaitu:

- $w(f_{int}) - w(f_{ext}) = 562 - 560 = 2$

Dengan menukar label titik $\alpha_2(x_{1,b,1}) = v + e - a - \frac{b-1}{2}$ dan label *face* dari $f_{1,b-1} = v + e + f - ba - 1$, bobot *face* $f_{1,2}$ akan memperoleh hasil yang sama, tetapi $w(f_{int})$ akan meningkat $\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor + 1$, sehingga beda dari $w(f_{int}) - w(f_{ext}) = a + 1$, untuk $a = 3$, yaitu:

$\alpha_2(x_{1,3,1}) = 21 + 27 - 3 - \frac{3-1}{2} = 44$

$f_{1,2} = 21 + 27 + 8 - 3.3 - 1 = 46$

Maka $,w(f_{int}) = \alpha_2(y_1) + \alpha_2(x_{1,3,1}) + \alpha_2(y_2) + \alpha_2(x_{2,3,1}) + \alpha_2(x_{2,3,2}) +$

$\alpha_2(y_3) + \alpha_2(x_{3,3,1}) + \alpha_2(x_{3,3,2}) + \alpha_2(x_{3,3,3}) + \beta_2(y_1 x_{1,3,1}) +$

$\beta_2(x_{1,3,1} y_2) + \beta_2(y_2 x_{2,3,1}) + \beta_2(x_{2,3,1} x_{2,3,2}) + \beta_2(x_{2,3,2} y_3) +$

$\beta_2(y_3 x_{3,3,1}) + \beta_2(x_{3,3,1} x_{3,3,2}) + \beta_2(x_{3,3,2} x_{3,3,3}) +$

$\beta_2(x_{3,3,3} y_4) + \gamma_2(f_{int})$

$= 50 + 46 + 54 + 30 + 31 + 56 + 34 + 39 + 40 + 3 + 4 + 8 + 10 +$

$15 + 18 + 19 + 24 + 25 + 55 = 564$

diperoleh $w(f_{int}) - w(f_{ext}) = 564 - 560 = 4.$

Kasus 3: Untuk a ganjil dan b genap

Formulakan pelabelan titik α_3, pelabelan sisi β_3 dan pelabelan face γ_3 dari C_a^b sebagai berikut :

$$\alpha_3(y_i) = \begin{cases} v + e - a + 1 + i & \text{untuk } 1 \leq i \leq a - 1, \\ v + e + f & \text{untuk } i = a. \end{cases}$$

$\alpha_3(x_{i,j,k}) = \alpha_1(x_{i,j,k})$ untuk $i \in I, j \in J$ dan $1 \leq k \leq i.$

$\beta_3(y_i x_{i,j,1}) = \beta_1(y_i x_{i,j,1})$ untuk $i \in I, j \in J.$

$\beta_3(x_{i,j,k} x_{i,j,k+1}) = \beta_1(x_{i,j,k} x_{i,j,k+1})$ untuk $i \in I, j \in J$ dan $1 \leq k \leq i - 1.$

$$\beta_3(x_{i,j,i}y_{i+1}) = \begin{cases} \frac{bi(i+3)}{2} + 1 - j & \text{untuk } i \text{ ganjil}, i < a, \\ \frac{ba(a+3)}{2} + 2 - j & \text{untuk } i = a, \\ \frac{bi(i+3)}{2} - b + j & \text{untuk } i \text{ genap}, \end{cases}$$

Untuk $i \in I, j \in J$.

$\gamma_3(f_{i,j}) = \gamma_1(f_{i,j}) - 1$ untuk $i \in I, j \in J - \{b\}$.

$\gamma_3(f_{ext}) = v + e - a - b + 1$

$\gamma_3(f_{int}) = v + e + 1$

Berikan label titik-titik, sisi dan *face* dari graf bidang C_a^b dengan α_3, $v - a \mp \beta_3$ dan γ_3, maka diperoleh pelabelan dengan tipe (1, 1, 1) dan bobot *face* $f_{i,j}$ dengan $(2i + 2)$-sisi *face* untuk setiap $i \in I$, merupakan barisan aritmatika dengan beda $d = a + 1$ dan diperoleh $W(f_{int}) - W(f_{ext}) = a + 1$.

Jumlah dari semua nilai yang dibawa oleh titik dan sisi disekitar f_{ext} didefinisikan sebagai berikut:

$$\left(\sum_{i=1}^{a} \alpha_3(y_i) + \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{i} \alpha_3(x_{i,1,k}) + \sum_{i=1}^{a}[v - a + \beta_3(y_i x_{i,1,1})] + \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{i-1}[v - a + \beta_3(x_{i,1,k}x_{i,1,k+1})] + \sum_{i=1}^{a}[v - a + \beta_3(x_{i,1,i}y_{i+1})]\right)$$

$(\alpha_3(y_1), \alpha_3(y_2), \dots, \alpha_3(y_a)) + \left(\alpha_3(x_{1,1,1}), \alpha_3(x_{2,1,1}), \alpha_3(x_{2,1,2}), \dots, \alpha_3(x_{a,1,i})\right) +$

$[v-a+\beta_3(x_{2,1,1}x_{2,1,2},\dots,(x_{a,1,i-1}x_{a,1,i}))]+$

$[v-a+\beta_3(x_{1,1,1}y_2,x_{2,1,2}y_3,\dots,\beta_3(x_{a,1,a}y_{a+1}))]$.

Jumlah dari semua nilai yang dibawa oleh titik dan sisi disekitar f_{int} didefinisikan sebagai berikut:

$$\left(\sum_{i=1}^{a}\alpha_3(y_i)+\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{i}\alpha_3(x_{i,b,k})+\sum_{i=1}^{a}[v-a+\beta_3(y_i x_{i,b,1})]\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{i-1}[v-a+\beta_3(x_{i,b,k}x_{i,b,k+1})]+\sum_{i=1}^{a}[v-a+\beta_3(x_{i,b,i}y_{i+1})]\right)$$

$(\alpha_3(y_1),\alpha_3(y_2),\dots,\alpha_3(y_a))+\left(\alpha_3(x_{1,b,1}),\alpha_3(x_{2,b,1}),\alpha_3(x_{2,b,2}),\dots,\alpha_3(x_{a,b,i})\right)+$

$[v-a+\beta_3(x_{2,b,1}x_{2,b,2},\dots,(x_{a,b,i-1}x_{a,b,i}))]+$

$[v-a+\beta_3(x_{1,b,1}y_2,x_{2,b,2}y_3,\dots,\beta_3(x_{a,1,a}y_{a+1}))]$.

Sehingga didapatkan jumlah dari semua nilai yang dibawa oleh titik-titik dan sisi-sisi disekitar f_{ext} dengan jumlah dari semua nilai yang dibawa oleh titik-titik dan sisi-sisi disekitar f_{int} adalah $b-1$, yaitu:

$$\left(\sum_{i=1}^{a}\alpha_3(y_i)+\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{i}\alpha_3(x_{i,1,k})+\sum_{i=1}^{a}[v-a+\beta_3(y_i x_{i,1,1})]\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{i-1}[v-a+\beta_3(x_{i,1,k}x_{i,1,k+1})]+\sum_{i=1}^{a}[v-a+\beta_3(x_{i,1,i}y_{i+1})]\right)$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{a}\alpha_3(y_i)+\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{i}\alpha_3(x_{i,b,k})+\sum_{i=1}^{a}[v-a+\beta_3(y_ix_{i,b,1})]\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{i-1}[v-a+\beta_3(x_{i,b,k}x_{i,b,k+1})]+\sum_{i=1}^{a}[v-a+\beta_3(x_{i,b,i}y_{i+1})]\right)$$
$$=b-1$$

$$\Big((\alpha_3(y_1),\alpha_3(y_2),\dots,\alpha_3(y_a))+\big(\alpha_3(x_{1,1,1}),\alpha_3(x_{2,1,1}),\alpha_3(x_{2,1,2}),\dots,\alpha_3(x_{a,1,i})\big)$$
$$+[v-a+\beta_3(x_{2,1,1}x_{2,1,2},\dots,(x_{a,1,i-1}x_{a,1,i}))]$$
$$+[v-a+\beta_3(x_{1,1,1}y_2,x_{2,1,2}y_3,\dots,\beta_3(x_{a,1,a}y_{a+1}))]\Big)$$

$$-\Big((\alpha_3(y_1),\alpha_3(y_2),\dots,\alpha_3(y_a))+\big(\alpha_3(x_{1,b,1}),\alpha_3(x_{2,b,1}),\alpha_3(x_{2,b,2}),\dots,\alpha_3(x_{a,b,i})\big)$$
$$+[v-a+\beta_3(x_{2,b,1}x_{2,b,2},\dots,(x_{a,b,i-1}x_{a,b,i}))]$$
$$+[v-a+\beta_3(x_{1,b,1}y_2,x_{2,b,2}y_3,\dots,\beta_3(x_{a,1,a}y_{a+1}))]\Big)=b-1$$

Contoh Kasus 3:

Misalkan diberikan graf C_a^b dengan $a = 3$ dan $b = 4$. Akan ditunjukkan graf bidang C_a^b memiliki pelabelan $(a+1)$-anti ajaib dengan tipe (1, 1, 1).

Jawab:

Untuk $a = 3$ dan $b = 4$ dengan $I = \{1,2,3,\}$ dan $J = \{1,2,3,4\}$, dan y_1, y_2, y_3 adalah titik-titik tetapnya, maka akan dikonstruksi *path-path* terputus P_i^j untuk $i \in I$ dan $j \in J$

➢ Untuk $i = 1$, diperoleh:

- $P_1^1 = \{y_1, x_{1,1,1}, y_2\}$
- $P_1^2 = \{y_1, x_{1,2,1}, y_2\}$
- $P_1^3 = \{y_1, x_{1,3,1}, y_2\}$
- $P_1^4 = \{y_1, x_{1,4,1}, y_2\}$

➢ Untuk $i = 2$, diperoleh:

- $P_2^1 = \{y_2, x_{2,1,1}, x_{2,1,2}, y_3\}$
- $P_2^2 = \{y_2, x_{2,2,1}, x_{2,2,2}, y_3\}$
- $P_2^3 = \{y_2, x_{2,3,1}, x_{2,3,2}, y_3\}$
- $P_2^4 = \{y_2, x_{2,4,1}, x_{2,4,2}, y_3\}$

➢ Untuk $i = 3$, diperoleh:

- $P_3^1 = \{y_3, x_{3,1,1}, x_{3,1,2}, x_{3,1,3}, y_4\}$
- $P_3^2 = \{y_3, x_{3,2,1}, x_{3,2,2}, x_{3,2,3}, y_4\}$
- $P_3^3 = \{y_3, x_{3,3,1}, x_{3,3,2}, x_{3,3,3}, y_4\}$
- $P_3^4 = \{y_3, x_{3,4,1}, x_{3,4,2}, x_{3,4,3}, y_4\}$

dimana $y_1 = y_{a+1}$, maka $y_1 = y_4$.

dan diperoleh :

$$v = \frac{ab(a+1)}{2} + a \qquad \text{dan} \qquad e = \frac{ab(a+3)}{2}$$

$$= \frac{3.4(3+1)}{2} + 3 = 27 \qquad\qquad = \frac{3.4(3+3)}{2} = 36$$

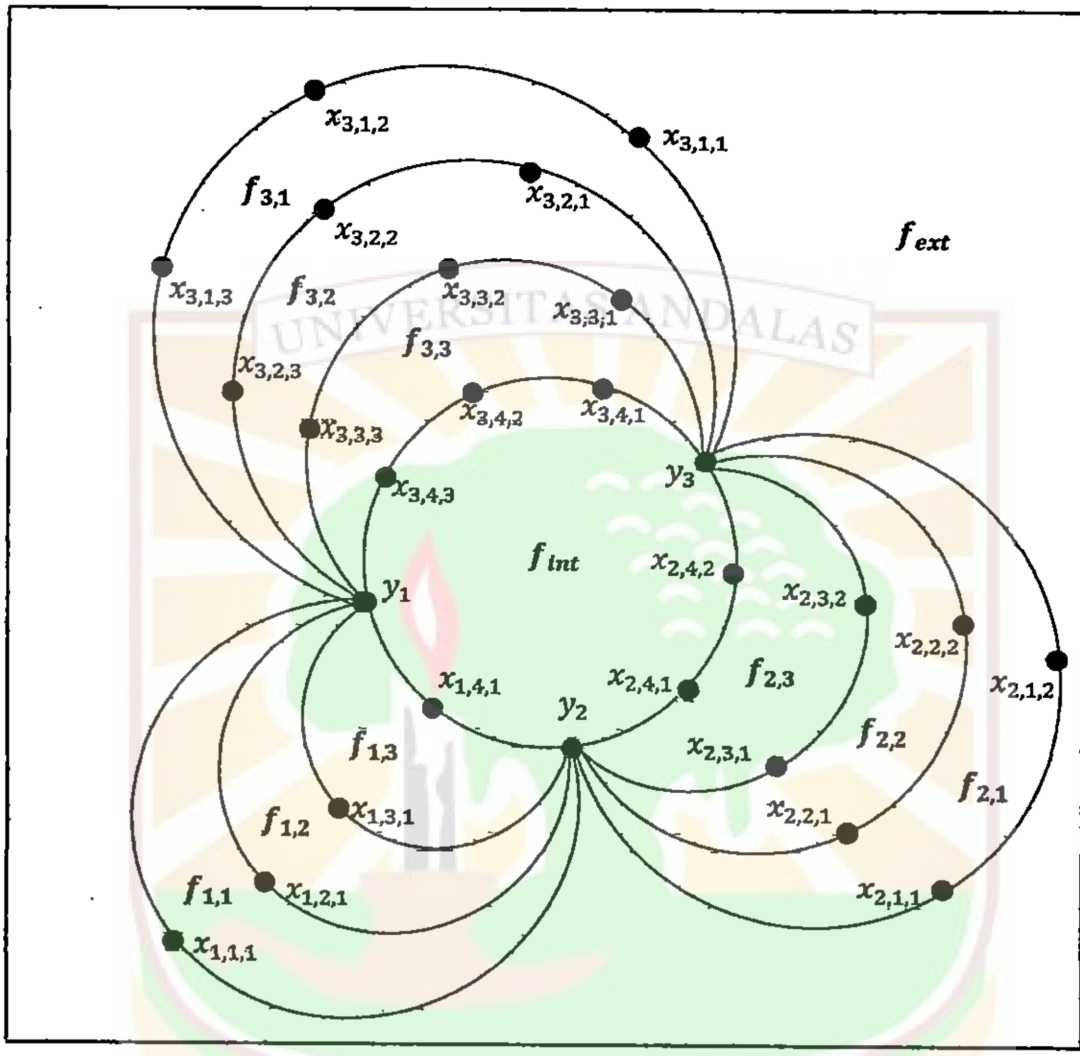
Himpunan *face* $F(C_3^4)$ memiliki $a(b-1)$ *face* $f_{i,j}$, yaitu $3(4-1)=9$ *face* $f_{i,j}$ dengan $(2i+2)$-sisi *face* yang ditentukan oleh P_i^j dan P_i^{j+1} untuk $i \in I, j \in J-\{b\}$, satu f_{int} dengan $\frac{a(a+3)}{2}$ sisi f_{int} dan satu f_{ext} dengan $\frac{a(a+3)}{2}$ sisi f_{ext} yaitu:

- $f_{1,1}=(2.1+2)=4$ sisi *face* yang ditentukan oleh P_1^1 dan P_1^2
- $f_{1,2}=(2.1+2)=4$ sisi *face* yang ditentukan oleh P_1^2 dan P_1^3
- $f_{1,3}=(2.1+2)=4$ sisi *face* yang ditentukan oleh P_1^3 dan P_1^4
- $f_{2,1}=(2.2+2)=6$ sisi *face* yang ditentukan oleh P_2^1 dan P_2^2
- $f_{2,2}=(2.2+2)=6$ sisi *face* yang ditentukan oleh P_2^2 dan P_2^3
- $f_{2,3}=(2.2+2)=6$ sisi *face* yang ditentukan oleh P_2^3 dan P_2^4
- $f_{3,1}=(2.3+2)=8$ sisi *face* yang ditentukan oleh P_3^1 dan P_3^2
- $f_{3,2}=(2.3+2)=8$ sisi *face* yang ditentukan oleh P_3^2 dan P_3^3
- $f_{3,3}=(2.3+2)=8$ sisi *face* yang ditentukan oleh P_3^3 dan P_3^4
- $f_{int}=\frac{3(3+3)}{2}=9$ sisi *face*
- $f_{ext}=\frac{3(3+3)}{2}=9$ sisi *face*

Sehingga diperoleh himpunan *face* dari graf bidang C_3^4 dengan kardinalitas $f=11$ diantaranya $F(C_3^4)=\{f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3}, f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3}, f_{3,1}, f_{3,2}, f_{3,3}, f_{int}, f_{ext}\}$.

Perhatikan Gambar 3.2.5, dimisalkan gambar awal graf bidang C_3^4 dengan $v=27$, $e=36$ dan $f=11$ sebelum dilakukan pelabelan titik, pelabelan sisi dan pelabelan pada *face*.

Misalkan gambar awal graf bidang C_3^4 seperti gambar berikut :



Gambar 3.2.5 Graf Bidang C_3^4

1. Dilakukan pelabelan disetiap titik

❖ **Pada titik $\alpha_3(y_i)$**

Untuk $i = 1$, diperoleh $\alpha_3(y_1) = v + e - a + 1 + i$

$$= 27 + 36 - 3 + 1 + 1 = 62$$

Untuk $i = 2$, diperoleh $\alpha_3(y_2) = v + e - a + 1 + i$

$= 27 + 36 - 3 + 1 + 2 = 63$

Untuk $i = 3$, diperoleh $\alpha_3(y_3) = v + e + f = 27 + 36 + 11 = 74$

❖ **Pada titik $\alpha_3(x_{i,j,k})$**

➢ **Untuk $i = 1$**

- Untuk i dan j ganjil, $k = 1$, diperoleh:

$$\alpha_3(x_{1,1,1}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b + \frac{1-j}{2} = \frac{4.1(1-1)}{2} + 4 + \frac{1-1}{2} = 4$$

$$\alpha_3(x_{1,3,1}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b + \frac{1-j}{2} = \frac{4.1(1-1)}{2} + 4 + \frac{1-3}{2} = 3$$

- Untuk i ganjil dan j genap, $k = 1$, diperoleh:

$$\alpha_3(x_{1,2,1}) = \frac{bi(i-1)}{2} + \left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor + \frac{2-j}{2} = \frac{4.1(1-1)}{2} + \left\lfloor\frac{4}{2}\right\rfloor + \frac{2-2}{2} = 2$$

$$\alpha_3(x_{1,4,1}) = \frac{bi(i-1)}{2} + \left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor + \frac{2-j}{2} = \frac{4.1(1-1)}{2} + \left\lfloor\frac{4}{2}\right\rfloor + \frac{2-4}{2} = 1$$

➢ **Untuk $i = 2$**

- Untuk i genap dan k ganjil, diperoleh:

$$\alpha_3(x_{2,1,1}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-1) + j = \frac{4.2(2-1)}{2} + 4(1-1) + 1 = 5$$

$$\alpha_3(x_{2,2,1}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-1) + j = \frac{4.2(2-1)}{2} + 4(1-1) + 2 = 6$$

$$\alpha_3(x_{2,3,1}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-1) + j = \frac{4.2(2-1)}{2} + 4(1-1) + 3 = 7$$

$$\alpha_3(x_{2,4,1}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-1) + j = \frac{4.2(2-1)}{2} + 4(1-1) + 4 = 8$$

- Untuk i dan k genap, diperoleh:

$$\alpha_3(x_{2,1,2}) = \frac{bi(i-1)}{2} + kb + 1 - j = \frac{4.2(2-1)}{2} + 2.4 + 1 - 1 = 12$$

$$\alpha_3(x_{2,2,2}) = \frac{bi(i-1)}{2} + kb + 1 - j = \frac{4.2(2-1)}{2} + 2.4 + 1 - 2 = 11$$

$$\alpha_3(x_{2,3,2}) = \frac{bi(i-1)}{2} + kb + 1 - j = \frac{4.2(2-1)}{2} + 2.4 + 1 - 3 = 10$$

$$\alpha_3(x_{2,4,2}) = \frac{bi(i-1)}{2} + kb + 1 - j = \frac{4.2(2-1)}{2} + 2.4 + 1 - 4 = 9$$

➢ **Untuk $i = 3$**

- Untuk i dan j ganjil, $k = 1$, diperoleh:

$$\alpha_3(x_{3,1,1}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b + \frac{1-j}{2} = \frac{4.3(3-1)}{2} + 4 + \frac{1-1}{2} = 16$$

$$\alpha_3(x_{3,3,1}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b + \frac{1-j}{2} = \frac{4.3(3-1)}{2} + 4 + \frac{1-3}{2} = 15$$

- Untuk i ganjil dan j genap, $k = 1$, diperoleh:

$$\alpha_3(x_{3,2,1}) = \frac{bi(i-1)}{2} + \left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor + \frac{2-j}{2} = \frac{4.3(1-1)}{2} + \left\lfloor\frac{4}{2}\right\rfloor + \frac{2-2}{2} = 14$$

$$\alpha_3(x_{3,4,1}) = \frac{bi(i-1)}{2} + \left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor + \frac{2-j}{2} = \frac{4.3(1-1)}{2} + \left\lfloor\frac{4}{2}\right\rfloor + \frac{2-4}{2} = 13$$

- Untuk i ganjil, $i \geq 3$, k genap, diperoleh:

$$\alpha_3(x_{3,1,2}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-1) + j = \frac{4.3(3-1)}{2} + 4(2-1) + 1 = 17$$

$$\alpha_3(x_{3,2,2}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-1) + j = \frac{4.3(3-1)}{2} + 4(2-1) + 2 = 18$$

$$\alpha_3(x_{3,3,2}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-1) + j = \frac{4.3(3-1)}{2} + 4(2-1) + 3 = 19$$

$$\alpha_3(x_{3,4,2}) = \frac{bi(i-1)}{2} + b(k-1) + j = \frac{4.3(3-1)}{2} + 4(2-1) + 4 = 20$$

- Untuk i dan k ganjil, $i, k \geq 3$, diperoleh:

$$\alpha_3(x_{3,1,3}) = \frac{bi(i-1)}{2} + kb + 1 - j = \frac{4.3(3-1)}{2} + 3.4 + 1 - 1 = 24$$

$$\alpha_3(x_{3,2,3}) = \frac{bi(i-1)}{2} + kb + 1 - j = \frac{4.3(3-1)}{2} + 3.4 + 1 - 2 = 23$$

$$\alpha_3(x_{3,3,3}) = \frac{bi(i-1)}{2} + kb + 1 - j = \frac{4.3(3-1)}{2} + 3.4 + 1 - 3 = 22$$

$$\alpha_3(x_{3,4,3}) = \frac{bi(i-1)}{2} + kb + 1 - j = \frac{4.3(3-1)}{2} + 3.4 + 1 - 4 = 21$$

2. Dilakukan pelabelan disetiap sisi

❖ **Untuk $i = 1$**

- **pada sisi $\beta_3(y_i x_{i,j,k})$**

  - Untuk i ganjil, diperoleh:

$$\beta_3(y_1 x_{1,1,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + j = \frac{4(1-1)(1+2)}{2} + 1 = 1$$

$$\beta_3(y_1 x_{1,2,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + j = \frac{4(1-1)(1+2)}{2} + 2 = 2$$

$$\beta_3(y_1 x_{1,3,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + j = \frac{4(1-1)(1+2)}{2} + 3 = 3$$

$$\beta_3(y_1 x_{1,4,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + j = \frac{4(1-1)(1+2)}{2} + 4 = 4$$

- **pada sisi $\beta_3(x_{i,j,k}y_{i+1})$**
  - Untuk i ganjil, diperoleh:

$$\beta_3(x_{1,1,1}y_2) = \frac{bi(i+3)}{2} + 1 - j = \frac{4.1(1+3)}{2} + 1 - 1 = 8$$

$$\beta_3(x_{1,2,1}y_2) = \frac{bi(i+3)}{2} + 1 - j = \frac{4.1(1+3)}{2} + 1 - 2 = 7$$

$$\beta_3(x_{1,3,1}y_2) = \frac{bi(i+3)}{2} + 1 - j = \frac{4.1(1+3)}{2} + 1 - 3 = 6$$

$$\beta_3(x_{1,4,1}y_2) = \frac{bi(i+3)}{2} + 1 - j = \frac{4.1(1+3)}{2} + 1 - 4 = 5$$

❖ **Untuk $i = 2$**

- **pada sisi $\beta_3(y_i x_{i,j,k})$**
  - Untuk i genap dan j ganjil, diperoleh:

$$\beta_3(y_2x_{2,1,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + \frac{j+1}{2} = \frac{4(2-1)(2+2)}{2} + \frac{1+1}{2} = 9$$

$$\beta_3(y_2x_{2,3,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + \frac{j+1}{2} = \frac{4(2-1)(2+2)}{2} + \frac{3+1}{2} = 10$$

  - Untuk i dan j genap, diperoleh:

$$\beta_3(y_2x_{2,2,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + \left\lceil\frac{b}{2}\right\rceil + \frac{j}{2} = \frac{4(2-1)(2+2)}{2} + \left\lceil\frac{4}{2}\right\rceil + \frac{2}{2} = 11$$

$$\beta_3(y_2x_{2,4,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + \left\lceil\frac{b}{2}\right\rceil + \frac{j}{2} = \frac{4(2-1)(2+2)}{2} + \left\lceil\frac{4}{2}\right\rceil + \frac{4}{2} = 12$$

- **pada sisi $\boldsymbol{\beta_3(x_{i,j,k}x_{i,j,k+1})}$**
  - Untuk k ganjil, diperoleh:

$$\beta_3(x_{2,1,1}x_{2,1,2}) = \frac{bi(i+3)}{2} + kb + 1 - j$$

$$= \frac{4.2(2+3)}{2} + 1.4 + 1 - 1 = 16$$

$$\beta_3(x_{2,2,1}x_{2,2,2}) = \frac{bi(i+3)}{2} + kb + 1 - j$$

$$= \frac{4.2(2+3)}{2} + 1.4 + 1 - 2 = 15$$

$$\beta_3(x_{2,3,1}x_{2,3,2}) = \frac{bi(i+3)}{2} + kb + 1 - j$$

$$= \frac{4.2(2+3)}{2} + 1.4 + 1 - 3 = 14$$

$$\beta_3(x_{2,4,1}x_{2,4,2}) = \frac{bi(i+3)}{2} + kb + 1 - j$$

$$= \frac{4.2(2+3)}{2} + 1.4 + 1 - 2 = 13$$

- **pada sisi $\boldsymbol{\beta_3(x_{i,j,k}y_{i+1})}$**
  - Untuk i genap, diperoleh:

$$\beta_3(x_{2,1,2}y_3) = \frac{bi(i+3)}{2} - b + j = \frac{4.2(2+3)}{2} - 4 + 1 = 17$$

$$\beta_3(x_{2,2,2}y_3) = \frac{bi(i+3)}{2} - b + j = \frac{4.2(2+3)}{2} - 4 + 2 = 18$$

$$\beta_3(x_{2,3,2}y_3) = \frac{bi(i+3)}{2} - b + j = \frac{4.2(2+3)}{2} - 4 + 3 = 19$$

$$\beta_3(x_{2,4,2}y_3) = \frac{bi(i+3)}{2} - b + j = \frac{4.2(2+3)}{2} - 4 + 4 = 20$$

- **Untuk $i = 3$**
  - **pada sisi $\beta_3(y_i x_{i,j,k})$**
    - Untuk i ganjil, diperoleh:

$$\beta_3(y_3 x_{3,1,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + j = \frac{4(3-1)(3+2)}{2} + 1 = 21$$

$$\beta_3(y_3 x_{3,2,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + j = \frac{4(3-1)(3+2)}{2} + 2 = 22$$

$$\beta_3(y_3 x_{3,3,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + j = \frac{4(3-1)(3+2)}{2} + 3 = 23$$

$$\beta_3(y_3 x_{3,4,1}) = \frac{b(i-1)(i+2)}{2} + j = \frac{4(3-1)(3+2)}{2} + 4 = 24$$

  - **pada sisi $\beta_3(x_{i,j,k} x_{i,j,k+1})$**
    - Untuk k ganjil, diperoleh:

$$\beta_3(x_{3,1,1} x_{3,1,2}) = \frac{bi(i+3)}{2} + kb + 1 - j$$

$$= \frac{4.3(3+3)}{2} + 1.4 + 1 - 1 = 28$$

$$\beta_3(x_{3,2,1} x_{3,2,2}) = \frac{bi(i+3)}{2} + kb + 1 - j$$

$$= \frac{4.3(3+3)}{2} + 1.4 + 1 - 2 = 27$$

$$\beta_3(x_{3,3,1} x_{3,3,2}) = \frac{bi(i+3)}{2} + kb + 1 - j$$

$$= \frac{4.3(3+3)}{2} + 1.4 + 1 - 3 = 26$$

$$\beta_3(x_{3,4,1}x_{3,4,2}) = \frac{bi(i+3)}{2} + kb + 1 - j$$

$$= \frac{4.3(3+3)}{2} + 1.4 + 1 - 4 = 25$$

- Untuk k genap, diperoleh:

$$\beta_3(x_{3,1,2}x_{3,1,3}) = \frac{bi(i+3)}{2} + b(k-1) + j$$

$$= \frac{4.3(3+3)}{2} + 4(2-1) + 1 = 29$$

$$\beta_3(x_{3,2,2}x_{3,2,3}) = \frac{bi(i+3)}{2} + b(k-1) + j$$

$$= \frac{4.3(3+3)}{2} + 4(2-1) + 2 = 30$$

$$\beta_3(x_{3,3,2}x_{3,3,3}) = \frac{bi(i+3)}{2} + b(k-1) + j$$

$$= \frac{4.3(3+3)}{2} + 4(2-1) + 3 = 31$$

$$\beta_3(x_{3,4,2}x_{3,4,3}) = \frac{bi(i+3)}{2} + b(k-1) + j$$

$$= \frac{4.3(3+3)}{2} + 4(2-1) + 4 = 32$$

- **pada sisi $\beta_3(x_{i,j,k}y_{i+1})$**
  - Untuk $i = 3$, diperoleh:

$$\beta_3(x_{3,1,3}y_4) = \frac{ba(a+3)}{2} + 2 - j = \frac{4.3(3+3)}{2} + 2 - 1 = 37$$

$$\beta_3(x_{3,2,3}y_4) = \frac{ba(a+3)}{2} + 2 - j = \frac{4.3(3+3)}{2} + 2 - 2 = 36$$

$$\beta_3(x_{3,3,3}y_4) = \frac{ba(a+3)}{2} + 2 - j = \frac{4.3(3+3)}{2} + 2 - 3 = 35$$

$$\beta_3(x_{3,4,3}y_4) = \frac{ba(a+3)}{2} + 2 - j = \frac{4.3(3+3)}{2} + 2 - 4 = 34$$

3. **Dilakukan pelabelan disetiap *face***

❖ Untuk *i* ganjil, diperoleh:

- $\gamma_3(f_{1,1}) = v + e + f - (j-1)a - i + 1 - 1$

$$= 27 + 36 + 11 - (1-1)3 - 1 + 1 - 1 = 73$$

- $\gamma_3(f_{1,2}) = v + e + f - (j-1)a - i + 1 - 1$

$$= 27 + 36 + 11 - (2-1)3 - 1 + 1 - 1 = 70$$

- $\gamma_3(f_{1,3}) = v + e + f - (j-1)a - i + 1 - 1$

$$= 27 + 36 + 11 - (3-1)3 - 1 + 1 - 1 = 67$$

- $\gamma_3(f_{3,1}) = v + e + f - (j-1)a - i + 1 - 1$

$$= 27 + 36 + 11 - (1-1)3 - 3 + 1 - 1 = 71$$

- $\gamma_3(f_{3,2}) = v + e + f - (j-1)a - i + 1 - 1$

  $= 27 + 36 + 11 - (2-1)3 - 3 + 1 - 1 = 68$

- $\gamma_3(f_{3,3}) = v + e + f - (j-1)a - i + 1 - 1$

  $= 27 + 36 + 11 - (3-1)3 - 3 + 1 - 1 = 65$

❖ Untuk *i* genap, diperoleh:

- $\gamma_3(f_{2,1}) = v + e + f + (j + 1 - b)a - i + 1 - 1$

  $= 27 + 36 + 11 + (1 + 1 - 4)3 - 2 + 1 - 1 = 66$

- $\gamma_3(f_{2,2}) = v + e + f + (j + 1 - b)a - i + 1 - 1$

  $= 27 + 36 + 11 + (2 + 1 - 4)3 - 2 + 1 - 1 = 69$

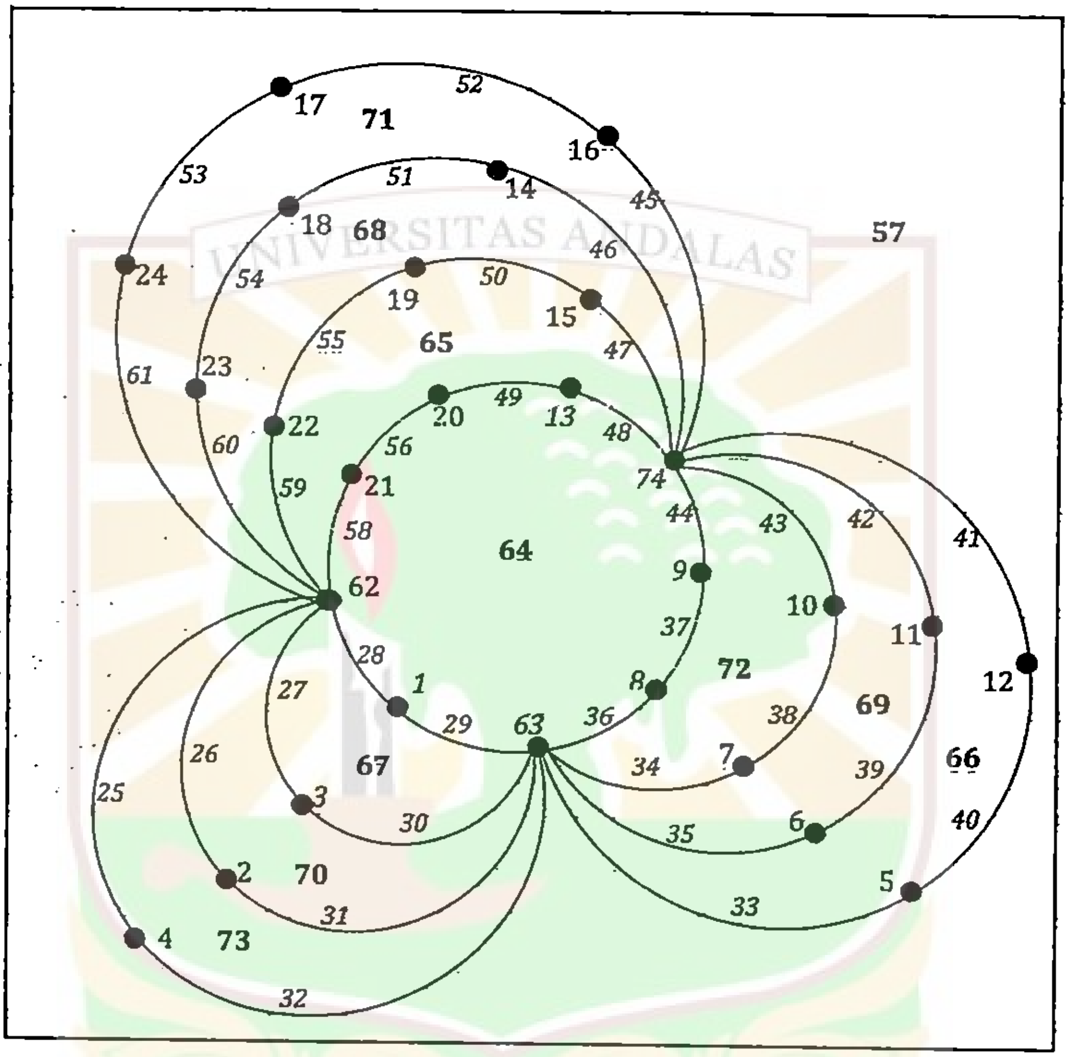
- $\gamma_3(f_{2,3}) = v + e + f + (j + 1 - b)a - i + 1 - 1$

  $= 27 + 36 + 11 + (3 + 1 - 4)3 - 2 + 1 - 1 = 72$

❖ Untuk f_{int} dan f_{ext} , diperoleh:

- $\gamma_3(f_{ekt}) = v + e - a - b + 1 = 27 + 36 - 3 - 4 + 1 = 57$
- $\gamma_3(f_{int}) = v + e + 1 = 27 + 36 + 1 = 64$

Berikan label titik, sisi, dan *face* berturut-turut dengan $\alpha_3, v - a + \beta_3$, dan γ_3. Akan diperoleh pelabelan dengan tipe (1, 1, 1). Perhatikan Gambar 3.2.6



Gambar 3.2.6 Pelabelan pada graf bidang C_3^4

4. **Bobot *face***

❖ **Untuk *face* $f_{i,j}$**

- $w(f_{1,1}) = \alpha_3(y_1) + \alpha_3(x_{1,1,1}) + \alpha_3(y_2) + \alpha_3(x_{1,2,1}) + \beta_3(y_1x_{1,1,1}) +$

$$\beta_3(x_{1,1,1}y_2) + \beta_3(y_1x_{1,2,1}) + \beta_3(x_{1,2,1}y_2) + \gamma_3(f_{1,1})$$

$= 62 + 4 + 63 + 2 + 25 + 32 + 26 + 31 + 73 = 318$

- $w(f_{1,2}) = \alpha_3(y_1) + \alpha_3(x_{1,2,1}) + \alpha_3(y_2) + \alpha_3(x_{1,3,1}) + \beta_3(y_1x_{1,2,1}) +$

  $\beta_3(x_{1,2,1}y_2) + \beta_3(y_1x_{1,3,1}) + \beta_3(x_{1,3,1}y_2) + \gamma_3(f_{1,2})$

  $= 62 + 2 + 63 + 3 + 26 + 31 + 27 + 30 + 70 = 314$

- $w(f_{1,3}) = \alpha_3(y_1) + \alpha_3(x_{1,3,1}) + \alpha_3(y_2) + \alpha_3(x_{1,4,1}) + \beta_3(y_1x_{1,3,1}) +$

  $\beta_3(x_{1,3,1}y_2) + \beta_3(y_1x_{1,4,1}) + \beta_3(x_{1,4,1}y_2) + \gamma_3(f_{1,3})$

  $= 62 + 3 + 63 + 1 + 27 + 30 + 28 + 39 + 67 = 310$

- $w(f_{2,1}) = \alpha_3(y_2) + \alpha_3(x_{2,1,1}) + \alpha_3(x_{2,1,2}) + \alpha_3(y_3) + \alpha_3(x_{2,2,1}) +$

  $\alpha_3(x_{2,2,2}) + \beta_3(y_2x_{2,1,1}) + \beta_3(x_{2,1,1}x_{2,1,2}) + \beta_3(x_{2,1,2}y_3) +$

  $\beta_3(y_2x_{2,2,1}) + \beta_3(x_{2,2,1}x_{2,2,2}) + \beta_3(x_{2,2,2}y_3) + \gamma_3(f_{2,1})$

  $= 63 + 5 + 12 + +74 + 6 + 11 + 33 + 40 + 41 + 35 + 39 + 42 + 66$

  $= 467$

- $w(f_{2,2}) = \alpha_3(y_2) + \alpha_3(x_{2,2,1}) + \alpha_3(x_{2,2,2}) + \alpha_3(y_3) + \alpha_3(x_{2,3,1}) +$

  $\alpha_3(x_{2,3,2}) + \beta_3(y_2x_{2,2,1}) + \beta_3(x_{2,2,1}x_{2,2,2}) + \beta_3(x_{2,2,2}y_3) +$

  $\beta_3(y_2x_{2,3,1}) + \beta_3(x_{2,3,1}x_{2,3,2}) + \beta_3(x_{2,3,2}y_3) + \gamma_3(f_{2,2})$

$= 63 + 6 + 11 + 74 + 7 + 10 + 35 + 39 + 42 + 34 + 38 + 43 + 69$

$= 471$

- $w(f_{2,3}) = \alpha_3(y_2) + \alpha_3(x_{2,3,1}) + \alpha_3(x_{2,3,2}) + \alpha_3(y_3) + \alpha_3(x_{2,4,1}) +$

  $\alpha_3(x_{2,4,2}) + \beta_3(y_2 x_{2,3,1}) + \beta_3(x_{2,3,1} x_{2,3,2}) + \beta_3(x_{2,3,2} y_3) +$

  $\beta_3(y_2 x_{2,4,1}) + \beta_3(x_{2,4,1} x_{2,4,2}) + \beta_3(x_{2,4,2} y_4) + \gamma_3(f_{2,3})$

  $= 63 + 7 + 10 + 74 + 8 + 9 + 34 + 38 + 43 + 36 + 37 + 44 + 72$

  $= 475$

- $w(f_{3,1}) = \alpha_3(y_3) + \alpha_3(x_{3,1,1}) + \alpha_3(x_{3,1,2}) + \alpha_3(x_{3,1,3}) + \alpha_3(y_4) +$

  $\alpha_3(x_{3,2,1}) + \alpha_3(x_{3,2,2}) + \alpha_3(x_{3,2,3}) + \beta_3(y_3 x_{3,1,1}) +$

  $\beta_3(x_{3,1,1} x_{3,1,2}) + \beta_3(x_{3,1,2} x_{3,1,3}) + \beta_3(x_{3,1,3} y_4) +$

  $\beta_3(y_3 x_{3,2,1}) + \beta_3(x_{3,2,1} x_{3,2,2}) + \beta_3(x_{3,2,2} x_{3,2,3}) +$

  $\beta_3(x_{3,2,3} y_4) + \gamma_3(f_{3,1})$

  $= 74 + 16 + 17 + 24 + 62 + 14 + 18 + 23 + 45 + 52 + 53 + 61 +$

  $46 + 51 + 54 + 60 + 71 = 741$

- $w(f_{3,2}) = \alpha_3(y_3) + \alpha_3(x_{3,2,1}) + \alpha_3(x_{3,2,2}) + \alpha_3(x_{3,2,3}) + \alpha_3(y_4) +$

  $\alpha_3(x_{3,3,1}) + \alpha_3(x_{3,3,2}) + \alpha_3(x_{3,3,3}) + \beta_3(y_3 x_{3,2,1}) +$

  $\beta_3(x_{3,2,1} x_{3,2,2}) + \beta_3(x_{3,2,2} x_{3,2,3}) + \beta_3(x_{3,2,3} y_4) +$

  $\beta_3(y_3 x_{3,3,1}) + \beta_3(x_{3,3,1} x_{3,3,2}) + \beta_3(x_{3,3,2} x_{3,3,3}) +$

  $\beta_3(x_{3,3,3} y_4) + \gamma_3(f_{3,2})$

  $= 74 + 14 + 18 + 23 + 62 + 15 + 19 + 22 + 46 + 51 + 54 + 60 +$

  $47 + 50 + 55 + 59 + 68 = 737$

- $w(f_{3,3}) = \alpha_3(y_3) + \alpha_3(x_{3,3,1}) + \alpha_3(x_{3,3,2}) + \alpha_3(x_{3,3,3}) + \alpha_3(y_4) +$

  $\alpha_3(x_{3,4,1}) + \alpha_3(x_{3,4,2}) + \alpha_3(x_{3,4,3}) + \beta_3(y_3 x_{3,3,1}) +$

  $\beta_3(x_{3,3,1} x_{3,3,2}) + \beta_3(x_{3,3,2} x_{3,3,3}) + \beta_3(x_{3,3,3} y_4) +$

  $\beta_3(y_3 x_{3,4,1}) + \beta_3(x_{3,4,1} x_{3,4,2}) + \beta_3(x_{3,4,2} x_{3,4,3}) +$

  $\beta_3(x_{3,4,3} y_4) + \gamma_3(f_{3,3})$

  $= 74 + 15 + 19 + 22 + 62 + 13 + 20 + 21 + 47 + 50 + 55 + 59 +$

  $48 + 49 + 56 + 58 + 65 = 733$

❖ **Untuk *face* f_{int} dan f_{ext}**

- $w(f_{int}) = \alpha_3(y_1) + \alpha_3(x_{1,4,1}) + \alpha_3(y_2) + \alpha_3(x_{2,4,1}) + \alpha_3(x_{2,4,2}) +$

  $\alpha_3(y_3) + \alpha_3(x_{3,4,1}) + \alpha_3(x_{3,4,2}) + \alpha_3(x_{3,4,3}) +$

$$\beta_3(y_1 x_{1,4,1}) + \beta_3(x_{1,4,1} y_2) + \beta_3(y_2 x_{2,4,1}) + \beta_3(x_{2,4,1} x_{2,4,2}) +$$

$$\beta_3(x_{2,4,2} y_3) + \beta_3(y_3 x_{3,4,1}) + \beta_3(x_{3,4,1} x_{3,4,2}) +$$

$$\beta_3(x_{3,4,2} x_{3,4,3}) + \beta_3(x_{3,4,3} y_4) + \gamma_3(f_{int})$$

$$= 62 + 1 + 63 + 8 + 9 + 74 + 13 + 20 + 21 + 28 + 29 + 36 +$$

$$37 + 44 + 48 + 49 + 56 + 58 + 64$$

$$= 720$$

- $w(f_{ext}) = \alpha_3(y_1) + \alpha_3(x_{1,1,1}) + \alpha_3(y_2) + \alpha_3(x_{2,1,1}) + \alpha_3(x_{2,1,2}) +$

$$\alpha_3(y_3) + \alpha_3(x_{3,1,1}) + \alpha_3(x_{3,1,2}) + \alpha_3(x_{3,1,3}) +$$

$$\beta_3(y_1 x_{1,1,1}) + \beta_3(x_{1,1,1} y_2) + \beta_3(y_2 x_{2,1,1}) + \beta_3(x_{2,1,1} x_{2,1,2}) +$$

$$\beta_3(x_{2,1,2} y_3) + \beta_3(y_3 x_{3,1,1}) + \beta_3(x_{3,1,1} x_{3,1,2}) +$$

$$\beta_3(x_{3,1,2} x_{3,1,3}) + \beta_3(x_{3,1,3} y_4) + \gamma_3(f_{int})$$

$$= 62 + 4 + 63 + 5 + 12 + 74 + 16 + 17 + 24 + 25 + 32 + 33 +$$

$$40 + 41 + 45 + 52 + 53 + 61 + 5$$

$$= 716$$

Diperoleh bobot dari $F(C_3^4)$:

$$F(C_3^4) = \left\{ \begin{matrix} w(f_{1,1}), w(f_{1,2}), w(f_{1,3}), w(f_{2,1}), w(f_{2,2}), w(f_{2,3}), w(f_{3,1}), \\ w(f_{3,2}), w(f_{3,3}), w(f_{int}), w(f_{ext}) \end{matrix} \right\}$$

$$= \{318, 314, 310, 467, 471, 475, 741, 737, 733, 720, 716\}$$

Dapat dilihat bahwa bobot dari *face* $f_{i,j}$ dengan $(2i + 2)$-sisi *face*, untuk $i \in I$ membentuk barisan aritmatika dengan beda $a + 1$ untuk $a = 3$ sehingga didapatkan $d = 3 + 1 = 4$ dan $w(f_{int}) - w(f_{ext}) = a + 1$, yaitu:

- **Untuk $i = 1$, diperoleh:**

$$\{w(f_{1,1}), w(f_{1,2}), w(f_{1,3})\} = \{318, 314, 310\}$$

- **Untuk $i = 2$, diperoleh:**

$$\{w(f_{2,1}), w(f_{2,2}), w(f_{2,3})\} = \{467, 471, 475\}$$

- **Untuk $i = 3$, diperoleh:**

$$\{w(f_{3,1}), w(f_{3,2}), w(f_{3,3})\} = \{741, 737, 733\}$$

- $w(f_{int}) - w(f_{ext}) = 720 - 716 = 4$

Dan diperoleh perbedaan jumlah dari semua nilai yang dibawa oleh titik-titik dan sisi-sisi disekitar f_{ext} dengan jumlah dari semua nilai yang dibawa oleh titik-titik dan sisi-sisi disekitar f_{int} adalah $b - 1$, untuk $b = 4$ sehingga $4 - 1 = 3$, yaitu:

$$\left(\sum_{i=1}^{a} \alpha_3(y_i) + \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{i} \alpha_3(x_{i,1,k}) + \sum_{i=1}^{a}[v - a + \beta_3(y_i x_{i,1,1})]\right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{i-1}[v - a + \beta_3(x_{i,1,k}x_{i,1,k+1})] + \sum_{i=1}^{a}[v - a + \beta_3(x_{i,1,i}y_{i+1})]\right)$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{a}\alpha_3(y_i)+\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{i}\alpha_3(x_{i,b,k})+\sum_{i=1}^{a}[v-a+\beta_3(y_ix_{i,b,1})]\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{i-1}[v-a+\beta_3(x_{i,b,k}x_{i,b,k+1})]+\sum_{i=1}^{a}[v-a+\beta_3(x_{i,b,i}y_{i+1})]\right)$$

$$\Big((\alpha_3(y_1),\alpha_3(y_2),\dots,\alpha_3(y_a))+\big(\alpha_3(x_{1,1,1}),\alpha_3(x_{2,1,1}),\alpha_3(x_{2,1,2}),\dots,\alpha_3(x_{a,1,i})\big)$$

$$+[v-a+\beta_3(x_{2,1,1}x_{2,1,2},\dots,(x_{a,1,i-1}x_{a,1,i}))]$$

$$+[v-a+\beta_3(x_{1,1,1}y_2,x_{2,1,2}y_3,\dots,\beta_3(x_{a,1,a}y_{a+1}))]\Big)$$

$$-\Big((\alpha_3(y_1),\alpha_3(y_2),\dots,\alpha_3(y_a))+\big(\alpha_3(x_{1,b,1}),\alpha_3(x_{2,b,1}),\alpha_3(x_{2,b,2}),\dots,\alpha_3(x_{a,b,i})\big)$$

$$+[v-a+\beta_3(x_{2,b,1}x_{2,b,2},\dots,(x_{a,b,i-1}x_{a,b,i}))]$$

$$+[v-a+\beta_3(x_{1,b,1}y_2,x_{2,b,2}y_3,\dots,\beta_3(x_{a,1,a}y_{a+1}))]\Big)$$

$$=(\alpha_3(y_1)+\alpha_3(y_2)+\alpha_3(y_3)+\alpha_3(x_{1,1,1})+\alpha_3(x_{2,1,1})+\alpha_3(x_{2,1,2})+\alpha_3(x_{3,1,1})$$

$$+\alpha_3(x_{3,1,2})+\alpha_3(x_{3,1,3})$$

$$+[v-a+\beta_3(y_1x_{1,1,1})+\beta_3(y_2x_{2,1,1})+\beta_3(y_3x_{3,1,1})]$$

$$+[v-a+\beta_3(x_{2,1,1}x_{2,1,2})+\beta_3(x_{3,1,1}x_{3,1,2})+\beta_3(x_{3,1,2}x_{3,1,3})]$$

$$+[v-a+\beta_3(y_1x_{1,1,1})+\beta_3(y_2x_{2,1,1})+\beta_3(y_3x_{3,1,1})])-$$

$$\left(\alpha_3(y_1) + \alpha_3(y_2) + \alpha_3(y_3) + \alpha_3(x_{1,4,1}) + \alpha_3(x_{2,4,1}) + \alpha_3(x_{2,4,2}) + \alpha_3(x_{3,4,1}) \right.$$

$$+ \alpha_3(x_{3,4,2}) + \alpha_3(x_{3,4,3})$$

$$+ [v - a + \beta_3(y_1 x_{1,4,1}) + \beta_3(y_2 x_{2,4,1}) + \beta_3(y_3 x_{3,4,1})]$$

$$+ [v - a + \beta_3(x_{2,4,1} x_{2,4,2}) + \beta_3(x_{3,4,1} x_{3,4,2}) + \beta_3(x_{3,4,2} x_{3,4,3})]$$

$$\left. + [v - a + \beta_3(y_1 x_{1,4,1}) + \beta_3(y_2 x_{2,4,1}) + \beta_3(y_3 x_{3,4,1})]\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 62 + 63 + 74 + 4 + 5 + 12 + 16 + 17 + 24 + [27 - 3 + 25 + 33 + 45] + \\ [27 - 3 + 40 + 52 + 53] + [27 - 3 + 32 + 41 + 61] \end{pmatrix} -$$

$$\begin{pmatrix} 62 + 63 + 74 + 1 + 8 + 9 + 13 + 20 + 21 + [27 - 3 + 28 + 36 + 48] + \\ [27 - 3 + 37 + 49 + 56] + [27 - 3 + 29 + 44 + 58] \end{pmatrix}$$

$$= (277 + 127 + 169 + 158) - (271 + 136 + 166 + 155)$$

$$= 731 - 728 = 3$$

BAB IV

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh pada Bab III, dapat disimpulkan bahwa untuk $a \geq 3$, dan $b \geq 2$ graf bidang C_a^b memiliki pelabelan $(a+1)$anti ajaib dengan tipe (1, 1, 1), yaitu:

1. Untuk C_4^2 diperoleh bobot dari $f_{i,j}$ dengan $(2i+2)$-sisi *face* untuk $i \in I$ dan $j \in j - \{b\}$ membentuk barisant aritmatika dengan $d = a + 1$ dan $w(f_{ext}) - w(f_{int}) = a + 1$.
2. Untuk C_3^3 diperoleh bobot dari $f_{i,j}$ dengan $(2i+2)$-sisi *face* untuk $i \in I, j \in j - \{b\}$ membentuk barisan aritmatika dengan $d = a + 1$ dan $w(f_{int}) - w(f_{ext}) = a - \left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor$. Dengan menukar label titik $\alpha_2(x_{1,b,1})$ dengan label *face* $\gamma_2(f_{1,b-1})$ didapat $w(f_{int}) - w(f_{ext}) = a + 1$.
3. Untuk C_3^4 diperoleh bobot dari $f_{i,j}$ dengan $(2i+2)$-sisi *face* untuk $i \in I, j \in j - \{b\}$ membentuk barisan aritmatika dengan $d = a + 1$ dan $w(f_{int}) - w(f_{ext}) = a + 1$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Kotzig. A dan Rosa .A: magic valuations of finite graphs, *Canad. Math, Bull.* 13 (1970), 451-461.

[2] Ko- Wei Lih, *On Magic and Consecutive Labeling Of Plane Graphs*, Utilitas Math. 24 (1983), 165-197.

[3] M. Baca, E.T. Baskoro, And Y. M. *Cholily Face Antimagic Labelings For A Special Class Of Plane Graphs* C_a^b, 1-10.

[4] M. Rinaldi. 2010. *Graf (bagian 1) Bahan Kuliah IF2151 Matematika Diskrit.*

http://www.informatika.org/~rinaldi/Matdis/2006-2007/Graf%20(bagian%201).ppt. [25 September 2010].

[5] Ngurah. A.A.G. 2001 *Pelabelan Ajaib dan Pelabelan Anti Ajaib*. ITB. Bandung.

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Witri Yuliani, dilahirkan di Tembilahan pada tanggal 3 Juli dari pasangan Azwar D dan Ernimal A. Penulis adalah anak kedua dari tiga bersaudara. Penulis menamatkan pendidikan Sekolah Dasar di SDN 05 Kota Solok pada tahun 2000, SMP Negeri 1 Kota Solok pada tahun 2003, dan SMA Negeri 1 Kota Solok pada tahun 2006. Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur Seleksi Penerimaan Mahasiswa Baru (SPMB).

Selama menjadi mahasiswa di Jurusan Matematika FMIPA Unand, penulis pernah menjadi anggota Himatika. Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) pada tahun 2009 di Jorong Batu Balabuah II Kenagarian Sungai Naniang Kabupaten 50 Kota dalam rangka menyelesaikan salah satu mata kuliah wajib fakultas. Selama kuliah penulis juga aktif dalam kegiatan seni dan kreatifitas mahasiswa fakultas.

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Wini Yulianti, dilahirkan di Tembilahan pada tanggal 3 Juli dari pasangan Azwar D dan Erminel A. Penulis adalah anak kedua dari tiga bersaudara. Penulis menamatkan pendidikan Sekolah Dasar di SDN 05 Kota Solok pada tahun 2000, SMP Negeri 1 Kota Solok pada tahun 2003, dan SMA Negeri 1 Kota Solok pada tahun 2006. Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur Seleksi Penerimaan Mahasiswa Baru (SPMB).

Selama menjadi mahasiswa di Jurusan Matematika FMIPA Unand, penulis pernah menjadi anggota Himatika. Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) pada tahun 2009 di Jorong Batu Balabuah II Kenagarian Sungai Naniang Kabupaten 50 Kota dalam rangka menyelesaikan salah satu mata kuliah wajib fakultas. Selama kuliah penulis juga aktif dalam kegiatan seni dan kreatifitas mahasiswa fakultas.