



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar Unand.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Unand.

PELABELAN 0-ANTI AJAIB 2-ANTI AJAIB UNTUK GRAF TANGGA Lmn

SKRIPSI



**QUINOZA GUVIL
07 134 081**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2011**

KATA PENGANTAR

Assalammu'alaikum Wr. Wb.

Syukur Alhamdulillah penulis aturkan kehadiran Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-NYA, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul ” **PELABELAN 0-ANTI AJAIB DAN 2-ANTI AJAIB UNTUK GRAF TANGGA L_n^m** ”. Penulisan skripsi ini merupakan salah satu syarat untuk menyelesaikan program studi strata di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Andalas Padang.

Pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada pihak yang telah memberikan bimbingan, pengarahan, dorongan dan motivasi sehingga laporan Tugas Akhir ini dapat diselesaikan dengan lancar, diantaranya:

1. **Keluarga** tercinta, papa, mama, adik-adik dengan sabar dan ikhlas memberikan kasih sayang, doa, dan dukungannya kepada penulis.
2. Bapak **Dr. Syafrizal Sy** selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas Padang sekaligus dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, petunjuk, masukan, dan motivasi selama proses pengajuan judul hingga selesainya pembuatan skripsi ini.
3. Ibu **Dr. Lyra Yulianti** selaku koordinator pendidikan Jurusan Matematika Universitas Andalas juga sekaligus dosen pembimbing yang dengan sabar telah meluangkan banyak waktunya untuk memberikan bimbingan, membaca penulisan, petunjuk, masukan dan motivasi selama proses penyelesaian pembuatan skripsi ini.

4. Bapak **Budi Rudianto M.Si**, Bapak **Narwen, M.Si** dan Bapak **Efendi, M.Si** selaku penguji yang telah memberikan kritik dan saran pada seminar skripsi dan ujian sarjana.
5. Bapak **Hazmira Yozza, M.Si** selaku pembimbing akademik yang telah banyak memberikan masukan dan saran dalam pengambilan mata kuliah.
6. Seluruh **Staf Pengajar** Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas yang telah memberikan bekal ilmu yang sangat bermanfaat. Dan seluruh staf tata usaha Jurusan Matematika **Buk Eli, Mama Cun, Pak Syamsir** dan **Kak Opi**, yang telah banyak membantu selama penulis melaksanakan studi di Jurusan Matematika Universitas Andalas.
7. **Samuharsent Yeaniz, S.T** atas segala kesabaran, kasih sayang dan dorongan motivasi agar penulis cepat menyelesaikan Tugas Akhir ini.
8. Teman-teman mahasiswa di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas, khususnya **angkatan 2007** dan **2009**, yang telah banyak menyumbangkan tenaga, inspirasi dan motivasi selama penulis mengikuti studi.

Penulis menyadari bahwa tulisan ini masih mempunyai banyak kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran sangat diharapkan demi penyempurnaannya. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat dalam perkembangan ilmu matematika, khususnya di Universitas Andalas.

Wassalamu 'alaikum warahmatullahi wabarakatuh.

Padang, 9 Agustus 2011

Penulis

ABSTRAK

Misal suatu graf $G = (V, E, F)$ dengan himpunan titik $V(G)$, himpunan sisi $E(G)$, dan himpunan muka $F(G)$. Pemetaan satu-satu

$$\lambda : V(G) \cup E(G) \cup F(G) \longrightarrow \{1, 2, \dots, v + e + f\}$$

dinamakan pelabelan tipe $(1, 1, 1)$.

Pelabelan graf $G = (V, E, F)$ disebut **d -anti ajaib** jika untuk setiap s , bobot dari himpunan s -sisi muka adalah $W_s = \{a_s, a_s + d, a_s + 2d, \dots, a_s + (f_s - 1)d\}$ untuk suatu a_s dan d bilangan bulat ($a_s > 0, d \geq 0$), dimana f_s adalah banyaknya muka dengan s -sisi. Bobot W_s berbeda untuk s berbeda. Pada skripsi ini, akan ditunjukkan bahwa graf tangga L_n^m memiliki pelabelan d -anti ajaib dengan $d \in \{0, 2\}$.

Kata kunci : *Graf Tangga L_n^m , s -Sisi Muka, Pelabelan Anti Ajaib.*



DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
ABSTRAK	iii
DAFTAR ISI	iv
DAFTAR GAMBAR	v
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Pembatasan Masalah	2
1.4 Tujuan	2
1.5 Sistematika Penulisan	2
BAB II LANDASAN TEORI	
2.1 Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf	3
2.2 Graf Bidang (<i>Plane Graph</i>)	7
2.3 Graf Tangga (<i>Ladder Graph</i>)	9
2.4 Pelabelan Graf	10
BAB III Pelabelan 4-Anti Ajaib Untuk Graf Tangga L_n^m	
3.1 Graf Tangga L_n^m	12
3.2 Teorema Pendukung	13
3.3 Bobot <i>Face</i> (Muka) pada Graf Tangga L_n^m	14
BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	27
4.2 Saran	27
DAFTAR PUSTAKA	

DAFTAR GAMBAR

No.	Halaman
2.1.1	Ilustrasi Titik, Sisi dan Muka pada graf G 4
2.1.2	Graf G_1 5
2.1.3	Graf G_2 dan Graf G_3 5
2.1.4	Graf G_4 6
2.1.5	Graf G_5 dan Graf G_6 7
2.2.1	K_4 adalah Graf Planar 7
2.2.2	K_5 adalah Bukan Graf Planar 8
2.2.3	Tiga Buah Graf Planar 8
2.2.4	Graf Planar yang Terdiri dari 5 Muka 9
2.3.1	Graf Tangga $L_4 = P_2 \times P_4$ 9
2.4.1	Pelabelan Titik Sisi Ajaib pada Graf P_5 10
2.4.2	Pelabelan Anti Ajaib pada Graf G^* 11
3.1.1	Graf Tangga L_4^2 13
3.2.1	Pelabelan pada Graf Tangga L_3^2 17
3.2.2	Pelabelan Tipe (1,1,1) pada Graf Tangga L_3^2 dengan $d = 0$ 24
3.2.3	Pelabelan Tipe (1,1,1) pada Graf Tangga L_3^2 dengan $d = 2$ 25

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu bidang dalam matematika yang cukup penting untuk dipelajari dan dikembangkan. Salah satu topik kajian dalam teori graf adalah pelabelan graf. Objek kajian pada graf secara umum direpresentasikan oleh titik (*vertex*), sisi (*edge*), dan muka (*face*) yang disebut label. Pelabelan pertama kali diperkenalkan oleh Sedláček (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Teori Graf mempunyai berbagai terapan dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan, diantaranya dalam model jaringan transportasi, sistem komunikasi, silsilah keluarga, desain arsitektur.

Harstfield dan Ringel (1990) menyatakan bahwa pelabelan tipe (1,1,1) adalah pemetaan satu-satu dari $V \cup E \cup F$ ke himpunan bilangan bulat $\{1,2,3, \dots, |V(G)| + |E(G)| + |F(G)|\}$. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan daerah asal himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan muka adalah pelabelan dengan domain himpunan muka.

Jika pada pelabelan bobot titik, bobot sisi, atau bobot muka berbeda, maka pelabelan ini dikatakan dengan pelabelan anti ajaib. Jika bobot muka membentuk barisan aritmatika dengan beda d , maka pelabelan tersebut dinamakan **pelabelan d -anti ajaib**, sedangkan pelabelan ajaib jika memiliki bobot titik, bobot sisi, dan bobot muka yang sama, maka pelabelan disebut pelabelan ajaib. Pelabelan anti

ajaib adalah perluasan dari pelabelan ajaib yang diperkenalkan oleh Ko-Wei Lih, 1983 dalam jurnal *On Magic and Consecutive Labeling Of Plane Graphs*.

1.2 Perumusan Masalah

Dari uraian pada latar belakang di atas, permasalahan yang dikaji dalam tugas akhir ini adalah pelabelan d -anti ajaib untuk graf tangga L_n^m dengan $n \geq 2$, dan $m \geq 1$.

1.3 Pembatasan Masalah

Kajian pada perumusan masalah di atas adalah menentukan pelabelan d -anti ajaib untuk graf L_n^m , dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 1$ serta pembatasan pada d dimana $d \in \{0,2\}$.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan penulisan skripsi ini adalah menentukan pelabelan anti ajaib untuk graf tangga L_n^m dimana $n \geq 2$, dan $m \geq 1$ sehingga memiliki pelabelan tipe $(1, 1, 1)$ dengan $d \in \{0,2\}$.

1.5 Sistematika Penulisan

Pada Bab I akan diuraikan tentang latar belakang, permasalahan, pembatasan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan skripsi ini. Konsep dasar dari teori graf berupa definisi dan serta beberapa teori pendukung yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan skripsi ini disajikan pada Bab II. Kemudian, pembahasan dari permasalahan tersebut akan diuraikan pada Bab III, yaitu pelabelan d -anti ajaib untuk graf tangga L_n^m dimana $n \geq 2$, dan $m \geq 1$ sehingga memiliki pelabelan tipe $(1, 1, 1)$ yang merupakan kajian utama. Penulisan skripsi ini diakhiri dengan bagian kesimpulan dan saran yang disajikan pada Bab IV.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan disajikan beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan permasalahan yang telah dikemukakan pada Bab I. Definisi dan terminologi dalam teori graf diberikan pada Subbab 2.1, Subbab 2.2 menjelaskan tentang graf bidang, Subbab 2.3 menjelaskan tentang graf tangga dan Subbab 2.4 menjelaskan tentang pelabelan graf.

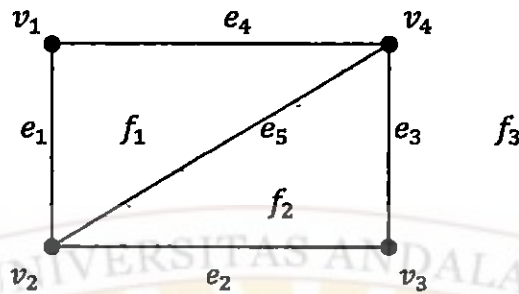
2.1 Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf

Harstfield dan Ringel (1990) menyatakan bahwa $G^* = (V, E)$ disebut **graf** jika G^* terdiri dari pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan titik tak kosong dan E terdiri dari pasangan tak terurut dari elemen-elemen V . Elemen-elemen dari V disebut **titik** (*vertices*) dan elemen-elemen dari E disebut **sisi** (*edges*) dari G^* . Graf dengan satu titik dan tidak mempunyai sisi disebut **graf trivial**.

Graf G dikatakan **graf bidang** (*plane graf*) jika graf G dapat digambarkan pada bidang datar sedemikian sehingga tidak ada sisi yang saling berpotongan. Graf bidang $G = (V, E, F)$ memiliki himpunan titik $V(G)$, himpunan sisi $E(G)$, dan himpunan *face* $F(G)$. Banyaknya titik di G pada graf disebut sebagai kardinalitas graf dan dinotasikan dengan v , banyaknya sisi di G dinotasikan dengan e , dan banyaknya *face* di G dinotasikan dengan f .

Bondy dan Murty (1976) menjelaskan bahwa titik pada graf dapat dilabeli dengan huruf, seperti $a, b, c, \dots, v, w, \dots$, dengan bilangan asli $1, 2, 3, \dots$, atau

gabungan keduanya. Jika e yang menghubungkan titik v_i dengan titik v_j , maka e dapat ditulis sebagai $e = (v_i, v_j)$ untuk suatu i dan j . Perhatikan gambar 2.1.1.



Gambar 2.1.1 Ilustrasi Titik, Sisi, dan Muka pada Graf G

Pada Gambar 2.1.1 terdapat graf G dengan

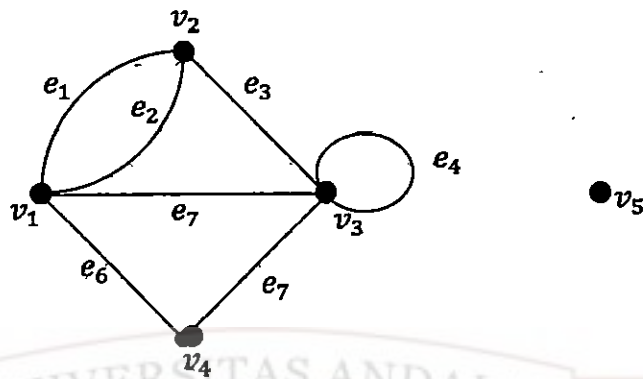
himpunan titik: $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,

himpunan sisi: $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$,

himpunan muka $F(G) = \{f_1, f_2, f_3\}$.

Pada graf G terdapat 2 titik v_j dan v_k , dua buah titik pada graf G dikatakan **bertetangga (adjacent)** bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Sedangkan untuk sebarang sisi $e = (v_i, v_j)$, sisi e dikatakan **terkait (insiden)** dengan simpul v_i dan v_j . Misal terdapat dua buah titik u dan v yang saling berdekatan dan sisi e insiden terhadap titik u dan v , maka titik u dan v disebut **titik ujung (endpoint)** dari sisi e .

Beberapa sisi berbeda pada graf yang menghubungkan pasangan titik yang sama, graf tersebut dapat dikatakan mempunyai **sisi ganda (multiple edge)**. Sisi yang menghubungkan titik yang sama disebut **loop**. Perhatikan gambar 2.1.2.

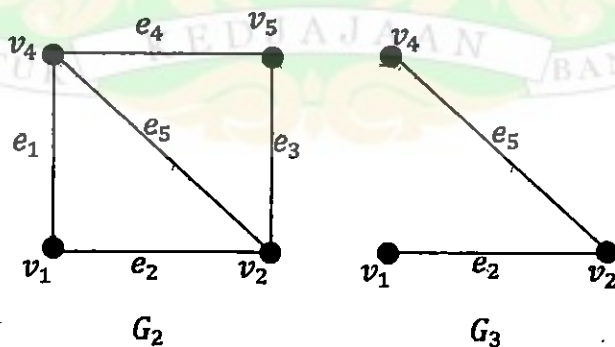


Gambar 2.1.2 Graf G_1

Keterangan Gambar 2.1.2:

- (i) Pada graf G_1 , titik v_2 dan titik v_3 merupakan dua titik yang bertetangga, sedangkan titik v_2 dan titik v_4 tidak bertetangga.
- (ii) Pada graf G_1 , sisi e_3 terkait dengan titik v_2 dan titik v_3 , tetapi tidak terdapat sisi yang terkait dengan titik v_2 dan titik v_4 .
- (iii) Pada graf G_1 memuat sisi ganda yaitu sisi e_1 dan sisi e_2 , sementara sisi e_3 merupakan loop.

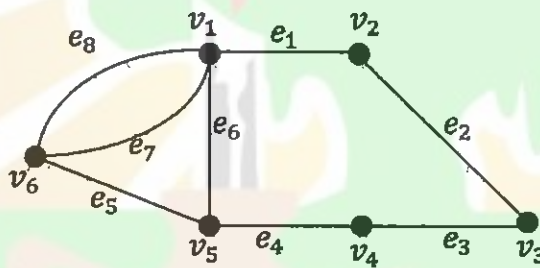
Graf $H = (V_1, E_1)$ adalah subgraf dari graf G jika $V(H) \subseteq V(G)$, yaitu jika titik dari H juga titik dari G , dan $E(H) \subseteq E(G)$ yaitu jika sisi-sisi dari H juga sisi-sisi dari G . Perhatikan gambar 2.1.3.



Gambar 2.1.3 Graf G_2 dan Graf G_3

Pada Gambar 2.1.3 terdapat gambar graf G_3 memuat $V(G_3) = \{v_1, v_2, v_4\}$ dan $E(G_3) = \{e_2, e_5\}$. Karena $V(G_3) \subseteq V(G_2)$ dan $E(G_3) \subseteq E(G_2)$ maka G_3 merupakan subgraf dari G_3 .

Suatu **jalan (walk)** pada graf G adalah suatu urutan yang terdiri atas titik-titik dan sisi-sisi bergantian, dimana setiap sisi insiden dengan titik terdekat, diawali dan diakhiri pada suatu titik. Suatu jalan yang setiap sisinya berbeda disebut **jalur (trail)**. Jika semua titik yang dilewati pada suatu jalur berbeda maka **walk** disebut **lintasan (path)**. Suatu lintasan dalam graf G jika semua titik-titiknya berbeda serta diawali dan diakhiri dengan titik yang sama maka disebut **siklus (cycle)**. Perhatikan Gambar 2.1.4.



Gambar 2.1.4 Graf G_4

Keterangan Gambar 2.1.4:

Walk pada graf G_4 : $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5$

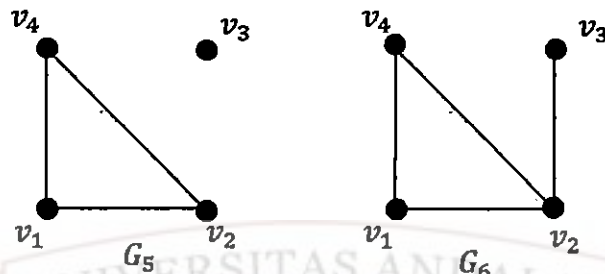
Trail pada graf G_4 : $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5, e_5, v_6$

Path pada graf G_4 : $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$

Cycle pada graf G_4 : $v_1, e_6, v_5, e_5, v_6, e_7, v_1$

Suatu graf G disebut **graf terhubung (connected graph)**, jika untuk setiap pasang titik v_i dan v_j di dalam himpunan V terdapat lintasan dari v_i ke v_j . Jika

tidak terdapat lintasan dari v_i ke v_j , maka graf G disebut **graf tak terhubung** (*disconnected graph*). Perhatikan Gambar 2.1.5.

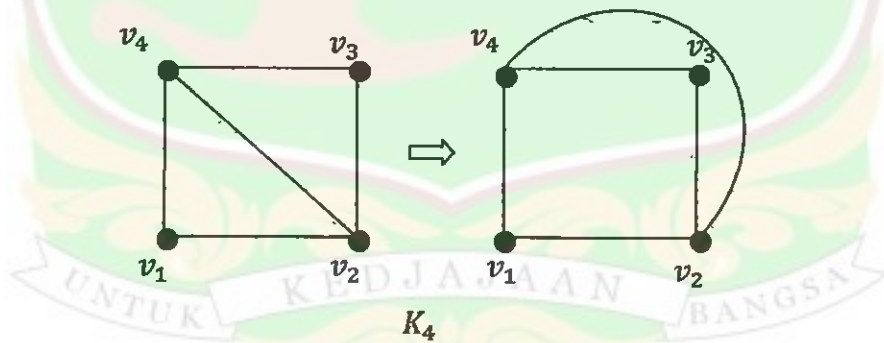


Gambar 2.1.5 Graf G_5 dan Graf G_6

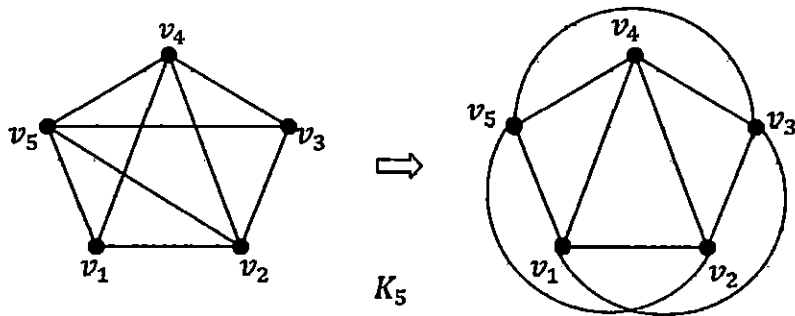
Pada gambar 2.1.5, graf G_5 merupakan graf tak terhubung dan graf G_6 merupakan graf terhubung.

2.2 Graf Bidang (*Plane Graph*)

Suatu graf G dikatakan **graf planar** apabila graf G tersebut dapat digambarkan pada suatu bidang datar dengan sisi-sisi yang tidak saling bersilangan. Perhatikan Gambar 2.2.1 dan Gambar 2.2.2.



Gambar 2.2.1 K_4 adalah Graf Planar

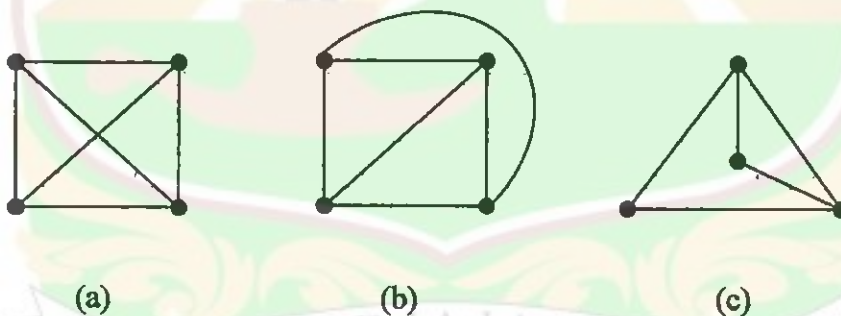


Gambar 2.2.2 K_5 Bukan Graf Planar

Graf K_4 pada Gambar 2.2.1 adalah graf planar karena graf tersebut dapat digambarkan kembali tanpa ada sisi-sisi yang berpotongan, sedangkan K_5 pada Gambar 2.2.2 bukan graf planar.

Graf planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan disebut graf bidang (*plane graph*).

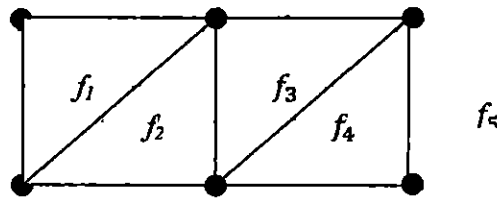
Perhatikan Gambar 2.2.3, graf (a), (b), dan (c) adalah graf planar, tetapi graf (a) bukan graf bidang, sedangkan graf (b) dan (c) adalah graf bidang.



Gambar 2.2.3 Tiga Buah Graf Planar

Sisi-sisi pada graf planar membagi bidang menjadi beberapa muka. Pada setiap graf bidang terdapat satu muka yang tidak terbatas yang dinamakan dengan muka (*face*) eksternal, disingkat dengan f_{ext} . Untuk muka yang lain dinamakan muka (*face*) internal, disingkat f_{int} .

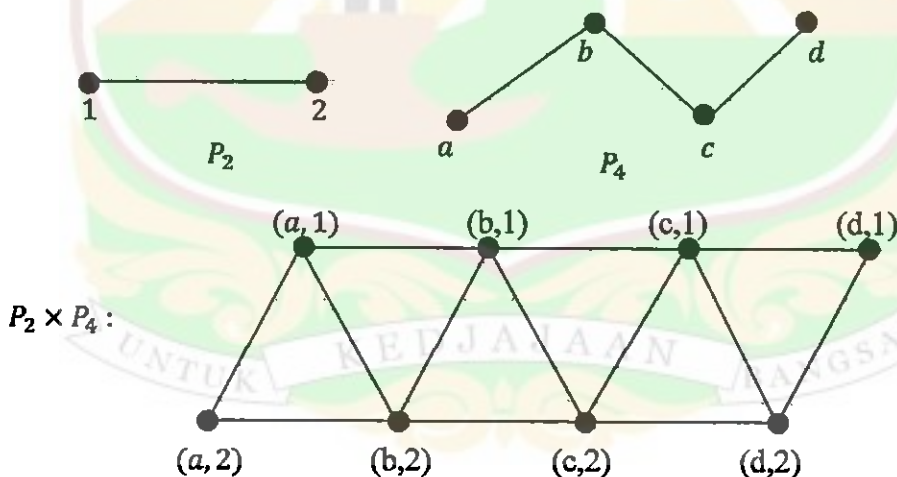
Perhatikan Gambar 2.2.4, graf planar G terdiri dari 5 muka yaitu f_1, f_2, f_3 sebagai f_{int} dan f_4 sebagai f_{ext} .



Gambar 2.2.4 Graf Planar yang Terdiri dari 5 Muka.

2.3 Graf Tangga (Ladder Graph) [7]

Graf tangga (*ladder graph*) merupakan jenis graf planar yang dihasilkan dari hasil kali kartesius graf lintasan P_2 dan lintasan P_n , yaitu $P_2 \times P_n$. Untuk pembahasan selanjutnya graf tangga dinotasikan dengan L_n . Misalkan P_n adalah lintasan dengan $V(P_n) = \{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(P_n) = \{x_i x_{i+1} : 1 \leq i \leq n - 1\}$. Graf tangga $L_n = P_2 \times P_n$ dengan 3-sisi muka diberikan pada Gambar 2.3.1.



Gambar 2.3.1 Graf Tangga $L_4 = P_2 \times P_4$

2.4 Pelabelan Graf

Pelabelan dari suatu graf adalah suatu pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan titik, sisi, atau muka ke himpunan bilangan bulat positif. Jika domain

dari pemetaan tersebut berupa himpunan semua titik maka pelabelan tersebut disebut **pelabelan titik** (*vertex labeling*); jika domainnya berupa himpunan semua sisi disebut **pelabelan sisi** (*edge labeling*); dan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut **pelabelan total** (*total labeling*). Jumlah label dari hasil pelabelan graf disebut **bobot**.

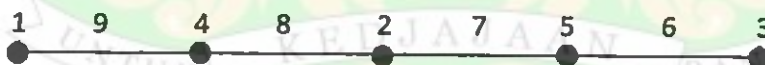
Misalkan G graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E , **pelabelan ajaib** (*magic labeling*) pada graf G adalah pemetaan bijektif λ dari E ke himpunan bilangan bulat positif yang berbeda, sehingga untuk setiap titik $v \in V$, penjumlahan semua label sisi e yang terkait terhadap titik v sama.

Contoh 2.4.1

Misalkan graf G dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E . Banyak titik di G adalah p dan banyak sisi di G adalah q . Pelabelan total sisi ajaib (*edge-magic total labeling*) pada graf G adalah pemetaan bijektif λ dari $V \cup E$ pada himpunan $\{1, 2, 3, \dots, p\}$ sehingga untuk sebarang sisi (x, y) di G berlaku

$$\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k$$

untuk suatu konstanta k . Selanjutnya k disebut konstanta ajaib pada G dan G disebut graf total sisi ajaib. Perhatikan Gambar 2.4.1.



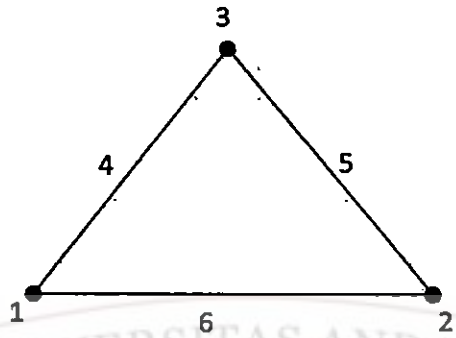
Gambar 2.4.1 Pelabelan Titik Sisi Ajaib pada Graf P_5

Pelabelan titik sisi ajaib P_5 pada Gambar 2.4.1 mempunyai $k = 14$.

Definisi 2.4.1 [7]

Suatu graf $G^* = G^*(V, E)$ yang memiliki bobot titik, bobot sisi atau bobot muka yang berbeda disebut dengan **pelabelan anti ajaib**.

Perhatikan Gambar 2.4.2.



Gambar 2.4.2 Pelabelan Anti Ajaib pada Graf G^*



BAB III

PELABELAN 0-ANTI AJAIB dan 2-ANTI AJAIB UNTUK GRAF TANGGA L_n^m

Pada bab ini akan dikaji mengenai pelabelan d -anti ajaib untuk graf tangga L_n^m dengan 3-sisi muka dimana $n \geq 2$, dan $m \geq 1$ dan $d \in \{0,2\}$.

3.1 Graf Tangga L_n^m

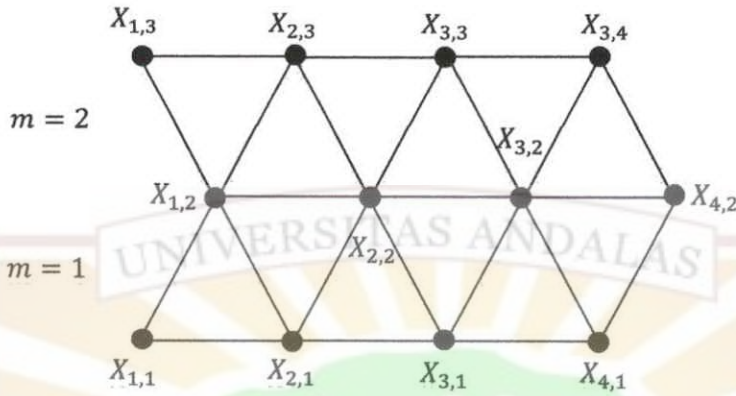
Definisi 3.1.1 [7]

Misal $I = \{1, 2, \dots, n\}$ dan $J = \{1, 2, \dots, m + 1\}$ adalah himpunan indeks dimana n adalah titik dan m adalah bidang. Untuk $n \geq 2, m \geq 1$, graf L_n^m dikatakan graf tangga dengan 3-sisi muka memiliki himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} V(L_n^m) &= \{x_{i,j} : i \in I \text{ dan } j \in J\} \\ &= \{x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,m+1}\} \\ &= \{x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,m+1}, x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,m+1}, \dots, x_{n,m+1}\} \\ E(L_n^m) &= \{x_{i,j}x_{i+1,j} : i \in I - \{n\} \text{ dan } j \in J\} \\ &\cup \{x_{i,j}x_{i,j+1} : i \in I \text{ dan } j \in J - \{m+1\}\} \\ &\cup \{x_{i+1,j}x_{i,j+1} : i \in I - \{n\} \text{ dan } j \in J - \{m+1\} \text{ dan } j \text{ ganjil}\} \\ &\cup \{x_{i,j}x_{i+1,j+1} : i \in I - \{n\} \text{ dan } j \in J - \{m+1\} \text{ dan } j \text{ genap}\} \\ &= \{x_{1,1}x_{2,1}, x_{1,2}x_{2,2}, \dots, x_{1,m+1}x_{2,m+1}, x_{2,1}x_{3,1}, \dots, x_{n-1,m+1}x_{n,m+1}\} \\ &\cup \{x_{1,1}x_{1,2}, x_{1,2}x_{1,3}, \dots, x_{i,m}x_{i+1,m+1}, x_{2,1}x_{2,2}, \dots, x_{n,m}x_{n,m+1}\} \\ &\cup \{x_{2,1}x_{1,2}, x_{2,3}x_{1,4}, \dots, x_{2,m}x_{1,m+1}, x_{3,1}x_{2,2}, \dots, x_{n,m-1}x_{n-1,m}\} \\ &\cup \{x_{1,2}x_{2,3}, x_{1,4}x_{2,5}, \dots, x_{1,m}x_{2,m+1}, x_{2,2}x_{3,3}, \dots, x_{n-1,m}x_{n,m+1}\} \end{aligned}$$

Perhatikan Gambar 3.1.1 berikut mengilustrasikan sebuah graf tangga L_n^m

3-sisi muka dengan $m = 2$ dan $n = 4$.



Gambar 3.1.1 Graf Tangga L_4^2

Banyaknya titik di graf tangga L_n^m dengan 3-sisi muka adalah $|V(L_n^m)| = v$,

dan $|E(L_n^m)| = e$, dengan

$$v = n(m + 1),$$

$$e = m(3n - 2) + n - 1.$$

Misal $f_{i,j}$ adalah muka (*face*) dari graf tangga L_n^m dengan $i \in I$ dan $j \in J$, maka

banyaknya muka $|F(L_n^m)| = f$, dengan

$$f = 2(n - 1)m + 1.$$

3.2 Teorema Pendukung

Berikut diberikan yang mendukung untuk menyelesaikan permasalahan pada skripsi ini.

Teorema 3.2.1 [1]

Misalkan L_n^m , $n \geq 2$ dan $m \geq 1$ sebuah graf tangga. Misalkan pelabelan titik g_1 adalah pelabelan d_1 -anti ajaib, pelabelan sisi g_2 adalah pelabelan d_2 -anti ajaib merupakan dan g_3 adalah pelabelan muka untuk L_n^m . Jika pelabelan

g_1 , $|V(L_n^m)| + g_2$ dan $|V(L_n^m)| + |E(L_n^m)| + g_3$ digabungkan menjadi sebuah pelabelan d -anti ajaib dari tipe $(1,1,1)$ maka parameter $d \leq 10$.

3.3 Bobot Muka d -Anti Ajaib pada Graf Tangga L_n^m

Bobot pada suatu graf G adalah jumlah nilai label untuk setiap titik, sisi, dan muka pada graf G tersebut. Bobot muka dalam pelabelan didefinisikan sebagai jumlah dari hasil pelabelan muka, titik-titik, dan sisi-sisi disekitar muka tersebut.

Pelabelan graf bidang disebut d -anti ajaib jika untuk setiap s , bobot dari himpunan s -sisi muka adalah

$$W_s = \{a_s, a_s + d, a_s + 2d, \dots, a_s + (f_s - 1)d\}$$

untuk suatu a_s dan d bilangan bulat ($a_s > 0, d \geq 0$), dimana f_s adalah jumlah muka dengan s -sisi. Bobot W_s berbeda untuk setiap s berbeda.

Pada Teorema 3.3 berikut, dikaji tentang pelabelan d -anti ajaib pada L_n^m , dengan $n \geq 2$, $m \geq 1$, dan $d \in \{0,2\}$.

Teorema 3.3

Jika $n \geq 2$, $m \geq 1$, dan $d \in \{0,2\}$ maka graf bidang memiliki sebuah pelabelan d -anti ajaib dari tipe $(1,1,1)$.

Bukti :

Lakukan pelabelan untuk semua titik dan pelabelan sisi dengan cara sebagai berikut:

➤ Pelabelan titik g_1

$$g_1(x_{i,j}) = n(m + 2 - j) + 1 - i, \text{ jika } i \in I \text{ dan } j \in J, \text{ dengan}$$

$$I = \{1, 2, \dots, n\} \text{ dan } J = \{1, 2, \dots, m + 1\}$$

➤ Pelabelan sisi g_2

Berdasarkan Teorema 3.2.1, pelabelan sisi g_2 dapat dikonstruksikan dengan cara sebagai berikut

$$g_2(x_{i,j}x_{i+1,j}) = (n-1)j + 1 - i, \quad \text{jika } i \in I - \{n\} \text{ dan } j \in J,$$

$$g_2(x_{i,j}x_{i,j+1}) = \begin{cases} m(n-1) + n(j+1) - 2 + i, & \text{jika } i \in I \text{ dan } j \leq 2 \\ m(n-1) + n(j+3) - 3 + i, & \text{jika } i \in I \text{ dan } j \in J - \{m+1\}, j \geq 3 \end{cases}$$

$$g_2(x_{i+1,j}x_{i,j+1}) = (n-1)(m+1) + \frac{j-1}{2}(4n-1) + i, \\ \text{jika } i \in I - \{n\} \text{ dan } j \in J - \{m+1\} \text{ dan } j \text{ ganjil,}$$

$$g_2(x_{i,j}x_{i+1,j+1}) = m(n-1) + \frac{j}{2}(4n-1) - 1 + i, \\ \text{jika } i \in I - \{n\} \text{ dan } j \in J - \{m+1\} \text{ dan } j \text{ genap.}$$

Himpunan pelabelan muka g_3 untuk muka internal graf tangga L_n^m adalah $\{|V(L_n^m)| + |E(L_n^m)| + 2, |V(L_n^m)| + |E(L_n^m)| + 3, \dots, |V(L_n^m)| + |E(L_n^m)| + |F(L_n^m)|\}$. Nilai - nilai dari pelabelan muka disusun sedemikian sehingga diperoleh pelabelan tipe $(1, 1, 1)$. Karena semua graf tangga hanya memiliki satu muka eksternal maka pelabelan muka eksternal adalah $|V(L_n^m)| + |E(L_n^m)| + 1$.

Kemudian tentukan bobot dari graf tangga L_n^m terhadap pelabelan titik g_1 dan pelabelan sisi g_2 sebagai berikut:

➤ jika j ganjil, $j \in J - \{m+1\}$ dan $i \in I - \{n\}$ maka

$$w_{g_1}(f_{i,j}) = g_1(x_{i,j}) + g_1(x_{i+1,j}) + g_1(x_{i,j+1}),$$

$$w_{g_1}(h_{i,j}) = g_1(x_{i+1,j}) + g_1(x_{i,j+1}) + g_1(x_{i+1,j+1}),$$

$$w_{g_2}(f_{i,j}) = g_2(x_{i,j}x_{i+1,j}) + g_2(x_{i,j}x_{i,j+1}) + g_2(x_{i+1,j}x_{i,j+1}) \text{ dan}$$

$$w_{g_2}(h_{i,j}) = g_2(x_{i+1,j}x_{i,j+1}) + g_2(x_{i,j+1}x_{i+1,j+1}) + g_2(x_{i+1,j}x_{i+1,j+1}),$$

- Jika j genap, $j \in J - \{m + 1\}$ dan $i \in I - \{n\}$ maka

$$v_{g_1}(f_{i,j}) = g_1(x_{i,j}) + g_1(x_{i+1,j}) + g_1(x_{i+1,j+1})$$

$$v_{g_1}(h_{i,j}) = g_1(x_{i,j}) + g_1(x_{i,j+1}) + g_1(x_{i+1,j+1}),$$

$$v_{g_2}(f_{i,j}) = g_2(x_{i,j}x_{i+1,j}) + g_2(x_{i,j}x_{i+1,j+1}) + g_2(x_{i+1,j}x_{i+1,j+1}) \text{ dan}$$

$$v_{g_2}(h_{i,j}) = g_2(x_{i,j}x_{i,j+1}) + g_2(x_{i,j+1}x_{i+1,j+1}) + g_2(x_{i,j}x_{i+1,j+1}).$$

Setelah bobot titik dan bobot sisi diperoleh, tentukan bobot setiap muka dengan menjumlahkan bobot titik, bobot sisi, dan pelabelan muka g_3 .

- jika j ganjil, $j \in J - \{m + 1\}$ dan $i \in I - \{n\}$ maka

$$W(f_{i,j}) = w_{g_1}(f_{i,j}) + w_{g_2}(f_{i,j}) + g_3$$

$$W(h_{i,j}) = w_{g_1}(h_{i,j}) + w_{g_2}(h_{i,j}) + g_3$$

- Jika j genap, $j \in J - \{m + 1\}$ dan $i \in I - \{n\}$ maka

$$V(f_{i,j}) = v_{g_1}(f_{i,j}) + v_{g_2}(f_{i,j}) + g_3$$

$$V(h_{i,j}) = v_{g_1}(h_{i,j}) + v_{g_2}(h_{i,j}) + g_3$$

Jika bobot titik, bobot sisi, dan pelabelan muka digabungkan, maka diperoleh pelabelan dengan tipe $(1, 1, 1)$ dimana bobot W membentuk himpunan bilangan bulat berurutan untuk setiap muka yang bertetangga. Bobot muka W dengan 3-sisi muka membentuk barisan aritmatika dengan beda $W(f_{i,j}) - W(h_{i,j}) = 0$ atau $W(f_{i,j}) - W(h_{i,j}) = 2$.

■

Contoh 3.1 (kasus 1: $m = 2, n = 3$)

Misal diberikan $m = 2, n = 3$. Akan ditunjukkan bahwa graf tangga L_3^2 memiliki pelabelan muka d -anti ajaib dengan 3-sisi muka dimana $d \in \{0,2\}$.

Solusi

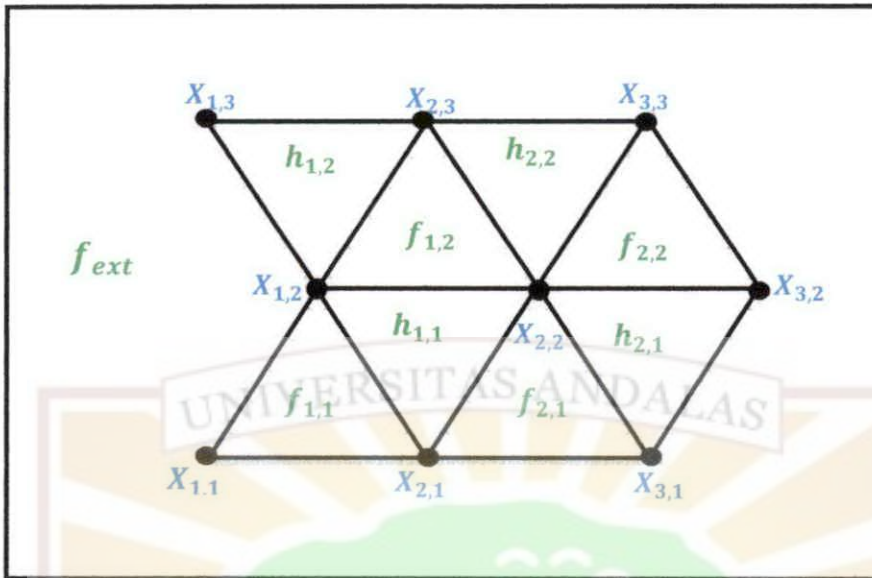
Untuk $m = 2$, $n = 3$ diperoleh $I = \{1, 2, 3\}$ dan $J = \{1, 2, 3\}$ dan graf tangga L_3^2 memiliki himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}V(L_3^2) &= \{x_{i,j} : i \in I \text{ dan } j \in J\} \\ &= \{x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}\} \\ &= \{x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, x_{3,1}, x_{3,2}, x_{3,3}\} \\ E(L_3^2) &= \{x_{i,j}x_{i+1,j} : i \in I - \{n\} \text{ dan } j \in J\} \\ &\cup \{x_{i,j}x_{i,j+1} : i \in I \text{ dan } j \in J - \{m+1\}\} \\ &\cup \{x_{i+1,j}x_{i,j+1} : i \in I - \{n\} \text{ dan } j \in J - \{m+1\} \text{ dan } j \text{ ganjil}\} \\ &\cup \{x_{i,j}x_{i+1,j+1} : i \in I - \{n\} \text{ dan } j \in J - \{m+1\} \text{ dan } j \text{ genap}\} \\ &= \{x_{1,1}x_{2,1}, x_{1,2}x_{2,2}, x_{1,3}x_{2,3}, x_{2,1}x_{3,1}, x_{2,2}x_{3,2}\} \\ &\cup \{x_{1,1}x_{1,2}, x_{1,2}x_{1,3}, x_{2,1}x_{2,2}, x_{2,2}x_{2,3}, x_{3,1}x_{3,2}, x_{3,2}x_{3,3}\} \\ &\cup \{x_{2,1}x_{1,2}, x_{3,1}x_{2,2}\} \\ &\cup \{x_{1,2}x_{2,3}, x_{2,2}x_{3,3}\}.\end{aligned}$$

Maka diperoleh,

- $v = n(m+1) = 3(2+1) = 9$
- $e = m(3n-2) + n - 1 = 2(3 \cdot 3 - 2) + 3 - 1 = 16$
- $f = 2(n-1)m + 1 = 2(3-1)2 + 1 = 9$

Selanjutnya dilakukan pelabelan terhadap graf tangga L_3^2 berdasarkan titik-titik, sisi-sisi dan muka internal serta muka eksternal yang telah diperoleh. Perhatikan Gambar 3.2.1 berikut,



Gambar 3.2.1 Pelabelan pada Graf Tangga L_3^2

Berikut adalah langkah-langkah untuk melabeli graf tangga L_3^2 .

1. Akan dilakukan pelabelan titik g_1 untuk $i \in I$ dan $j \in J$

Berdasarkan definisi dari pelabelan titik g_1 yaitu,

$$g_1(x_{i,j}) = n(m + 2 - j) + 1 - i, \quad \text{jika } i \in I \text{ dan } j \in J$$

➤ Untuk $i = 1$, jika

- $j = 1$ maka $g_1(x_{1,1}) = 3(2 + 2 - 1) + 1 - 1 = 9$
- $j = 2$ maka $g_1(x_{1,2}) = 3(2 + 2 - 2) + 1 - 1 = 6$
- $j = 3$ maka $g_1(x_{1,3}) = 3(2 + 2 - 3) + 1 - 1 = 3$

➤ Untuk $i = 2$, jika

- $j = 1$ maka $g_1(x_{2,1}) = 3(2 + 2 - 1) + 1 - 2 = 8$
- $j = 2$ maka $g_1(x_{2,2}) = 3(2 + 2 - 2) + 1 - 2 = 5$
- $j = 3$ maka $g_1(x_{2,3}) = 3(2 + 2 - 3) + 1 - 2 = 2$

➤ Untuk $i = 3$, jika

- $j = 1$ maka $g_1(x_{3,1}) = 3(2 + 2 - 1) + 1 - 3 = 7$
- $j = 2$ maka $g_1(x_{3,2}) = 3(2 + 2 - 2) + 1 - 3 = 4$
- $j = 3$ maka $g_1(x_{3,3}) = 3(2 + 2 - 3) + 1 - 3 = 1$

Pelabelan g_1 menghasilkan himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ sebagai himpunan label untuk titik.

2. Akan dilakukan pelabelan sisi g_2 dengan definisi,

$$\diamond g_2(x_{i,j}x_{i+1,j}) = (n-1)j + 1 - i, \text{ jika } i \in I - \{n\} \text{ dan } j \in J$$

➤ Untuk $i = 1$, jika

- $j = 1$ maka $g_2(x_{1,1}x_{2,1}) = (3-1)1 + 1 - 1 = 2$
- $j = 2$ maka $g_2(x_{1,2}x_{2,2}) = (3-1)2 + 1 - 1 = 4$
- $j = 3$ maka $g_2(x_{1,3}x_{2,3}) = (3-1)3 + 1 - 1 = 6$

➤ Untuk $i = 2$, jika

- $j = 1$ maka $g_2(x_{2,1}x_{3,1}) = (3-1)1 + 1 - 2 = 1$
- $j = 2$ maka $g_2(x_{2,2}x_{3,2}) = (3-1)2 + 1 - 2 = 3$
- $j = 3$ maka $g_2(x_{2,3}x_{3,3}) = (3-1)3 + 1 - 2 = 5$

$$\diamond g_2(x_{i,j}x_{i,j+1}) = \begin{cases} m(n-1) + n(j+1) - 2 + i, & \text{jika } i \in I \text{ dan } j \leq 2 \\ m(n-1) + n(j+3) - 3 + i, & \text{jika } i \in I, \text{ dan } j \geq 3 \end{cases}$$

➤ Untuk $i = 1$, jika

- $j = 1$ maka $g_2(x_{1,1}x_{1,2}) = 2(3-1) + 3(1+1) - 2 + 1 = 9$
- $j = 2$ maka $g_2(x_{1,2}x_{1,3}) = 2(3-1) + 3(2+1) - 2 + 1 = 12$

➤ Untuk $i = 2$, jika

- $j = 1$ maka $g_2(x_{2,1}x_{2,2}) = 2(3-1) + 3(1+1) - 2 + 2 = 10$
- $j = 2$ maka $g_2(x_{2,2}x_{2,3}) = 2(3-1) + 3(2+1) - 2 + 2 = 13$

➤ Untuk $i = 3$, jika

- $j = 1$ maka $g_2(x_{3,1}x_{3,2}) = 2(3 - 1) + 3(1 + 1) - 2 + 3 = 11$
- $j = 2$ maka $g_2(x_{3,2}x_{3,3}) = 2(3 - 1) + 3(2 + 1) - 2 + 3 = 14$

$$\diamond g_2(x_{i+1,j}x_{i,j+1}) = (n - 1)(m + 1) + \frac{j-1}{2}(4n - 1) + i,$$

jika $i \in I - \{n\}$ dan $j \in J - \{m + 1\}$ dan j ganjil,

➤ Untuk $i = 1$, jika

$$\begin{aligned} \bullet j = 1 \text{ maka } g_2(x_{2,1}x_{1,2}) &= (3 - 1)(2 + 1) + \frac{1-1}{2}(4(3) - 1) + 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

➤ Untuk $i = 2$, jika

$$\begin{aligned} \bullet j = 1 \text{ maka } g_2(x_{3,1}x_{2,2}) &= (3 - 1)(2 + 1) + \frac{1-1}{2}(4(3) - 1) + 2 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\diamond g_2(x_{i,j}x_{i+1,j+1}) = m(n - 1) + \frac{j}{2}(4n - 1) - 1 + i$$

jika $i \in I - \{n\}$ dan $j \in J - \{m + 1\}$ dan j genap,

➤ Untuk $i = 1$, jika

$$\bullet j = 2 \text{ maka } g_2(x_{1,2}x_{2,3}) = 2(3 - 1) + \frac{2}{2}(4(3) - 1) - 1 + 1 = 15$$

➤ Untuk $i = 2$, jika

$$\bullet j = 2 \text{ maka } g_2(x_{2,2}x_{3,3}) = 2(3 - 1) + \frac{2}{2}(4(3) - 1) - 1 + 2 = 16$$

Diperoleh himpunan label untuk sisi berdasarkan pelabelan g_2 yaitu

$$g_2 = \{|V(L_3^2)| + g_2\}$$

$$= \{9 + 1, 9 + 2, 9 + 3, 9 + 4, 9 + 5, 9 + 6, 9 + 7, 9 + 8, 9 + 9,$$

$$9 + 10, 9 + 11, 9 + 12, 9 + 13, 9 + 14, 9 + 15, 9 + 16\}$$

$$= \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\}.$$

3. Akan dilakukan pelabelan muka g_3 dengan definisi sebagai berikut,

❖ Himpunan pelabelan muka internal

$$f_{int} = \{|V(L_n^m)| + |E(L_n^m)| + 2, |V(L_n^m)| + |E(L_n^m)| + 3, \\ |V(L_n^m)| + |E(L_n^m)| + 4, |V(L_n^m)| + |E(L_n^m)| + 5, \\ |V(L_n^m)| + |E(L_n^m)| + 6, |V(L_n^m)| + |E(L_n^m)| + 7, \\ |V(L_n^m)| + |E(L_n^m)| + 8, |V(L_n^m)| + |E(L_n^m)| + 9\}$$

$$f_{int} = \{(9 + 16 + 2), (9 + 16 + 3), (9 + 16 + 4), (9 + 16 + 5), \\ (9 + 16 + 6), (9 + 16 + 7), (9 + 16 + 8), (9 + 16 + 9)\}$$

$$f_{int} = \{27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34\}$$

❖ Untuk pelabelan muka eksternal

$$f_{ext} = |V(L_3^2)| + |E(L_3^2)| + 1 \\ = 9 + 16 + 1 \\ = 26$$

4. Akan ditentukan bobot untuk setiap muka terhadap terhadap pelabelan titik g_1 dengan cara sebagai berikut,

➤ Jika j ganjil, $j \in J - \{m + 1\}$ dan $i \in I - \{n\}$ maka bobot dari 3-sisi muka adalah

$$w_{g_1}(f_{i,j}) = n(3m + 5 - 3j) + 2 - 3i$$

$$w_{g_1}(h_{i,j}) = n(3m + 4 - 3j) + 1 - 3i$$

• Untuk $j = 1$ dan $i = 1$

$$w_{g_1}(f_{1,1}) = 3(3(2) + 5 - 3(1)) + 2 - 3(1) = 23$$

$$w_{g_1}(h_{1,1}) = 3(3(2) + 4 - 3(1)) + 1 - 3(1) = 19$$

• Untuk $j = 1$ dan $i = 2$

$$w_{g_1}(f_{2,1}) = 3(3(2) + 5 - 3(1)) + 2 - 3(2) = 20$$

$$w_{g_1}(h_{2,1}) = 3(3(2) + 4 - 3(1)) + 1 - 3(2) = 16$$

➤ Jika j genap, $j \in J - \{m + 1\}$ dan $i \in I - \{n\}$ maka bobot dari 3-sisi muka adalah

$$v_{g_1}(f_{i,j}) = n(3m + 5 - 3j) + 1 - 3i$$

$$v_{g_1}(h_{i,j}) = n(3m + 4 - 3j) + 2 - 3i$$

- Untuk $j = 2$ dan $i = 1$

$$v_{g_1}(f_{1,2}) = 3(3(2) + 5 - 3(2)) + 1 - 3(1) = 13$$

$$v_{g_1}(h_{1,2}) = 3(3(2) + 4 - 3(2)) + 2 - 3(1) = 11$$

- Untuk $j = 2$ dan $i = 2$

$$v_{g_1}(f_{2,2}) = 3(3(2) + 5 - 3(2)) + 1 - 3(2) = 10$$

$$v_{g_1}(h_{2,2}) = 3(3(2) + 4 - 3(2)) + 2 - 3(2) = 8$$

Himpunan bobot titik graf $L_3^2 = \{8, 10, 11, 13, 16, 19, 20, 23\}$.

5. Akan ditentukan bobot untuk setiap muka terhadap terhadap pelabelan sisi g_2 dengan cara sebagai berikut,

➤ Jika j ganjil, $j \in J - \{m + 1\}$ dan $i \in I - \{n\}$ maka bobot dari 3-sisi muka adalah

$$w_{g_2}(f_{i,j}) = g_2(x_{i,j}x_{i+1,j}) + g_2(x_{i,j}x_{i,j+1}) + g_2(x_{i+1,j}x_{i,j+1})$$

$$w_{g_2}(h_{i,1}) = g_2(x_{i+1,j}x_{i,j+1}) + g_2(x_{i,j+1}x_{i+1,j+1}) + g_2(x_{i+1,j}x_{i+1,j+1})$$

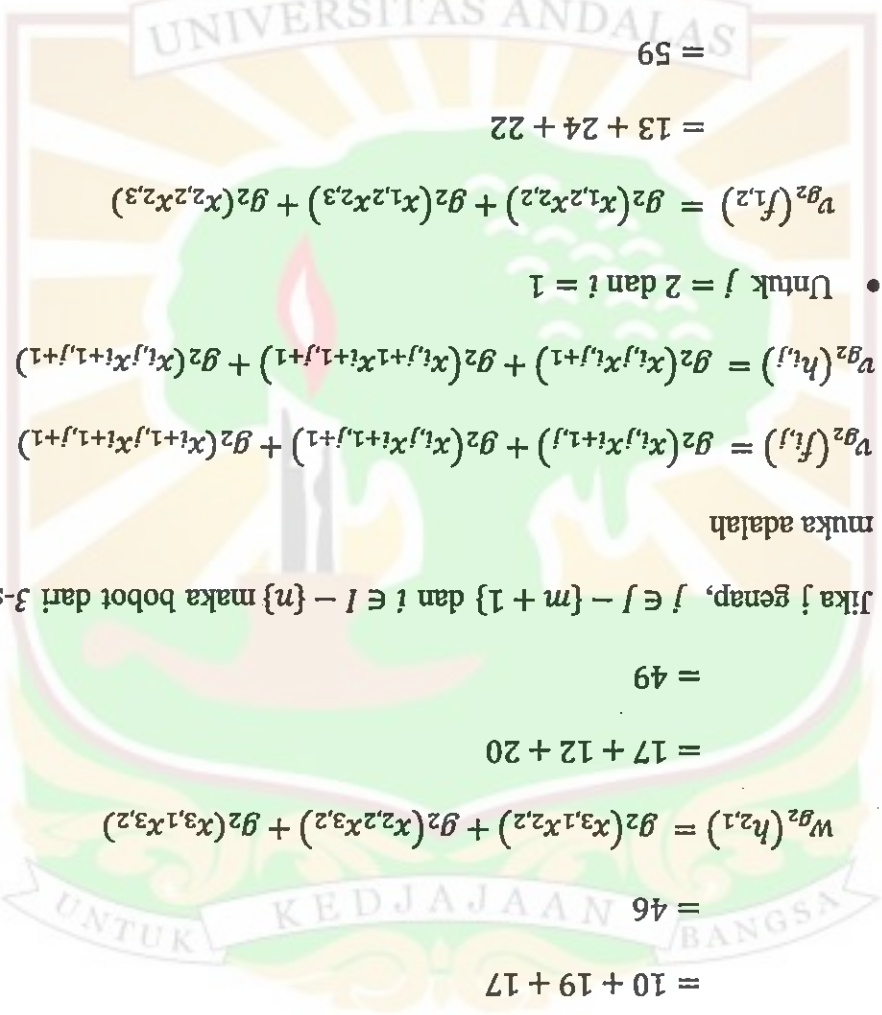
- Untuk $j = 1$ dan $i = 1$

$$w_{g_2}(f_{1,1}) = g_2(x_{1,1}x_{2,1}) + g_2(x_{1,1}x_{1,2}) + g_2(x_{2,1}x_{1,2})$$

$$= 11 + 18 + 16$$

$$= 45$$

$$\begin{aligned}
 &= 60 \\
 &= 21 + 15 + 24 \\
 &v_{g_2}^{g_2}(h_{1,2}) = g_2(x_{1,2}x_{1,3}) + g_2(x_{1,3}x_{2,3}) + g_2(x_{1,2}x_{2,3}) \\
 &= 59 \\
 &= 13 + 24 + 22 \\
 &v_{g_2}^{g_2}(f_{1,2}) = g_2(x_{1,2}x_{2,2}) + g_2(x_{1,2}x_{2,3}) + g_2(x_{2,2}x_{2,3}) \\
 \bullet \text{ Untuk } j = 2 \text{ dan } i = 1 \\
 &v_{g_2}^{g_2}(h_{i,j}) = g_2(x_{i,j}x_{i,j+1}) + g_2(x_{i,j+1}x_{i+1,j+1}) + g_2(x_{i,j}x_{i+1,j+1}) \\
 &v_{g_2}^{g_2}(f_{i,j}) = g_2(x_{i,j}x_{i+1,j}) + g_2(x_{i,j}x_{i+1,j+1}) + g_2(x_{i+1,j}x_{i+1,j+1}) \\
 &\text{muka adalah} \\
 \triangleright \text{ Jika } j \text{ genap, } j \in \{m+1, m+2, \dots, n\} \text{ maka bobot dari } 3\text{-sisi} \\
 &= 49 \\
 &= 17 + 12 + 20 \\
 &w_{g_2}^{g_2}(h_{2,1}) = g_2(x_{3,1}x_{2,2}) + g_2(x_{2,2}x_{3,2}) + g_2(x_{3,1}x_{3,2}) \\
 &= 46 \\
 &= 10 + 19 + 17 \\
 &w_{g_2}^{g_2}(f_{2,1}) = g_2(x_{2,1}x_{3,1}) + g_2(x_{2,1}x_{2,2}) + g_2(x_{3,1}x_{2,2}) \\
 \bullet \text{ Untuk } j = 1 \text{ dan } i = 2 \\
 &= 48 \\
 &= 16 + 13 + 19 \\
 &w_{g_2}^{g_2}(h_{1,1}) = g_2(x_{2,1}x_{1,2}) + g_2(x_{1,2}x_{2,2}) + g_2(x_{2,1}x_{2,2})
 \end{aligned}$$



- Untuk $j = 2$ dan $i = 2$

$$\begin{aligned} v_{g_2}(f_{2,2}) &= g_2(x_{2,2}x_{3,2}) + g_2(x_{2,2}x_{3,3}) + g_2(x_{3,2}x_{3,3}) \\ &= 12 + 25 + 23 \\ &= 60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{g_2}(h_{2,2}) &= g_2(x_{2,2}x_{2,3}) + g_2(x_{2,3}x_{3,3}) + g_2(x_{2,2}x_{3,3}) \\ &= 22 + 14 + 25 \\ &= 61 \end{aligned}$$

Himpunan bobot sisi graf $L_3^2 = \{45, 46, 48, 49, 59, 60, 60, 61\}$.

6. Akan ditentukan bobot muka dari penggabungan bobot titik, bobot sisi dan pelabelan g_3 dengan cara sebagai berikut:

$$W_{f_{1,1}} = w_{g_1}(f_{1,1}) + w_{g_2}(f_{1,1}) + g_3 = 23 + 45 + 31 = 99$$

$$W_{h_{1,1}} = w_{g_1}(h_{1,1}) + w_{g_2}(h_{1,1}) + g_3 = 19 + 48 + 32 = 99$$

$$W_{f_{2,1}} = w_{g_1}(f_{2,1}) + w_{g_2}(f_{2,1}) + g_3 = 20 + 46 + 33 = 99$$

$$W_{h_{2,1}} = w_{g_1}(h_{2,1}) + w_{g_2}(h_{2,1}) + g_3 = 16 + 49 + 34 = 99$$

$$W_{f_{1,2}} = w_{g_1}(f_{1,2}) + w_{g_2}(f_{1,2}) + g_3 = 13 + 59 + 27 = 99$$

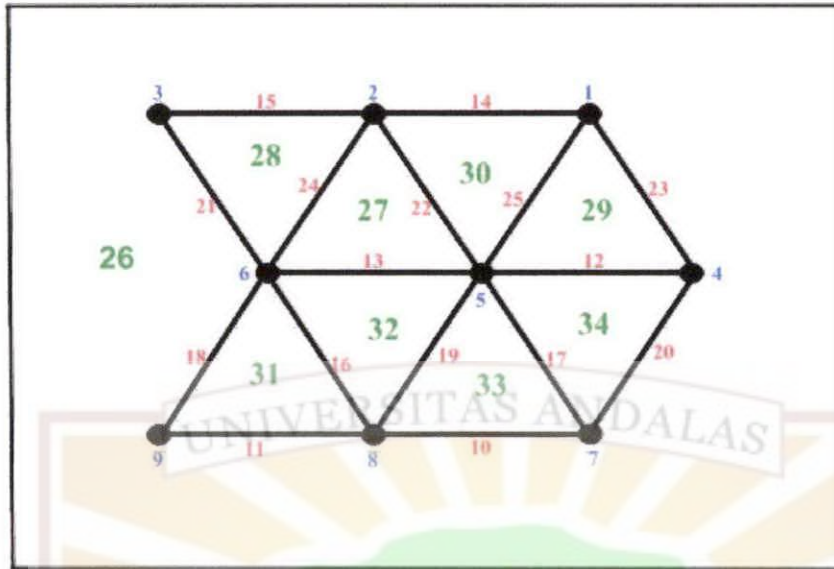
$$W_{h_{1,2}} = w_{g_1}(h_{1,2}) + w_{g_2}(h_{1,2}) + g_3 = 11 + 60 + 28 = 99$$

$$W_{f_{2,2}} = w_{g_1}(f_{2,2}) + w_{g_2}(f_{2,2}) + g_3 = 10 + 60 + 29 = 99$$

$$W_{h_{2,2}} = w_{g_1}(h_{2,2}) + w_{g_2}(h_{2,2}) + g_3 = 8 + 61 + 30 = 99$$

Jadi diperoleh himpunan bobot muka graf $L_3^2 = \{99, 99, 99, 99, 99, 99, 99, 99\}$.

Definisikan pelabelan titik-titik, sisi-sisi, dan muka berturut-turut sebagai g_1 , g_2 , dan g_3 . Akan diperoleh pelabelan dengan tipe $(1, 1, 1)$ dan 3-sisi muka pada graf tangga L_3^2 seperti Gambar 3.2.2.



Gambar 3.2.2 Pelabelan Tipe (1, 1, 1) Graf Tangga L_3^2 dengan $d = 0$

Dari himpunan bobot muka W pada graf tangga L_3^2 dengan 3-sisi muka membentuk barisan aritmatika dengan beda $d = 0$.

Dengan menyusun kembali pelabelan g_3 , maka diperoleh bobot muka W dengan 3-sisi muka yang membentuk pelabelan (1, 1, 1). Dengan cara yang sama diperoleh bobot muka W dengan cara sebagai berikut,

$$W_{f_{1,1}} = w_{g_1}(f_{1,1}) + w_{g_2}(f_{1,1}) + g_3 = 23 + 45 + 3 = 98$$

$$W_{h_{1,1}} = w_{g_1}(h_{1,1}) + w_{g_2}(h_{1,1}) + g_3 = 19 + 48 + 29 = 96$$

$$W_{f_{2,1}} = w_{g_1}(f_{2,1}) + w_{g_2}(f_{2,1}) + g_3 = 20 + 46 + 28 = 94$$

$$W_{h_{2,1}} = w_{g_1}(h_{2,1}) + w_{g_2}(h_{2,1}) + g_3 = 16 + 49 + 27 = 92$$

$$W_{f_{1,2}} = w_{g_1}(f_{1,2}) + w_{g_2}(f_{1,2}) + g_3 = 13 + 59 + 34 = 106$$

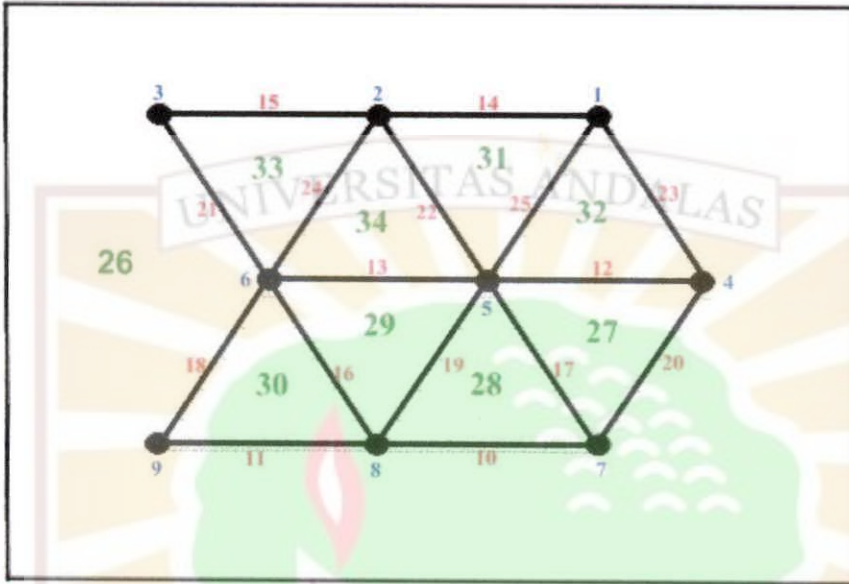
$$W_{h_{1,2}} = w_{g_1}(h_{1,2}) + w_{g_2}(h_{1,2}) + g_3 = 11 + 60 + 33 = 104$$

$$W_{f_{2,2}} = w_{g_1}(f_{2,2}) + w_{g_2}(f_{2,2}) + g_3 = 10 + 60 + 32 = 102$$

$$W_{h_{2,2}} = w_{g_1}(h_{2,2}) + w_{g_2}(h_{2,2}) + g_3 = 8 + 61 + 31 = 100$$

Jadi diperoleh himpunan bobot muka $W = \{92, 94, 96, 98, 100, 102, 104, 106\}$.

Dari himpunan bobot muka W pada graf tangga L_3^2 dengan 3-sisi muka membentuk barisan aritmatika dengan beda $d = 2$ seperti Gambar 3.1.3.



Gambar 3.2.3 Pelabelan Tipe $(1, 1, 1)$ Graf Tangga L_3^2 dengan $d = 2$

Setiap 3-sisi muka memiliki bobot muka yang membentuk barisan aritmatika dengan $d \in \{0,2\}$. Dengan demikian pelabelan graf tangga L_n^m merupakan pelabelan muka d -anti ajaib dengan tipe $(1, 1, 1)$.

BAB IV

PENUTUP

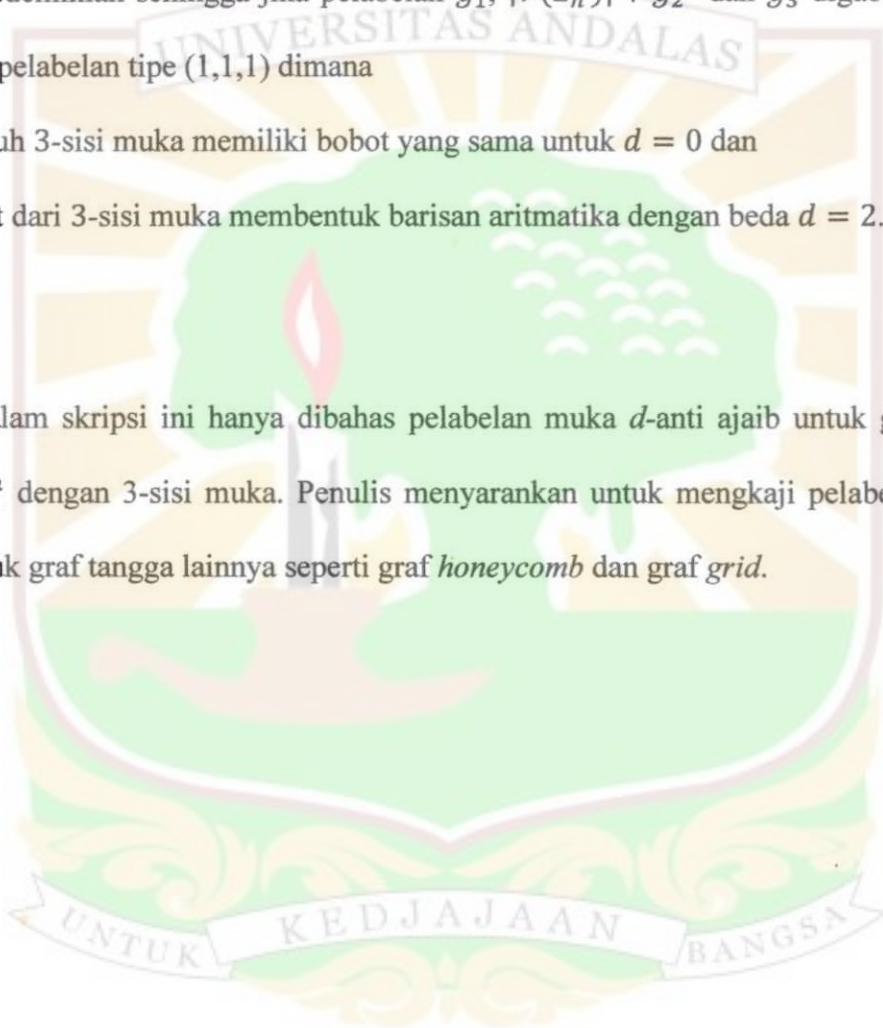
4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang diperoleh dari Bab III, dapat disimpulkan bahwa bobot muka dari graf tangga L_n^m dengan 3-sisi muka, $n \geq 1$ dan $m \geq 1$ dapat disusun sedemikian sehingga jika pelabelan g_1 , $|V(L_n^m)| + g_2$ dan g_3 digabung diperoleh pelabelan tipe (1,1,1) dimana

- (i) Seluruh 3-sisi muka memiliki bobot yang sama untuk $d = 0$ dan
- (ii) Bobot dari 3-sisi muka membentuk barisan aritmatika dengan beda $d = 2$.

4.2 Saran

Dalam skripsi ini hanya dibahas pelabelan muka d -anti ajaib untuk graf tangga L_n^m dengan 3-sisi muka. Penulis menyarankan untuk mengkaji pelabelan muka untuk graf tangga lainnya seperti graf *honeycomb* dan graf *grid*.



DAFTAR PUSTAKA

- [1] Baca, M, Baskoro, E.T, and Miller, M. 2005. *Antimagic Valuations for the Special Class of Plane Graphs*. IJCCGGT 2003, LNCS 3330, PP. 58-64, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [2] Baca, M dan Miller, M, 2008, *Super Edge-Antimagic Graphs*, Brown Walker Press, Boca Raton-Florida.
- [3] Bondy, J.A. dan Murty, U.S.R.. 1976. *Graph Theory with Applications*. The Macmillan Press LTD. London.
- [4] Hartsfield, N dan Ringel, G. 1990. *Pearls in Graph Theory*, Academic Press. Boston
- [5] Ko- Wei Lih. 1983. *On Magic and Consecutive Labeling Of Plane Graphs*, Utilitas Math. 24 .165-197.
- [6] Wallis, W.D. 2001. *Magic Graphs*, Birkhauser, Berlin. Boston-Basel.
- [7] West, D.B. 1996. *An Introduction to Graph Theory*. Prentice – Hall.