MENENTUKAN NILAI EIGEN MATRIKS SIMETRI DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA LANCZOS DAN ALGORITMA QR

SKRIPSI

RESTI MEIRITA
07134013

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2011

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum wr. wb

Puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT, dimana berkat rahmat dan hidayah-Nya pada akhirnya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul **"Menentukan Nilai Eigen Matriks Simetri dengan Menggunakan Algoritma Lanczos dan Algoritma QR"**. Skripsi ini diajukan untuk menyelesaikan program pendidikan strata satu pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas, Padang.

Shalawat dan salam penulis kirimkan untuk Rasulullah SAW yang telah membawa risalah kebenaran sebagai pedoman demi keselamatan hidup di dunia dan di akhirat.

Penyelesaian skripsi ini tidak akan mungkin terwujud tanpa bantuan, bimbingan do'a dan motivasi dari berbagai pihak kepada penulis. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terimakasih dan penghargaan kepada:

1. Kedua orang tua penulis, Papa Asril dan Ibunda Abniyenti serta kakak dan adik tersayang, yang selalu mendoakan dan senantiasa memberikan dukungan kepada penulis.
2. Ibu Nova Noliza bakar, M. Si selaku dosen pembimbing yang telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, pengarahan dan perbaikan-perbaikan dalam proses penyusunan skripsi ini.

3. Ibu Hazmira Yozza, M.Si dan Dr. Susila Bahri selaku dosen penguji yang telah memberikan masukan dan kritikan yang membangun dalam penulisan skripsi ini.
4. Bapak Prof. Dr. I. Made Arnawa selaku dosen Pembimbing Akademik.
5. Bapak/Ibu dosen beserta karyawan di jurusan matematika Universitas Andalas.
6. Sahabat-sahabat, teman-teman Mc zoven serta semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang ikut membantu baik secara langsung maupun tidak langsung hingga terselesaikannya skripsi ini.

Akhir kata, semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis dan para pembaca. Amien ya Rabbal 'Alamien.

Padang, Agustus 2011

Penulis

ABSTRAK

Perhitungan nilai eigen dari suatu matriks yang sangat besar dapat disederhanakan dengan mereduksi matriks tersebut menjadi matriks yang berukuran lebih kecil, sehingga lebih memudahkan perhitungan. Pada skripsi ini dibahas suatu metode untuk menentukan nilai eigen dari suatu matriks simetri yang berukuran besar dengan menggunakan algoritma Lanczos. Untuk menentukan nilai eigen tersebut, terlebih dahulu matriks direduksi menjadi matriks tridiagonal. Dari matriks tridiagonal ini, nilai eigen dicari dengan menggunakan algoritma QR. Adapun nilai eigen dari matriks tridiagonal ini tetap mempertahankan nilai eigen ekstrim dari matriks simetri.

Kata kunci : *nilai eigen, matriks simetri, algoritma Lanczos, matriks tridiagonal, algoritma QR*

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Misalkan A adalah suatu matriks $n \times n$. Skalar λ disebut sebagai suatu nilai eigen atau nilai karakteristik (*characteristic value*) dari A jika terdapat suatu vektor taknol $\mathbf{x}$, sehingga $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Vektor $\mathbf{x}$ disebut vektor eigen atau vektor karakteristik dari λ. [5]

Nilai eigen memberikan cara mudah untuk mendapatkan solusi dari sistem persamaan linier dengan n persamaan dan m variabel yang tidak diketahui. Jika hanya dibutuhkan sebagian atau beberapa nilai eigen saja, maka perhitungan nilai eigen dari suatu matriks yang sangat besar dapat disederhanakan dengan mereduksi matriks tersebut menjadi matriks yang berukuran lebih kecil, sehingga akan lebih memudahkan perhitungan.

Algoritma Lanczos merupakan suatu algoritma yang dapat mereduksi suatu matriks simetri A yang berukuran besar menjadi matriks simetri tridiagonal T yang berukuran lebih kecil. Nilai eigen dari matriks T dapat dihitung dengan mudah karena T merupakan matriks tridiagonal (suatu bentuk matriks khusus).

Algoritma Lanczos ini paling cocok untuk matriks *sparse* (matriks yang sebagian entri-entrinya nol) yang berukuran besar, serta untuk mengaproksimasi nilai-nilai eigen terbesar dan terkecil dari sebuah matriks. Nilai eigen ini disebut nilai eigen ekstrim. [3]

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka persoalan yang akan dibahas pada tugas akhir ini adalah bagaimana menentukan nilai eigen dari suatu matriks simetri dengan menggunakan algoritma Lanczos. Sebagai perbandingan dari algoritma Lanczos, maka digunakan SWP (*Scientific Workplace*) untuk mencari nilai eigen tersebut.

1.3 Pembatasan Masalah

Pada penulisan ini, masalah dibatasi hanya untuk matriks simetri berukuran 4×4 dan 5×5 dengan entri-entrinya bilangan riil.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah untuk menentukan nilai eigen dari suatu matriks simetri dengan menggunakan algoritma Lanczos.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dari tulisan ini adalah :

BAB I : Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang masalah, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan.

BAB II : Landasan Teori

Bab ini berisikan teori-teori yang mendukung pembahasan, yaitu : matriks, vektor dan ruang vektor, basis, matriks ortogonal, proses Gram-Schmidt, serta algoritma QR.

BAB III : Pembahasan

Bab ini berisikan hal-hal tentang algoritma Lanczos dan langkah-langkah menentukan nilai eigen dengan algoritma Lanczos tersebut.

BAB IV : Kesimpulan

Bab ini berisikan kesimpulan dari pembahasan pada bab sebelumnya.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab II ini dijelaskan beberapa teori yang digunakan dalam menentukan nilai eigen matriks simetri dengan menggunakan algoritma Lanczos, yaitu : matriks, vektor dan ruang vektor, basis, matriks ortogonal, proses Gram-Schmidt, serta algoritma QR.

2.1 Matriks

Definisi 2.1.1 [1]

Sebuah matriks adalah susunan empat persegi siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri-entri dalam matriks.

Ukuran matriks dinyatakan dengan banyaknya baris dan banyaknya kolom yang terdapat dalam matriks tersebut. Jika banyak baris dan banyak kolom sama, maka matriks tersebut dikatakan matriks bujursangkar.

Jika A sebuah matriks berukuran $m \times n$ sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

maka a_{ij} disebut entri-entri dari matriks A dan merupakan entri yang terletak pada baris ke-i dan kolom ke-j.

Definisi 2.1.2 [1]

Suatu matriks bujursangkar berukuran $n \times n$ dengan bilangan 1 pada diagonal utamanya dan 0 pada entri-entri lainnya, dinyatakan dengan I_n disebut matriks identitas.

Definisi 2.1.3 [1]

Suatu matriks A berukuran $n \times n$ disebut matriks diagonal jika $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.

Definisi 2.1.4 [1]

Matriks bujursangkar yang semua entri di atas diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga bawah (*lower triangular*) dan matriks bujursangkar yang semua entri di bawah diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga atas (*upper triangular*). Suatu matriks, baik segitiga bawah atau segitiga atas disebut matriks segitiga (*triangular*).

Definisi 2.1.5 [1]

Jika A adalah matriks $m \times n$, maka transpos dari A dinyatakan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A, sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A, dan seterusnya.

Definisi 2.1.6 [1]

Jika A adalah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut dapat dibalik dan B disebut sebagai invers dari A. Jika matriks B tidak dapat didefinisikan, maka A dinyatakan sebagai matriks singular.

Invers dari A dinyatakan dengan simbol A^{-1}.

Definisi 2.1.7 [1]

Suatu matriks A berukuran $n \times n$ disebut simetri (*symmetric*) jika $A^T = A$, dengan A^T adalah transpos dari matriks A.

Definisi 2.1.8 [5]

Misalkan A dan B adalah matriks-matriks $n \times n$. B dikatakan serupa (*similar*) dengan A jika terdapat matriks taksingular S sehingga $B = S^{-1}AS$.

Definisi 2.1.9 [7]

Suatu matriks tridiagonal yang berukuran $n \times n$, dinotasikan sebagai T, adalah matriks dengan entri-entri $t_{ij} = 0$ jika $|i - j| > 1$. Matriks T dapat ditulis sebagai berikut :

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t_{32} & t_{33} & t_{34} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{43} & t_{44} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t_{(n-1)(n-1)} & t_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t_{n(n-1)} & t_{nn} \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.1.10 [7]

Entri-entri tepat di bawah diagonal utama dari matriks tridiagonal disebut subdiagonal dan entri-entri tepat di atas diagonal utama dari matriks tridiagonal disebut superdiagonal.

2.2 Vektor dan Ruang Vektor

Definisi 2.2.1 [1]

Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, maka tupel n berurutan (*ordered n-tupel*) adalah suatu urutan dari bilangan riil $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Himpunan semua tupel n berurutan disebut ruang berdimensi n (*n-space*) dan dinyatakan sebagai R^n.

Definisi 2.2.2 [1]

Untuk suatu matriks $m \times n$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

vektor-vektor

$$\mathbf{r}_1 = [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}],$$

$$\mathbf{r}_2 = [a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}],$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{r}_m = [a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}],$$

pada R^n yang dibentuk dari baris-baris A disebut sebagai vektor baris (*row vector*) dari A, dan vektor-vektor

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots \quad \mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

pada R^m yang dibentuk dari kolom-kolom A disebut sebagai vektor kolom (*column vector*) dari A.

Definisi 2.2.3 [1]

Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ adalah vektor-vektor sebarang pada R^n, maka hasil kali dalam Euclidean $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ didefinisikan sebagai :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n.$$

Definisi 2.2.4 [1]

Norma Euclidean (panjang Euclidean) dari suatu vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ pada R^n didefinisikan sebagai :

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}.$$

Teorema 2.2.5 [1]

Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor pada R^n dan k adalah suatu skalar sebarang, maka

(a) $\|\mathbf{u}\| \geq 0$.

(b) $\|\mathbf{u}\| = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(c) $\|k\mathbf{u}\| = |k|\|\mathbf{u}\|$.

(d) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Definisi 2.2.6 [1]

Misalkan V adalah suatu himpunan takkosong dari objek-objek sebarang, dimana dua operasinya didefinisikan, yaitu penjumlahan dan perkalian dengan skalar (bilangan). Operasi penjumlahan dapat diartikan sebagai suatu aturan yang mengasosiasikan setiap pasang objek **u** dan **v** pada V dengan suatu objek **u** + **v**, yang disebut jumlah dari **u** dan **v**. Operasi perkalian skalar dapat diartikan sebagai suatu aturan yang mengasosiasikan setiap skalar k dan setiap objek **u** pada V dengan suatu objek k**u**, yang disebut kelipatan skalar dari **u** oleh *k*. Jika aksioma-aksioma berikut dipenuhi oleh semua objek **u**, **v**, **w** pada V dan semua skalar *k* dan *l*, maka V disebut sebagai ruang vektor dan objek-objek pada V disebut sebagai vektor.

1) Jika **u** dan **v** adalah objek-objek pada V, maka **u** + **v** berada pada V.
2) **u** + **v** = **v** + **u**.
3) **u** + (**v** + **w**) = (**u** + **v**) + **w**.
4) Di dalam V terdapat suatu objek **0**, yang disebut vektor nol untuk V, sedemikian rupa sehingga **0** + **u** = **u** + **0** = **u** untuk semua **u** pada V.
5) Untuk setiap **u** pada V, terdapat suatu objek -**u** pada V, yang disebut sebagai negatif dari **u**, sedemikian rupa sehingga **u** + (-**u**) = (-**u**) + **u** = **0**.
6) Jika *k* adalah skalar sebarang dan **u** adalah objek sebarang pada V, maka *k***u** terdapat pada V.
7) *k*(**u** + **v**) = *k***u** + *k***v**.
8) (*k* + *l*)**u** = *k***u** + *l***u**.
9) *k*(*l***u**) = (*kl*)**u**.
10) 1**u** = **u**.

2.3 Basis

Definisi 2.3.1 [1]

Suatu subhimpunan W dari suatu ruang vektor V disebut subruang (*subspace*) dari V jika W itu sendiri merupakan suatu ruang vektor di bawah penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada V.

Definisi 2.3.2 [1]

Suatu vektor $\mathbf{w}$ disebut suatu kombinasi linear (*linear combination*) dari vektor-vektor S = $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ jika dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\mathbf{v}_n$$

dimana $k_1, k_2, \dots, k_n$ adalah skalar.

Definisi 2.3.3 [1]

Jika S = $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ adalah himpunan tak kosong vektor-vektor, maka persamaan vektor

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

memiliki paling tidak satu solusi, yaitu

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_n = 0.$$

Jika ini satu-satunya solusi, maka S disebut sebagai himpunan bebas linear (*linearly independent*). Jika terdapat solusi-solusi lain, maka S disebut sebagai himpunan tidak bebas linear (*linearly dependent*).

Definisi 2.3.4 [1]

Jika S = $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor pada suatu ruang vektor V, maka subruang W dari V yang terdiri dari semua kombinasi linear vektor-vektor pada S disebut sebagai ruang yang direntang (*space spanned*) oleh $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ dan vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ merentang (*span*) W. Untuk menyatakan bahwa W adalah ruang yang direntang oleh vektor-vektor pada himpunan S = $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, dapat dituliskan

$$\text{W} = \text{span } (S) \text{ atau W} = \text{span } \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}.$$

Definisi 2.3.5 [1]

Jika V adalah suatu ruang vektor sebarang dan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor pada V, maka S disebut basis untuk V jika dua syarat berikut berlaku :

a) S bebas linear.

b) S merentang V.

2.4 Matriks Ortogonal

Definisi 2.4.1 [1]

Hasil kali dalam pada sebuah ruang vektor riil V adalah sebuah fungsi yang mengasosiasikan sebuah bilang riil $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ dengan sepasang vektor **u** dan **v** di dalam V sedemikian rupa sehingga aksioma-aksioma berikut ini terpenuhi bagi semua vektor **u**, **v**, dan **w** di dalam V dan semua bilangan skalar k.

1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

2) $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

3) $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

4) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ dan $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Sebuah ruang vektor riil yang memiliki sebuah hasil kali dalam disebut ruang vektor hasil kali dalam riil.

Definisi 2.4.2 [1]

Dua vektor **u** dan **v** di dalam sebuah ruang hasil kali dalam dikatakan ortogonal jika $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Jika digunakan notasi matriks kolom untuk vektor-vektor

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

dan menghilangkan tanda kurung pada matriks 1×1, maka selanjutnya

$$\mathbf{u}^T\mathbf{v} = [u_1, u_2, \dots, u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = [u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n] = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

sehingga $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ juga ortogonal jika $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = 0$.

Definisi 2.4.3 [1]

Suatu himpunan vektor-vektor di dalam sebuah ruang hasil kali dalam disebut sebagai himpunan ortogonal, jika setiap pasangan vektor yang berbeda di dalam himpunan tersebut adalah ortogonal. Sebuah himpunan ortogonal yang vektor-vektornya memiliki norma 1 disebut ortonormal.

Di dalam sebuah ruang hasil kali dalam, sebuah basis yang terdiri dari vektor-vektor ortonormal disebut sebagai basis ortonormal, dan sebuah basis yang terdiri dari vektor-vektor ortogonal disebut sebagai basis ortogonal.

Definisi 2.4.4 [5]

Sebuah himpunan ortonormal dari vektor-vektor adalah sebuah himpunan ortogonal dari vektor-vektor satuan.

Himpunan $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ akan menjadi ortonormal jika dan hanya jika

$$\mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_j = \delta_{ij}$$

dimana

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } i = j. \\ 0, & \text{jika } i \neq j. \end{cases}$$

Definisi 2.4.5 [5]

Sebuah matriks Q berukuran $n \times m$ dikatakan sebagai matriks ortogonal jika vektor-vektor kolom dari Q membentuk sebuah himpunan ortonormal di dalam R^n.

Teorema 2.4.6 [5]

Sebuah matriks Q yang berukuran $n \times m$ adalah ortogonal jika dan hanya jika $Q^T Q = I$.

Bukti :

Lihat [5] halaman 224.

2.5 Proses Gram-Schmidt

Proses Gram-Schmidt merupakan sebuah proses untuk mengkonversikan suatu basis sebarang menjadi sebuah basis ortonormal. Misalkan V adalah suatu ruang hasil kali dalam taknol berdimensi terhingga dan misalkan $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ adalah basis sebarang untuk V. Urutan langkah berikut ini akan menghasilkan sebuah basis ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ untuk V.

Langkah 1 : Misalkan $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$.

Langkah 2 : Vektor $\mathbf{v}_2$ yang ortogonal terhadap $\mathbf{v}_1$ dapat diperoleh dengan menghitung komponen $\mathbf{u}_2$ yang ortogonal terhadap ruang W_1 yang di rentang oleh $\mathbf{v}_1$, sehingga diperoleh :

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \text{proj}_{W1}\, \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\, \mathbf{v}_1.$$

Langkah 3 : Vektor $\mathbf{v}_3$ yang ortogonal terhadap $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$ dapat diperoleh dengan menghitung komponen $\mathbf{u}_3$ yang ortogonal terhadap ruang W_2 yang di rentang oleh $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$, sehingga diperoleh :

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \text{proj}_{W2}\, \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2.$$

$\vdots$

Langkah ke-n : Vektor $\mathbf{v}_n$ yang ortogonal terhadap $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_{n-1}$ dapat diperoleh dengan menghitung komponen $\mathbf{u}_n$ yang ortogonal terhadap ruang W_{n-1} yang di rentang oleh $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_{n-1}$, sehingga diperoleh :

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{u}_n - \text{proj}_{Wn-1}\, \mathbf{u}_n = \mathbf{u}_n - \frac{\langle \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2 - \ldots - \frac{\langle \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_{n-1} \rangle}{\|\mathbf{v}_{n-1}\|^2} \mathbf{v}_{n-1}.$$

Setelah langkah ke-n, akan diperoleh himpunan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ yang merupakan sebuah basis ortogonal bagi V. Untuk memperoleh sebuah basis ortonormal $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n\}$, normalisasikan setiap vektor basis ortogonal tersebut dengan cara mengalikan vektor $\mathbf{v}_k$ dengan nilai kebalikan dari panjang vektor $\mathbf{v}_k$ yaitu

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{v}_k / \|\mathbf{v}_k\| \quad \text{untuk setiap } k = 1, 2, \ldots, n.$$

2.6 Algoritma QR

Misal diberikan sebuah matriks $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2 \ldots \boldsymbol{a}_n)$ berukuran $n \times n$, yang memiliki vektor-vektor kolom yang bebas linier. Matriks A tersebut dapat difaktorkan sebagai

$$A = QR$$

dengan $Q = (\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_2 \dots q_n)$ adalah sebuah matriks yang memiliki vektor-vektor kolom ortonormal yang dihasilkan dari proses Gram-Schmidt pada vektor-vektor kolom A dan R adalah matriks segitiga atas dengan bentuk :

$$R = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{a}_1, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{a}_2, \mathbf{q}_1 \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{a}_n, \mathbf{q}_1 \rangle \\ 0 & \langle \boldsymbol{a}_2, \mathbf{q}_2 \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{a}_n, \mathbf{q}_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \langle \boldsymbol{a}_n, \mathbf{q}_n \rangle \end{bmatrix}.$$

Algoritma QR adalah sebagai berikut :

1. Tulis $A_1 = A = (\boldsymbol{a}_{11}\ \boldsymbol{a}_{12} \dots \boldsymbol{a}_{1n})$. Dengan menggunakan proses Gram-Schmidt, diperoleh matriks $Q_1 = (\mathbf{q}_{11}\ \mathbf{q}_{12} \dots \mathbf{q}_{1n})$.

   Bentuk matriks R_1 sebagai berikut :

$$R_1 = \begin{bmatrix} \langle a_{11}, \mathbf{q}_{11} \rangle & \langle a_{12}, \mathbf{q}_{11} \rangle & \dots & \langle a_{1n}, \mathbf{q}_{11} \rangle \\ 0 & \langle a_{12}, q_{12} \rangle & \dots & \langle a_{1n}, \mathbf{q}_{12} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \langle a_{1n}, \mathbf{q}_{1n} \rangle \end{bmatrix}$$

   maka diperoleh $A_1 = Q_1 R_1$.

2. Tulis $A_2 = R_1 Q_1 = (\boldsymbol{a}_{21}\ \boldsymbol{a}_{22} \dots \boldsymbol{a}_{2n})$. Dengan menggunakan proses Gram-Schmidt, diperoleh matriks $Q_2 = (\mathbf{q}_{21}\ \mathbf{q}_{22} \dots \mathbf{q}_{2n})$.

   Bentuk matriks R_2 sebagai berikut :

$$R_2 = \begin{bmatrix} \langle a_{21}, \mathbf{q}_{21} \rangle & \langle a_{22}, \mathbf{q}_{21} \rangle & \dots & \langle a_{2n}, \mathbf{q}_{21} \rangle \\ 0 & \langle a_{22}, \mathbf{q}_{22} \rangle & \dots & \langle a_{2n}, \mathbf{q}_{22} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \langle a_{2n}, \mathbf{q}_{2n} \rangle \end{bmatrix}$$

   maka diperoleh $A_2 = Q_2 R_2$.

3. Tulis $A_3 = R_2 Q_2 = (\boldsymbol{a}_{31}\ \boldsymbol{a}_{32} \dots \boldsymbol{a}_{1n})$. Dengan menggunakan proses Gram-Schmidt, diperoleh matriks $Q_3 = (\mathbf{q}_{31}\ \mathbf{q}_{32} \dots \mathbf{q}_{3n})$.

   Bentuk matriks R_3 sebagai berikut :

$$R_3 = \begin{bmatrix} \langle a_{31}, q_{31} \rangle & \langle a_{32}, q_{31} \rangle & \dots & \langle a_{3n}, q_{31} \rangle \\ 0 & \langle a_{32}, q_{32} \rangle & \dots & \langle a_{3n}, q_{32} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \langle a_{3n}, q_{3n} \rangle \end{bmatrix}$$

maka diperoleh $A_3 = Q_3R_3$.

4. Proses dilanjutkan sampai diperoleh matriks A_k yang konvergen ke matriks segitiga atas X dengan entri diagonal dari X merupakan nilai eigen dari matriks A. Pada kasus dimana A adalah matriks simetri, maka A_k akan konvergen ke suatu matriks diagonal. Setelah beberapa iterasi, misal k^*, maka entri-entri di luar diagonal dari matriks A_{k^*} sangat kecil, dan entri-entri pada diagonal tersebut merupakan nilai eigen dari matriks A. [6]

Perhatikan bahwa, karena Q_i matriks ortogonal untuk setiap i sehingga $Q_i^T Q_i = I$, maka diperoleh :

(a) Karena $A_1 = Q_1R_1$ sehingga $R_1 = Q_1^T A_1$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} A_2 &= R_1Q_1 \\ &= Q_1^T A_1 Q_1 \\ &= Q_1^T A Q_1. \end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 2.1.8, maka matriks A_2 *similar* dengan matriks A.

(b) Karena $A_2 = Q_2R_2$ sehingga $R_2 = Q_2^T A_2$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} A_3 &= R_2Q_2 \\ &= Q_2^T A_2 Q_2 \\ &= Q_2^T (Q_1^T A Q_1) Q_2 \end{aligned}$$

$$= (Q_2{}^T Q_1{}^T) A (Q_1 Q_2)$$

$$= (Q_1 Q_2)^T A (Q_1 Q_2).$$

Berdasarkan Definisi 2.1.8, maka matriks A_3 *similar* dengan matriks A.

(c) Karena $A_3 = Q_3 R_3$ sehingga $R_3 = Q_3{}^T A_3$, maka diperoleh

$$A_4 = R_3 Q_3$$

$$= Q_3{}^T A_3 Q_3$$

$$= Q_3{}^T \big((Q_1 Q_2)^T A (Q_1 Q_2)\big) Q_3$$

$$= \big(Q_3{}^T (Q_1 Q_2)^T\big) A \big((Q_1 Q_2) Q_3\big)$$

$$= (Q_1 Q_2 Q_3)^T A (Q_1 Q_2 Q_3).$$

Berdasarkan Definisi 2.1.8, maka matriks A_4 *similar* dengan matriks A.

Dengan cara yang serupa, dapat disimpulkan bahwa matriks A_k ***similar*** dengan matriks A untuk setiap $k = 1, 2, ..., n$.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Algoritma Lanczos

Algoritma Lanczos merupakan suatu algoritma yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai eigen dari matriks simetri yang berukuran besar dengan terlebih dahulu mereduksi matriks yang akan ditentukan nilai eigennya ke bentuk matriks simetri tridiagonal. Algoritma Lanczos diperkenalkan oleh Cornelius Lanczos pada tahun 1950an.

Misalkan A sebuah matriks simetri berukuran $n \times n$, yaitu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

dengan $a_{ij} = a_{ji}$ untuk setiap $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks A, terlebih dahulu matriks A direduksi menjadi matriks simetri tridiagonal T berukuran $m \times m$, yaitu

$$T = Q^T A Q \quad \text{...(3.2.1)}$$

dengan $Q = (\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_2 \dots \mathbf{q}_m)$ matriks ortogonal dan $m < n$.

Dari (3.2.1) diperoleh

$$QT = QQ^T AQ.$$

Karena Q adalah ortogonal maka berdasarkan Teorema 2.4.6, $QQ^T = I$, sehingga

$$QT = IAQ$$

$$= AQ \quad \text{...(3.2.2)}$$

Misalkan λ dan $\mathbf{y}$ merupakan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks T, sehingga $T\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$, maka $QT\mathbf{y} = \lambda Q\mathbf{y}$. Dari (3.2.2), diperoleh $A(Q\mathbf{y}) = \lambda(Q\mathbf{y})$ yang menunjukkan bahwa λ dan $Q\mathbf{y}$ merupakan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A. Dengan demikian, nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A berukuran $n \times n$ dapat dicari dengan menggunakan matriks T yang berukuran $m \times m$ dimana $m < n$.

Perkalian dari AQ adalah

$$AQ = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nm} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}q_{11} + \ldots + a_{1n}q_{n1} & a_{11}q_{12} + \ldots + a_{1n}q_{n2} & \cdots & a_{11}q_{1m} + \ldots + a_{1n}q_{nm} \\ a_{21}q_{11} + \ldots + a_{2n}q_{n1} & a_{21}q_{12} + \ldots + a_{2n}q_{n2} & \cdots & a_{21}q_{1m} + \ldots + a_{2n}q_{nm} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}q_{11} + \ldots + a_{nn}q_{n1} & a_{n1}q_{12} + \ldots + a_{nn}q_{n2} & \ldots & a_{n1}q_{1m} + \ldots + a_{nn}q_{nm} \end{bmatrix}$$

sehingga kolom ke-j dari AQ sama dengan matriks A dikali kolom ke-j dari matriks Q, yaitu $A\mathbf{q}_j$.

Misalkan T suatu matriks simetri tridiagonal berukuran $m \times m$, dimana d menyatakan diagonal dari T, u menyatakan superdiagonal dan subdiagonal dari T, yaitu

$$T = \begin{bmatrix} d_1 & u_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ u_1 & d_2 & u_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & d_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} & u_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n-1} & d_n \end{bmatrix}$$

maka perkalian dari QT adalah

$$QT = \begin{bmatrix} q_{11}d_1 + q_{12}u_1 & q_{11}u_1 + q_{12}d_2 + q_{13}u_2 & \cdots & q_{1(m-1)}u_{m-1} + q_{1m}d_m \\ q_{21}d_1 + q_{22}u_1 & q_{21}u_1 + q_{22}d_2 + q_{23}u_2 & \cdots & q_{2(m-1)}u_{m-1} + q_{2m}d_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1}d_1 + q_{n2}u_1 & q_{n1}u_1 + q_{n2}d_2 + q_{n3}u_2 & \cdots & q_{n(m-1)}u_{m-1} + q_{mn}d_m \end{bmatrix}.$$

Untuk $2 \le j \le m$-1, kolom ke-j dari matriks QT adalah

$$\begin{bmatrix} q_{1(j-1)}u_{(j-1)} + q_{1j}d_j + q_{1(j+1)}u_j \\ q_{2(j-1)}u_{(j-1)} + q_{2j}d_j + q_{2(j+1)}u_j \\ \vdots \\ q_{n(j-1)}u_{(j-1)} + q_{nj}d_j + q_{n(j+1)}u_j \end{bmatrix}.$$

atau dapat juga ditulis dalam bentuk

$$\mathbf{q}_{(j-1)}u_{(j-1)} + \mathbf{q}_j d_j + \mathbf{q}_{(j+1)}u_j \quad \text{.....................................(3.2.3)}$$

Jika didefinisikan $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$, maka (3.2.3) berlaku untuk $j = 1$; dan jika didefinisikan $\mathbf{q}_{m+1} = \mathbf{0}$, maka (3.2.3) berlaku untuk $j = m$.

Dari (3.2.2), diperoleh kolom ke-j dari AQ sama dengan kolom ke-j dari QT, sehingga untuk $j = 1, 2, \ldots, m$ berlaku

$$A\mathbf{q}_j = \mathbf{q}_{(j-1)}u_{(j-1)} + \mathbf{q}_j d_j + \mathbf{q}_{(j+1)}u_j.$$

Karena pada perkalian matriks dengan skalar berlaku sifat komutatif, maka persamaan dapat ditulis sebagai

$$A\mathbf{q}_j = u_{(j-1)}\mathbf{q}_{(j-1)} + d_j\mathbf{q}_j + u_j\mathbf{q}_{(j+1)} \quad \text{.................(3.2.4)}$$

Dari pembahasan sebelumnya, diketahui bahwa Q merupakan matriks ortogonal yang berarti vektor-vektor kolom dari Q membentuk sebuah himpunan ortonormal, sehingga berdasarkan Definisi 2.4.5 diperoleh

$$\mathbf{q}_j^T\mathbf{q}_{(j-1)} = \mathbf{q}_j^T\mathbf{q}_{(j+1)} = 0 \text{ dan } \mathbf{q}_j^T\mathbf{q}_j = 1 \quad \text{...................(3.2.5)}$$

Akibatnya, dari (3.2.4) dan (3.2.5) diperoleh

$$A\mathbf{q}_j = u_{(j-1)}\mathbf{q}_{(j-1)} + d_j\mathbf{q}_j + u_j\mathbf{q}_{(j+1)}$$

$$\mathbf{q}_j^T A\mathbf{q}_j = \mathbf{q}_j^T(u_{(j-1)}\mathbf{q}_{(j-1)} + d_j\mathbf{q}_j + u_j\mathbf{q}_{(j+1)})$$

$$= u_{(j-1)}\mathbf{q}_j^T\mathbf{q}_{(j-1)} + d_j\mathbf{q}_j^T\mathbf{q}_j + u_j\mathbf{q}_j^T\mathbf{q}_{(j+1)})$$

$$= u_{(j-1)}.0 + d_j.1 + u_j.0$$

$$= d_j \quad \text{...(3.2.6)}$$

Selanjutnya, definisikan vektor

$$\mathbf{r}_j = u_j\mathbf{q}_{(j+1)} \quad \text{..(3.2.7)}$$

atau

$\mathbf{q}_{j+1} = \frac{\mathbf{r}_j}{u_j}$, dimana $u_j \neq 0$ untuk setiap $j = 1, 2, \dots, m$ ....(3.2.8)

yang mengakibatkan persamaan (3.2.4) menjadi

$$A\mathbf{q}_j = u_{(j-1)}\mathbf{q}_{(j-1)} + d_j\mathbf{q}_j + u_j\frac{\mathbf{r}_j}{u_j}$$

$$= u_{(j-1)}\mathbf{q}_{(j-1)} + d_j\mathbf{q}_j + \mathbf{r}_j$$

atau

$$\mathbf{r}_j = A\mathbf{q}_j - d_j\mathbf{q}_j - u_{(j-1)}\mathbf{q}_{(j-1)} \quad \text{.................................(3.2.9)}$$

Misalkan $A\boldsymbol{q}_j - u_{j-1}\mathbf{q}_{(j-1)} = \boldsymbol{w}_j$, sehingga $\mathbf{r}_j = \boldsymbol{w}_j - d_j\mathbf{q}_j$.

Perhatikan bahwa

$$\mathbf{q}_j^T\boldsymbol{w}_j = \mathbf{q}_j^T(A\boldsymbol{q}_j - u_{j-1}\mathbf{q}_{(j-1)})$$

$$= \mathbf{q}_j^T A\boldsymbol{q}_j - u_{j-1}\mathbf{q}_j^T\mathbf{q}_{(j-1)}$$

$$= \mathbf{q}_j^T A\boldsymbol{q}_j$$

$$= d_j \quad \text{...(3.2.10)}$$

Dengan mengambil norma Euclidean (panjang Euclidean) pada kedua ruas persamaan (3.2.7) dan berdasarkan Teorema 2.2.5, diperoleh

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r}_j\| &= \|u_j\mathbf{q}_{j+1}\| \\ &= |u_j|\|\mathbf{q}_{j+1}\| \\ &= |u_j|.1 \\ &= |u_j|\end{aligned}$$

atau

$$u_j = \pm\|\mathbf{r}_j\|.$$

Misal $A = (a_{ij})$ adalah matriks simetri berukuran $n \times n$ ($a_{ij} = a_{ji}$ untuk setiap $i,j = 1,2,\dots,n$). Algoritma Lanczos untuk mendapatkan matriks tridiagonal $T = Q^T AQ$ berukuran $m \times m$ dengan $Q = (\mathbf{q}_1\ q_2 \dots \mathbf{q}_m)$ dan $m < n$ adalah sebagai berikut :

1. Definisikan vektor $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$, $u_0 = 1$ dan vektor $\mathbf{q}_1 \neq \mathbf{0}$ sebarang dengan $\|\mathbf{q}_1\| = 1$.
2. Untuk $j = 1,2,\dots,m$
   a) Hitung vektor $\boldsymbol{w}_j = A\boldsymbol{q}_j - \mathrm{u}_{j-1}\mathbf{q}_{j-1}$ dan skalar $d_j = \mathbf{q}_j{}^T\boldsymbol{w}_j$.
   b) Selanjutnya hitung vektor $\mathbf{r}_j = \boldsymbol{w}_j - \mathrm{d}_j\mathbf{q}_j$ dan skalar $u_j = \|\mathbf{r}_j\|$.
   c) Hitung $\mathbf{q}_{j+1} = \frac{\mathbf{r}_j}{u_j}$.
3. Dengan demikian dipeoleh $d_1, d_2, \dots, d_m$ dan $u_1, u_2, \dots, u_{m-1}$ serta $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m$ sehingga terbentuk matriks tridiagonal T dan matriks Q.

4. Jika diperoleh $u_{j^*} = 0$, maka algoritma Lanczos dihentikan sehingga diperoleh $d_1, d_2, \dots, d_{j^*}$ dan $u_1, u_2, \dots, u_{j^*-1}$ serta $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{j^*}$.

Selanjutnya, nilai eigen dari matriks T dicari dengan menggunakan algoritma QR, sehingga nilai eigen dari matriks T mendekati nilai eigen dari matriks A.

Menurut [2], dengan algoritma Lanczos dari matriks A berukuran $n \times n$ diperoleh matriks tridiagonal T berukuran $m \times m$ dengan $m < n$. Jika m yang dipilih terlalu kecil, maka nilai eigen dari T tidak akan mendekati nilai eigen dari matriks A. Untuk mengatasi hal ini, maka untuk suatu m tertentu, $\lambda_0(m)$ adalah nilai eigen dominan dari T, maka algoritma Lanczos diulang untuk berbagai nilai m sedemikian sehingga untuk suatu bilangan $\varepsilon > 0$ kecil, memenuhi

$$\left|\frac{\lambda_0(m) - \lambda_0(m-1)}{\lambda_0(m)}\right| < \varepsilon \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(3.2.11)$$

3.2 Contoh Penggunaan Algoritma Lanczos

Pada proses perhitungan dibatasi hanya sampai 5 desimal.

Contoh 1 :

Misal diberikan matriks A berukuran 4×4 seperti berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matriks A akan direduksi menjadi matriks tridiagonal T yang berukuran $m \times m$ dengan $m < 4$.

A. Untuk $m = 2$.

Algoritma Lanczos untuk mereduksi matriks A di atas menjadi matriks tridiagonal T berukuran 2×2 adalah sebagai berikut :

1. Definisikan vektor $\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_0 = 1$ dan vektor $\mathbf{q}_1 \neq \mathbf{0}$ sebarang dengan $\|\mathbf{q}_1\| = 1$.

   Pilih $\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. Untuk $j = 1$.

   a) Vektor $\boldsymbol{w}_1 = A\boldsymbol{q}_1 - u_0\mathbf{q}_0$

   $$= \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   b) Skalar $d_1 = \mathbf{q}_1{}^T \boldsymbol{w}_1$

   $$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 4$$

c) Vektor $\mathbf{r}_1 = \boldsymbol{w}_1 - d_1\mathbf{q}_1$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

sehinga

$$u_1 = \|\mathbf{r}_1\|$$

$$= \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2 + 2^2}$$

$$= 2{,}44949$$

d) Vektor $\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{r}_1}{u_1}$

$$= \frac{1}{2{,}44949}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}40825 \\ -0{,}40825 \\ 0{,}81650 \end{bmatrix}$$

3. Untuk $j = 2$.

a) Vektor $\boldsymbol{w}_2 = A\boldsymbol{q}_2 - u_1\mathbf{q}_1$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}40825 \\ -0{,}40825 \\ 0{,}81650 \end{bmatrix} - 2{,}44949\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}00001 \\ 0{,}40825 \\ -0{,}40825 \\ 0{,}81650 \end{bmatrix}$$

b) Skalar $d_2 = \mathbf{q}_2{}^T \boldsymbol{w}_2$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0{,}40825 & -0{,}40825 & 0{,}81650 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}00001 \\ 0{,}40825 \\ -0{,}40825 \\ 0{,}81650 \end{bmatrix}$$

$$= 2{,}33335$$

Karena sudah diperoleh matriks tridiagonal T berukuran 2×2, maka proses perhitungan dihentikan. Matriks tridiagonal T berukuran 2×2 yang terbentuk yaitu

$$T = \begin{bmatrix} d_1 & u_1 \\ u_1 & d_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2{,}44949 \\ 2{,}44949 & 2{,}33335 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya nilai eigen dari matriks T dicari dengan menggunakan algoritma QR. Berikut algoritma QR untuk mencari nilai eigen dari matriks T.

Iterasi-1

Misal $A_1 = T$.

Faktorkan $A_1 = Q_1 R_1$,

diperoleh

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0{,}8528 & -0{,}52223 \\ 0{,}52223 & 0{,}8528 \end{bmatrix},\ R_1 = \begin{bmatrix} 4{,}6904 & 3{,}3075 \\ 0 & 0{,}71068 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_2 = R_1 Q_1 = \begin{bmatrix} 5{,}7272 & 0{,}37117 \\ 0{,}37114 & 0{,}60607 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-2

Faktorkan $A_2 = Q_2R_2$,

diperoleh

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0{,}99791 & -0{,}06467 \\ 0{,}06467 & 0{,}99791 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} 5{,}7392 & 0{,}40959 \\ 0 & 0{,}5808 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_3 = R_2Q_2 = \begin{bmatrix} 5{,}7537 & 0{,}03758 \\ 0{,}03758 & 0{,}60603 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-3

Faktorkan $A_3 = Q_3R_3$,

diperoleh

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 0{,}99998 & -0{,}00653 \\ 0{,}00653 & 0{,}99998 \end{bmatrix}, R_3 = \begin{bmatrix} 5{,}7538 & 0{,}04138 \\ 0 & 0{,}57933 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_4 = R_3Q_3 = \begin{bmatrix} 5{,}754 & 0.00382 \\ 0.00378 & 0{,}57928 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-4

Faktorkan $A_4 = Q_4R_4$,

diperoleh

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 1{,}0 & -0.00066 \\ 0.00066 & 1{,}0 \end{bmatrix}, R_4 = \begin{bmatrix} 5{,}754 & 0.00420 \\ 0 & 0{,}57932 \end{bmatrix}$$

dan

$$A_5 = R_4Q_4 = \begin{bmatrix} 5{,}754 & 0.00042 \\ 0.00038 & 0{,}57928 \end{bmatrix}.$$

Pada matriks A_5, entri-entri di atas dan di bawah diagonal sangat kecil dan akan mendekati nol setelah setiap iterasi berikutnya. Sementara itu, entri-entri pada diagonalnya tidak berubah setelah setiap iterasi berikutnya, sehingga matriks A_5 konvergen ke matriks diagonal. Dengan demikian, nilai eigen dari matriks T adalah entri-entri dari diagonal A_5, yaitu 5,754 dan 0,57928.

B. Untuk $m = 3$.

Algoritma Lanczos untuk mereduksi matriks A menjadi matriks tridiagonal T berukuran 3 × 3 adalah sebagai berikut :

1. Untuk $m = 3$, algoritma dilanjutkan dengan menghitung

   a) Vektor $\mathbf{r}_2 = w_2 - d_2\mathbf{q}_2$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}00001 \\ 0{,}40825 \\ -0{,}40825 \\ 0{,}81650 \end{bmatrix} - 2{,}33335 \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}40825 \\ -0{,}40825 \\ 0{,}81650 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00001 \\ -0{,}54434 \\ 0{,}54434 \\ 0{,}54432 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$u_2 = \|\mathbf{r}_2\|$$

$$= \sqrt{0{,}00001^2 + (-0{,}54434)^2 + 0{,}54434^2 + 0{,}54432^2}$$

$$= 0{,}94281$$

b) Hitung $\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{r}_2}{u_2}$

$$= \frac{1}{0{,}94281}\begin{bmatrix} 0.00001 \\ -0{,}54434 \\ 0{,}54434 \\ 0{,}54432 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}00001 \\ -0{,}57736 \\ 0{,}57736 \\ 0{,}57734 \end{bmatrix}$$

2. Untuk $j = 3$.

a) Vektor $w_3 = Aq_3 - u_2\mathbf{q}_2$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}00001 \\ -0{,}57736 \\ 0{,}57736 \\ 0{,}57734 \end{bmatrix} - 0{,}94821\begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}40825 \\ -0{,}40825 \\ 0{,}81650 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -2{,}69431 \\ 2{,}69431 \\ 2{,}6943 \end{bmatrix}$$

b) Skalar $d_3 = \mathbf{q}_3{}^T w_3$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}00001 & -0{,}57736 & 0{,}57736 & 0{,}57734 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -2{,}69431 \\ 2{,}69431 \\ 2{,}6943 \end{bmatrix}$$

$= 4{,}6667$

Karena sudah diperoleh matriks tridiagonal T berukuran 3×3, maka proses perhitungan dihentikan. Matriks tridiagonal T berukuran 3×3 yang terbentuk yaitu

$$T = \begin{bmatrix} d_1 & u_1 & 0 \\ u_1 & d_2 & u_2 \\ 0 & u_2 & d_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2{,}44949 & 0 \\ 2{,}44949 & 2{,}33335 & 0{,}94281 \\ 0 & 0{,}94281 & 4{,}6667 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya nilai eigen dari matriks T dicari dengan menggunakan algoritma QR. Berikut algoritma QR untuk mencari nilai eigen dari matriks T.

Iterasi-1

Misal $A_1 = T$.

Faktorkan $A_1 = Q_1R_1$,

diperoleh

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0{,}8528 & -0{,}31435 & 0{,}41703 \\ 0{,}52223 & 0{,}51333 & -0{,}681 \\ 0 & 0{,}79854 & 0{,}60194 \end{bmatrix}, \ R_1 = \begin{bmatrix} 4{,}6904 & 3{,}3075 & 0{,}49237 \\ 0 & 1{,}1807 & 4{,}2105 \\ 0 & 0 & 2{,}167 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_2 = R_1Q_1 = \begin{bmatrix} 5{,}7272 & 0{,}61659 & 0 \\ 0{,}6166 & 3{,}9683 & 1{,}7304 \\ 0 & 1{,}7304 & 1{,}3044 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-2

Faktorkan $A_2 = Q_2R_2$,

diperoleh

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0{,}99425 & -0{,}09776 & 0{,}0436 \\ 0{,}10704 & 0{,}90802 & -0{,}40501 \\ 0 & 0{,}40735 & 0{,}91327 \end{bmatrix}, \ R_2 = \begin{bmatrix} 5{,}7603 & 1{,}0378 & 0{,}18523 \\ 0 & 4{,}2479 & 2{,}1026 \\ 0 & 0 & 0{,}49044 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_3 = R_2Q_2 = \begin{bmatrix} 5{,}8383 & 0{,}45468 & 0 \\ 0{,}4547 & 4{,}7137 & 0{,}1998 \\ 0 & 0{,}19978 & 0{,}4479 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-3

Faktorkan $A_3 = Q_3R_3$,

diperoleh

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 0{,}99698 & -0{,}07758 & 0{,}00332 \\ 0{,}07758 & 0{,}99607 & -0{,}04267 \\ 0 & 0{,}04279 & 0{,}91327 \end{bmatrix}, R_3 = \begin{bmatrix} 5{,}856 & 0{,}81931 & 0{,}01551 \\ 0 & 4{,}6684 & 0{,}21818 \\ 0 & 0 & 0{,}43897 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_4 = R_3Q_3 = \begin{bmatrix} 5{,}9019 & 0{,}36247 & 0 \\ 0{,}36249 & 4{,}6594 & 0{,}0188 \\ 0 & 0{,}01879 & 0{,}43857 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-4

Faktorkan $A_4 = Q_4R_4$,

diperoleh

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 0{,}99812 & -0{,}0613 & 0{,}00025 \\ 0{,}0613 & 0{,}99811 & -0{,}00405 \\ 0 & 0{,}00406 & 0{,}99999 \end{bmatrix}, R_4 = \begin{bmatrix} 5{,}913 & 0{,}64743 & 0{,}00115 \\ 0 & 4{,}6285 & 0{,}02055 \\ 0 & 0 & 0{,}43849 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_5 = R_4Q_4 = \begin{bmatrix} 5{,}9416 & 0{,}28373 & 0 \\ 0{,}28375 & 4{,}6198 & 0{,}0018 \\ 0 & 0{,}00178 & 0{,}43849 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-5

Faktorkan $A_5 = Q_5 R_5$,

diperoleh

$$Q_5 = \begin{bmatrix} 0{,}99886 & -0{,}0477 & 0{,}00009 \\ 0{,}0477 & 0{,}99886 & -0{,}00039 \\ 0 & 0{,}00039 & 1{,}0 \end{bmatrix}, R_5 = \begin{bmatrix} 5{,}9484 & 0{,}50378 & 0{,}00009 \\ 0 & 4{,}601 & 0{,}00196 \\ 0 & 0 & 0{,}43849 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_6 = R_5 Q_5 = \begin{bmatrix} 5{,}9657 & 0{,}21946 & 0 \\ 0{,}21948 & 4{,}5958 & 0{,}00019 \\ 0 & 0{,}00017 & 0{,}43849 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-6

Faktorkan $A_6 = Q_6 R_6$,

diperoleh

$$Q_6 = \begin{bmatrix} 0{,}99932 & -0{,}03677 & 0 \\ 0{,}03677 & 0{,}99932 & -0{,}00004 \\ 0 & 0{,}00004 & 1{,}0 \end{bmatrix}, R_6 = \begin{bmatrix} 5{,}9697 & 0{,}38828 & 0 \\ 0 & 4{,}5846 & 0{,}0002 \\ 0 & 0 & 0{,}43849 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_7 = R_6 Q_6 = \begin{bmatrix} 5{,}9799 & 0{,}16854 & 0 \\ 0{,}16855 & 4{,}5815 & 3{,}2217 \times 10^{-5} \\ 0 & 0{,}00002 & 0{,}43849 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-7

Faktorkan $A_7 = Q_7 R_7$,

diperoleh

$$Q_7 = \begin{bmatrix} 0{,}9996 & -0{,}02817 & 0 \\ 0{,}02817 & 0{,}9996 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0 \end{bmatrix}, R_7 = \begin{bmatrix} 5{,}9823 & 0{,}29756 & 0 \\ 0 & 4{,}5749 & 3{,}3759\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 0{,}43849 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_8 = R_7Q_7 = \begin{bmatrix} 5{,}9883 & 0{,}1289 & 0 \\ 0{,}1289 & 4{,}5731 & 3{,}3759\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 0{,}43849 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-8

Faktorkan $A_8 = Q_8R_8$,

diperoleh

$$Q_8 = \begin{bmatrix} 0{,}99977 & -0{,}2152 & 0 \\ 0{,}2152 & 0{,}99977 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0 \end{bmatrix}, R_8 = \begin{bmatrix} 5{,}9897 & 0{,}22727 & 0 \\ 0 & 4{,}5693 & 3{,}3751\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 0{,}43849 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_9 = R_8Q_8 = \begin{bmatrix} 5{,}9932 & 0{,}09832 & 0 \\ 0{,}09833 & 4{,}5682 & 3{,}3751\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 0{,}43849 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-9

Faktorkan $A_9 = Q_9R_9$,

diperoleh

$$Q_9 = \begin{bmatrix} 0{,}99987 & -0{,}0164 & 0 \\ 0{,}0164 & 0{,}99987 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0 \end{bmatrix}, R_9 = \begin{bmatrix} 5{,}994 & 0{,}17325 & 0 \\ 0 & 4{,}566 & 3.3746\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 0{,}43849 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{10} = R_9Q_9 = \begin{bmatrix} 5{,}9961 & 0{,}0749 & 0 \\ 0{,}0749 & 4{,}5654 & 3{,}3746\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 0{,}43849 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-10

Faktorkan $A_{10} = Q_{10}R_{10}$,

diperoleh

$$Q_{10} = \begin{bmatrix} 0{,}99992 & -0{,}01249 & 0 \\ 0{,}01249 & 0{,}99992 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0 \end{bmatrix}, R_{10} = \begin{bmatrix} 5{,}9966 & 0{,}13192 & 0 \\ 0 & 4{,}5641 & 3{,}3743\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 0{,}43849 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{11} = R_{10}Q_{10} = \begin{bmatrix} 5{,}9978 & 0{,}05701 & 0 \\ 0{,}05701 & 4{,}5637 & 3.3743\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 0{,}43849 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-11

Faktorkan $A_{11} = Q_{11}R_{11}$,

diperoleh

$$Q_{11} = \begin{bmatrix} 0{,}99995 & -0{,}0095 & 0 \\ 0{,}0095 & 0{,}99995 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0 \end{bmatrix}, R_{11} = \begin{bmatrix} 5{,}9981 & 0{,}10038 & 0 \\ 0 & 4{,}563 & 3{,}3741\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 0{,}43849 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{12} = R_{11}Q_{11} = \begin{bmatrix} 5{,}9988 & 0{,}04337 & 0 \\ 0{,}04337 & 4{,}5628 & 3{,}3741\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 0{,}43849 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-12

Faktorkan $A_{12} = Q_{12}R_{12}$,

diperoleh

$$Q_{12} = \begin{bmatrix} 0{,}99997 & -0{,}00723 & 0 \\ 0{,}00723 & 0{,}99997 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0 \end{bmatrix}, R_{12} = \begin{bmatrix} 5{,}999 & 0{,}0763 & 0 \\ 0 & 4{,}5624 & 3{,}374\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 0{,}43849 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{13} = R_{12}Q_{12} = \begin{bmatrix} 5{,}9994 & 0{,}03298 & 0 \\ 0{,}03298 & 4{,}5623 & 3{,}374\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 0{,}43849 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-13

Faktorkan $A_{13} = Q_{13}R_{13}$,

diperoleh

$$Q_{13} = \begin{bmatrix} 0{,}99998 & -0{,}0055 & 0 \\ 0{,}0055 & 0{,}99998 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0 \end{bmatrix}, R_{13} = \begin{bmatrix} 5{,}9995 & 0{,}5806 & 0 \\ 0 & 4{,}562 & 3{,}3739\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 0{,}43849 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{14} = R_{13}Q_{13} = \begin{bmatrix} 5{,}99997 & 0{,}02508 & 0 \\ 0{,}02508 & 4{,}5619 & 3{,}3739\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 0{,}43849 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-14

Faktorkan $A_{14} = Q_{14}R_{14}$,

diperoleh

$$Q_{14}=\begin{bmatrix}0,99999 & -0,00418 & 0\\ 0,00418 & 0,99999 & 0\\ 0 & 0 & 1,0\end{bmatrix},\ R_{14}=\begin{bmatrix}5,9998 & 0,04414 & 0\\ 0 & 4,5618 & 3,3739\times10^{-5}\\ 0 & 0 & 0,43849\end{bmatrix}$$

maka

$$A_{15}=R_{14}Q_{14}=\begin{bmatrix}5,99999 & 0,01906 & 0\\ 0,01907 & 4,5618 & 3,3739\times10^{-5}\\ 0 & 0 & 0,43849\end{bmatrix}.$$

Iterasi-15

Faktorkan $A_{15}=Q_{15}R_{15}$,

diperoleh

$$Q_{15}=\begin{bmatrix}0,99999 & -0,00318 & 0\\ 0,00318 & 0,99999 & 0\\ 0 & 0 & 1,0\end{bmatrix},\ R_{15}=\begin{bmatrix}5,9999 & 0,03356 & 0\\ 0 & 4,5617 & 3,3739\times10^{-5}\\ 0 & 0 & 0,43849\end{bmatrix}$$

maka

$$A_{16}=R_{15}Q_{15}=\begin{bmatrix}5,99999 & 0,01449 & 0\\ 0,0145 & 4,5617 & 3,3739\times10^{-5}\\ 0 & 0 & 0,43849\end{bmatrix}.$$

Iterasi-16

Faktorkan $A_{16}=Q_{16}R_{16}$,

diperoleh

$$Q_{16}=\begin{bmatrix}1,0 & -0,00242 & 0\\ 0,00242 & 1,0 & 0\\ 0 & 0 & 1,0\end{bmatrix},\ R_{16}=\begin{bmatrix}5,9999 & 0,02552 & 0\\ 0 & 4,5617 & 3,3739\times10^{-5}\\ 0 & 0 & 0,43849\end{bmatrix}$$

maka

$$A_{17} = R_{16}Q_{16} = \begin{bmatrix} 6,0 & 0,0011 & 0 \\ 0,011 & 4,5617 & 3,3739\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 0,43849 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-17

Faktorkan $A_{17} = Q_{17}R_{17}$,

diperoleh

$$Q_{17} = \begin{bmatrix} 1,0 & -0,00183 & 0 \\ 0,00183 & 1,0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0 \end{bmatrix}, R_{17} = \begin{bmatrix} 6,0 & 0,0194 & 0 \\ 0 & 4,5617 & 3,3739\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 0,43849 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{18} = R_{17}Q_{17} = \begin{bmatrix} 6,0 & 0,00838 & 0 \\ 0,00838 & 4,5617 & 3,3739\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 0,43849 \end{bmatrix}.$$

Pada matriks A_{18}, entri-entri di atas dan di bawah diagonal sangat kecil dan akan mendekati nol setelah setiap iterasi berikutnya. Sementara itu, entri-entri pada diagonalnya tidak berubah setelah setiap iterasi berikutnya, sehingga matriks A_{18} konvergen ke matriks diagonal. Dengan demikian, nilai eigen dari matriks T adalah entri-entri dari diagonalA_{18}, yaitu 6,0; 4,5617 dan 0,43849.

Sementara itu, dengan menggunakan SWP (*Scientific Workplace*), nilai eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

adalah 5, 6, 4,56155 dan 0,43845.

Jadi nilai eigen dari matriks T yang mendekati nilai eigen matriks A yaitu pada saat $m = 3$.

Contoh 2 :

Misal diberikan matriks A berukuran 4×4 seperti berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriks A akan direduksi menjadi matriks tridiagonal T yang berukuran $m \times m$ dengan $m < 4$.

Algoritma Lanczos untuk mereduksi matriks A di atas menjadi matriks tridiagonal T berukuran 2×2 adalah sebagai berikut :

1. Definisikan vektor $\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_0 = 1$ dan vektor $\mathbf{q}_1 \neq \mathbf{0}$ sebarang dengan $\|\mathbf{q}_1\| = 1$.

   Pilih $\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. Untuk $j = 1$.

a) Vektor $\boldsymbol{w_1} = A\boldsymbol{q_1} - u_0\mathbf{q_0}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Skalar $d_1 = \mathbf{q_1}^T \boldsymbol{w_1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

c) Vektor $\mathbf{r}_1 = \boldsymbol{w_1} - \boldsymbol{d_1}\mathbf{q_1}$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$u_1 = \|\mathbf{r}_1\|$$

$$= \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2 + 0^2}$$

$$= 2$$

d) Vektor $\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{r_1}}{\mathrm{u_1}}$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Untuk $j = 2$.

a) Vektor $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_2 - u_1\mathbf{q}_1$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

b) Skalar $d_2 = \mathbf{q}_2{}^T \boldsymbol{w}_2$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= 3$$

c) Vektor $\mathbf{r}_2 = \boldsymbol{w}_2 - d_2\mathbf{q}_2$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$u_2 = \|\mathbf{r}_2\|$$

$$= \sqrt{0^2 + 0^2 + 2 + 0^2}$$

$$= 0$$

Karena diperoleh $u_2 = 0$, maka proses perhitungan dihentikan.

Dengan demikian diperoleh matriks tridiagonal T berukuran 2×2, yaitu

$$T = \begin{bmatrix} d_1 & u_1 \\ u_1 & d_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya nilai eigen dari matriks T dicari dengan menggunakan algoritma QR. Berikut algoritma QR untuk mencari nilai eigen dari matriks T.

Iterasi-1

Misal $A_1 = T$.

Faktorkan $A_1 = Q_1 R_1$,

diperoleh

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ R_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_2 = R_1 Q_1 = \begin{bmatrix} 3{,}0 & 2{,}0 \\ 2{,}0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-2

Faktorkan $A_2 = Q_2 R_2$,

diperoleh

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0{,}83025 & 0{,}5547 \\ 0{,}5547 & -0{,}83205 \end{bmatrix},\ R_2 = \begin{bmatrix} 3{,}6056 & 1{,}6641 \\ 0 & 1{,}1094 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_3 = R_2Q_2 = \begin{bmatrix} 3,9231 & 0,61538 \\ 0,61538 & -0,92308 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-3

Faktorkan $A_3 = Q_3R_3$,

diperoleh

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 0,98792 & 0,15497 \\ 0,15497 & -0,98792 \end{bmatrix}, R_3 = \begin{bmatrix} 3,9711 & 0,46493 \\ 0 & 1,0073 \end{bmatrix}$$

dan

$$A_4 = R_3Q_3 = \begin{bmatrix} 3,9952 & 0,15609 \\ 0,1561 & -0,99513 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-4

Faktorkan $A_4 = Q_4R_4$,

diperoleh

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 0,99924 & 0,03904 \\ 0,03904 & -0,99924 \end{bmatrix}, \quad R_4 = \begin{bmatrix} 3,9982 & 0,11712 \\ 0 & 1,0005 \end{bmatrix}$$

dan

$$A_5 = R_4Q_4 = \begin{bmatrix} 3,9997 & 0,03907 \\ 0,03906 & -0,99974 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-5

Faktorkan $A_5 = Q_5R_5$,

diperoleh

$$Q_5 = \begin{bmatrix} 0,99995 & 0,00977 \\ 0,00977 & -0,9995 \end{bmatrix}, \quad R_5 = \begin{bmatrix} 3,9999 & 0,0293 \\ 0 & 1,0001 \end{bmatrix}$$

dan

$$A_6 = R_5Q_5 = \begin{bmatrix} 4{,}0 & 0{,}00976 \\ 0{,}00977 & -1{,}0 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-6

Faktorkan $A_6 = Q_6R_6$,

diperoleh

$$Q_6 = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0{,}00244 \\ 0{,}00244 & -1{,}0 \end{bmatrix}, \quad R_6 = \begin{bmatrix} 4{,}0 & 0{,}00732 \\ 0 & 1{,}0 \end{bmatrix}$$

dan

$$A_7 = R_6Q_6 = \begin{bmatrix} 4{,}0 & 0{,}00245 \\ 0{,}00244 & -1{,}0 \end{bmatrix}.$$

Pada matriks A_7, entri-entri di atas dan di bawah diagonal sangat kecil dan akan mendekati nol setelah setiap iterasi berikutnya. Sementara itu, entri-entri pada diagonalnya tidak berubah setelah setiap iterasi berikutnya, sehingga matriks A_7 konvergen ke matriks diagonal. Dengan demikian, nilai eigen dari matriks T adalah entri-entri dari diagonal A_7, yaitu 4,0 dan -1,0.

Sementara itu, dengan menggunakan SWP (*Scientific Workplace*), nilai eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

adalah 4, -1, 2,61803 dan 0,38197.

Jadi, nilai eigen dari T sama dengan nilai eigen ekstrim dari A.

Contoh 3 :

Misal diberikan matriks A berukuran 5×5 seperti berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matriks A akan direduksi menjadi matriks tridiagonal T yang berukuran $m \times m$ dengan $m < 5$.

A. Untuk $m = 2$.

Algoritma Lanczos untuk mereduksi matriks A di atas menjadi matriks tridiagonal T berukuran 2×2 adalah sebagai berikut :

1. Definisikan vektor $\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_0 = 1$ dan vektor $\mathbf{q}_1 \neq \mathbf{0}$ sebarang dengan $\|\mathbf{q}_1\| = 1$.

   Pilih $\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. Untuk $j = 1$.

a) Vektor $\boldsymbol{w_1} = A\boldsymbol{q_1} - u_0\mathbf{q_0}$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Hitung scalar $d_1 = \mathbf{q}_1{}^T w_1$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2$$

c) Vektor $\mathbf{r}_1 = w_1 - d_1\mathbf{q}_1$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$u_1 = \|\mathbf{r}_1\|$$

$$= \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2}$$

$$= 1{,}41421$$

d) Vektor $\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{r}_1}{u_1}$

$$= \frac{1}{1,41421}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0,70711\\0,70711\end{bmatrix}$$

3. Untuk $j = 2$.

a) Vektor $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_2 - u_1\mathbf{q}_1$

$$= \begin{bmatrix}3&1&0&0&0\\1&3&0&0&0\\0&0&2&1&1\\0&0&1&2&1\\0&0&1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0,70711\\0,70711\end{bmatrix} - 1,41421\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0\\0\\0,00001\\2,12133\\2,12133\end{bmatrix}$$

b) Skalar $d_2 = \mathbf{q}_2{}^T\boldsymbol{w}_2$

$$= \begin{bmatrix}0&0&0&0,70711&0,70711\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0,00001\\2,12133\\2,12133\end{bmatrix}$$

$$= 3,00003$$

Karena sudah diperoleh matriks tridiagonal T berukuran 2×2, maka proses perhitungan dihentikan. Matriks tridiagonal T berukuran 2×2 yang terbentuk yaitu

$$T = \begin{bmatrix} d_1 & u_1 \\ u_1 & d_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1{,}41421 \\ 1{,}41421 & 3{,}00003 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya nilai eigen dari matriks T dicari dengan menggunakan algoritma QR. Berikut algoritma QR untuk mencari nilai eigen dari matriks T.

Iterasi-1

Misal $A_1 = T$.

Faktorkan $A_1 = Q_1 R_1$,

diperoleh

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0{,}8165 & -0{,}57735 \\ 0{,}57735 & 0{,}8165 \end{bmatrix}, R_1 = \begin{bmatrix} 2{,}4495 & 2{,}8868 \\ 0 & 1{,}633 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_2 = R_1 Q_1 = \begin{bmatrix} 3{,}6667 & 0{,}94285 \\ 0{,}94281 & 1{,}3333 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-2

Faktorkan $A_2 = Q_2 R_2$,

diperoleh

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0{,}9685 & -0{,}24903 \\ 0{,}24903 & 0{,}9685 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} 3{,}786 & 1{,}2452 \\ 0 & 1{,}0565 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_3 = R_2Q_2 = \begin{bmatrix} 3{,}9768 & 0{,}26315 \\ 0{,}2631 & 1{,}0232 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-3

Faktorkan $A_3 = Q_3R_3$,

diperoleh

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 0{,}99782 & -0{,}06601 \\ 0{,}06601 & 0{,}99782 \end{bmatrix}, R_3 = \begin{bmatrix} 3{,}9855 & 0{,}33012 \\ 0 & 1{,}0036 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_4 = R_3Q_3 = \begin{bmatrix} 3{,}9986 & 0{,}0663 \\ 0{,}06625 & 1{,}0014 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-4

Faktorkan $A_4 = Q_4R_4$,

diperoleh

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 0{,}99986 & -0{,}01657 \\ 0{,}01657 & 0{,}99986 \end{bmatrix}, R_4 = \begin{bmatrix} 3{,}9991 & 0{,}08288 \\ 0 & 1{,}0002 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_5 = R_4Q_4 = \begin{bmatrix} 3{,}9999 & 0{,}01662 \\ 0{,}01657 & 1{,}0001 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-5

Faktorkan $A_5 = Q_5R_5$,

diperoleh

$$Q_5 = \begin{bmatrix} 0{,}99999 & -0{,}00414 \\ 0{,}00414 & 0{,}99999 \end{bmatrix}, R_5 = \begin{bmatrix} 3{,}9999 & 0{,}02076 \\ 0 & 1{,}0 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_6 = R_5Q_5 = \begin{bmatrix} 3{,}9999 & 0{,}00419 \\ 0{,}00414 & 0{,}99999 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-6

Faktorkan $A_6 = Q_6R_6$,

diperoleh

$$Q_6 = \begin{bmatrix} 1{,}0 & -0{,}00104 \\ 0{,}00104 & 1{,}0 \end{bmatrix}, R_6 = \begin{bmatrix} 3{,}9999 & 0{,}00523 \\ 0 & 0{,}99999 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_7 = R_6Q_6 = \begin{bmatrix} 3{,}9999 & 0{,}00108 \\ 0{,}00104 & 0{,}99999 \end{bmatrix}.$$

Pada matriks A_7, entri-entri di atas dan di bawah diagonal sangat kecil dan akan mendekati nol setelah setiap iterasi berikutnya. Sementara itu, entri-entri pada diagonalnya tidak berubah setelah setiap iterasi berikutnya, sehingga matriks A_7 konvergen ke matriks diagonal. Dengan demikian, nilai eigen dari matriks T adalah entri-entri dari diagonal A_7, yaitu 3,9999 dan 0,99999.

B. Untuk $m = 3$.

Algoritma Lanczos untuk mereduksi matriks A menjadi matriks tridiagonal T berukuran 3×3 adalah sebagai berikut :

1. Untuk $m = 3$, algoritma dilanjutkan dengan menghitung

a) Vektor $\mathbf{r}_2 = \boldsymbol{w}_2 - d_2\mathbf{q}_2$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}00001 \\ 2{,}12133 \\ 2{,}12133 \end{bmatrix} - 3{,}00003 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}70711 \\ 0{,}70711 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}00001 \\ -0{,}00002 \\ -0{,}00002 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$u_2 = \|\mathbf{r}_2\|$$

$$= \sqrt{0 + 0 + (0{,}00001)^2 + (-0{,}00002)^2 + (-0{,}00002)^2}$$

$$= 0{,}00003$$

b) Vektor $\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{r}_2}{u_2}$

$$= \frac{1}{0{,}00003} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}00001 \\ -0{,}00002 \\ -0{,}00002 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}33333 \\ -0{,}66667 \\ -0{,}66667 \end{bmatrix}$$

2. Untuk $j = 3$.

a) Vektor $\boldsymbol{w_3} = \boldsymbol{A q_3} - u_2 \mathbf{q_2}$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}33333 \\ -0{,}66667 \\ -0{,}66667 \end{bmatrix} - 0{,}00003 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}70711 \\ 0{,}70711 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}66668 \\ -1{,}6667 \\ -1{,}6667 \end{bmatrix}$$

b) Skalar $d_3 = \mathbf{q_3}^T \boldsymbol{w_3}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}33333 & -0{,}66667 & -0{,}66667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}66668 \\ -1{,}6667 \\ -1{,}6667 \end{bmatrix}$$

$$= 2{,}00005$$

Karena sudah diperoleh matriks tridiagonal T berukuran 3×3, maka proses perhitungan dihentikan. Matriks tridiagonal T berukuran 3×3 yang terbentuk yaitu

$$T = \begin{bmatrix} d_1 & u_1 & 0 \\ u_1 & d_2 & u_2 \\ 0 & u_2 & d_3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 1{,}41421 & 0 \\ 1{,}41421 & 3{,}00003 & 0{,}00003 \\ 0 & 0{,}00003 & 2{,}00005 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya nilai eigen dari matriks T dicari dengan menggunakan algoritma QR. Berikut algoritma QR untuk mencari nilai eigen dari matriks T.

Iterasi-1

Misalkan $A_1 = T$.

Faktorkan $A_1 = Q_1R_1$,

diperoleh

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0{,}8165 & -0{,}57735 & 0{,}00001 \\ 0{,}57735 & 0{,}8165 & -0{,}00002 \\ 0 & 0{,}00002 & 1{,}0 \end{bmatrix}, R_1 = \begin{bmatrix} 2{,}4495 & 2{,}8868 & 0{,}00002 \\ 0 & 1{,}633 & 0{,}00006 \\ 0 & 0 & 2{,}0 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_2 = R_1Q_1 = \begin{bmatrix} 3{,}6667 & 0{,}94285 & 0 \\ 0{,}94281 & 1{,}3333 & 0{,}00004 \\ 0 & 0{,}00004 & 2{,}0 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-2

Faktorkan $A_2 = Q_2R_2$,

diperoleh

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0{,}9685 & -0{,}24903 & 0 \\ 0{,}24903 & 0{,}9685 & -0{,}00003 \\ 0 & 0{,}00003 & 1{,}0 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} 3{,}786 & 1{,}2452 & 0 \\ 0 & 1{,}0565 & 0{,}00011 \\ 0 & 0 & 1{,}0244 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_3 = R_2Q_2 = \begin{bmatrix} 3,9768 & 0,26315 & 0 \\ 0,2631 & 1,0232 & 0,00007 \\ 0 & 0,00007 & 2,0 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-3

Faktorkan $A_3 = Q_3R_3$,

diperoleh

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 0,99782 & -0,06601 & 0 \\ 0,06601 & 0,99782 & -0,00009 \\ 0 & 0,00009 & 1,0 \end{bmatrix}, R_3 = \begin{bmatrix} 3,9855 & 0,33012 & 0 \\ 0 & 1,0036 & 0,00002 \\ 0 & 0 & 2,0 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_4 = R_3Q_3 = \begin{bmatrix} 3,9986 & 0,0663 & 0 \\ 0,06625 & 1,0014 & 0,00014 \\ 0 & 0,00014 & 2,0 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-4

Faktorkan $A_4 = Q_4R_4$,

diperoleh

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 0,99986 & -0,01657 & 0 \\ 0,01657 & 0,99986 & 0,00014 \\ 0 & 0,00014 & 1,0 \end{bmatrix}, R_4 = \begin{bmatrix} 3,9991 & 0,08288 & 0 \\ 0 & 1,0002 & 0,00042 \\ 0 & 0 & 2,0 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_5 = R_4Q_4 = \begin{bmatrix} 3,9999 & 0,01662 & 0 \\ 0,01657 & 1,0001 & 0,00028 \\ 0 & 0,00028 & 2,0 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-5

Faktorkan $A_5 = Q_5R_5$,

diperoleh

$$Q_5 = \begin{bmatrix} 0,99999 & -0,00414 & 0 \\ 0,00414 & 0,99999 & -0,00028 \\ 0 & 0,00028 & 1,0 \end{bmatrix}, R_5 = \begin{bmatrix} 3,9999 & 0,02076 & 0 \\ 0 & 1,0 & 0,00083 \\ 0 & 0 & 2,0 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_6 = R_5Q_5 = \begin{bmatrix} 3,9999 & 0,00419 & 0 \\ 0,00414 & 0,99999 & 0,00055 \\ 0 & 0,00055 & 2,0 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-6

Faktorkan $A_6 = Q_6R_6$,

diperoleh

$$Q_6 = \begin{bmatrix} 1,0 & -0,00104 & 0 \\ 0,00103 & 1,0 & -0,00055 \\ 0 & 0,00055 & 1,0 \end{bmatrix}, R_6 = \begin{bmatrix} 3,9999 & 0,00523 & 0 \\ 0 & 0,99999 & 0,00166 \\ 0 & 0 & 2,0 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_7 = R_6Q_6 = \begin{bmatrix} 3,9999 & 0,00104 & 0 \\ 0,00104 & 0,99999 & 0,00111 \\ 0 & 0,00111 & 2,0 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-7

Faktorkan $A_7 = Q_7R_7$,

diperoleh

$$Q_7 = \begin{bmatrix} 1{,}0 & -0{,}00026 & 0 \\ 0{,}00026 & 1{,}0 & -0{,}00111 \\ 0 & 0{,}00111 & 1{,}0 \end{bmatrix}, R_7 = \begin{bmatrix} 3{,}9999 & 0{,}00134 & 0 \\ 0 & 0{,}99999 & 0{,}00333 \\ 0 & 0 & 2{,}0 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_8 = R_7 Q_7 = \begin{bmatrix} 3{,}9999 & 0{,}00031 & 0 \\ 0{,}00026 & 0{,}99999 & 0{,}00222 \\ 0 & 0{,}00222 & 2{,}0 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-8

Faktorkan $A_8 = Q_8 R_8$,

diperoleh

$$Q_8 = \begin{bmatrix} 1{,}0 & -0{,}00006 & 0 \\ 0{,}00006 & 1{,}0 & -0{,}00222 \\ 0 & 0{,}00222 & 1{,}0 \end{bmatrix}, R_8 = \begin{bmatrix} 3{,}9999 & 0{,}00037 & 0 \\ 0 & 0{,}99999 & 0{,}00665 \\ 0 & 0 & 2{,}0 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_9 = R_8 Q_8 = \begin{bmatrix} 3{,}9999 & 0{,}00011 & 0 \\ 0{,}00006 & 1{,}0 & 0{,}00443 \\ 0 & 0{,}00443 & 2{,}0 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-9

Faktorkan $A_9 = Q_9 R_9$,

diperoleh

$$Q_9 = \begin{bmatrix} 1{,}0 & -0{,}00002 & 0 \\ 0{,}00002 & 0{,}99999 & -0{,}00443 \\ 0 & 0{,}00443 & 1{,}0 \end{bmatrix}, R_9 = \begin{bmatrix} 3{,}9999 & 0{,}00013 & 0 \\ 0 & 1{,}0 & 0{,}0133 \\ 0 & 0 & 2{,}0 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{10} = R_9Q_9 = \begin{bmatrix} 3,9999 & 0,00006 & 0 \\ 0,00002 & 1,0 & 0,00887 \\ 0 & 0,00887 & 2,0 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-10

Faktorkan $A_{10} = Q_{10}R_{10}$,

diperoleh

$$Q_{10} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,99996 & -0,00887 \\ 0 & 0,00887 & 0,99996 \end{bmatrix}, R_{10} = \begin{bmatrix} 3,9999 & 0,00007 & 0 \\ 0 & 1,0 & 0,02661 \\ 0 & 0 & 2,0 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{11} = R_{10}Q_{10} = \begin{bmatrix} 3,9999 & 5,2119\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 1,0002 & 0,01774 \\ 0 & 0,01774 & 1,9997 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-11

Faktorkan $A_{11} = Q_{11}R_{11}$,

diperoleh

$$Q_{11} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,99984 & -0,00177 \\ 0 & 0,00177 & 0,99984 \end{bmatrix}, R_{11} = \begin{bmatrix} 3,9999 & 5,2119\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 1,0004 & 0,05319 \\ 0 & 0 & 1,9991 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{12} = R_{11}Q_{11} = \begin{bmatrix} 3,9999 & 5,2111\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 1,0012 & 0,03545 \\ 0 & 0,03545 & 1,9988 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-12

Faktorkan $A_{12} = Q_{12}R_{12}$,

diperoleh

$$Q_{12} = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}99937 & -0{,}03538 \\ 0 & 0{,}03538 & 0{,}99937 \end{bmatrix}, R_{12} = \begin{bmatrix} 3{,}9999 & 5{,}2111\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 1{,}0018 & 0{,}10614 \\ 0 & 0 & 1{,}9963 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{13} = R_{12}Q_{12} = \begin{bmatrix} 3{,}9999 & 5{,}2078\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 1{,}0049 & 0{,}07063 \\ 0 & 0{,}07063 & 1{,}995 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-13

Faktorkan $A_{13} = Q_{13}R_{13}$,

diperoleh

$$Q_{13} = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}99754 & -0{,}07011 \\ 0 & 0{,}07011 & 0{,}99754 \end{bmatrix}, R_{13} = \begin{bmatrix} 3{,}9999 & 5{,}2078\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 1{,}0074 & 0{,}21033 \\ 0 & 0 & 1{,}9851 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{14} = R_{13}Q_{13} = \begin{bmatrix} 3{,}9999 & 5{,}195\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 1{,}0197 & 0{,}13918 \\ 0 & 0{,}13918 & 1{,}9802 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-14

Faktorkan $A_{14} = Q_{14}R_{14}$,

diperoleh

$$Q_{14} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,99081 & -0,13524 \\ 0 & 0,13524 & 0,99081 \end{bmatrix}, R_{14} = \begin{bmatrix} 3,9999 & 5,195\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 1,0292 & 0,4057 \\ 0 & 0 & 1,9432 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{15} = R_{14}Q_{14} = \begin{bmatrix} 3,9999 & 5,1473\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 1,0746 & 0,2628 \\ 0 & 0,2628 & 1,9253 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-15

Faktorkan $A_{15} = Q_{15}R_{15}$,

diperoleh

$$Q_{15} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,97137 & -0,23756 \\ 0 & 0,23756 & 0,97137 \end{bmatrix}, R_{15} = \begin{bmatrix} 3,9999 & 5,1473\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 1,1063 & 0,71262 \\ 0 & 0 & 1,8078 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{16} = R_{15}Q_{15} = \begin{bmatrix} 3,9999 & 4,9999\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 1,2439 & 0,42941 \\ 0 & 0,42946 & 1,756 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-16

Faktorkan $A_{16} = Q_{16}R_{16}$,

diperoleh

$$Q_{16} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,94525 & -0,32635 \\ 0 & 0,32635 & 0,94525 \end{bmatrix}, R_{16} = \begin{bmatrix} 3,9999 & 4,9999\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 1,3159 & 0,97897 \\ 0 & 0 & 1,5197 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{17} = R_{16}Q_{16} = \begin{bmatrix} 3{,}9999 & 4{,}7262\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 1{,}5633 & 0{,}49593 \\ 0 & 0{,}49595 & 1{,}4365 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-17

Faktorkan $A_{17} = Q_{17}R_{17}$,

diperoleh

$$Q_{17} = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}95318 & -0{,}30239 \\ 0 & 0{,}30239 & 0{,}95318 \end{bmatrix}, Q_{17} = \begin{bmatrix} 3{,}9999 & 4{,}7262\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 1{,}6401 & 0{,}9071 \\ 0 & 0 & 1{,}2193 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{18} = R_{17}Q_{17} = \begin{bmatrix} 3{,}9999 & 4{,}5049\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 1{,}8376 & 0{,}36868 \\ 0 & 0{,}3687 & 1{,}1622 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-18

Faktorkan $A_{18} = Q_{18}R_{18}$,

diperoleh

$$Q_{18} = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}98046 & -0{,}19672 \\ 0 & 0{,}19672 & 0{,}98046 \end{bmatrix}, R_{18} = \begin{bmatrix} 3{,}9999 & 4{,}5049\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 1{,}8742 & 0{,}59011 \\ 0 & 0 & 1{,}067 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{19} = R_{18_{Q_{18}}} = \begin{bmatrix} 3{,}9999 & 4{,}4169\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 1{,}9537 & 0{,}20989 \\ 0 & 0{,}2099 & 1{,}0462 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-19

Faktorkan $A_{19} = Q_{19}R_{19}$,

diperoleh

$$Q_{19} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,99428 & -0,10682 \\ 0 & 0,10682 & 0,99428 \end{bmatrix}, R_{19} = \begin{bmatrix} 3,9999 & 4,4169\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 1,9649 & 0,32045 \\ 0 & 0 & 1,0178 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{20} = R_{19}Q_{19} = \begin{bmatrix} 3,9999 & 4,3916\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 1,9879 & 0,10873 \\ 0 & 0,10872 & 1,012 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-20

Faktorkan $A_{20} = Q_{20}R_{20}$,

diperoleh

$$Q_{20} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,99851 & -0,05461 \\ 0 & 0,05461 & 0,99851 \end{bmatrix}, R_{20} = \begin{bmatrix} 3,9999 & 4,3916\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 1,9909 & 0,16383 \\ 0 & 0 & 1,0046 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{21} = R_{20}Q_{20} = \begin{bmatrix} 3,9999 & 4,3851\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 1,9969 & 0,05486 \\ 0 & 0,05486 & 1,0031 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-21

Faktorkan $A_{21} = Q_{21}R_{21}$,

diperoleh

$$Q_{21}=\begin{bmatrix}1{,}0 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}99962 & -0{,}02746\\ 0 & 0{,}02746 & 0{,}99962\end{bmatrix}, R_{21}=\begin{bmatrix}3{,}9999 & 4{,}3851\times10^{-5} & 0\\ 0 & 1{,}9977 & 0{,}08239\\ 0 & 0 & 1{,}0012\end{bmatrix}$$

maka

$$A_{22}=R_{21}Q_{21}=\begin{bmatrix}3{,}9999 & 4{,}3834\times10^{-5} & 0\\ 0 & 1{,}9992 & 0{,}0275\\ 0 & 0{,}0275 & 1{,}0008\end{bmatrix}.$$

Iterasi-22

Faktorkan $A_{22}=Q_{22}R_{22}$,

diperoleh

$$Q_{22}=\begin{bmatrix}1{,}0 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}99991 & -0{,}01375\\ 0 & 0{,}01375 & 0{,}99991\end{bmatrix}, R_{22}=\begin{bmatrix}3{,}9999 & 4{,}3834\times10^{-5} & 0\\ 0 & 1{,}9994 & 0{,}04126\\ 0 & 0 & 1{,}0003\end{bmatrix}$$

maka

$$A_{23}=R_{22}Q_{22}=\begin{bmatrix}3{,}9999 & 4{,}383\times10^{-5} & 0\\ 0 & 1{,}9998 & 0{,}01376\\ 0 & 0{,}01376 & 1{,}0002\end{bmatrix}.$$

Iterasi-23

Faktorkan $A_{23}=Q_{23}R_{23}$,

diperoleh

$$Q_{23}=\begin{bmatrix}1{,}0 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}99998 & -0{,}00688\\ 0 & 0{,}00688 & 0{,}99998\end{bmatrix}, R_{23}=\begin{bmatrix}3{,}9999 & 4{,}383\times10^{-5} & 0\\ 0 & 1{,}9998 & 0{,}02064\\ 0 & 0 & 1{,}0001\end{bmatrix}$$

maka

$$A_{24} = R_{23}Q_{23} = \begin{bmatrix} 3{,}9999 & 4{,}3829\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 1{,}9999 & 0{,}00688 \\ 0 & 0{,}00688 & 1{,}0001 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-24

Faktorkan $A_{24} = Q_{24}R_{24}$,

diperoleh

$$Q_{24} = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}99999 & -0{,}00344 \\ 0 & 0{,}00344 & 0{,}99999 \end{bmatrix}, R_{24} = \begin{bmatrix} 3{,}9999 & 4{,}3829\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 1{,}9999 & 0{,}01033 \\ 0 & 0 & 1{,}0001 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{25} = R_{24}Q_{24} = \begin{bmatrix} 3{,}9999 & 4{,}3829\times10^{-5} & 0 \\ 0 & 1{,}9999 & 0{,}00344 \\ 0 & 0{,}00344 & 1{,}0001 \end{bmatrix}.$$

Pada matriks A_{25}, entri-entri di atas dan di bawah diagonal sangat kecil dan akan mendekati nol setelah setiap iterasi berikutnya. Sementara itu, entri-entri pada diagonalnya tidak berubah setelah setiap iterasi berikutnya, sehingga matriks A_{25} konvergen ke matriks diagonal. Dengan demikian, nilai eigen dari matriks T adalah entri-entri dari diagonal A_{25}, yaitu 3,9999; 1,9999 dan 1,0001.

C. Untuk $m = 4$.

Algoritma Lanczos untuk mereduksi matriks A menjadi matriks tridiagonal T berukuran 4×4 adalah sebagai berikut :

1. Untuk $m = 4$, algoritma dilanjutkan dengan menghitung

a) Vektor $\mathbf{r}_3 = w_3 - d_3\mathbf{q}_3$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}66668 \\ -1{,}66667 \\ -1{,}66667 \end{bmatrix} - 2{,}00001 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}33333 \\ -0{,}66667 \\ -0{,}66667 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1{,}33336 \\ -0{,}33333 \\ -0{,}33333 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$u_3 = \|\mathbf{r}_3\|$$

$$= 1{,}41424$$

b) Vektor $\mathbf{q}_4 = \frac{\mathbf{r}_3}{u_3}$

$$= \frac{1}{1{,}41424} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1{,}33336 \\ -0{,}33333 \\ -0{,}33333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}94281 \\ -0{,}2357 \\ -0{,}2357 \end{bmatrix}$$

2. Untuk $j = 4$.

a) Vektor $w_4 = Aq_4 - u_3\mathbf{q}_3$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}94281 \\ -0{,}2357 \\ -0{,}2357 \end{bmatrix} - 1{,}41424 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}33333 \\ -0{,}66667 \\ -0{,}66667 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2{,}82843 \\ -0{,}70708 \\ -0{,}70708 \end{bmatrix}$$

b) Skalar $d_4 = \mathbf{q}_4{}^T \boldsymbol{w}_4$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0{,}94821 & -0{,}2357 & -0{,}2357 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2{,}82843 \\ -0{,}70708 \\ -0{,}70708 \end{bmatrix}$$

$$= 2{,}99999$$

Karena sudah diperoleh matriks tridiagonal T berukuran 4×4, maka proses perhitungan dihentikan. Matriks tridiagonal T berukuran 4×4 yang terbentuk yaitu

$$T = \begin{bmatrix} d_1 & u_1 & 0 & 0 \\ u_1 & d_2 & u_2 & 0 \\ 0 & u_2 & d_3 & u_3 \\ 0 & 0 & u_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1{,}41421 & 0 & 0 \\ 1{,}41421 & 3{,}00003 & 0{,}00003 & 0 \\ 0 & 0{,}00003 & 2{,}00005 & 1{,}41424 \\ 0 & 0 & 1{,}41424 & 2{,}99999 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya nilai eigen dari matriks T dicari dengan menggunakan algoritma QR. Berikut algoritma QR untuk mencari nilai eigen dari matriks T.

Iterasi-1

Misal $A_1 = T$.

Faktorkan $A_1 = Q_1R_1$,

diperoleh

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0{,}8165 & -0{,}57735 & 0 & 0 \\ 0{,}57735 & 0{,}8165 & -0{,}00001 & 0 \\ 0 & 0{,}00002 & 0{,}8165 & -057735 \\ 0 & 0 & 0{,}57735 & 0{,}8165 \end{bmatrix},$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 2{,}4495 & 2{,}8868 & 0{,}00002 & 0 \\ 0 & 1{,}633 & 0{,}00006 & 0{,}00002 \\ 0 & 0 & 2{,}4495 & 2{,}8868 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}633 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_2 = R_1Q_1 = \begin{bmatrix} 3{,}6667 & 0{,}94285 & 0 & 0 \\ 0{,}94281 & 1{,}3333 & 0{,}00004 & 0 \\ 0 & 0{,}00004 & 3{,}6667 & 0{,}94285 \\ 0 & 0 & 0{,}94281 & 1{,}3333 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-2

Faktorkan $A_2 = Q_2R_2$,

diperoleh

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0{,}9685 & -0{,}24903 & 0{,}00001 & 0 \\ 0{,}24903 & 0{,}9685 & -0{,}00004 & 0{,}00001 \\ 0 & 0{,}00004 & 0{,}9685 & -0{,}24903 \\ 0 & 0 & 0{,}24903 & 0{,}9685 \end{bmatrix},$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 3,786 & 1,2452 & 0,00001 & 0 \\ 0 & 1,0565 & 0,00002 & 0,00004 \\ 0 & 0 & 3,786 & 1,2452 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0565 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_3 = R_2 Q_2 = \begin{bmatrix} 3,9768 & 0,26315 & 0 & 0 \\ 0,2631 & 1,0232 & 0,00016 & 0 \\ 0 & 0,00016 & 3,9768 & 0,26315 \\ 0 & 0 & 0,2631 & 1,0232 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-3

Faktorkan $A_3 = Q_3 R_3$,

diperoleh

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 0,99782 & -0,00007 & 0,00001 & 0 \\ 0,00007 & 0,99782 & -0,00016 & 0,00001 \\ 0 & 0,00016 & 0,99782 & -0,06601 \\ 0 & 0 & 0,06601 & 0,99782 \end{bmatrix},$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 3,9855 & 0,33012 & 0,00001 & 0 \\ 0 & 1,0036 & 0,0008 & 0,00004 \\ 0 & 0 & 3,9855 & 0,32012 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0036 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_4 = R_3 Q_3 = \begin{bmatrix} 3,9986 & 0,0663 & 0 & 0 \\ 0,06625 & 1,0014 & 0,00064 & 0 \\ 0 & 0,00064 & 3,9986 & 0,0663 \\ 0 & 0 & 0,06625 & 1,0014 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-4

Faktorkan $A_4 = Q_4R_4$,

diperoleh

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 0{,}99986 & -0{,}01657 & 0{,}00001 & 0 \\ 0{,}01657 & 0{,}99986 & -0{,}00064 & 0{,}00001 \\ 0 & 0{,}00064 & 0{,}99986 & -0{,}01657 \\ 0 & 0 & 0{,}01657 & 0{,}99986 \end{bmatrix},$$

$$R_4 = \begin{bmatrix} 3{,}9991 & 0{,}08288 & 0{,}00001 & 0 \\ 0 & 1{,}0002 & 0{,}0032 & 0{,}00004 \\ 0 & 0 & 3{,}9991 & 0{,}08288 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}0002 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_5 = R_4Q_4 = \begin{bmatrix} 3{,}9999 & 0{,}01662 & 0 & 0 \\ 0{,}01657 & 1{,}0001 & 0{,}00256 & 0 \\ 0 & 0{,}00256 & 3{,}9999 & 0{,}01662 \\ 0 & 0 & 0{,}01657 & 1{,}0001 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-5

Faktorkan $A_5 = Q_5R_5$,

diperoleh

$$Q_5 = \begin{bmatrix} 0{,}99999 & -0{,}00414 & 0{,}00001 & 0 \\ 0{,}00414 & 0{,}99999 & -0{,}00256 & 0{,}00001 \\ 0 & 0{,}00256 & 0{,}99999 & -0{,}00414 \\ 0 & 0 & 0{,}00414 & 0{,}99999 \end{bmatrix},$$

$$R_5 = \begin{bmatrix} 3{,}9999 & 0{,}02076 & 0{,}00001 & 0 \\ 0 & 1{,}0 & 0{,}0128 & 0{,}00004 \\ 0 & 0 & 3{,}9999 & 0{,}02076 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}0 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_6 = R_5Q_5 = \begin{bmatrix} 3,9999 & 0,00419 & 0 & 0 \\ 0,00414 & 1,0 & 0,01024 & 0 \\ 0 & 0,01024 & 3,9999 & 0,00419 \\ 0 & 0 & 0,00414 & 0,99999 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-6

Faktorkan $A_6 = Q_6R_6$,

diperoleh

$$Q_6 = \begin{bmatrix} 1,0 & -0,00104 & 0,00001 & 0 \\ 0,00104 & 0,99995 & -0,01024 & 0,00001 \\ 0 & 0,01024 & 0,99995 & -0,00104 \\ 0 & 0 & 0,00104 & 1,0 \end{bmatrix},$$

$$R_6 = \begin{bmatrix} 3,9999 & 0,00523 & 0,00001 & 0 \\ 0 & 1,0 & 0,0512 & 0,00004 \\ 0 & 0 & 3,9996 & 0,00523 \\ 0 & 0 & 0 & 0,99999 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_7 = R_6Q_6 = \begin{bmatrix} 3,9999 & 0,00108 & 0 & 0 \\ 0,00104 & 1,0005 & 0,04096 & 0 \\ 0 & 0,04096 & 3,9994 & 0,00108 \\ 0 & 0 & 0,00104 & 0,99999 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-7

Faktorkan $A_7 = Q_7R_7$,

diperoleh

$$Q_7 = \begin{bmatrix} 1,0 & -,00026 & 0,00001 & 0 \\ 0,00026 & 0,99916 & -0,04091 & 0,00001 \\ 0 & 0,04091 & 0,99916 & -0,00026 \\ 0 & 0 & 0,00026 & 1,0 \end{bmatrix},$$

$$R_7 = \begin{bmatrix} 3,9999 & 0,00134 & 0,00001 & 0 \\ 0 & 1,0013 & 0,20452 & 0,00001 \\ 0 & 0 & 3,9944 & 0,00134 \\ 0 & 0 & 0 & 0,99999 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_8 = R_7 Q_7 = \begin{bmatrix} 3,9999 & 0,00031 & 0 & 0 \\ 0,00026 & 1,0088 & 0,16339 & 0 \\ 0 & 0,16339 & 3,991 & 0,00031 \\ 0 & 0 & 0,00026 & 0,99999 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-8

Faktorkan $A_8 = Q_8 R_8$,

diperoleh

$$Q_8 = \begin{bmatrix} 1,0 & -0,00006 & 0,00001 & 0 \\ 0,00006 & 0,98714 & -0,15988 & 0,00001 \\ 0 & 0,15988 & 0,98714 & -0,00007 \\ 0 & 0 & 0,00007 & 1,0 \end{bmatrix},$$

$$R_8 = \begin{bmatrix} 3,9999 & 0,00037 & 0,00001 & 0 \\ 0 & 1,0219 & 0,79937 & 0,00005 \\ 0 & 0 & 3,9135 & 0,00037 \\ 0 & 0 & 0 & 0,99999 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_9 = R_8Q_8 = \begin{bmatrix} 3,9999 & 0,00011 & 0 & 0 \\ 0,00007 & 1,136 & 0,62571 & 0 \\ 0 & 0,62569 & 3,8632 & 0,00011 \\ 0 & 0 & 0,00007 & 0,99999 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-9

Faktorkan $A_9 = Q_9R_9$,

diperoleh

$$Q_9 = \begin{bmatrix} 1,0 & -0,00001 & 0 & 0 \\ 0,00002 & 0,87603 & -0,48225 & 0,00001 \\ 0 & 0,48225 & 0,87603 & -0,00002 \\ 0 & 0 & 0,00002 & 1,0 \end{bmatrix},$$

$$R_9 = \begin{bmatrix} 3,9999 & 0,00013 & 0,00001 & 0 \\ 0 & 1,2974 & 2,4112 & 0,00005 \\ 0 & 0 & 3,0825 & 0,00012 \\ 0 & 0 & 0 & 0,99999 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{10} = R_9Q_9 = \begin{bmatrix} 3,9999 & 0,00006 & 0 & 0 \\ 0,00002 & 2,2994 & 1,4866 & 0 \\ 0 & 1,4865 & 2,7004 & 0,00006 \\ 0 & 0 & 0,00002 & 0,99999 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-10

Faktorkan $A_{10} = Q_{10}R_{10}$,

diperoleh

$$Q_{10} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,83979 & -0,5429 & 0 \\ 0 & 0,5429 & 0,83979 & -0,00001 \\ 0 & 0 & 0,00001 & 1,0 \end{bmatrix},$$

$$R_{10} = \begin{bmatrix} 3,9999 & 0,00008 & 0 & 0 \\ 0 & 2,7381 & 2,7145 & 0,00003 \\ 0 & 0 & 1,4607 & 0,00007 \\ 0 & 0 & 0 & 0,99999 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{11} = R_{10}Q_{10} =$$

$$\begin{bmatrix} 3,9999 & 4,9873\times10^{-5} & 0 & 0 \\ 1,4707\times10^{-5} & 3,7731 & 0,793 & 0 \\ 0 & 0,79301 & 1,2267 & 4,9611\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 1,4716\times10^{-5} & 0,99999 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-11

Faktorkan $A_{11} = Q_{11}R_{11}$,

diperoleh

$$Q_{11} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,97862 & -0,20568 & 0 \\ 0 & 0,20568 & 0,97862 & -0,00001 \\ 0 & 0 & 0,00001 & 1,0 \end{bmatrix},$$

$$R_{11} = \begin{bmatrix} 3,9999 & 0,00006 & 0 & 0 \\ 0 & 3,8555 & 1,0285 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0373 & 0,00001 \\ 0 & 0 & 0 & 0,99999 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{12} = R_{11}Q_{11} = \begin{bmatrix} 3,9999 & 4,859\times10^{-5} & 0 & 0 \\ 1,4176\times10^{-5} & 3,9846 & 0,21351 & 0 \\ 0 & 0,21335 & 1,0151 & 4,8335\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 1,4186\times10^{-5} & 0,99999 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-12

Faktorkan $A_{12} = Q_{12}R_{12}$,

diperoleh

$$Q_{12} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,99857 & -0,05347 & 0 \\ 0 & 0,05347 & 0,99857 & -1,4134\times 10^{-5} \\ 0 & 0 & 1,4154\times 10^{-5} & 1,0 \end{bmatrix},$$

$$R_{12} = \begin{bmatrix} 3,9999 & 6,2712\times 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 3,9903 & 0,26748 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0022 & 6,242\times 10^{-5} \\ 0 & 0 & 0 & 0,99999 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{13} = R_{12}Q_{12} = \begin{bmatrix} 3,9999 & 4,8507\times 10^{-5} & 0 & 0 \\ 1,4142\times 10^{-5} & 3,9989 & 0,05375 & 0 \\ 0 & 0,05359 & 1,0008 & 4,8255\times 10^{-5} \\ 0 & 0 & 1,4154\times 10^{-5} & 0,99999 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-13

Faktorkan $A_{13} = Q_{13}R_{13}$,

diperoleh

$$Q_{13} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.99991 & -0,0134 & 0 \\ 0 & 0,0134 & 0,99991 & -1,4153\times 10^{-5} \\ 0 & 0 & 1,4154\times 10^{-5} & 1,0 \end{bmatrix},$$

$$R_{13} = \begin{bmatrix} 3,9999 & 6,2645\times 10^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 3,9993 & 0,06715 & 0 \\ 0 & 0 & 0,99999 & 6,2405\times 10^{-5} \\ 0 & 0 & 0 & 0,99999 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{14} = R_{13}Q_{13} = \begin{bmatrix} 3,9999 & 4,8501\times10^{-5} & 0 & 0 \\ 1,414\times10^{-5} & 3,9998 & 0,01356 & 0 \\ 0 & 0,0134 & 0,9999 & 4,8255\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 1,4154\times10^{-5} & 0,99999 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-14

Faktorkan $A_{14} = Q_{14}R_{14}$,

diperoleh

$$Q_{14} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.99999 & -0,0033 & 0 \\ 0 & 0,00335 & 0,99999 & -1,4156\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 1,4156\times10^{-5} & 1,0 \end{bmatrix},$$

$$R_{14} = \begin{bmatrix} 3,9999 & 6,2641\times10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 3,9998 & 0,01691 & 0 \\ 0 & 0 & 0,99985 & 6,2408\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 0 & 0,99999 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{15} = R_{14}Q_{14} = \begin{bmatrix} 3,9999 & 4,85\times10^{-5} & 0 & 0 \\ 1,414\times10^{-5} & 3,9998 & 0,00351 & 0 \\ 0 & 0,00335 & 0,99984 & 4,8254\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 1,4154\times10^{-5} & 0,99999 \end{bmatrix}.$$

Iterasi-15

Faktorkan $A_{15} = Q_{15}R_{15}$,

Diperoleh

$$Q_{15}Q_{15} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0 & -0,00084 & 0 \\ 0 & 0,00084 & 1,0 & -1,4158\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 1,4158\times10^{-5} & 1,0 \end{bmatrix},$$

$$R_{15} = \begin{bmatrix} 3,9999 & 6,264\times10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 3,9998 & 0,00435 & 0 \\ 0 & 0 & 0,99984 & 6,2412\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 0 & 0,99999 \end{bmatrix}$$

maka

$$A_{16} = R_{15}Q_{15} = \begin{bmatrix} 3,9999 & 4,85\times10^{-5} & 0 & 0 \\ 1,414\times10^{-5} & 3,9998 & 0,00001 & 0 \\ 0 & 0,00084 & 0,99984 & 4,8254\times10^{-5} \\ 0 & 0 & 1,4154\times10^{-5} & 0,99999 \end{bmatrix}.$$

Pada matriks A_{16}, entri-entri di atas dan di bawah diagonal sangat kecil dan akan mendekati nol setelah setiap iterasi berikutnya. Sementara itu, entri-entri pada diagonalnya tidak berubah setelah setiap iterasi berikutnya, sehingga matriks A_{16} konvergen ke matriks diagonal. Dengan demikian, nilai eigen dari matriks T adalah entri-entri dari diagonal A_{16}, yaitu 3,9999; 3,9998; 0,99984 dan 0.99999.

Sementara itu, dengan menggunakan SWP (*Scientific Workplace*), nilai eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

adalah $2, 1, 1, 4, 4$.

Jadi, nilai eigen dari T mendekati nilai eigen dari A untuk setiap m, dan juga menghasilkan nilai eigen ekstrim dari A.

Berikut secara ringkas perbandingan nilai eigen yang dicari dengan menggunakan algoritma Lanczos dan dengan menggunakan SWP (*Scientific Workplace*).

No	Matriks A	Nilai eigen dengan menggunakan algoritma Lanczos			Nilai Eigen matriks A dengan menggunakan SWP
		T berukuran 2×2	T berukuran 3×3	T berukuran 4×4	
1.	$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$	▪ 5,754 ▪ 0,57928	▪ 6,0 ▪ 4,5617 ▪ 0,43849	–	▪ 5 ▪ 6 ▪ 4,56155 ▪ 0,43845
2.	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	▪ 4 ▪ -1	–	–	▪ 4 ▪ -1 ▪ 2,61803 ▪ 0,38197

3.	$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	▪ 3,9999 ▪ 0,99999	▪ 3,9999 ▪ 1,9999 ▪ 1,0001	▪ 3,9999 ▪ 3,9998 ▪ 0,99984 ▪ 0.99999	▪ 2 ▪ 1 ▪ 1 ▪ 4 ▪ 4
4.	$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$	▪ 2,5858 ▪ 5,4142	▪ 2,4189 ▪ 4 ▪ 5,5811	▪ 2,268 ▪ 3,0001 ▪ 5,0001 ▪ 5,7321	▪ 5 ▪ 3 ▪ 4 ▪ 5,73205 ▪ 2,26795
5.	$\begin{bmatrix} 10 & 2 & 2 & -6 & 9 \\ 2 & 10 & 2 & -6 & 9 \\ 2 & 2 & 10 & -6 & 9 \\ -6 & -6 & -6 & 26 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & -19 \end{bmatrix}$	▪ -19,705 ▪ 30,135	▪ -27,997 ▪ 16,999 ▪ 32	▪ -27,997 ▪ 16,144 ▪ 16,999 ▪ 32	▪ -28 ▪ 17 ▪ 32 ▪ 8 ▪ 8

Dari tabel di atas, dapat dilihat bahwa, nilai eigen matriks T berukuran $m \times m$ mendekati nilai eigen matriks A berukuran $n \times n$. Namun, jika m terlalu kecil maka nilai eigen matriks T tidak mendekati nilai eigen matriks A. Hal ini terlihat seperti pada contoh 5. Dengan menggunakan (3.2.11), dapat dilihat pemilihan m yang tepat.

Contoh :

Untuk kasus pada contoh 5. Tetapkan $\varepsilon = 0{,}1$ sehingga :

- Untuk $m = 2$

$$\left|\frac{\lambda_0(m) - \lambda_0(m-1)}{\lambda_0(m)}\right| = 0{,}66816 > \varepsilon$$

Tidak memenuhi persamaan (3.2.11).

- Untuk $m = 3$

$$\left|\frac{\lambda_0(m) - \lambda_0(m-1)}{\lambda_0(m)}\right| = 0{,}05828 < \varepsilon$$

Memenuhi persamaan (3.2.11).

- Untuk $m = 4$

$$\left|\frac{\lambda_0(m) - \lambda_0(m-1)}{\lambda_0(m)}\right| = 0 < \varepsilon$$

Memenuhi persamaan (3.2.11).

Jadi, pemilihan m yang tepat yaitu pada saat matriks T berukuran 3×3 dan 4×4.

Pada contoh 5 ini, ukuran matriks belum dapat dikatakan berukuran besar, sehingga penetapan ε yang dipilih tidak terlalu kecil.

BAB IV

KESIMPULAN

Dari pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa :

1. Algoritma Lanczos untuk mereduksi matriks semetri A berukuran $n \times n$ menjadi matriks simetri tridiagonal T berukuran $m \times m$ dengan $m < n$ yaitu:
   - Definisikan vektor $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}, u_0 = 1$ dan vektor $\mathbf{q}_1 \neq \mathbf{0}$ sebarang dengan $\|\mathbf{q}_1\| = 1$.
   - Untuk j = 1, 2, ..., m
     - Hitung vektor $\boldsymbol{w}_j = A\boldsymbol{q}_j - \mathrm{u}_{\mathrm{j}-1}\mathbf{q}_{\mathrm{j}-1}$ dan skalar $d_j = \mathbf{q}_j{}^T\boldsymbol{w}_j$.
     - Selanjutnya hitung vektor $\mathbf{r}_j = \boldsymbol{w}_j - \mathrm{d}_\mathrm{j}\mathbf{q}_\mathrm{j}$ dan skalar $u_j = \|\mathbf{r}_j\|$ (untuk $1 \leq j \leq$ m-1).
     - Jika $u_{j^*} = 0$, maka proses dihentikan.
     - Hitung $\mathbf{q}_{j+1} = \frac{\mathbf{r}_j}{u_j}$.

   Selanjutnya, nilai eigen dari matriks T dicari dengan menggunakan algoritma QR, sehingga nilai eigen dari matriks T mendekati nilai eigen dari matriks A.

2. Nilai eigen dari matriks tridiagonal T tetap mempertahankan nilai eigen ekstrim dari matriks A.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H dan C. Rorres. 1973. *Aljabar Linear Elementer*. Erlangga, Jakarta

[2] Bunjamin, M. *Solusi Masalah Spektral Matrix Raksasa dengan Iterasi Subruang Krylov dan Metode Lanczos*. http://www.batan.go.id/.../bunjamin2.pdf. 14 Oktober 2010

[3] Chen, Jiun Yang. 2007. *An Introduction to Lanczos Method*. http://www.math.nuk.edu.tw/jinnliu/Software_Engineering/lanczos.pdf. 25 Maret 2010

[4] Hager, W.W. 1988. *Applied Numerical Linear Algebra*. Pennsylvania State University, Amerika

[5] Leon, Steven J. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*; Edisi Kelima. Erlangga, Jakarta

[6] Olver, Peter j. 2010. *Orthogonal Bases and The QR Algorithm*. http://www.math.umn.edu/~olver/aims_/qr.pdf. 25 Desember 2010

[7] Rachmani, Nisa. 2008. *Nilai Eigen dan Vektor Eigen dari Matriks Tridiagonal*. *Skripsi-S1*, FMIPA Institut Pertanian Bogor, Bogor