REPRESENTASI GRUP DAN CG MODUL

SKRIPSI

SANTRINALDI

05 134 014

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

PADANG 2011

ABSTRAK

Misalkan G adalah grup hingga dan $GL_n(\mathbb{C})$ adalah matriks yang berukuran $n \times n$ atas lapangan kompleks, maka homomorfisma $\rho: G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ merupakan representasi dari G. Suatu $\mathbb{C}G$ modul adalah sebuah ruang vektor yang didalamnya didefinisikan suatu perkalian gv yang memenuhi kondisi-kondisi $gv \in V, (gh)v = g(hv), 1v = v, g(\lambda v) = \lambda(gv), g(u + v) = gu + gv$ untuk setiap $u, v \in V, \lambda \in \mathbb{C}$, dan $g, h \in G$.

Misalkan V adalah suatu $\mathbb{C}G$ modul dengan basis β ke β' dan misalkan ρ adalah representasi dari G yang didefinisikan sebagai $\rho(g) = [g]_\beta$ dengan $[g]_\beta$ adalah matriks representasi pemetaan yang mengaitkan v ke gv untuk setiap $v \in V$ dan $g \in G$. Maka representasi φ yang didefinisikan sebagai $\varphi(g) = [g]_{\beta'}$ adalah representasi yang ekivalen dengan ρ. Jika σ representasi dari G yang ekivalen dengan ρ maka σ terdapat β'' basis dari V sehingga $\sigma(g) = [g]_{\beta''}$.

Kata kunci : *Grup, ruang vektor, relasi ekivalen, representasi grup, $\mathbb{C}G$ modul.*

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori grup dalam aljabar abstrak adalah salah satu teori yang mempelajari tentang aljabar suatu himpunan. Himpunan tak kosong G disebut grup, jika G bersama suatu operasi biner $'*'$ memenuhi sifat tutup, asosiatif, terdapat unsur identitas di G, dan untuk setiap unsur di G mempunyai invers.

Dalam aljabar abstrak dikenal suatu teori yang berkaitan dengan cara menuliskan suatu grup sebagai sekumpulan matriks. Teori ini dikenal dengan nama Teori Representasi. Lebih tepatnya, representasi adalah homomorfisma dari grup hingga G ke grup yang beranggotakan matriks $n \times n$ yang dapat diinverskan dengan elemen di $\mathbb{C}$.

Misalkan G grup hingga dan $GL_n(\mathbb{C})$ adalah grup yang beranggotakan matriks berukuran $n \times n$ yang dapat dibalik dengan elemen di $\mathbb{C}$, maka homomorfisma dari G ke $GL_n(\mathbb{C})$ adalah sebuah representasi dari G.

Misalkan V adalah ruang vektor, maka V dinamakan suatu $\mathbb{C}G$ modul, jika di ruang vektor V didefinisikan suatu perkalian $gv = \rho(g)v$ untuk setiap $g \in G, v \in V$ dan ρ adalah representasi dari G.

Konsep $\mathbb{C}G$ modul ini mempunyai banyak peranan dalam penjelasan teori representasi, sedangkan teori representasi memiliki aplikasi yang sangat luas, tidak hanya dalam ilmu matematika murni, juga dalam bidang Fisika dan Kimia. Hal itu disebabkan sistem-sistem Fisikawi memiliki suatu grup simetri G dan beberapa ruang vektor tertentu yang berkaitan dengan sistem tersebut yang menghasilkan suatu $\mathbb{C}G$ modul. Di dalam bidang Kimia grup simetri molekul berperan pada ruang solusi getaran molekul yang disusun dari persamaan-persamaan diferensial.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah, maka perumusan masalah dalam penelitian ini adalah

1. Bagaimana menentukan Representasi dari suatu grup.
2. Bagaimana bentuk dari suatu $\mathbb{C}G$ modul.
3. Bagaimana hubungan antara $\mathbb{C}G$ modul dengan representasi dari G.

1.3 Pembatasan Masalah

Teori representasi grup terbagi menjadi subteori yang tergantung pada grup yang diwakili. Pada tulisan ini hanya akan dibahas representasi dari suatu grup hingga pada ruang vektor hingga atas lapangan kompleks.

1.4 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk:

1. Menjelaskan suatu representasi dari sebuah grup hingga.
2. Menjelaskan definisi $\mathbb{C}G$ modul, contoh dan sifat-sifatnya.
3. Menjelaskan hubungan antara representasi grup dengan $\mathbb{C}G$ modul.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut: Bab 1 Pendahuluan, berisi: latar belakang masalah, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan. Bab 2 Landasan Teori, memuat tentang beberapa definisi dan teorema dari suatu matriks dan invers matriks, definisi grup dan sifat-sifat dari suatu homomorfisma, definisi, teorema dari ruang vektor, transformasi linier. Bab 3 Pembahasan, berisi tentang definisi Representasi dan $\mathbb{C}G$ modul serta contoh yang mendukung masalah. Bab 4 Kesimpulan, berisi kesimpulan-kesimpulan dari pembahasan.

BAB II
LANDASAN TEORI

Dalam bab ini akan dituliskan definisi dan teorema dari suatu matriks dan invers matriks, definisi grup dan sifat-sifat dari suatu homomorfisma, definisi dan teorema dari ruang vektor serta pemetaan linier.

2.1 Matriks dan Invers Matriks

Definisi 2.1.1 [1]

Sebuah matriks adalah susunan segiempat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Definisi 2.1.2 [1]

Jika A adalah matriks kuadrat dan jika dapat dicari matriks B, sehingga

$AB = BA = I$, maka A dikatakan dapat dibalik dan B dinamakan invers dari A.

Teorema 2.1.3 [1]

Jika A dan B adalah matriks-matriks yang dapat dibalik dan ukurannya sama, maka

(i) AB dapat dibalik,

(ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Untuk bukti lihat di [1] halaman 36.

Selanjutnya akan dijelaskan tentang grup dan homomorfisma grup.

2.2 Grup

Definisi 2.2.1 [2]

Misalkan G adalah suatu himpunan tak kosong. G dikatakan suatu grup jika pada G dapat didefinisikan suatu operasi biner, ditulis $' * '$ sedemikian sehingga:

1. Untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$.
2. Untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$.
3. Terdapat satu unsur di G yang dilambangkan dengan e, sehingga untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$
4. Untuk setiap $a \in G$, terdapat satu $b \in G$ sehingga berlaku $a * b = b * a = e$, dengan kata lain $b = a^{-1}$

Grup G dengan operasi biner $' * '$, ditulis $(G, *)$.

Selanjutnya dalam tulisan ini, untuk setiap $a, b \in G$, maka $a * b$ ditulis ab.

Definisi 2.2.2 [2]

Pemetaan dari grup G ke grup G', yaitu $\varphi : G \rightarrow G'$, disebut homomorfisma grup jika untuk setiap unsur a dan b di G berlaku $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Sifat 2.2.2.1 [2]

Setiap unsur di grup G hanya mempunyai satu balikan.

Bukti:

Misalkan unsur $a \in G$ mempunyai balikan b dan c, maka berlaku $ab = ba = e$ dan $ac = ca = e$. Selanjutnya

$$b = be = b(ac) = (ba)c = ec = c.$$

Jadi, unsur a hanya mempunyai satu balikan.

Sifat 2.2.2.2 [2]

Misalkan $\varphi : G \rightarrow G'$ suatu homomorfisma grup, maka

1. $\varphi(e) = e'$, dengan e dan e' berturut-turut menyatakan unsur kesatuan dari grup G dan G'.
2. $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$ untuk semua unsur $a \in G$.

Bukti:

1. Misalkan e unsur identitas di G, maka berlaku $ee = e$.

   Perhatikan bahwa:

$$\varphi(ee) = \varphi(e)$$

$$\varphi(e)\varphi(e) = \varphi(e).$$

   Akibatnya $\varphi(e) = e'$ adalah unsur identitas di G'.

2. Untuk setiap $a \in G$ berlaku $aa^{-1} = a^{-1}a = e$, akibatnya

$$\varphi(a)\varphi(a^{-1}) = \varphi(a^{-1})\varphi(a) = \varphi(e) = e'.$$

   Karena unsur balikan dari $\varphi(a)$ di G' tunggal, maka $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$.

Definisi 2.2.3 [4]

Misalkan G suatu grup. G disebut grup siklik, jika terdapat $a \in G$ sehingga $G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$. Jika ada $a \in G$ sehingga $G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$ maka a disebut generator atau pembangun dari G.

Definisi 2.2.4 [5]

Misal n suatu bilangan bulat positif dan misalkan $\mathbb{C}$ menyatakan suatu bilangan kompleks. Himpunan dari akar-akar ke-n dari unsur kesatuan $\mathbb{C}$ dengan perkalian biasa untuk bilangan kompleks adalah sebuah grup dengan orde n dilambangkan dengan $\mathbb{C}_n$ dan disebut grup siklik dengan orde n jika $a = e^{2\pi i/n}$, maka

$$C_n = \{1, a, a^2, \cdots, a^{n-1}\},$$

dan $a^n = 1$.

Definisi 2.2.5 [4]

Misalkan A himpunan yang tak kosong dan $\sim$ suatu relasi pada A.

Relasi $\sim$ disebut relasi ekivalen di A jika untuk setiap $a, b, c \in A$ berlaku:

1. $a \sim a$ (refleksif),
2. jika $a \sim b$ maka $b \sim a$ (simetri),
3. jika $a \sim b$ dan $b \sim c$, maka $a \sim c$ (transitif).

Berikut ini akan dijelaskan tentang ruang vektor, pemetaan linier dan matriks pemetaan linier.

2.3 Ruang Vektor

Definisi 2.3.1 [4]

Suatu ruang vektor V atas lapangan F adalah sebuah himpunan V yang anggota-anggotanya disebut vektor, termasuk juga sebuah elemen dari V yakni vektor nol, berikut dengan sebuah operator biner " $+$ ", disebut penjumlahan vektor dan sebuah perkalian skalar antara vektor dengan anggota F yang memenuhi syarat-syarat berikut

(i) untuk setiap $u, v, w \in V$

a. $u + v \in V$,

b. $\bar{0} + v = v$,

c. $u + v = v + u$,

d. $u + (v + w) = (u + v) + w$.

(ii) Untuk setiap $u, v \in V$ dan untuk setiap $r, s \in F$

a. $rv \in V$,

b. $1v = v$,

c. $0v = \bar{0}$,

d. $r(u + v) = ru + rv,$

e. $(r + s)v = rv + sv,$

f. $(rs)v = r(sv).$

Definisi 2.3.2 [1]

Subhimpunan W dari sebuah ruang vektor V dinamakan subruang V jika W itu sendiri adalah ruang vektor di bawah penambahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada V.

Teorema 2.3.3 [1]

Jika W adalah himpunan dari satu atau lebih vektor dari sebuah ruang vektor V, maka W adalah subruang dari V jika dan hanya jika kondisi-kondisi berikut berlaku:

(i) Jika u dan v adalah vektor-vektor pada W, maka $u + v$ terletak di W,

(ii) Jika k adalah sebarang skalar dan u adalah sebarang vektor pada W, maka ku berada di W.

Definisi 2.3.4 [1]

Jika $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah himpunan vektor, maka persamaan vektor

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_rv_r = 0$$

mempunyai paling sedikit satu pemecahan, yakni

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_r = 0.$$

Jika ini adalah satu-satunya pemecahan, maka S dinamakan himpunan bebas linier. Jika ada pemecahan lain, maka S dinamakan himpunan tak bebas linier.

Definisi 2.3.5 [1]

Sebuah vektor w dinamakan kombinasi linier dari vektor-vektor $v_1, v_2, \dots, v_r$ jika vektor tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r$$

dimana $k_1, k_2, \dots, k_r$ adalah skalar.

Definisi 2.3.6 [1]

Jika $v_1, v_2, \dots, v_r$ adalah vektor-vektor pada ruang vektor V dan jika masing-masing vektor pada V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier $v_1, v_2, \dots, v_r$, maka dikatakan bahwa vektor-vektor tersebut membangun V dan dinotasikan dengan span$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Definisi 2.3.7 [4]

Sebuah himpunan dari vektor-vektor $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dalam sebuah ruang vektor V dinamakan sebuah basis untuk V, jika

(i) $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah bebas linier,

(ii) span$\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = V$.

Definisi 2.3.8 [1]

Sebuah ruang vektor tak nol V dinamakan berdimensi berhingga jika ruang vektor tersebut mengandung sebuah himpunan berhingga dari vektor-vektor $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ yang membentuk sebuah basis. Jika tidak ada himpunan seperti itu, maka V dinamakan berdimensi tak berhingga.

Berikut ini akan dijelaskan tentang pemetaan linier dan matriks pemetaan linier.

2.4 Pemetaan Linier

Definisi 2.4.1 [1]

Jika $F: V \Rightarrow W$ adalah sebuah fungsi dari ruang vektor V ke dalam ruang vektor W, maka F dinamakan pemetaan linier jika dan hanya jika

1. $F(u+v) = F(u) + F(v)$ untuk semua vektor u dan v di V,
2. $F(ku) = kF(u)$ untuk semua vektor u di dalam V dan semua skalar k.

Jika F memetakan V ke dirinya sendiri, maka F dikatakan operator linier.

Teorema 2.4.2 [1]

Jika $T: R^n \rightarrow R^m$ adalah pemetaan linier dan jika $e_1, e_2, \dots, e_n$ adalah basis baku untuk R^n, maka T adalah perkalian oleh A dimana A adalah matriks yang menghasilkan vektor kolom $T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)$.

Definisi 2.4.3 [1]

Jika $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ adalah basis untuk ruang vektor V yang berdimensi berhingga, dan

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$$

adalah pernyataan untuk v dalam basis $\mathfrak{B}$, maka skalar $c_1, c_2, \cdots, c_n$ dinamakan koordinat v relatif terhadap basis $\mathfrak{B}$. Vektor koordinat dari v relatif terhadap $\mathfrak{B}$ dinyatakan oleh $(v)_{\mathfrak{B}}$ dan merupakan vektor R^n yang didefinisikan oleh

$$(v)_{\mathfrak{B}} = (c_1, c_2, \cdots, c_n).$$

Matriks koordinat v relatif terhadap $\mathfrak{B}$ dinyatakan oleh $[v]_{\mathfrak{B}}$ dan merupakan vektor R^n yang didefinisikan oleh

$$[v]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.4.4 [1]

Jika diubah basis untuk ruang vektor V dari basis $\mathfrak{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ yang lama terhadap basis $\mathfrak{B}' = \{u'_1, u'_2, \cdots, u'_n\}$ yang baru, maka matriks koordinat $[v]_{\mathfrak{B}}$ yang lama dari vektor v dihubungkan terhadap matriks koordinat $[v]_{\mathfrak{B}}'$ yang baru dari vektor yang sama dengan persamaan

$$[v]_{\mathfrak{B}} = P[v]_{\mathfrak{B}'},$$

di mana kolom-kolom P adalah matriks-matriks koordinat dari vektor basis baru yang relatif terhadap basis lama, yakni vektor kolom dari P adalah

$$[u'_1]_{\mathfrak{B}} | [u'_2]_{\mathfrak{B}} | \cdots | [u'_n]_{\mathfrak{B}}$$

secara simbolis, maka ditulis matriks P dapat dituliskan sebagai

$$P = \left[[u'_1]_{\mathfrak{B}} | [u'_2]_{\mathfrak{B}} | \cdots | [u'_n]_{\mathfrak{B}} \right]$$

matriks tersebut dinamakan matriks transisi dari $\mathfrak{B}'$ ke $\mathfrak{B}$.

Teorema 2.4.5 [1]

Jika P adalah matriks transisi dari basis $\mathfrak{B}'$ ke basis $\mathfrak{B}$, maka

(i) P dapat dibalik,

(ii) P^{-1} adalah matriks transisi dari $\mathfrak{B}$ ke $\mathfrak{B}'$.

Bukti :

Misalkan P adalah matriks transisi dari basis $\mathfrak{B}'$ ke basis $\mathfrak{B}$.

Misalkan $\mathfrak{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ dan $\mathfrak{B}' = \{u'_1, u'_2, \cdots, u'_n\}$.

Misalkan P adalah matriks transisi dari basis $\mathfrak{B}'$ ke basis $\mathfrak{B}$.

Misalkan Q adalah matriks transisi dari basis $\mathfrak{B}$ ke basis $\mathfrak{B}'$.

Maka untuk setiap $v \in V$ berlaku

$$[v]_{\mathfrak{B}} = P[v]_{\mathfrak{B}'} \text{ dan}$$

$$[v]_{\mathfrak{B}'} = Q[v]_{\mathfrak{B}} \text{ ....(2.4.1)}$$

Akan dibuktikan $PQ = I$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $Q = P^{-1}$,

Misalkan

$$PQ = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan persamaan (2.4.1)

$$[v]_{\mathfrak{B}} = PQ[v]_{\mathfrak{B}}$$

untuk semua v di V. Ambil $x \in V$ dengan $x = u_1$, maka $[x]_{\mathfrak{B}} = PQ[x]_{\mathfrak{B}}$ akan memberikan

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix}$$

demikian juga, dengan mensubstitusikan secara berurutan $x = u_2, u_3, \cdots, u_n$ dari $[x]_{\mathfrak{B}} = PQ[x]_{\mathfrak{B}}$, maka akan menghasilkan

$$\begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

sehingga, $PQ = I$.

Definisi 2.4.6 [3]

Misalkan V ruang vektor atas lapangan F. Misalkan $T: V \to V$ suatu pemetaan linier dan $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ suatu basis dari V. Maka matriks penyajian T terhadap basis $\mathfrak{B}$ ditulis $[T]_{\mathfrak{B}}$ adalah

$$[T]_{\mathfrak{B}} = [[T(v_1)_{\mathfrak{B}}]|[T(v_2)_{\mathfrak{B}}]| \cdots [T(v_1)_{\mathfrak{B}}]].$$

Teorema 2.4.7 [1]

Misalkan $\mathfrak{B}$ dan $\mathfrak{B}'$ adalah basis dari V dan $T: V \to V$ adalah pemetaan linier pada ruang vektor V berdimensi hingga. Jika $[T]_{\mathfrak{B}}$ adalah matriks penyajian T terhadap basis $\mathfrak{B}$, dan $[T]_{\mathfrak{B}}'$ adalah matriks penyajian T terhadap basis $\mathfrak{B}'$, maka

$$[T]_{\mathfrak{B}}' = P^{-1}[T]_{\mathfrak{B}}P$$

dimana P adalah matriks transisi dari $\mathfrak{B}'$ ke $\mathfrak{B}$.

Untuk bukti lihat [1] halaman 268.

BAB III
REPRESENTASI GRUP DAN $\mathbb{C}G$ MODUL

Pada bab ini akan dijelaskan tentang representasi grup dan $\mathbb{C}G$ modul, serta hubungan antara keduanya.

3.1 Representasi Grup

Definisi 3.1.1 [5]

Grup yang beranggotakan matriks $n \times n$ yang dapat diinverskan dengan komponennya di $\mathbb{C}$ dinotasikan sebagai $GL_n(\mathbb{C})$ dan dinamakan grup linier umum (*general linier*) berderajat n atas $\mathbb{C}$.

Definisi 3.1.2 [5]

Suatu representasi dari G atas $\mathbb{C}$ adalah sebuah homomorfisma grup

$$\rho : G \Rightarrow GL_n(\mathbb{C})$$

untuk suatu $n \in \mathbb{N}$ bilangan asli n derajat dari ρ.

Dengan demikian, jika ρ adalah suatu fungsi dari G ke $GL_n(\mathbb{C})$, maka ρ adalah suatu representasi grup jika dan hanya jika

$$\rho(g)\rho(h) = \rho(gh) \text{ untuk setiap } g, h \in G.$$

Dari sifat dasar homomorfisma grup, jika $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ adalah suatu representasi grup dan e adalah elemen identitas dari G, maka

$$\rho(e) = I_n \text{ dan } \rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1} \text{ untuk setiap } g \in G.$$

Contoh 3.1

1. Misalkan $G = C_2 = \{e, a\}$ grup siklik dengan dua anggota dan diperoleh $a^2 = e$. Definisikan $\rho : G \to GL_2(\mathbb{C})$ sebagai

   $\rho(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $\rho(a) = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Karena

$$\rho(e)\rho(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho(e)$$

$$\rho(e)\rho(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \rho(a)$$

$$\rho(a^2) = \rho(a)\rho(a) = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho(e),$$

maka ρ merupakan representasi dari C_2 berderajat dua.

Definisi 3.1.3 [5]

Misalkan $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ dan $\sigma : G \to GL_m(\mathbb{C})$ merupakan dua representasi dari G. Dikatakan ρ ekivalen dengan σ jika $n = m$ dan terdapat $T \in GL_n(\mathbb{C})$ sedemikian sehingga

$$\sigma(g) = T^{-1}\rho(g)T \text{ untuk setiap } g \in G.$$

Proposisi 3.1.4 [5]

Misalkan $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$, $\sigma : G \to GL_m(\mathbb{C})$ dan $\tau : G \to GL_s(\mathbb{C})$ merupakan tiga representasi dari G, maka:

1. ρ ekivalen dengan ρ,
2. jika ρ ekivalen dengan σ, maka σ ekivalen dengan ρ,
3. jika ρ ekivalen dengan σ dan σ ekivalen dengan τ maka ρ ekivalen dengan τ.

Bukti:

1. Akan dibuktikan $\rho \sim \rho$.

   Jelas bahwa $n = n$ dan terdapat $T = I_n \in GL_n(\mathbb{C})$ sehingga

   $$\rho(g) = T^{-1}\rho(g)T.$$

2. Misalkan ρ ekivalen dengan σ, akan dibuktikan $\sigma \sim \rho$.

   Karena $\rho \sim \sigma$, maka berlaku $n = m$ dan terdapat $T \in GL_n(\mathbb{C})$sehingga

   $$\sigma(g) = T^{-1}\rho(g)T \text{ untuk setiap } g \in G.$$

Perhatikan bahwa

$$T\sigma(g)T^{-1} = TT^{-1}\rho(g)TT^{-1} = \rho(g).$$

Akibatnya $\sigma \sim \rho$.

3. Misal $\rho \sim \sigma$ dan $\sigma \sim \tau$. Akan dibuktikan $\rho \sim \tau$, artinya $\tau(g) = Q^{-1}\rho(g)Q$ untuk setiap $g \in G$.

   Karena $\rho \sim \sigma$, maka $n = m$ dan terdapat $T \in GL_n(\mathbb{C})$ sehingga

   $$\sigma(g) = T^{-1}\rho(g)T \text{ untuk setiap } g \in G.$$

   Dan karena $\sigma \sim \tau$, maka $m = s$ dan terdapat $P \in GL_n(\mathbb{C})$ sehingga

   $$\tau(g) = P^{-1}\sigma(g)P \text{ untuk setiap } g \in G.$$

   Perhatikan bahwa

   $$\begin{aligned}\tau(g) &= P^{-1}\sigma(g)P \\ &= P^{-1}T^{-1}\rho(g)TP.\end{aligned}$$

   Pilih $Q = TP$ sehingga $\tau(g) = Q^{-1}\rho(g)Q$. Berdasarkan Definisi (3.1.3) diperoleh $\rho \sim \tau$.

Contoh 3.2

1. Dalam Contoh 3.1 di atas, $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ dan $\rho(e) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\rho(a) = \begin{pmatrix}-5 & 12\\ -2 & 5\end{pmatrix}$. Dengan mengambil $T = \begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ sehingga $T^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, maka diperoleh

   $T^{-1}\begin{pmatrix}-5 & 12\\ -2 & 5\end{pmatrix}T = \begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 12\\ -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, dan

   $T^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}T = \begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Dengan demikian, didapatkan suatu representasi $\sigma : G \Rightarrow GL_m(\mathbb{C})$ dengan $\sigma(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ yang merupakan representasi yang ekivalensi dengan ρ.

Selanjutnya akan dijelaskan suatu konsep yang sangat penting dalam teori representasi grup yang dikenal dengan nama $\mathbb{C}G$ modul.

3.2 $\mathbb{C}G$ Modul

Definisi 3.2.1 [5]

Suatu ruang vektor berdimensi hingga V atas $\mathbb{C}$ adalah suatu $\mathbb{C}G$ modul jika perkalian gv (untuk setiap $g \in G$ dan $v \in V$) terdefinisi dan memenuhi kondisi berikut

untuk setiap $u, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$, dan $g, h \in G$, berlaku

(i) $gv \in V$,

(ii) $(gh)v = g(hv)$,

(iii) $1v = v$,

(iv) $g(\lambda v) = \lambda(gv)$,

(v) $g(u + v) = gu + gv$.

Proposisi 3.2.2 [5]

Jika V adalah sebuah $\mathbb{C}G$ modul untuk setiap $g \in G$, maka pemetaan yang mengaitkan v ke gv adalah pemetaan linier dari ruang vektor V ke dirinya sendiri.

Bukti:

Misalkan $T: V \Rightarrow V$ dengan $T(v) = gv$ untuk setiap $v \in V$ dan $g \in G$

Ambil $u, v \in V$ dan $k \in \mathbb{C}$, maka

(i) $T(u + v) = g(u + v) = gu + gv = T(u) + T(v)$,

(ii) $T(ku) = g(ku) = k(gu) = kT(u)$.

Akibatnya T adalah pemetaan linier dari ruang vektor V ke dirinya sendiri.

Jika $T: V \to V$ adalah pemetaan linier seperti pada proposisi (3.2.2), dan misalkan $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ adalah basis atas V, maka matriks penyajian T terhadap basis $\mathfrak{B}$, dinotasikan dengan $[T]_{\mathfrak{B}}$. Untuk setiap $g \in G$, berlaku

$$[T]_{\mathfrak{B}} = [[T(v_1)_{\mathfrak{B}}] | [T(v_2)_{\mathfrak{B}}] | \cdots [T(v_1)_{\mathfrak{B}}]]$$

$$[g]_{\mathfrak{B}} = [[gv_1]_{\mathfrak{B}} | [gv_2]_{\mathfrak{B}} | \cdots | [gv_n]_{\mathfrak{B}}].$$

Teorema berikut menjelaskan bahwa $[g]_{\mathfrak{B}}$ merupakan suatu representasi.

Teorema 3.2.3 [5]

Misalkan G suatu grup hingga.

(i) Diberikan suatu representasi $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ ruang vektor $V = \mathbb{C}^n$ menjadi $\mathbb{C}G$ modul, dengan mendefinisikan perkalian $gv = \rho(g)v$ untuk setiap $g \in$ G dan $v \in V$. Lebih lanjut, terdapat basis $\mathfrak{B}$ dari V sedemikian sehingga $\rho(g) = [g]_{\mathfrak{B}}$ untuk setiap $g \in G$.

(ii) Diberikan suatu $\mathbb{C}G$ modul V berdimensi $n > 0$ dengan basis $\mathfrak{B}$. Fungsi $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ dengan $\rho(g) = [g]_{\mathfrak{B}}$ adalah suatu representasi dari G.

Bukti:

(i) Akan dibuktikan bahwa ruang vektor V dengan perkalian $gv = \rho(g)v$ memenuhi kondisi-kondisi pada Definisi (3.2.1), yaitu untuk setiap $u, v \in V$, $\lambda, a_{ij} \in \mathbb{C}$ dan $g, h \in G$

1. Akan dibuktikan $\rho(g)v \in V$.

   Ambil $v \in V = \mathbb{C}^n$, $g \in G$,

   maka $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, $v_i \in \mathbb{C}$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, n$.

dan $\rho(g) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ dengan $a_{ij} \in \mathbb{C}$.

Perhatikan bahwa:

$$\rho(g)v = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}v_1 & + & a_{12}v_2 & + & \cdots & + & a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 & + & a_{22}v_2 & + & \cdots & + & a_{2n}v_n \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & + & \vdots \\ a_{n1}v_1 & + & a_{n2}v_2 & + & \cdots & + & a_{nn}v_{1n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}v_1 \\ a_{21}v_1 \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12}v_2 \\ a_{22}v_2 \\ \vdots \\ a_{n2}v_2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n}v_n \\ a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{nn}v_n \end{bmatrix}$$

Karena $\begin{bmatrix} a_{11}v_1 \\ a_{21}v_1 \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12}v_2 \\ a_{22}v_2 \\ \vdots \\ a_{n2}v_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{1n}v_n \\ a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{nn}v_n \end{bmatrix} \in V$, akibatnya

$$\begin{bmatrix} a_{11}v_1 \\ a_{21}v_1 \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12}v_2 \\ a_{22}v_2 \\ \vdots \\ a_{n2}v_2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n}v_n \\ a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{nn}v_n \end{bmatrix} \in V.$$

Jadi $\rho(g)v \in V$.

2. Akan dibuktikan $(gh)v = g(hv)$.

Karena $v \in V$ dan $g, h \in G$ maka:

$$(gh)v = \rho(gh)v$$
$$= \rho(g)\rho(h)v$$
$$= \rho(g)(hv)$$

$$= g(hv).$$

3. Akan dibuktikan $1v = v$.

   Perhatikan bahwa:

   $$1v = \rho(1)v = I_n v = v$$

   Jadi $1v = v$.

4. Akan dibuktikan $g(\lambda v) = \lambda(gv)$.

   Karena $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$ dan $g \in G$.

   Perhatikan bahwa:

   $$\begin{aligned} g(\lambda v) &= \rho(g)(\lambda v) \\ &= \lambda(\rho(g)v) \\ &= \lambda(gv). \end{aligned}$$

5. Akan dibuktikan $g(u + v) = gu + gv$.

   Karena $u, v \in V$ dan $g \in G$, maka:

   $$\begin{aligned} g(u+v) &= \rho(g)(u+v) \\ &= \rho(g)u + \rho(g)v \\ &= gu + gv. \end{aligned}$$

Dengan demukian, dengan mendefinisikan $gv = \rho(g)v$ untuk setiap $g \in$ G dan $v \in V$, V menjadi $\mathbb{C}G$ modul. Selanjutnya, jika $\mathfrak{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\}$ adalah basis dari V. akan dibuktikan $\rho(g) = [g]_{\mathfrak{B}}$ untuk setiap $g \in G$. Misalkan $\rho : G \to GL_n$ dengan $g \in G$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, j$, maka

$$\rho(g) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

dengan $a_{ij} \in \mathbb{C}$ untuk setiap $i, j \in \{1,2, \cdots, n\}$.

Misalkan $T: V \to V$ adalah pemetaan linier dari V ke V, dengan

$T(v) = gv$.

Ambil $v_k \in V$ untuk setiap $k = 1,2, \cdots, n$.

Misal $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, maka

$$(gv_1) = \rho(g)v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}.$$

Pandang kombinasi linier

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \equiv \alpha_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_{21} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_{n1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

sehingga diperoleh:

$$\alpha_{11} = a_{11}, \quad \alpha_{21} = a_{21}, \cdots, \alpha_{n1} = a_{n1}$$

akibatnya

$$[gv_1]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}.$$

Misalkan $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, maka

$$(gv_2)=\rho(g)v_2=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}.$$

Pandang kombinasi linier

$$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}=\alpha_{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\alpha_{n2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\cdots+\alpha_{n2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

sehingga diperoleh:

$$\alpha_{12}=a_{12},\alpha_{22}=a_{22},\cdots,\alpha_{n2}=a_{n2}$$

akibatnya

$$[gv_2]_{\mathfrak{B}}=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}.$$

Dan seterusnya dengan cara yang sama diperoleh

$$(gv_n)=\rho(g)v_n=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Pandang kombinasi linier

$$\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}=\alpha_{1n}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\alpha_{2n}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\cdots+\alpha_{nn}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

sehingga diperoleh:

$$\alpha_{1n}=a_{1n},\alpha_{2n}=a_{2n},\cdots,\alpha_{nn}=a_{nn}$$

akibatnya

$$[gv_n]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Karena

$$[g]_{\mathfrak{B}} = [[gv_1]_{\mathfrak{B}} | [gv_2]_{\mathfrak{B}} | \cdots | [gv_n]_{\mathfrak{B}}].$$

maka

$$[g]_{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \rho(g).$$

(ii) Akan dibuktikan $\rho : G \Rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ dengan $\rho(g) = [g]_{\mathfrak{B}}$ adalah homomorfisma

1. untuk setiap $g, h \in G$ dan setiap v di basis $\mathfrak{B}$ akan ditunjukkan

$$\rho(gh) = \rho(g)\rho(h).$$

Karena $(gh)v = g(hv)$ maka,

$\rho(gh) = [gh]_{\mathfrak{B}} = [g]_{\mathfrak{B}}[h]_{\mathfrak{B}} = \rho(g)\rho(h).$

2. $[1]_{\mathfrak{B}} = [g]_{\mathfrak{B}}[g^{-1}]_{\mathfrak{B}}$ untuk setiap $g \in G$. Karena $1v = v$ untuk setiap $v \in V$, maka $[1]_{\mathfrak{B}}$ merupakan matriks identitas di GL_n, sehingga setiap matriks $[g]_{\mathfrak{B}}$ mempunyai invers.

Berdasarkan (1) dan (2), maka $\rho(g) = [g]_{\mathfrak{B}}$ adalah suatu homomorfisma dari G ke $GL_n(\mathbb{C})$, yaitu suatu representasi dari G.

Proposisi berikut memberikan kondisi supaya perkalian yang dipilih mendefinisikan V sebagai $\mathbb{C}G$ modul.

Proposisi 3.2.4 [5]

Misalkan V suatu ruang vektor atas $\mathbb{C}$ dengan basis $v_1, v_2, \cdots, v_n$ dan misalkan perkalian gv yang terdefinisi untuk setiap $g \in G$ dan $v \in V$ memenuhi kondisi berikut

Untuk setiap $1 \le i \le n$, $g, h \in G$ dan $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

(i) $gv_i \in V$,

(ii) $(gh)v_i = g(hv_i)$,

(iii) $1v_i = v_i$,

(iv) $g(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 gv_1 + g\lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n gv_n$.

Maka V adalah suatu $\mathbb{C}G$ modul.

Bukti:

(i) Berdasarkan proporsisi (3.2.2), $T: V \to V$ dengan $T(v) = gv$ untuk setiap $v \in V$ adalah pemetaan linier dari V ke V. Misalkan $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ adalah basis dari V, maka untuk setiap $v \in V$, dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_n v_n$.

Karena $g \in G$ dan $v \in V$, maka:

$$gv = g(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n)$$

$$gv = \lambda_1 gv_1 + \lambda_2 gv_2 + \cdots + \lambda_n gv_n \in V.$$

(ii) Ambil $g, h \in G$ dan $v \in V$, maka $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_n v_n$.

Akan ditunjukkan $(gh)v = g(hv)$,

sehingga:

$$\begin{aligned}(gh)v &= (gh)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n)\\ &= \lambda_1 (gh)v_1 + \lambda_2 (gh)v_2 + \cdots + \lambda_n (gh)v_n\\ &= \lambda_1 g(hv_1) + \lambda_2 g(hv_2) + \cdots + \lambda_n g(hv_n)\end{aligned}$$

$$= g(\lambda_1(hv_1) + \lambda_2(hv_2) + \cdots + \lambda_n(hv_n))$$

$$= g(h\lambda_1 v_1 + h\lambda_2 v_2 + \cdots + h\lambda_n v_n)$$

$$= g(h(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n))$$

$$= g(hv).$$

(iii) Ambil $v \in V$. Akan ditunjukkan $1v = v$.

Karena untuk setiap $v \in V$ berlaku $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_n v_n$, maka:

$$1v = 1(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_n v_n)$$

$$= \lambda_1 1 v_1 + \lambda_2 1 v_2 + \cdots \lambda_n 1 v_n$$

$$= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_n v_n = v.$$

(iv) Ambil $g, h \in G$ dan $v \in V$. Akan ditunjukkan $g(\lambda v) = \lambda(gv)$.

Karena untuk setiap $v \in V$ berlaku $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_n v_n$,

maka:

$$g(\lambda v) = g(\lambda(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_n v_n))$$

$$= g(\lambda\lambda_1 v_1 + \lambda\lambda_2 v_2 + \cdots \lambda\lambda_n v_n)$$

$$= \lambda\lambda_1 g v_1 + \lambda\lambda_2 g v_2 + \cdots \lambda\lambda_n g v_n$$

$$= \lambda(\lambda_1 g v_1 + \lambda_2 g v_2 + \cdots \lambda_n g v_n)$$

$$= \lambda(g(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_n v_n))$$

$$= \lambda(gv).$$

(v) Ambil $g \in G$ dan $u, v \in V$. Akan ditunjukkan $g(u + v) = gu + gv$.

Karena untuk setiap $u, v \in V$ berlaku $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n$ dan

$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_n v_n$,

maka:

$$g(u + v) = g((\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n) + (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_n v_n))$$

$$= g\big((\alpha_1 + \lambda_1)v_1 + (\alpha_2 + \lambda_2)v_2 + \cdots + (\alpha_n + \lambda_n)v_n\big)$$

$$= (\alpha_1 + \lambda_1)gv_1 + (\alpha_2 + \lambda_2)gv_2 + \cdots + (\alpha_n + \lambda_n)gv_n$$

$$= (\alpha_1 gv_1 + \alpha_2 gv_2 + \cdots \alpha_n gv_n) + (\lambda_1 gv_1 + \lambda_2 gv_2 + \cdots \lambda_n gv_n)$$

$$= gu + gv.$$

Dengan demikian semua persyaratan untuk menjadi $\mathbb{C}G$ modul telah terpenuhi.

Teorema berikut menunjukkan bahwa setiap dua representasi merupakan representasi yang ekivalen satu sama lain, dan juga setiap dua representasi ekivelan berasal dari $\mathbb{C}G$ modul yang sama.

Teorema 3.2.5 [5]

Misalkan V adalah suatu $\mathbb{C}G$ modul dengan basis $\mathfrak{B}$, dan misalkan ρ adalah representasi dari G yang didefinisikan sebagai $\rho(g) = [g]_{\mathfrak{B}}$ untuk setiap $g \in G$, maka:

(i) jika $\mathfrak{B}'$ adalah sebuah basis V, maka representasi φ dari G yang didefinisikan sebagai $\varphi(g) = [g]_{\mathfrak{B}'}$ untuk setiap $g \in G$ merupakan representasi yang ekivalen dengan ρ.

(ii) Jika σ adalah suatu representasi dari G yang ekivalen dengan ρ, terdapat basis $\mathfrak{B}''$ dari V sedemikian sehingga $\sigma(g) = [g]_{\mathfrak{B}''}$ untuk setiap $g \in G$.

Bukti:

(i) Misalkan T adalah matriks perubahan basis dari $\mathfrak{B}$ ke $\mathfrak{B}'$, maka berdasarkan teorema (2.4.7) untuk setiap $g \in G$ diperoleh

$$\varphi(g) = [g]_{\mathfrak{B}'} = T^{-1}[g]_{\mathfrak{B}}T = T^{-1}\rho(g)T,$$

sehingga φ ekivalen dengan ρ.

(ii) Jika σ ekivalen dengan ρ, akibatnya terdapat suatu matriks yang dapat diinverskan T sedemikian sehingga untuk setiap $g \in G$ berlaku

$$\sigma(g) = T^{-1}\rho(g)T.$$

Misalkan $\mathfrak{B}''$ adalah basis V sedemikian sehingga matriks perubahan basis dari $\mathfrak{B}$ ke $\mathfrak{B}''$ adalah T, maka untuk setiap $g \in G$ diperoleh

$$\sigma(\bar{g}) = T^{-1}\bar{\rho}(\bar{g})T = T^{-1}[\bar{g}]_{\mathfrak{B}}T = [\bar{g}]_{\mathfrak{B}''}.$$

Jadi $\sigma(g) = [g]_{\mathfrak{B}''}$.

BAB IV

KESIMPULAN

Dalam penelitian ini dapat disimpulkan:

1. Misalkan ρ adalah suatu fungsi dari G ke $GL_n(\mathbb{C})$, maka ρ adalah suatu representasi jika dan hanya jika

$$\rho(g)\rho(h) = \rho(gh) \text{untuk setiap } g, h \in G.$$

2. Suatu ruang vektor berdimensi hingga V atas $\mathbb{C}$ adalah suatu $\mathbb{C}G$ modul jika perkalian gv (untuk setiap $g \in G$ dan $v \in V$) terdefinisi dan memenuhi kondisi berikut :

   untuk setiap $u, v \in V, \lambda \in \mathbb{C}$, dan $g, h \in G$,

   (i) $gv \in V$,

   (ii) $(gh)v = g(hv)$,

   (iii) $1v = v$,

   (iv) $g(\lambda v) = \lambda(gv)$,

   (v) $g(u + v) = gu + gv$.

3. Misalkan V adalah suatu $\mathbb{C}G$ modul dengan basis $\mathfrak{B}$, dan misalkan ρ adalah representasi dari G yang didefinisikan sebagai $\rho(g) = [g]_{\mathfrak{B}}$ untuk setiap $g \in G$. Maka berlaku :

   (i) Jika $\mathfrak{B}'$ adalah sebuah basis V, maka representasi φ dari G yang didefinisikan sebagai $\varphi(g) = [g]_{\mathfrak{B}'}$ untuk setiap $g \in G$ merupakan representasi yang ekivalen dengan ρ,

   (ii) Jika σ adalah suatu representasi dari G yang ekivalen dengan ρ, terdapat basis $\mathfrak{B}''$ dari V sedemikian sehingga $\sigma(g) = [g]_{\mathfrak{B}''}$ untuk setiap $g \in G$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Howard. 1991. *Aljabar Linier Elementer.* Terjemahan, Penerbit Erlangga, Jakarta

[2] Arifin, Achmad. 2000. *Aljabar.* Penerbit ITB, Bandung

[3] Budhi, Wono Setya dan Irawati. 2005. *Aljabar II.* Penerbit Universitas Terbuka, Jakarta

[4] Jacob, Bill. 1990. *Linier Algebra.* W.H. Freeman and Company, New York

[5] James, Gordon, Martin Liebeck. 2001. *Representasi and Characters of Grup.* Cambridge University Press.