SYARAT PERLU DAN CUKUP UNTUK KELENGKAPAN SUATU SUBRUANG DARI RUANG METRIK LENGKAP

SKRIPSI

MERI KOMALA SARI
07134011

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2011

ABSTRAK

Banyak hal yang dapat dikaji dalam ruang metrik. Salah satunya adalah sifat kelengkapan dari subruang pada suatu ruang metrik lengkap. Ruang metrik X dikatakan ruang metrik lengkap jika setiap barisan Cauchy (x_n) di X konvergen ke suatu titik x anggota X. Suatu himpunan Y dikatakan subruang dari ruang metrik X, jika Y merupakan subhimpunan takkosong dari X dan himpunan Y dengan metrik d membentuk ruang metrik. Sifat kelengkapan tidak selalu berlaku pada suatu subruang dari ruang metrik lengkap. Oleh karena itu, diperlukan syarat perlu dan syarat cukup agar suatu subruang dari ruang metrik lengkap adalah lengkap. Pada tulisan ini ditunjukkan bahwa syarat perlu dan cukup untuk kelengkapan suatu subruang dari ruang metrik lengkap, yaitu X merupakan ruang metrik lengkap dan Y subruang tutup dari X.

Kata kunci: *Ruang Metrik, Subruang Metrik, Barisan Konvergen, Barisan Cauchy, Ruang Metrik Lengkap, Himpunan Tutup.*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

No. Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Menurut Runde dalam [5], ruang metrik diperkenalkan pertama kali dalam tesis Maurice Fréchet (1878-1973) pada tahun 1906. Fréchet menyatakan bahwa ruang metrik merupakan suatu kelas dan jarak antara dua elemen yang berkaitan dengan metrik yang diberikan.

Beberapa sifat pada ruang metrik yaitu sifat kekonvergenan dan kelengkapan. Sifat kekonvergenan sebagai berikut: Misalkan X adalah ruang metrik dengan metrik d dan misal $(x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ suatu barisan di X. Barisan (x_n) dikatakan konvergen jika terdapat x anggota X sedemikian sehingga:

(1) untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positif n_0 sedemikian sehingga untuk $n \geq n_0$ berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$; atau ekivalen dengan,

(2) untuk setiap bola buka $S_\varepsilon(x)$ berpusat pada x, terdapat bilangan bulat positif n_0 sedemikian sehingga $x_n \in S_\varepsilon(x)$ untuk setiap $n \geq n_0$.

Ruang metrik X dikatakan ruang metrik lengkap jika setiap barisan Cauchy (x_n) di X, konvergen ke suatu titik x anggota X.

Misalkan Y subhimpunan tak kosong sebarang dari X. Himpunan Y dikatakan subruang dari X jika himpunan Y dengan metrik d membentuk ruang metrik.

Banyak hal yang dapat dikaji dalam ruang metrik. Salah satunya adalah sifat kelengkapan dari subruang pada suatu ruang metrik lengkap. Sifat kelengkapan tidak selalu berlaku pada subruang dari ruang metrik lengkap. Sebagai contoh, himpunan (0,1] dengan metrik $d(x,y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in (0,1]$ merupakan subruang dari ruang metrik lengkap $\mathbb{R}$. Tetapi himpunan (0,1] bukan ruang metrik lengkap. Karena tidak semua subruang dari suatu ruang metrik lengkap adalah lengkap, maka dalam tugas akhir ini Penulis tertarik untuk menunjukkan syarat agar suatu subruang dari ruang metrik lengkap adalah lengkap.

1.2 Permasalahan

Permasalahan yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah menentukan syarat perlu dan syarat cukup untuk kelengkapan suatu subruang dari ruang metrik lengkap.

1.3 Pembatasan Masalah

Pada tugas akhir ini, pembahasan dibatasi pada kelengkapan subruang metrik atas lapangan riil, kompleks, dan $\mathbb{R}^2$.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan dari penulisan ini adalah untuk menunjukkan jika Y subruang dari suatu ruang metrik lengkap X, maka Y lengkap jika dan hanya jika Y tertutup.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut: Bab I Pendahuluan, berisi: latar belakang, permasalahan, pembatasan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan tugas akhir. Bab II Landasan Teori, berisi: uraian mengenai teori-teori yang mendukung dan menjadi dasar untuk pembahasan ruang metrik lengkap. Bab III Pembahasan, berisi: hasil dan pembahasan tentang syarat perlu dan syarat cukup yang menjamin kelengkapan suatu subruang dari ruang metrik lengkap. Bab IV Kesimpulan, berisi: kesimpulan-kesimpulan yang berhubungan dengan isi pembahasan.

BAB II

LANDASAN TEORI

Sebelum membahas masalah syarat perlu dan cukup untuk kelengkapan suatu subruang dari ruang metrik lengkap, berikut akan dijelaskan definisi dari barisan bilangan riil, ruang metrik, subruang dari ruang metrik, barisan di ruang metrik, ruang metrik lengkap, dan hal-hal yang berkaitan dengan pembahasan.

2.1 Barisan Bilangan Riil

Definisi 2.1.1 [1]

Suatu barisan bilangan riil adalah suatu fungsi pada himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ yang daerah hasilnya termuat dalam himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$.

Dengan kata lain, suatu barisan dalam $\mathbb{R}$ mengaitkan setiap bilangan asli $n = 1, 2, \cdots$ dengan suatu bilangan riil secara tunggal. Bilangan riil yang diperoleh dari pengaitan tersebut disebut elemen-elemen barisan, atau suku-suku dari barisan.

Definisi 2.1.2 [1]

Misalkan (x_n) adalah barisan bilangan riil. Bilangan $x \in \mathbb{R}$ dikatakan limit dari (x_n), ditulis $\lim (x_n) = x$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada suatu bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$, berlaku

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

Jika x adalah limit barisan, maka (x_n) dikatakan konvergen ke x (atau mempunyai limit x). Jika suatu barisan memiliki limit dikatakan bahwa barisan tersebut konvergen. Sebaliknya, jika tidak mempunyai limit maka barisan tersebut dikatakan divergen.

Definisi 2.1.3 [1]

Misalkan (x_n) barisan bilangan riil. Barisan (x_n) dikatakan terbatas jika terdapat suatu bilangan riil $M > 0$ sedemikian sehingga

$$|x_n| \leq M \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 2.1.4 [1]

Misalkan (x_n) dan (y_n) adalah barisan bilangan riil. Misalkan pula barisan (x_n) konvergen ke x, barisan (y_n) konvergen ke y, dan $c \in \mathbb{R}$. Maka barisan

(i) $(x_n) + (y_n)$ konvergen ke $x + y$,

(ii) $(x_n) - (y_n)$ konvergen ke $x - y$,

(iii) $(x_n)(y_n)$ konvergen ke xy,

(iv) (cx_n) konvergen ke cx.

Bukti:

Misalkan (x_n) dan (y_n) adalah barisan bilangan riil. Misalkan pula barisan (x_n) konvergen ke x, barisan (y_n) konvergen ke y, dan $c \in \mathbb{R}$.

(i) Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena barisan (x_n) konvergen ke x, maka pilih $k_1 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq k_1$ berlaku

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Karena barisan (y_n) konvergen ke y, maka pilih $k_2 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq k_2$ berlaku

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pilih $K(\varepsilon) = \sup\{k_1, k_2\}$, maka untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku:

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka dapat disimpulkan bahwa barisan $(x_n) + (y_n)$ konvergen ke $x + y$.

(ii) Argumen yang sama dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa barisan $(x_n) - (y_n)$ konvergen ke $x - y$.

(iii)Karena (y_n) konvergen maka (y_n) terbatas. Pilih $M > 0$ sedemikian sehingga $|y_n| \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena barisan (x_n) konvergen ke x, maka pilih $k_1 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq k_1$ berlaku

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Karena barisan (y_n) konvergen ke y, maka pilih $k_2 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq k_2$ berlaku

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |x|)}.$$

Pilih $K(\varepsilon) = \sup\{k_1, k_2\}$, maka untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku:

$$\begin{aligned} |(x_n y_n) - (xy)| &= |x_n y_n - x y_n + x y_n - xy| \\ &\leq |y_n||x_n - x| + |x||y_n - y| \\ &< M\frac{\varepsilon}{2M} + |x|\frac{\varepsilon}{2(1 + |x|)} \\ &< M\frac{\varepsilon}{2M} + |x|\frac{\varepsilon}{2|x|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(iv) Misalkan (y_n) barisan konstan $(c, c, \cdots, c, \cdots)$ konvergen ke c. Maka berdasarkan sifat (ii) barisan (cx_n) konvergen ke cx. ■

Teorema 2.1.5 [1]

Misalkan (x_n) adalah barisan bilangan riil yang konvergen ke x dan $x_n \geq 0$. Maka barisan $(\sqrt{x_n})$ konvergen dan $\lim (\sqrt{x_n}) = \sqrt{x}$.

Bukti:

Misalkan (x_n) adalah barisan bilangan riil yang konvergen ke x dan $x_n \geq 0$. Akan ditunjukkan bahwa barisan $(\sqrt{x_n})$ konvergen dan $\lim\ (\sqrt{x_n}) = \sqrt{x}$. Karena $x_n \geq 0$ maka $x = \lim\ (x_n) \geq 0$. Akibatnya $x = 0$ dan $x > 0$. Untuk $x = 0$, misal diberikan $\varepsilon > 0$. Karena barisan (x_n) konvergen ke 0 maka terdapat bilangan asli K sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku

$$0 \leq x_n = x_n - 0 < \varepsilon^2.$$

Akibatnya $0 \leq \sqrt{x_n} < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq K$. Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka barisan $(\sqrt{x_n})$ konvergen ke 0.

Untuk $x > 0$, maka $\sqrt{x} > 0$.

Perhatikan bahwa:

$$\sqrt{x_n} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x_n} - \sqrt{x})(\sqrt{x_n} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x_n} + \sqrt{x})} = \frac{x_n - x}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}}.$$

Karena $\sqrt{x_n} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x} > 0$, maka

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)|x_n - x|.$$

Barisan (x_n) konvergen ke x, akibatnya barisan $(\sqrt{x_n})$ konvergen ke $\sqrt{x}$. ∎

Definisi 2.1.6 [1]

Misalkan (x_n) adalah barisan bilangan riil dan

$$r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots$$

adalah barisan naik terbatas. Maka barisan X' yang diberikan oleh

$$(x_{r_1}, x_{r_2}, x_{r_3}, \cdots, x_{r_n}, \cdots)$$

disebut sub barisan dari (x_n).

Teorema 2.1.7 [1]

Setiap barisan terbatas mempunyai sub barisan konvergen.

Definisi 2.1.8 [1]

Suatu barisan (x_n) dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada suatu $H(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$n, m \geq H(\varepsilon) \Longrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon,$$

untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$.

Lema 2.1.9 [1]

Suatu Barisan Cauchy dari himpunan bilangan riil adalah terbatas.

Teorema 2.1.10 [1]

Misalkan (x_n) barisan bilangan riil. Barisan (x_n) konvergen jika dan hanya jika (x_n) barisan Cauchy.

Bukti:

Misalkan barisan (x_n) konvergen ke x. Akan ditunjukkan (x_n) barisan Cauchy. Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Akan dicari $H(\varepsilon)$ bilangan asli sedemikian sehingga $|x_n - x_m| < \varepsilon$ untuk setiap $n, m \geq H(\varepsilon)$, $n, m \in \mathbb{N}$. Karena (x_n) konvergen ke x berarti terdapat $K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga jika $n \geq K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ maka $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pilih $H(\varepsilon) = K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, m \geq H(\varepsilon)$ diperoleh:

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |x_n - x + x - x_m| \\ &= |(x_n - x) + (x - x_m)| \\ &\leq |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka (x_n) barisan Cauchy.

Sebaliknya, misalkan (x_n) barisan Cauchy, akan ditunjukkan (x_n) barisan konvergen ke suatu bilangan riil. Karena (x_n) barisan Cauchy maka berdasarkan Lema 2.1.9 (x_n) barisan terbatas. Oleh karena itu dengan Teorema 2.1.7, ada suatu sub barisan (x_{n_k}) dari (x_n) yang konvergen ke suatu bilangan $x^* \in \mathbb{R}$. Bukti akan dilengkapi dengan menunjukkan bahwa (x_n) konvergen ke x^*.

Misalkan $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena (x_n) adalah barisan Cauchy, maka ada $H\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga jika $n, m \geq H\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, maka

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad \cdots (*)$$

Karena $X' = (x_{n_k})$ konvergen ke x^*, terdapat $K \in \mathbb{N}$, dengan $K \geq H\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ yang berada dalam himpunan $\{n_1, n_2, \cdots\}$ sedemikian sehingga

$$|x_K - x^*| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Karena $K \geq H\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ maka ketaksamaan $(*)$ dengan $m = K$ berakibat bahwa

$$|x_n - x_K| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ untuk } n \geq H\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Oleh karena itu, jika $n \geq H\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ diperoleh:

$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &= |x_n - x_K + x_K - x^*| \\ &= |(x_n - x_K) + (x_K - x^*)| \\ &\leq |x_n - x_K| + |x_K - x^*| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka dapat disimpulkan bahwa $\lim(x_n) = x^*$. Oleh karena itu barisan (x_n) konvergen. ■

2.2 Ruang Metrik

Sebelum membahas kelengkapan subruang metrik, berikut akan didefinisikan metrik dan ruang metrik.

Definisi 2.2.1: Ruang Metrik [7]

Misalkan X himpunan tak kosong. Metrik pada X adalah fungsi $d : X \times X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi tiga kondisi berikut:

(1) $d(x,y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$, dan

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(2) $d(x,y) = d(y,x)$ untuk setiap $x, y \in X$ (Simetri);

(3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$ (Ketaksamaan Segitiga).

Pasangan (X, d) dinamakan ruang metrik. Fungsi $d(x, y)$ menyatakan jarak antara x dan y.

Menurut Simmons dalam [7], suatu ruang metrik memuat dua objek, yaitu: suatu himpunan tak kosong X dan suatu metrik d pada X. Anggota dari X dikatakan titik dari ruang metrik (X, d). Selanjutnya ruang metrik (X, d) ditulis sebagai X yang merupakan himpunan dari titik-titik. Jika didefinisikan sebuah himpunan tak kosong dengan metrik yang berbeda, maka diperoleh ruang metrik yang berbeda pula.

Setiap himpunan tak kosong dapat dijadikan sebagai ruang metrik. Berikut contoh-contoh dari ruang metrik.

Contoh 1

Untuk setiap himpunan X, metrik diskrit d diberikan oleh:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & jika\ x = y \\ 1, & jika\ x \neq y \end{cases}$$

X disebut ruang metrik diskrit.

Contoh 2

Fungsi $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, yang didefinisikan sebagai $d(x,y) = |x - y|$ adalah metrik umum pada $\mathbb{R}$.

Fungsi $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, yang didefinisikan sebagai

$$d\big((x_1,y_1)(x_2,y_2)\big) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

adalah metrik umum pada $\mathbb{R}^2$.

Contoh 3

Himpunan bilangan komplek $\mathbb{C}$ dengan metrik d yang didefinisikan sebagai

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

adalah ruang metrik.

Ambil z_1, z_2, z_3 di $\mathbb{C}$ sebarang. Misalkan $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_3 = x_3 + iy_3$, untuk suatu $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$.

i) Karena

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &= |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| \\ &= |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \geq 0, \end{aligned}$$

maka $d(z_1, z_2) \geq 0$ untuk setiap z_1, z_2 di $\mathbb{C}$.

ii) Misalkan $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = 0$. Akan ditunjukkan $z_1 = z_2$.

Andaikan $z_1 \neq z_2$, maka $x_1 \neq x_2, y_1 = y_2$, atau $x_1 = x_2, y_1 \neq y_2$, atau $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$.

Jika $x_1 \neq x_2, y_1 = y_2$, maka $x_1 < x_2$ atau $x_1 > x_2$. Akibatnya $x_1 - x_2 < 0$ atau $x_1 - x_2 > 0$ dan $y_1 - y_2 = 0$, sehingga

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &= |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 0} = x_1 - x_2 \neq 0 \end{aligned}$$

Jika $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$, maka $y_1 < y_2$ atau $y_1 > y_2$. Akibatnya $x_1 - x_2 = 0$ dan $y_1 - y_2 < 0$ atau $y_1 - y_2 < 0$, sehingga

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)|$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{0 + (y_1 - y_2)^2} = y_1 - y_2 \neq 0$$

Jika $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, maka $x_1 < x_2$ atau $x_1 > x_2$, dan $y_1 < y_2$ atau $y_1 > y_2$. Akibatnya $x_1 - x_2 < 0$ atau $x_1 - x_2 > 0$, dan $y_1 - y_2 < 0$ atau $y_1 - y_2 < 0$, sehingga

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)|$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \neq 0.$$

Karena $z_1 \neq z_2$ mengakibatkan $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| \neq 0$ dan kontradiksi dengan $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = 0$ maka haruslah $z_1 = z_2$.

Sebaliknya, misalkan $z_1 = z_2$, akan ditunjukkan $d(z_1, z_2) = 0$. Karena $z_1 = z_2$ maka $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Akibatnya $x_1 - x_2 = 0$ dan $y_1 - y_2 = 0$, sehingga:

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)|$$

$$= |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)|$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{0 + 0} = \sqrt{0} = 0.$$

iii) Karena

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)|$$

$$= |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)|$$

$$= |(x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)|$$

$$= |(x_2 + iy_2) - (x_1 + iy_1)| = |z_2 - z_1|,$$

maka $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$ untuk setiap $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

iv) Perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
|z_1 - z_3| = |(x_1 + iy_1) - (x_3 + iy_3)| &= |(x_1 - x_3) + i(y_1 - y_3)| \\
&= |(x_1 - x_2 + x_2 - x_3) + i(y_1 - y_2 + y_2 - y_3)| \\
&= \big|\big((x_1 - x_2) + (x_2 - x_3)\big) + i\big((y_1 - y_2) + (y_2 - y_3)\big)\big| \\
&= \big|\big((x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)\big) + \big((x_2 - x_3) + i(y_2 - y_3)\big)\big| \\
&\leq |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| + |(x_2 - x_3) + i(y_2 - y_3)| \\
&= |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| + |(x_2 + iy_2) - (x_3 + iy_3)| \\
&= |z_2 - z_1| + |z_2 - z_3|.
\end{aligned}
$$

Akibatnya $d(z_1, z_3) = d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$ untuk setiap $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Dari i), ii), iii), dan iv) dapat disimpulkan bahwa himpunan bilangan komplek $\mathbb{C}$ dengan metrik d yang didefinisikan sebagai $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ adalah ruang metrik.

Contoh 4

Himpunan $\mathbb{R}^2$ dengan metrik β yang didefinisikan sebagai

$$\beta\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

adalah ruang metrik.

Ambil a, b, c di $\mathbb{R}^2$ sebarang, maka $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$, $c = (x_3, y_3)$ untuk suatu $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ di $\mathbb{R}$.

i) Karena $|x - y| \geq 0$ untuk setiap x, y di $\mathbb{R}$, maka

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \geq 0 \text{ untuk setiap } x_1, x_2, y_1, y_2 \text{ di } \mathbb{R}.$$

Akibatnya $\beta(a, b) \geq 0$ untuk setiap a, b di $\mathbb{R}^2$.

ii) Misalkan $\beta(a,b) = 0$. Akan ditunjukkan $a = b$.

Andaikan $a \neq b$, maka $x_1 \neq x_2, y_1 = y_2$, atau $x_1 = x_2, y_1 \neq y_2$, atau $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$.

Jika $x_1 \neq x_2, y_1 = y_2$, maka $x_1 < x_2$ atau $x_1 > x_2$. Akibatnya $x_1 - x_2 < 0$ atau $x_1 - x_2 > 0$ dan $y_1 - y_2 = 0$, sehingga

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = |x_1 - x_2| + 0 = |x_1 - x_2| \neq 0.$$

Jika $x_1 = x_2, y_1 \neq y_2$, maka $y_1 < y_2$ atau $y_1 > y_2$. Akibatnya $x_1 - x_2 = 0$ dan $y_1 - y_2 < 0$ atau $y_1 - y_2 < 0$, sehingga

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 0 + |y_1 - y_2| = |y_1 - y_2| \neq 0.$$

Jika $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$, maka $x_1 < x_2$ atau $x_1 > x_2$, dan $y_1 < y_2$ atau $y_1 > y_2$. Akibatnya $x_1 - x_2 < 0$ atau $x_1 - x_2 > 0$, dan $y_1 - y_2 < 0$ atau $y_1 - y_2 < 0$, sehingga

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \neq 0.$$

Karena $a \neq b$ mengakibatkan $\beta(a,b) \neq 0$ dan kontradiksi dengan $\beta(a,b) = 0$ maka haruslah $a = b$.

Sebaliknya, misalkan $a = b$, akan ditunjukkan $\beta(a,b) = 0$. Karena $a = b$ maka $x_1 = x_2, y_1 = y_2$. Akibatnya $x_1 - x_2 = 0$ dan $y_1 - y_2 = 0$, sehingga:

$$\beta(a,b) = \beta\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 0 + 0 = 0.$$

iii) Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}\beta\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \\ &= \beta\big((x_2,y_2),(x_1,y_1)\big).\end{aligned}$$

Akibatnya $\beta(a,b) = \beta(b,a)$ untuk setiap a, b di $\mathbb{R}^2$.

iv) Perhatikan bahwa:

$$\beta((x_1,y_1),(x_3,y_3)) = |x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|$$
$$= |x_1 - x_2 + x_2 - x_3| + |y_1 - y_2 + y_2 - y_3|$$
$$\leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3|$$
$$= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|$$
$$= \beta((x_1,y_1),(x_2,y_2)) + \beta((x_2,y_2),(x_3,y_3)).$$

Akibatnya $\beta(a,c) = \beta(a,b) + \beta(b,c)$untuk setiap a,b,c di $\mathbb{R}^2$.

Dari i), ii), iii), dan iv) dapat disimpulkan bahwa himpunan $\mathbb{R}^2$ dengan metrik β, yang didefinisikan sebagai $\beta((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ adalah ruang metrik.

Contoh 5

Himpunan $\mathbb{R}^2$ dengan metrik β yang didefinisikan sebagai

$$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = maks\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

adalah ruang metrik.

Ambil a,b,c di $\mathbb{R}^2$ sebarang, maka $a = (x_1,y_1)$, $b = (x_2,y_2)$, $c = (x_3,y_3)$ untuk suatu x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3 di $\mathbb{R}$.

i) Karena $|x - y| \geq 0$ untuk setiap x,y di $\mathbb{R}$, maka

$$maks\ \{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \geq 0 \text{ untuk setiap } x_1,x_2,y_1,y_2 \text{ di } \mathbb{R}.$$

Akibatnya $\rho(a,b) \geq 0$ untuk setiap a,b di $\mathbb{R}^2$.

ii) Misalkan $\rho(a,b) = 0$. Akan ditunjukkan $a = b$.

Karena

$$\rho(a,b) = \rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = maks\ \{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = 0$$

maka $\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = \{0\}$. Akibatnya $|x_1 - x_2| = 0$ dan $|y_1 - y_2| = 0$ atau $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$, sehingga $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ atau $a = b$.

Sebaliknya, misalkan $a = b$ akan ditunjukkan $\rho(a, b) = 0$. Karena $a = b$ maka $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Akibatnya $x_1 - x_2 = 0$ dan $y_1 - y_2 = 0$, sehingga

$$\begin{aligned}\rho(a,b) &= \rho\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)\\ &= maks\,\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}\\ &= maks\,\{0,0\} = 0.\end{aligned}$$

iii) Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}\rho\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) &= maks\,\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}\\ &= maks\,\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}\\ &= \rho\big((x_2,y_2),(x_1,y_1)\big).\end{aligned}$$

Akibatnya $\rho(a, b) = \rho(b, a)$ untuk setiap a, b di $\mathbb{R}^2$.

iv) Perhatikan Bahwa:

$$\begin{aligned}\rho\big((x_1,y_1),(x_3,y_3)\big) &= maks\,\{|x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|\}\\ &= maks\,\{|x_1 - x_2 + x_2 - x_3|, |y_1 - y_2 + y_2 - y_3|\}.\end{aligned}$$

Karena $|x_1 - x_2 + x_2 - x_3| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|$

dan $|y_1 - y_2 + y_2 - y_3| \leq |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3|$,

maka:

$$\begin{aligned}\rho\big((x_1,y_1),(x_3,y_3)\big) &\leq maks\,\{|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|, |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3|\}\\ &= maks\,\{(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|) + (|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|)\}\\ &< maks\,\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + maks\,\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|\}\\ &= \rho\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) + \rho\big((x_2,y_2),(x_3,y_3)\big).\end{aligned}$$

Akibatnya $\rho(a, c) < \rho(a, b) + \rho(b, c)$ untuk setiap a, b, c di $\mathbb{R}^2$.

Dari i), ii), iii), dan iv) dapat disimpulkan bahwa himpunan $\mathbb{R}^2$ dengan metrik ρ, yang didefinisikan sebagai $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = maks\ \{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ adalah ruang metrik.

Definisi 2.2.2: Subruang Metrik [7]

Misalkan X ruang metrik dengan metrik d. Misalkan $Y \subset X$ himpunan tak kosong sebarang. Himpunan Y dikatakan subruang dari X jika himpunan Y dengan metrik d membentuk ruang metrik.

Contoh 1

Himpunan bilangan riil dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$ merupakan subruang dari ruang metrik $\mathbb{C}$.

Contoh 2

Misalkan himpunan $(0,1]$ merupakan subhimpunan tak kosong dari $\mathbb{R}$. Maka himpunan $(0,1]$ dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$ merupakan subruang dari ruang metrik $\mathbb{R}$.

Ambil $x, y, z \in (0,1]$ sebarang, maka $0 < x \leq 1,\ 0 < y \leq 1,\ 0 < z \leq 1.$

i) Akan ditunjukkan $d(x, y) = |x - y| \geq 0$ untuk setiap $x, y \in (0,1]$.

   Karena $0 < y \leq 1$ maka $-1 \leq -y < 0$, sehingga diperoleh

$$-1 \leq x - y \leq 1.$$

   Untuk kasus $0 \leq x - y \leq 1$ maka $|x - y| = x - y \geq 0.$

   Untuk kasus $-1 \leq x - y < 0$ maka $|x - y| = -(x - y) = (-1)(x - y).$

   Karena $-1 < 0$ dan $x - y < 0$ maka $|x - y| = -(x - y) > 0.$

   Karena $x, y \in (0,1]$ sebarang dan $|x - y| \geq 0$ maka

$$d(x, y) = |x - y| \geq 0 \text{ untuk setiap } x, y \in [-1,1].$$

   Misalkan $d(x, y) = |x - y| = 0$, akan ditunjukkan $x - y = 0$ atau $x = y$.

Andaikan $x \neq y$ maka $x - y \neq 0$. Karena $x - y \neq 0$ maka

$$d(x, y) = |x - y| \neq 0.$$

Jadi haruslah $x - y = 0$ atau $x = y$.

Sebaliknya misalkan $x - y = 0$, akan ditunjukkan $d(x, y) = |x - y| = 0$.

Karena $x - y = 0$, maka $d(x, y) = |x - y| = 0$.

ii) $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$.

iii) $d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$.

Dari i), ii), iii) maka himpunan (0,1] dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$ membentuk ruang metrik. Jadi dapat disimpulkan bahwa himpunan (0,1] dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$ merupakan subruang dari ruang metrik $\mathbb{R}$.

2.3 Himpunan Buka dan Himpunan Tutup pada Ruang Metrik

2.3.1 Himpunan Buka

Himpunan buka pada ruang metrik memuat bola buka disekitar titik-titik pada himpunan tersebut. Suatu bola buka selalu tak kosong, paling tidak memuat pusatnya. Berikut adalah definisi bola buka.

Definisi 2.3.1.1: Bola Buka [7]

Misal X adalah ruang metrik dengan metrik d. Jika x_0 sebuah titik dari X dan r adalah bilangan riil positif, bola buka $S_r(x_0)$ dengan pusat x_0 dan jari-jari r adalah himpunan bagian dari X, didefinisikan oleh

$$S_r(x_0) = \{x : d(x, x_0) < r\}$$

Menurut Simmons dalam [6], $S_r(x_0)$ dikatakan bola buka dengan jari-jari r berpusat pada x_0.

Contoh

Didefinisikan beberapa metrik pada $\mathbb{R}^2$, sebagai berikut:

a. $\delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

b. $\beta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$

c. $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = maks\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$.

Maka bentuk bola buka dari metrik-metrik yang didefinisikan di atas, dengan jari-jari 1 dan pusat (0,0), adalah sebagai berikut:

a. Diketahui $\delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, maka bola buka untuk metrik δ, yaitu

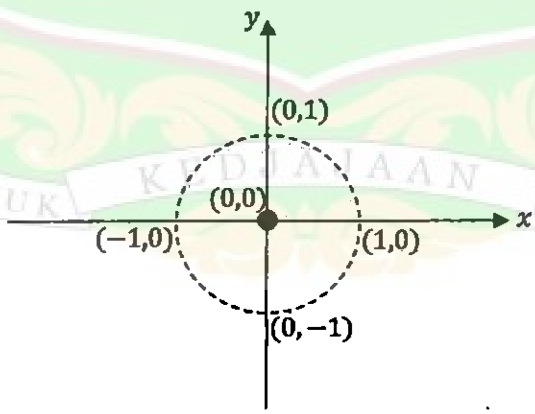
$$S_1((0,0)) = \{(x, y) : \delta((x, y), (0,0)) < 1\}.$$

Perhatikan bahwa:

$$\delta((x, y), (0,0)) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} < 1$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} < 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 1.$$

Akibatnya bola buka $S_1((0,0))$ adalah himpunan titik-titik (x, y) yang terletak di dalam lingkaran yang berpusat di (0,0) dan jari-jari 1.



Gambar 2.3.1.1 Bola buka untuk metrik δ

b. Diketahui $\beta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$, maka bola buka untuk metrik β, yaitu

$$S_1((0,0)) = \{(x, y); \beta((x, y), (0,0)) < 1\}.$$

Perhatikan bahwa:

$$\beta((x, y), (0,0)) = |x - 0| + |y - 0| = |x| + |y| < 1$$

$$\Leftrightarrow |y| < 1 - |x|,$$

$$\Leftrightarrow -(1 - |x|) < y < 1 - |x|,$$

diperoleh:

i) $y < 1 - |x| \Leftrightarrow |x| < 1 - y$

$$\Leftrightarrow -(1 - y) < x < 1 - y,$$

ii) $y > -(1 - |x|) \Leftrightarrow y > |x| - 1$

$$\Leftrightarrow |x| < y + 1$$

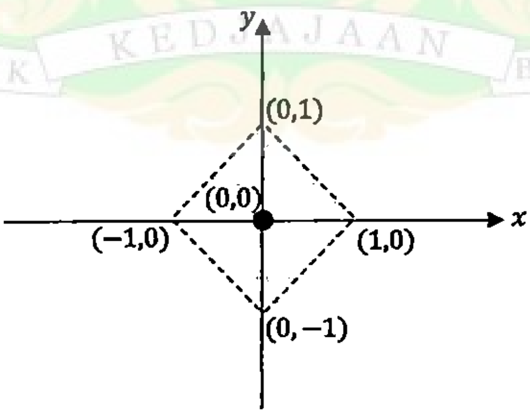
$$\Leftrightarrow -(y + 1) < x < y + 1.$$

Bola buka untuk metrik β dibatasi oleh garis-garis:

$x = 1 - y, \quad x = y - 1, \quad x = y + 1, \quad x = -y - 1.$

Akibatnya bola buka $S_1((0,0))$ adalah himpunan titik-titik (x, y) yang terletak di dalam daerah yang dibatasi oleh $-(1 - y) < x < 1 - y$

dan $-(y + 1) < x < y + 1$.



Gambar 2.3.1.2 Bola buka untuk metrik β

c. Diketahui $\rho\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = maks\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$, maka bola buka untuk metrik ρ, yaitu:

$$S_1\big((0,0)\big) = \big\{(x, y): \rho\big((x, y), (0,0)\big) < 1\big\}$$

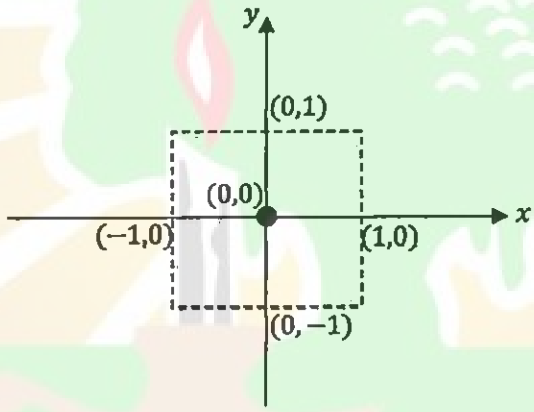
Perhatikan bahwa:

$$\rho\big((x, y), (0,0)\big) = maks\{|x - 0|, |y - 0|\} = maks\ \{|x|, |y|\} < 1$$

Jika $maks\ \{|x|, |y|\} = |x|$, maka $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ dan

jika $maks\ \{|x|, |y|\} = |y|$, maka $|y| < 1 \Leftrightarrow -1 < y < 1$.

Akibatnya bola buka $S_1\big((0,0)\big)$ adalah himpunan titik-titik (x, y) yang terletak di dalam daerah yang dibatasi oleh $-1 < x < 1$ dan $-1 < y < 1$.



Gambar 2.3.1.3 Bola buka untuk Metrik ρ

Definisi 2.3.1.2: Himpunan Buka [7]

Misalkan G subhimpunan dari ruang metrik X. Himpunan G dikatakan terbuka jika untuk setiap x di G, terdapat bilangan riil positif r sedemikian sehingga

$$S_r(x) \subseteq G,$$

ini berarti, setiap titik G adalah pusat dari suatu bola buka yang termuat dalam G.

Contoh:

Misal $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan riil dengan $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$ untuk setiap $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Himpunan $\mathbb{R}$ dan metrik d membentuk ruang metrik. Interval terbuka $(0,1)$ adalah himpunan buka.

Ambil $x \in (0,1)$ sebarang. Maka $0 < x < 1$. Pilih $r = \min\{x, 1 - x\}$.

Jika $r = \min\{x, 1 - x\} = x$ maka $x \leq 1 - x \Leftrightarrow 2x \leq 1$ dengan:

$$
\begin{aligned}
& d(y,x) = |y - x| < x \\
& \Leftrightarrow -x < y - x < x \\
& \Leftrightarrow 0 < y < 2x \leq 1 \\
& \Leftrightarrow 0 < \frac{y}{2} < x \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Akibatnya $S_r(x) = S_x(x) = \{y \in \mathbb{R}: d(y,x) = |y - x| < x\} \subseteq (0,1)$.

Jika $r = \min\{x, 1 - x\} = 1 - x$ maka $1 - x \leq x \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 0$ dengan:

$$
\begin{aligned}
& d(y,x) = |y - x| < 1 - x \\
& \Leftrightarrow -(1 - x) < y - x < 1 - x \\
& \Leftrightarrow 0 \leq 2x - 1 < y < 1 \\
& \Leftrightarrow 1 \leq 2x < y + 1 < 2 \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < \frac{y+1}{2} < 1.
\end{aligned}
$$

Akibatnya $S_r(x) = S_{1-x}(x) = \{a \in \mathbb{R}: d(y,x) = |y - x| < 1 - x\}$.

Jadi untuk setiap $x \in (0,1)$ terdapat $r > 0$ sehingga $S_r(x) \subseteq (0,1)$. Akibatnya interval $(0,1)$ adalah himpunan buka.

2.3.2 Himpunan Tutup

Himpunan tutup pada ruang metrik memuat setiap titik limitnya. Titik limit dari suatu himpunan dalam ruang metrik didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.2.1: Titik Limit [7]

Misal X adalah ruang metrik dengan metrik d. Jika $A \subset X$, suatu titik x di X dikatakan titik limit dari A jika setiap bola buka yang berpusat di x memuat sekurangnya sebuah titik dari A yang berbeda dengan x.

Definisi 2.3.2.2: Himpunan Tutup [7]

Misalkan F subhimpunan dari ruang metrik X. Himpunan F dikatakan tertutup jika F memuat setiap titik limitnya.

Definisi 2.3.2.3 [6]

Misalkan F subhimpunan dari ruang metrik X, himpunan F dikatakan tertutup jika himpunan $X - F$ terbuka.

2.4 Barisan pada Ruang Metrik

Definisi 2.4.1: Barisan Konvergen [7]

Misalkan X adalah ruang metrik dengan metrik d, dan misal $(x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ suatu barisan pada X. Barisan (x_n) konvergen jika terdapat x anggota X sedemikian sehingga

(1) untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positif n_0 sedemikian sehingga $n \geq n_0$ berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$; atau ekivalen dengan,

(2) untuk setiap bola buka $S_\varepsilon(x)$ berpusat pada x, terdapat bilangan bulat positif n_0 sedemikian sehingga $x_n \in S_\varepsilon(x)$ untuk setiap $n \geq n_0$.

Definisi 2.4.2: Barisan Cauchy [2]

Suatu barisan (x_n) dikatakan barisan Cauchy dalam kasus $d(x_m, x_n) \to 0$ dimana $m, n \to \infty$. Ini berarti: untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian sehingga $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$, untuk setiap $m, n \geq N$, dengan $m, n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.4.3 [3]

Setiap barisan konvergen di ruang metrik adalah barisan Cauchy, secara umum tidak berlaku sebaliknya.

Bukti:

Misal barisan (x_n) konvergen ke x berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ sedemikian sehingga jika $n \geq N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ berlaku $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Akibatnya, jika $n, m \geq N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ maka berdasarkan (i) dan (iii) pada Definisi 2.2.1 diperoleh

$$0 \leq d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) = d(x_n, x) + d(x_m, x) = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka (x_n) adalah barisan Cauchy.

Jadi setiap barisan konvergen di ruang metrik adalah barisan Cauchy.

Akan tetapi tidak setiap barisan Cauchy di ruang metrik merupakan barisan konvergen. Hal ini ditunjukkan oleh contoh berikut.

Misalkan $X = (0,1]$ suatu himpunan di bilangan riil. X adalah ruang metrik dengan metrik didefinisikan sebagai $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap x, y di X. Misalkan $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ adalah suatu barisan Cauchy di X.

Perhatikan bahwa

$$d(x_n, x_m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

Jika $n, m \to \infty$ maka barisan (x_n) akan konvergen ke 0. Karena $0 \notin X$, maka barisan (x_n) tidak konvergen di X. ■

2.5 Ruang Metrik Lengkap

Ruang metrik lengkap adalah ruang metrik yang setiap barisan Cauchy nya konvergen. Berikut definisinya.

Definisi 2.5.1: Ruang Metrik Lengkap [4]

Ruang metrik X dikatakan ruang metrik lengkap jika untuk setiap barisan Cauchy (x_n) di X konvergen ke suatu titik x di X.

Contoh 1

Himpunan bilangan riil dengan metrik $d(x,y) = |x - y|$ adalah ruang metrik lengkap.

Ambil (x_n) barisan Cauchy sebarang di $\mathbb{R}$, akan ditunjukkan (x_n) konvergen ke suatu titik x di $\mathbb{R}$. Karena (x_n) barisan Cauchy di $\mathbb{R}$, maka berdasarkan Teorema 2.1.10 barisan (x_n) konvergen ke suatu titik x di $\mathbb{R}$. Karena (x_n) barisan Cauchy sebarang di $\mathbb{R}$ dan barisan (x_n) konvergen ke suatu titik x di $\mathbb{R}$, maka $\mathbb{R}$ ruang metrik lengkap.

Contoh 2

Himpunan bilangan kompleks dengan metrik $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ adalah ruang metrik lengkap.

Ambil (z_n) barisan Cauchy sebarang di $\mathbb{C}$, dengan $z_n = a_n + ib_n$. Akan ditunjukkan (z_n) konvergen di $\mathbb{C}$. Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Akan ditunjukkan terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(z_n, z) < \varepsilon$ untuk $k \geq n$. Karena $(z_n) = (a_n + ib_n)$ barisan Cauchy maka terdapat $H(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, n \geq H(\varepsilon)$ berlaku $|z_m - z_n| < \varepsilon$.

Akibatnya

$$|a_m - a_n| \le |z_m - z_n| < \varepsilon,$$

$$|b_m - b_n| \le |z_m - z_n| < \varepsilon,$$

sehingga barisan bilangan riil (a_n) dan (b_n) adalah barisan Cauchy di $\mathbb{R}$.

Karena himpunan $\mathbb{R}$ adalah ruang metrik lengkap maka:

- barisan (a_n) konvergen ke a di $\mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $k_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $|a_m - a| \le \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \ge k_1$,
- barisan (b_n) konvergen ke b di $\mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $k_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $|b_m - b| \le \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \ge k_2$.

Definisikan $z = a + ib$.

Pilih $k = \sup\{k_1, k_2\}$

Perhatikan untuk $n \ge \sup\{k_1, k_2\}$:

$$\begin{aligned}
d(z_n, z) = |z_n - z| &= |(a_n + ib_n) - (a + ib)| \\
&= |(a_n - a) + i(b_n - b)| \\
&\le |a_n - a| + |i(b_n - b)| = |a_n - a| + |i||b_n - b| \\
&= |a_n - a| + |b_n - b| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka (z_n) konvergen ke z di $\mathbb{C}$.

Karena (z_n) barisan Cauchy sebarang dan konvergen ke z di $\mathbb{C}$, maka $\mathbb{C}$ merupakan ruang metrik lengkap.

Contoh 3

Himpunan $\mathbb{R}^2$ dengan metrik β yang didefinisikan sebagai

$$\beta((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

adalah ruang metrik lengkap.

Ambil (a_n) barisan Cauchy sebarang di $\mathbb{R}^2$, maka $(a_n) = (x_n, y_n)$ untuk setiap n anggota $\mathbb{N}$ dan x_n, y_n anggota $\mathbb{R}$. Akan ditunjukkan barisan (a_n) konvergen.

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena (a_n) barisan Cauchy, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ diberikan terdapat bilangan asli $H(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, m \geq H(\varepsilon)$ dengan $n, m \in \mathbb{N}$, berlaku

$$\beta(a_n, a_m) = \beta((x_n, y_n),(x_m, y_m)) = |x_n - x_m| + |y_n - y_m| < \varepsilon.$$

Akibatnya

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m| < \varepsilon,$$

$$|y_n - y_m| \leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m| < \varepsilon,$$

sehingga barisan (x_n) dan (y_n) merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ ruang metrik lengkap maka barisan (x_n) dan (y_n) konvergen. Sebut (x_n) konnvergen ke x dan (y_n) konvergen ke y, yaitu untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq k_1$ dan terdapat $k_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq k_2$.

Defisinisikan $a = (x, y)$.

Pilih $k = sup\{k_1, k_2\}$.

Perhatikan untuk $n \geq sup\{k_1, k_2\}$:

$$\beta(a_n, a) = \beta((x_n, y_n),(x, y)) = |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka (a_n) konvergen ke a anggota $\mathbb{R}^2$, sehingga $\mathbb{R}^2$ dengan metrik $\beta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ merupakan ruang metrik lengkap.

Contoh 4

Himpunan $\mathbb{R}^2$ dengan metrik ρ yang didefinisikan sebagai

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = maks\ \{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

adalah ruang metrik lengkap.

Ambil (a_n) barisan Cauchy sebarang di $\mathbb{R}^2$, maka $(a_n) = (x_n, y_n)$ untuk setiap n anggota $\mathbb{N}$ dan x_n, y_n anggota $\mathbb{R}$. Akan ditunjukkan barisan (a_n) konvergen.

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena (a_n) barisan Cauchy, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ diberikan terdapat bilangan asli $H(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, m \geq H(\varepsilon)$ dengan $n, m \in \mathbb{N}$, berlaku

$$\rho(a_n, a_m) = \rho((x_n, y_n), (x_m, y_m)) = maks\ \{|x_n - x_m|, |y_n - y_m|\} < \varepsilon.$$

Akibatnya, jika $maks\ \{|x_n - x_m|, |y_n - y_m|\} = |x_n - x_m|$ maka $|x_n - x_m| < \varepsilon$, jika $maks\ \{|x_n - x_m|, |y_n - y_m|\} = |y_n - y_m|$ maka $|y_n - y_m| < \varepsilon$, sehingga barisan (x_n) dan (y_n) merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ ruang metrik lengkap maka barisan (x_n) dan (y_n) konvergen. Sebut (x_n) konnvergen ke x dan (y_n) konvergen ke y, yaitu untuk setiap $n \geq H(\varepsilon)$ berlaku $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Defisinisikan $a = (x, y)$.

Pilih $k = H(\varepsilon)$.

Perhatikan untuk $n \geq H(\varepsilon)$:

$$\rho(a_n, a) = \rho\big((x_n, y_n), (x, y)\big) = maks\ \{|x_n - x|, |y_n - y|\}$$

$$< |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka (a_n) konvergen ke a anggota $\mathbb{R}^2$, sehingga $\mathbb{R}^2$ dengan metrik $\rho\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = maks\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ merupakan ruang metrik lengkap.

BAB III

SYARAT PERLU DAN CUKUP UNTUK KELENGKAPAN SUATU SUBRUANG DARI RUANG METRIK LENGKAP

Pada bab ini akan ditunjukkan syarat perlu dan syarat cukup untuk kelengkapan suatu subruang dari ruang metrik lengkap. Sebelumnya akan ditunjukan syarat cukup agar limit dari suatu barisan yang konvergen dalam ruang metrik adalah suatu titik limit dari himpunan titik-titik barisan tersebut.

Teorema 3.1 [7]

Jika suatu barisan konvergen dalam ruang metrik mempunyai takhingga banyaknya titik yang berbeda, maka limitnya adalah suatu titik limit dari himpunan titik barisan tersebut.

Bukti:

Misalkan X adalah ruang metrik dengan metrik d. Misalkan (x_n) barisan yang konvergen dalam ruang metrik X. Maka berdasarkan Definisi 2.4.1 terdapat suatu titik x di X sedemikian sehingga untuk setiap bola buka $S_\varepsilon(x)$ berpusat di x, terdapat bilangan bulat positif n_0 sedemikian sehingga $x_n \in S_\varepsilon(x)$ untuk setiap $n \geq n_0$. Dengan kata lain x adalah limit dari (x_n).

Andaikan x bukan titik limit dari himpunan titik barisan tersebut. Maka berdasarkan Definisi 2.3.2.2 terdapat sebuah bola buka $S_\varepsilon(x)$ yang berpusat pada x dan tidak memuat titik dari barisan (x_n) yang berbeda dengan x. Karena x adalah limit dari barisan (x_n), maka untuk setiap $n \geq n_0$, $x_n \in S_\varepsilon(x)$. Sementara itu, $S_\varepsilon(x)$ hanya memuat titik x. Ini berarti untuk setiap $n \geq n_0$, $x_n = x \in S_\varepsilon(x)$.

Hal ini mengakibatkan bahwa hanya ada berhingga titik yang berbeda pada barisan tersebut. Maka haruslah x adalah titik limit dari himpunan titik-titik barisan tersebut. ■

Teorema 3.2 [7]

Misalkan X ruang metrik lengkap dan Y subruang dari X. Maka Y lengkap jika dan hanya jika Y tertutup.

Bukti:

Misalkan X suatu ruang metrik lengkap dengan metrik d. Maka berdasarkan Definisi 2.5.1, setiap barisan Cauchy (x_n) di X konvergen ke suatu titik x di X. Misalkan Y adalah subruang dari X. Maka berdasarkan Definisi 2.2.2, Y himpunan tak kosong dan Y merupakan subhimpunan dari X, dan himpunan Y dengan fungsi d membentuk ruang metrik.

Misalkan Y adalah ruang metrik lengkap. Maka berdasarkan definisi 2.5.1, setiap barisan Cauchy (y_n) di Y konvergen ke suatu titik y di Y. Akan ditunjukkan Y himpunan tertutup, yaitu: berdasarkan Definisi 2.3.2.3, himpunan Y memuat setiap titik limitnya.

Ambil y titik limit sebarang dari Y. Maka berdasarkan Definisi 2.3.2.2, untuk setiap bola buka $S_\varepsilon(y)$ yang berpusat di y memuat sekurangnya sebuah titik Y, sebut y_0 dengan $y_0 \neq y$. Misalkan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, didefinisikan

$$S_{\frac{1}{n}}(y) = \left\{y_n \in Y : d(y, y_n) \leq \frac{1}{n}\right\}.$$

Berarti untuk setiap $y_n \in S_{\frac{1}{n}}(y)$ maka $d(y, y_n) \leq \frac{1}{n}$. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 2.4.1, barisan (y_n) konvergen ke y, sehingga berdasarkan

Teorema 2.4.3, barisan (y_n) adalah barisan Cauchy. Karena Y ruang metrik lengkap maka berdasarkan Definisi 2.5.1, titik y berada di Y. Karena y titik limit sebarang dari Y, dan y di Y. Maka terbukti Y tertutup.

Sebaliknya misalkan Y himpunan tertutup. Maka berdasarkan Definisi 2.3.2.3, himpunan Y memuat setiap titik limitnya. Akan ditunjukkan Y ruang metrik lengkap, yaitu: setiap barisan Cauchy di Y konvergen ke suatu titik x di Y.

Ambil (y_n) barisan Cauchy sebarang di Y. Karena (y_n) barisan Cauchy di Y, dan Y subruang dari ruang metrik lengkap X. Maka (y_n) juga merupakan barisan Cauchy di X. Berdasarkan Definisi 2.5.1, barisan Cauchy (y_n) konvergen ke suatu titik x di X. Akan ditunjukkan x di Y.

Kasus 1:

Jika (y_n) mempunyai berhingga titik yang berbeda, maka x adalah titik yang berulang takhingga. Dengan demikian x di Y.

Kasus 2:

Jika (y_n) mempunyai takhingga banyaknya titik yang berbeda, maka berdasarkan Teorema 3.1, x adalah titik limit dari Y. Akibatnya karena Y tertutup, maka titik x di Y.

Karena x di Y, dan (y_n) barisan Cauchy sebarang di Y yang konvergen ke x, maka Y lengkap. ■

Berikut ini contoh penggunaan Teorema 3.2.

Contoh 1

Himpunan $X = [-1,1]$ dengan metrik $d(x,y) = |x-y|$ untuk setiap $x,y \in X$ adalah ruang metrik lengkap.

Beradasarkan contoh 1 pada subbab 2.5, himpunan bilangan riil dengan metrik $d(x,y) = |x-y|$ merupakan ruang metrik lengkap. Akan ditunjukkan himpunan X merupakan subruang dari ruang metrik $\mathbb{R}$, yaitu: X merupakan subhimpunan tak kosong dari $\mathbb{R}$ dan himpunan X dengan metrik d membentuk ruang metrik. Karena $1 \in [-1,1]$ maka himpunan $[-1,1] \neq \emptyset$. Ambil $x \in [-1,1]$ sebarang. Karena $x \in [-1,1]$ maka $-1 \leq x \leq 1$, sehingga $-\infty < -1 \leq x \leq 1 < \infty$. Akibatnya $-\infty < x < \infty$. Dengan demikian $x \in \mathbb{R}$. Karena $x \in [-1,1]$ sebarang dan $x \in \mathbb{R}$, maka $[-1,1]$ merupakan subhimpunan dari $\mathbb{R}$.

Ambil $x,y,z \in [-1,1]$ sebarang. Karena x,y,z anggota $[-1,1]$ maka $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$.

(1) Akan ditunjukkan $d(x,y) = |x-y| \geq 0$.

Karena $-1 \leq y \leq 1$ maka $-1 \leq -y \leq 1$, sehingga diperoleh

$$-2 \leq x-y \leq 2.$$

Untuk kasus $0 \leq x-y \leq 2$ maka $|x-y| = x-y \geq 0$.

Untuk kasus $-2 \leq x-y < 0$ maka $|x-y| = -(x-y) = (-1)(x-y)$.

Karena $-1 < 0$ dan $x-y < 0$ maka $|x-y| = -(x-y) > 0$.

Karena $x,y \in [-1,1]$ sebarang dan $|x-y| \geq 0$ maka

$$d(x,y) = |x-y| \geq 0 \text{ untuk setiap } x,y \in [-1,1].$$

Akan ditunjukkan $d(x,y) = |x-y| = 0$ jika dan hanya jika $x-y=0$.

Misalkan $d(x,y) = |x-y| = 0$, akan ditunjukkan $x-y=0$ atau $x=y$.

Andaikan $x - y \neq 0$. Karena $x - y \neq 0$ maka $d(x,y) = |x - y| \neq 0$.

Dengan demikian haruslah $x - y = 0$ atau $x = y$.

Sebaliknya misalkan $x - y = 0$, akan ditunjukkan $d(x,y) = |x - y| = 0$.

Karena $x - y = 0$, maka $d(x,y) = |x - y| = 0$.

(2) $d(x,y) = |x - y| = |y - x| = d(y,x)$.

(3) $d(x,z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x,y) + d(y,z)$.

Dari (1), (2), dan (3) maka himpunan X dengan metrik d merupakan ruang metrik.

Selanjutnya akan ditunjukkan subruang metrik $[-1,1]$ dengan metrik d adalah ruang metrik lengkap, yaitu berdasarkan Teorema 3.2, akan ditunjukkan $[-1,1]$ himpunan tertutup di $\mathbb{R}$, yaitu dengan menunjukkan himpunan $[-1,1]$ memuat setiap titik limitnya. Hal ini berarti untuk setiap x titik limit $[-1,1]$ maka $x \in [-1,1]$.

Ambil x titik limit sebarang dari $[-1,1]$. Karena x titik limit dari $[-1,1]$ maka untuk setiap bola buka yang berpusat di x memuat sekurangnya sebuah titik dari $[-1,1]$. Andaikan $x \notin [-1,1]$ maka $x < -1$ atau $x > 1$.

Untuk $x < -1$ pilih $\varepsilon = \frac{-1-x}{2}$ dan untuk $x > 1$ pilih $\varepsilon = \frac{x-1}{2}$.

Perhatikan $d(x,y) < \varepsilon$.

Untuk $x < -1$,

$$d(x,y) = |x - y| < \frac{-1-x}{2} < -1 - x$$

$$\Leftrightarrow 1 + x < x - y < -1 - x$$

$$\Leftrightarrow 1 < -y < -1 - 2x$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2x < y < -1.$$

Untuk $x < -1$,

$$d(x,y) = |x-y| < \frac{x-1}{2} < x-1$$

$$\Leftrightarrow -x+1 < x-y < x-1$$

$$\Leftrightarrow -2x+1 < -y < -1$$

$$\Leftrightarrow 1 < y < 2x-1.$$

Akibatnya bola buka:

$$S_\varepsilon(x) = \{y \in [-1,1]: d(x,y) < \varepsilon\} = \emptyset.$$

Hal ini kontradiksi dengan x merupakan titik limit dari $[-1,1]$, maka haruslah $x \in [-1,1]$. Karena x titik limit sebarang dari $[-1,1]$ dan $x \in [-1,1]$ maka himpunan $[-1,1]$ tertutup. Karena himpunan $\mathbb{R}$ dan metrik d merupakan ruang metrik lengkap, dan $[-1,1]$ merupakan subruang dari $\mathbb{R}$ dan himpunan $[-1,1]$ tertutup, maka berdasarkan Teorema 3.2, himpunan $[-1,1]$ dengan metrik d merupakan ruang metrik lengkap.

Contoh 2

Himpunan $Y = \{z||z| = 1\} = \{x + iy\ |x^2 + y^2 = 1\}$ dengan metrik

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|,$$

untuk setiap $z_1, z_2 \in Y$ adalah tertutup.

Berdasarkan contoh 2 pada subbab 2.5, himpunan bilangan komplek dengan metrik $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ merupakan ruang metrik lengkap. Akan ditunjukkan himpunan Y merupakan subruang dari ruang metrik $\mathbb{C}$, yaitu: Y merupakan subhimpunan tak kosong dari $\mathbb{C}$ dan himpunan Y dengan metrik d membentuk ruang metrik. Karena $1 \in \mathbb{C}$ dan $|1| = 1$, maka $1 \in Y$. Akibatnya $Y \neq \emptyset$. Dari definisi himpunan Y jelas bahwa $Y \subset \mathbb{C}$.

Selanjutnya ditunjukkan Y dengan metrik $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ membentuk ruang metrik. Ambil $z_1, z_2, z_3 \in Y$ maka

$z_1 = x_1 + iy_1$ untuk suatu $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$, dengan ${x_1}^2 + {y_1}^2 = 1$,

$z_2 = x_2 + iy_2$ untuk suatu $x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, dengan ${x_2}^2 + {y_2}^2 = 1$,

$z_3 = x_3 + iy_3$ untuk suatu $x_3, y_3 \in \mathbb{R}$, dengan ${x_3}^2 + {y_3}^2 = 1$.

(i) Perhatikan bahwa :

$$
\begin{aligned}
|z_1 - z_2| &= |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| \\
&= |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| \\
&= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
&= \sqrt{({x_1}^2 + {y_1}^2) + ({x_2}^2 + {y_2}^2) - 2(x_1x_2 + y_1y_2)} \\
&= \sqrt{1 + 1 - 2(x_1x_2 + y_1y_2)} = \sqrt{2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2)}.
\end{aligned}
$$

Karena $|z| = r = 1$, maka

$x_1 = \cos\theta_1$ untuk suatu $0 \le \theta_1 \le 2\pi$,

$y_1 = \sin\theta_1$ untuk suatu $0 \le \theta_1 \le 2\pi$,

$x_2 = \cos\theta_2$ untuk suatu $0 \le \theta_2 \le 2\pi$,

$y_2 = \sin\theta_2$ untuk suatu $0 \le \theta_2 \le 2\pi$,

sehingga $x_1x_2 + y_1y_2 = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2)$.

Karena $-1 \le \cos(\theta_1 - \theta_2) \le 1$, maka $-2 \le 2\cos(\theta_1 - \theta_2) \le 2$.

Akibatnya $0 \le \sqrt{2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2)} \le 2$, sehingga $|z_1 - z_2| \ge 0$.

Karena $|z_1 - z_2| \ge 0$, maka $d(z_1, z_2) \ge 0$ untuk setiap z_1, z_2 di Y.

(ii) Akan ditunjukkan $d(z_1, z_2) = 0$ jika dan hanya jika $z_1 = z_2$.

Misalkan $d(z_1, z_2) = 0$, maka

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{2 - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2)}$$

$$= \sqrt{2 - 2(\cos(\theta_1 - \theta_2))} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2(\cos(\theta_1 - \theta_2)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\theta_1 - \theta_2) = 1$$

$$\Leftrightarrow \theta_1 - \theta_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2.$$

Akibatnya $x_1 = \cos\theta_1 = \cos\theta_2 = x_2$ dan $y_1 = \sin\theta_1 = \sin\theta_2 = y_2$, sehingga $z_1 = z_2$.

Sebaliknya, misalkan $z_1 = z_2$, maka $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$.

Akibatnya

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{2 - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2)} = \sqrt{2 - 2(x_1 x_1 + y_1 y_1)}$$

$$= \sqrt{2 - 2(x_1^2 + y_1^2)} = \sqrt{2 - 2(1)} = \sqrt{0} = 0.$$

(iii)Perhatikan bahwa:

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)|$$

$$= |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)|$$

$$= |(x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)|$$

$$= |(x_2 + iy_2) - (x_1 + iy_1)|$$

$$= |z_2 - z_1| = d(z_2, z_1).$$

Akibatnya $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$ untuk setiap z_1, z_2 di Y.

(iv) Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
|z_1 - z_3| &= |(x_1 + iy_1) - (x_3 + iy_3)| = |(x_1 - x_3) + i(y_1 - y_3)| \\
&= |(x_1 - x_2 + x_2 - x_3) + i(y_1 - y_2 + y_2 - y_3)| \\
&= \left|\left((x_1 - x_2) + (x_2 - x_3)\right) + i\left((y_1 - y_2) + (y_2 - y_3)\right)\right| \\
&= \left|\left((x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)\right) + \left((x_2 - x_3) + i(y_2 - y_3)\right)\right| \\
&\leq |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| + |(x_2 - x_3) + i(y_2 - y_3)| \\
&= |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| + |(x_2 + iy_2) - (x_3 + iy_3)| \\
&= |z_2 - z_1| + |z_2 - z_3|.
\end{aligned}$$

Akibatnya $d(z_1, z_3) = d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$ untuk setiap $z_1, z_2, z_3 \in Y$.

Dari (i), (ii), (ii), dan (iv) maka himpunan Y dengan metrik d merupakan ruang metrik.

Selanjutnya akan ditunjukkan subruang metrik Y tertutup. Yaitu berdasarkan Teorema 3.2, akan ditujukkan Y ruang metrik lengkap, yaitu setiap barisan Cauchy di Y konvergen.

Ambil (z_n) barisan Cauchy sebarang pada Y. Misalkan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + y_n$ dengan ${x_n}^2 + {y_n}^2 = 1$. Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena $(z_n) = (x_n + iy_n)$ adalah barisan Cauchy maka terdapat $H(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, n \geq H(\varepsilon)$ berlaku

$$|z_m - z_n| < \varepsilon.$$

Akibatnya

$$|x_m - x_n| \leq |z_m - z_n| < \varepsilon,$$

$$|y_m - y_n| \leq |z_m - z_n| < \varepsilon,$$

sehingga barisan bilangan riil (x_n) dan (y_n) adalah barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$ adalah ruang metrik lengkap, maka barisan

(x_n) dan (y_n) konvergen di $\mathbb{R}$, sebut (x_n) konvergen ke x dan (y_n) konvergen ke y, yaitu untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq k_1$ dan terdapat $k_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq k_2$.

Definisikan $z = x + iy$.

Pilih $k = sup\{k_1, k_1\}$.

Perhatikan $n \geq sup\{k_1, k_1\}$:

$$\begin{aligned} d(z_n, z) = |z_n - z| &= |(x_n + iy_n) - (x + iy)| \\ &= |(x_n - x) + i(y_n - y)| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka (z_n) konvergen ke z anggota $\mathbb{C}$.

Selajutnya ditunjukan z anggota Y, yaitu $x^2 + y^2 = 1$. Karena ${x_n}^2 + {y_n}^2 = 1$ maka $x_n, y_n \in [-1,1]$. Berdasarkan Contoh 1, himpunan $[-1,1]$ dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$ merupakan ruang metrik lengkap dan barisan (x_n) konvergen ke x, barisan (y_n) konvergen ke y akibatnya $x, y \in [-1,1]$. Karena (y_n) konvergen ke y, maka berdasarkan Teorema 2.1.4, barisan $({y_n}^2)$ konvergen ke y^2. Akibatnya $(1 - {y_n}^2)$ konvergen ke $1 - y^2$. Karena $(1 - {y_n}^2)$ konvergen ke $1 - y^2$ dan $1 - y^2 \geq 0$, maka berdasarkan Toerema 2.1.5, barisan $\left(\sqrt{1 - {y_n}^2}\right)$ konvergen ke $\sqrt{1 - y^2}$. Karena (x_n) konvergen ke x dan $x_n = \sqrt{1 - {y_n}^2}$ maka $x = \sqrt{1 - y^2}$. Akibatnya $x^2 + y^2 = 1$. Karena $x + iy$ anggota $\mathbb{C}$ dan $x^2 + y^2 = 1$, maka $x + iy$ anggota Y. Akibatnya (z_n) konvergen ke z anggota Y, sehingga Y merupakan ruang metrik lengkap. Karena himpunan bilangan komplek dengan metrik d merupakan ruang metrik lengkap, Y subruang dari $\mathbb{C}$, dan Y lengkap maka berdasarkan Teorema 3.2, dapat disimpulkan bahwa himpunan Y tertutup.

Contoh 3

Himpunan $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, y = x^2\}$ dengan metrik

$$\beta\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

untuk setiap $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in M$ adalah tertutup.

Berdasarkan contoh 3 pada subbab 2.5, himpunan $\mathbb{R}^2$ dengan metrik $\beta\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ merupakan ruang metrik lengkap. Akan ditunjukkan himpunan M merupakan subruang dari ruang metrik $\mathbb{R}^2$, yaitu: M merupakan subhimpunan tak kosong dari $\mathbb{R}^2$ dan himpunan M dengan metrik β membentuk ruang metrik. Karena $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ dan $0 = 0^2$, maka $(0,0) \in M$. Akibatnya $Y \neq \emptyset$. Dari definisi himpunan A jelas bahwa $M \subset \mathbb{R}^2$. Selanjutnya ditunjukkan M dengan metrik β membentuk ruang metrik.

Ambil $a,b,c \in M$ maka

$a = (x_1,y_1)$ untuk suatu $x_1,y_1 \in \mathbb{R}$, dengan $y_1 = {x_1}^2$,

$b = (x_2,y_2)$ untuk suatu $x_2,y_2 \in \mathbb{R}$, dengan $y_2 = {x_2}^2$,

$c = (x_3,y_3)$ untuk suatu$x_3,y_3 \in \mathbb{R}$, dengan $y_3 = {x_3}^2$.

i) Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}\beta\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| &= |x_1 - x_2| + |{x_1}^2 - {x_2}^2| \\ &= |x_1 - x_2| + |(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)| \\ &= |x_1 - x_2| + |x_1 - x_2||x_1 + x_2| \\ &= |x_1 - x_2|(1 + |x_1 + x_2|) \geq 0\end{aligned}$$

Akibatnya $\beta(a,b) \geq 0$ untuk setiap $a,b \in M$.

ii) Misalkan $\beta(a,b)=0$, akan ditunjukkan $a=b$.

Perhatikan bahwa:

$$\beta\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|=|x_1-x_2|+|{x_1}^2-{x_2}^2|$$
$$=|x_1-x_2|+|(x_1-x_2)(x_1+x_2)|$$
$$=|x_1-x_2|+|x_1-x_2||x_1+x_2|$$
$$=|x_1-x_2|(1+|x_1+x_2|)=0.$$

Akibatnya $|x_1-x_2|=0$ atau $1+|x_1+x_2|=0$.

Jika $1+|x_1+x_2|=0$ maka $|x_1+x_2|=-1$. Hal ini tidak mungkin.

Jika $|x_1-x_2|=0$ maka $x_1-x_2=0$ atau $x_1=x_2$. Akibatnya ${x_1}^2={x_2}^2$ atau $y_1=y_2$, sehingga $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ atau $a=b$.

Sebaliknya, misalkan $a=b$ akan ditunjukkan $\beta(a,b)=0$. Karena $a=b$ maka $x_1=x_2$ dan $y_1=y_2$, atau $x_1-x_2=0$ dan $y_1-y_2=0$. Akibatnya

$$\beta(a,b)=\beta\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|=|0|+|0|=0.$$

iii) Perhatikan bahwa:

$$\beta\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|=|x_1-x_2|+|{x_1}^2-{x_2}^2|$$
$$=|x_1-x_2|+|(x_1-x_2)(x_1+x_2)|$$
$$=|x_1-x_2|+|x_1-x_2||x_1+x_2|=|x_1-x_2|(1+|x_1+x_2|)$$
$$=|x_2-x_1|(1+|x_2+x_1|)=|x_2-x_1|+|x_2-x_1||x_2+x_1|$$
$$=|x_2-x_1|+|(x_2-x_1)(x_2+x_1)|=|x_2-x_1|+|{x_2}^2-{x_1}^2|$$
$$=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|=\beta\big((x_2,y_2),(x_1,y_1)\big).$$

Akibatnya $\beta(a,b)=\beta(b,a)$ untuk setiap $a,b\in M$.

iv) Perhatikan Bahwa:

$$\beta\big((x_1,y_1),(x_3,y_3)\big) = |x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| = |x_1 - x_3| + |{x_1}^2 - {x_3}^2|$$

$$= |x_1 - x_2 + x_2 - x_3| + |{x_1}^2 - {x_2}^2 + {x_2}^2 - {x_3}^2|$$

$$\leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |{x_1}^2 - {x_2}^2| + |{x_2}^2 - {x_3}^2|$$

$$= |x_1 - x_2| + |{x_1}^2 - {x_2}^2| + |x_2 - x_3| + |{x_2}^2 - {x_3}^2|$$

$$= (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) + (|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|)$$

$$= \beta\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) + \beta\big((x_2,y_2),(x_3,y_3)\big).$$

Akibatnya $\beta(a,c) = \beta(a,b) + \beta(b,c)$untuk setiap a,b,c di M.

Dari (i), (ii), (ii), dan (iv) maka himpunan M dengan metrik β merupakan ruang metrik.

Selanjutnya akan ditunjukkan subruang metrik M tertutup, yaitu berdasarkan Teorema 3.2, akan ditujukkan M ruang metrik lengkap, yaitu setiap barisan Cauchy di M konvergen.

Ambil (a_n) barisan Cauchy sebarang pada M. Misalkan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (x_n, y_n)$ dengan $y_n = {x_n}^2$. Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena $(a_n) = \big((x_n, y_n)\big)$ adalah barisan Cauchy maka terdapat $H(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m,n \geq H(\varepsilon)$ berlaku

$$\beta(a_n, a_m) = \beta\big((x_n,y_n),(x_m,y_m)\big) = |x_n - x_m| + |y_n - y_m| < \varepsilon.$$

Akibatnya

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m| < \varepsilon,$$

$$|y_n - y_m| \leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m| < \varepsilon,$$

sehingga barisan (x_n) dan (y_n) merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ ruang metrik lengkap maka barisan (x_n) dan (y_n) konvergen. Sebut (x_n) konnvergen ke x dan (y_n) konvergen ke y, yaitu untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq k_1$ dan terdapat $k_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq k_2$.

Defisinisikan $a = (x, y)$.

Pilih $k = sup\{k_1, k_2\}$.

Perhatikan untuk $n \geq sup\{k_1, k_2\}$.

$$\beta(a_n, a) = \beta\big((x_n, y_n), (x, y)\big) = |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka (a_n) konvergen ke a anggota $\mathbb{R}^2$.

Selajutnya ditunjukan $a = (x, y)$ anggota M, yaitu $y = x^2$. Karena $y_n = {x_n}^2$ maka $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Himpunan $\mathbb{R}$ merupakan ruang metrik lengkap dan barisan (x_n) konvergen ke x, barisan (y_n) konvergen ke y akibatnya $x, y \in \mathbb{R}$. Karena (x_n) konvergen ke x, maka berdasarkan Teorema 2.1.3, barisan $({x_n}^2)$ konvergen ke x^2. Karena (y_n) konvergen ke y dan $y_n = {x_n}^2$ maka $y = x^2$. Karena (x, y) anggota $\mathbb{R}^2$ dan $y = x^2$, maka (x, y) anggota M. Akibatnya (a_n) konvergen ke a anggota M, sehingga M merupakan ruang metrik lengkap. Karena himpunan $\mathbb{R}^2$ dengan metrik β merupakan ruang metrik lengkap, M subruang dari $\mathbb{R}^2$, dan M lengkap maka berdasarkan Teorema 3.2, dapat disimpulkan bahwa himpunan M tertutup.

Contoh 4

Himpunan $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ dengan metrik

$$\rho\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = maks\,\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

untuk setiap $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ adalah ruang metrik lengkap.

Berdasarkan contoh 4 pada subbab 2.5, himpunan $\mathbb{R}^2$ dengan metrik $\rho\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = maks\,\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ merupakan ruang metrik lengkap. Akan ditunjukkan himpunan A merupakan subruang dari ruang metrik $\mathbb{R}^2$, yaitu: A merupakan subhimpunan tak kosong dari $\mathbb{R}^2$ dan himpunan A dengan metrik ρ membentuk ruang metrik. Karena $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ dan $x = 0$, maka $(0,0) \in A$. Akibatnya $A \neq \emptyset$. Dari definisi himpunan A jelas bahwa $A \subset \mathbb{R}^2$. Selanjutnya ditunjukkan A dengan metrik ρ membentuk ruang metrik.

Ambil $a, b, c \in A$ maka $a = (0, y_1)$, $b = (0, y_2)$, $c = (0, y_3)$ untuk suatu $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$.

i) Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} \rho\big((0, y_1), (0, y_2)\big) &= maks\,\{|0-0|, |y_1 - y_2|\} \\ &= maks\,\{0, |y_1 - y_2|\} \\ &= |y_1 - y_2| \geq 0 \end{aligned}$$

Akibatnya $\rho(a, b) \geq 0$ untuk setiap $a, b \in A$.

ii) Misalkan $\rho(a, b) = 0$ akan ditunjukkan $a = b$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \rho\big((0, y_1), (2, y_2)\big) &= maks\,\{|0-0|, |y_1 - y_2|\} \\ &= maks\,\{0, |y_1 - y_2|\} \\ &= |y_1 - y_2| = 0. \end{aligned}$$

Akibatnya $y_1 - y_2 = 0$ atau $y_1 = y_2$, sehingga $(0, y_1) = (0, y_2)$ atau $a = b$.

Sebaliknya, misalkan $a = b$ akan ditunjukkan $\rho(a, b) = 0$. Karena $a = b$ maka $(0, y_1) = (0, y_2)$, berarti $y_1 = y_2$ atau $y_1 - y_2 = 0$. Akibatnya

$$\rho\big((0, y_1), (0, y_2)\big) = maks\,\{|0-0|, |y_1 - y_2|\} = maks\{0,0\} = 0.$$

iii) Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}\rho((0,y_1),(0,y_2)) &= maks\,\{|0-0|,|y_1-y_2|\}\\ &= maks\,\{|0-0|,|y_2-y_1|\}\\ &= \rho((0,y_2),(0,y_1)).\end{aligned}$$

Akibatnya $\rho(a,b) = \rho(b,a)$ untuk setiap $a, b \in A$.

iv) Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}\rho((0,y_1),(0,y_3)) &= maks\,\{|0-0|,|y_1-y_3|\}\\ &= maks\,\{|0-0+0-0|,|y_1-y_2+y_2-y_3|\}.\\ &\leq maks\,\{|0-0|+|0-0|,|y_1-y_2|+|y_2-y_3|\}\\ &= maks\,\{(|0-0|,|y_1-y_2|)+(|0-0|,|y_2-y_3|)\}\\ &< maks\,\{|0-0|,|y_1-y_2|\}+maks\,\{|0-0|,|y_2-y_3|\}\\ &= \rho((0,y_1),(0,y_2))+\rho((0,y_2),(0,y_3)).\end{aligned}$$

Akibatnya $\rho(a,c) < \rho(a,b) + \rho(b,c)$ untuk setiap a, b, c di $\mathbb{R}^2$.

Dari (i), (ii), (ii), dan (iv) maka himpunan A dengan metrik ρ merupakan ruang metrik.

Akan ditunjukkan subruang metrik A lengkap, yaitu berdasarkan Teorema 3.2, akan ditujukkan A himpunan tertutup, yaitu dengan menunjukkan $A^c = \mathbb{R}^2 - A$ himpunan terbuka.

Ambil $a \in \mathbb{R}^2 - A$ sebarang, dengan $a = (x, y)$ dan $x < 0$ atau $x > 0$. Untuk $x < 0$ pilih $\varepsilon = \frac{-x}{2}$ dan untuk $x > 0$ pilih $\varepsilon = \frac{x}{2}$. Akan ditunjukkan $S_\varepsilon(a) \subset \mathbb{R}^2 - A$. Ambil $b \in S_\varepsilon(a)$ sebarang dengan $b = (x_0, y_0)$. Akan ditunjukkan $b \in \mathbb{R}^2 - A$, yaitu $x_0 < 0$ atau $x_0 > 0$. Karena $b \in S_\varepsilon(a)$ maka $\rho(a,b) < \varepsilon$.

Perhatikan bahwa:

Untuk $x < 0$,

$$\rho(a,b) = \rho((x,y),(x_0,y_0)) = maks\{|x - x_0|, |y - y_0|\}.$$

Jika $maks\{|x - x_0|, |y - y_0|\} = |x - x_0|$, maka $|x - x_0| < \frac{-x}{2} < -x$.

Jika $maks\{|x - x_0|, |y - y_0|\} = |y - y_0|$, maka $|x - x_0| < |y - y_0| < \frac{-x}{2} < -x$.

Akibatnya

$$x < x - x_0 < -x \Leftrightarrow 0 < -x_0 < -2x \Leftrightarrow 2x < x_0 < 0.$$

Untuk $x > 0$,

$$\rho(a,b) = \rho((x,y),(x_0,y_0)) = maks\{|x - x_0|, |y - y_0|\}.$$

Jika $maks\{|x - x_0|, |y - y_0|\} = |x - x_0|$, maka $|x - x_0| < \frac{x}{2} < x$.

Jika $maks\{|x - x_0|, |y - y_0|\} = |y - y_0|$, maka $|x - x_0| < |y - y_0| < \frac{x}{2} < x$.

Akibatnya

$$-x < x - x_0 < x \Leftrightarrow -2x < -x_0 < 0 \Leftrightarrow 0 < x_0 < 2x.$$

Karena $x_0 < 0$ atau $x_0 > 0$ maka $b \in \mathbb{R}^2 - A$. Karena $b \in S_\varepsilon(a)$ sebarang dan $b \in \mathbb{R}^2 - A$, maka $S_\varepsilon(a) \subset \mathbb{R}^2 - A$. Jadi himpunan $\mathbb{R}^2 - A$ adalah buka dan himpunan A tutup. Karena himpunan A dengan metrik ρ merupakan subruang dari ruang metrik lengkap $\mathbb{R}^2$ dan himpunan A tertutup, maka berdasarkan Teorema 3.2, dapat disimpulkan bahwa A merupakan ruang metrik lengkap.

BAB IV

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa: jika suatu barisan konvergen dalam ruang metrik mempunyai takhingga banyaknya titik yang berbeda, maka limitnya adalah suatu titik limit dari himpunan titik barisan tersebut.

Misalkan himpunan X dengan metrik d adalah ruang metrik lengkap, berarti setiap barisan Cauchy di X konvergen. Misalkan pula Y subruang dari X, yaitu: himpunan Y subhimpunan tak kosong dari X dan himpunan Y dengan metrik d membentuk ruang metrik. Maka syarat perlu dan syarat cukup agar Y lengkap adalah Y merupakan subruang dari ruang metrik lengkap X dan Y himpunan tertutup, yaitu: Y memuat setiap titik limitnya atau himpunan $X - Y$ adalah buka.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bartle, RG and D.R Sherbert. 1994. *Introduction to Real Analysis.* Second edition. Eastern Michigan University and University of Illinois.

[2] Berrberian, Sterling K. 1961. *Introduction to Hilbert Space.* Oxford University press, New York.

[3] Maddox, I. J. 1970. *Elements of Functional Analysis.* Cambridge University Press, New York.

[4] Ruckle, William H. 1991. *Modern Analysis. Measure Theory and Functional Analysis with Applications.* PWS-KENT Publishing Company, Boston.

[5] Runde, Volker. 2005. *A Taste of Topology Universitext.* Springer. USA.

[6] Schroder, B.S.W. 2008. *Mathematical Analysis: a Concise Introduction.* John Willey & Sons, New Jersey.

[7] Simmons, George F. 1963. *Introduction to Topology and Modern Analysis*. International student edition. Tosho Printing, Tokyo.

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis dilahirkan di Pekanbaru pada tanggal 05 November 1988. Anak Kedua dari pasangan Akmal dan Asma. Penulis memulai pendidikannya di TK Masyithah III Simpang Empat Pasaman Barat tahun 1994. Pada tahun 1995, penulis melanjutkan pendidikannya di SD Negeri 02 Simpang Empat. Pada tahun 2001, penulis melanjutkan pendidikannya di MTs Negeri Simpang Empat. Pada tahun 2004, penulis melanjutkan pendidikannya di MA Negeri Lubuk Sikaping dan tamat pada tahun 2007. Pada tahun yang sama, penulis di terima menjadi mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Andalas melalui jalur Penjaringan Tahun 2007/2008. Selama di bangku perkuliahan penulis menjadi anggota HIMATIKA periode 2008-sekarang dan aktif di berbagai kegiatan HIMATIKA. Penulis pernah menjadi anggota pengurus BEM KM FMIPA Universitas Andalas periode 2008-2009. Penulis juga pernah menjadi asisten Laboratorium Statistika dan Komputasi Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas. Untuk syarat meraih gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika FMIPA UNAND, penulis pernah mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kenagarian Kubang, Kabupaten Lima Puluh Kota pada bulan Juli s/d Agustus 2010.