



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar Unand.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Unand.

## **APLIKASI ALGORITMA MATRIKS TRIANGONAL PADA INTERPOLASI SPLIN KUBIK**

**SKRIPSI**



**ELVATHNA SYAFWAN  
06 134 022**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS ANDALAS  
PADANG 2011**

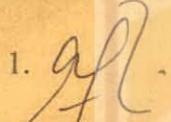
## TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini menyatakan bahwa :

Nama : Elvathna Syafwan  
No. Buku Pokok : 06 134 022  
Jurusan : Matematika  
Bidang : Terapan  
Judul Skripsi : Aplikasi Algoritma Matriks Tridiagonal pada Interpolasi Splin Kubik

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal 28 Juli 2011 berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing

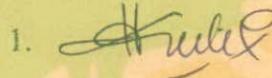
1. 

Efendi, M. Si  
NIP. 197807172002121002

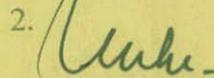
2. 

Narwen, M. Si  
NIP. 196704101997021001

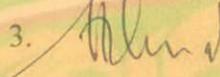
Penguji

1. 

Dr. Lya Yulianti  
NIP. 197507061999032003

2. 

Dr. Muhafzan  
NIP. 196706021993021002

3. 

Dr. Admi Nazra  
NIP. 197103301999031002

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNAND



Dr. Syafrizal Sy  
NIP. 196708071993091001

## KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Syukur Alhamdulillah Penulis sampaikan kehadiran Allah SWT, karena berkat rahmat dan karuniaNya Penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul **“Aplikasi Algoritma Matriks Tridiagonal pada Interpolasi Splin Kubik,** yang merupakan salah satu syarat untuk menempuh ujian sarjana matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang. Shalawat dan salam juga Penulis kirimkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang kita harapkan syafaatnya di Yaumul Akhir kelak, amin.

Ucapan terima kasih yang tak terhingga Penulis sampaikan kepada kedua orang tua tercinta, uda-uda tersayang, serta semua keluarga yang menjadi motivator dan penyemangat dalam menjalani hidup dan kehidupan ini. Selain itu, ucapan terima kasih Penulis sampaikan kepada :

1. Bapak Dr. Syafrizal Sy selaku ketua jurusan Matematika FMIPA UNAND
2. Bapak Efendi, M.Si dan Bapak Narwen, M.Si selaku pembimbing yang telah memberikan bimbingan dan arahan dalam penyelesaian tugas akhir ini
3. Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Dr. Muhafzan dan Bapak Dr. Admi Nazra selaku penguji yang telah memberikan nasehat dan perbaikan dalam penyelesaian tugas akhir ini
4. Ibu Nova Noliza Bakar, M.Si selaku pembimbing akademik
5. Bapak dan ibu dosen yang tidak dapat Penulis sebutkan satu persatu, terima kasih atas ilmu yang telah diberikan kepada Penulis selama ini.
6. Mama Cun, Bu Eli, Pak Syamsir, dan Ni Opi yang telah membantu setiap urusan administrasi Penulis selama ini.
7. Teman seperjuangan matematika 2006, keluarga besar HIMATIKA dan FSI FMIPA UNAND

8. Seseorang yang menjadi penyemangat, yang selalu mendampingi dalam setiap imajinasi Penulis.

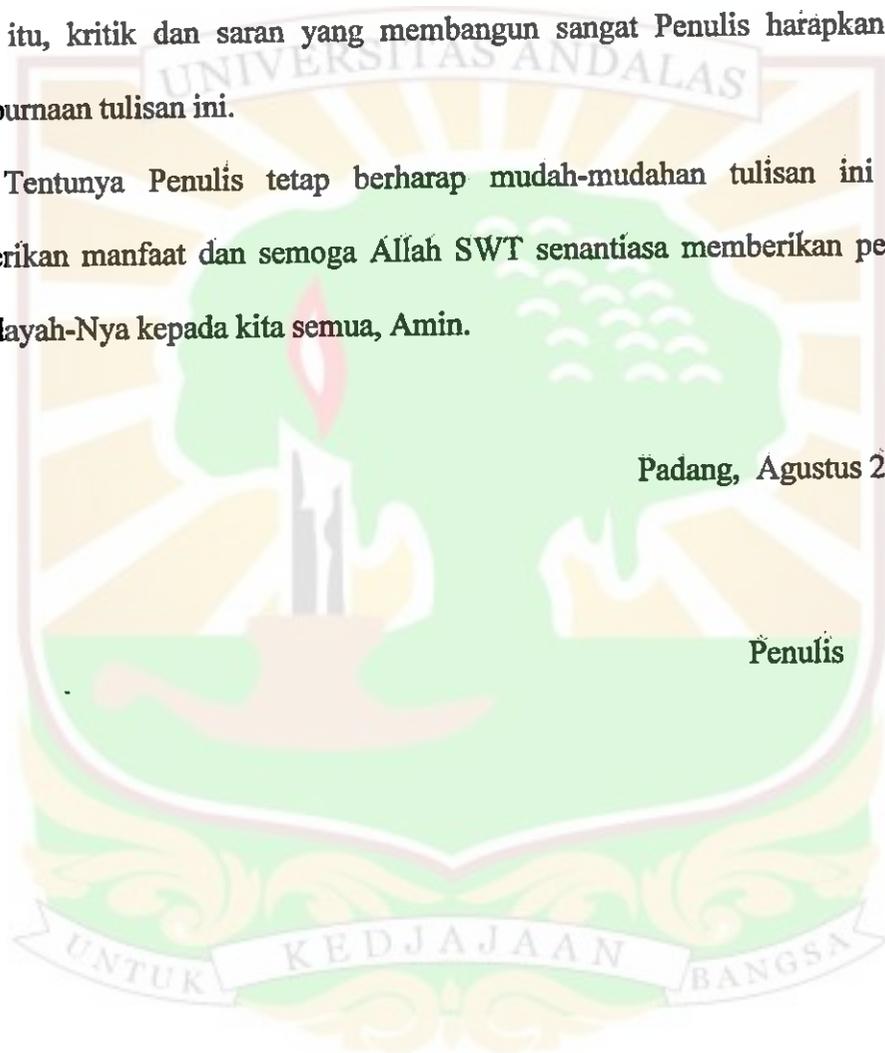
10. Semua pihak yang dengan tulus ikhlas memberikan bantuan, dukungan, dan do'a yang sangat berarti bagi Penulis.

Penulis menyadari bahwa tulisan ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat Penulis harapkan demi kesempurnaan tulisan ini.

Tentunya Penulis tetap berharap mudah-mudahan tulisan ini dapat memberikan manfaat dan semoga Allah SWT senantiasa memberikan petunjuk dan hidayah-Nya kepada kita semua, Amin.

Padang, Agustus 2011

Penulis



## ABSTRAK

Fungsi splin kubik dibangun dengan koefisien  $a_j$ ,  $b_j$ ,  $c_j$ , dan  $d_j$ . Nilai koefisien tersebut bergantung pada nilai turunan kedua dari fungsi splin kubiknya. Nilai turunan kedua dari fungsi splin kubik merupakan solusi yang perlu dicari pada sistem matriks tridiagonal. Solusi tersebut dapat ditentukan dengan menggunakan algoritma matriks tridiagonal. Setelah didapatkan nilai turunan keduanya, maka fungsi splin kubik menggunakan koefisien  $a_j$ ,  $b_j$ ,  $c_j$ , dan  $d_j$ .

**Kata kunci :** *fungsi splin kubik, turunan kedua fungsi splin kubik, algoritma matriks tridiagonal*



## DAFTAR ISI

<b>KATA PENGANTAR.....</b>	<b>v</b>
<b>ABSTRAK.....</b>	<b>vii</b>
<b>DAFTAR ISI .....</b>	<b>viii</b>
<b>DAFTAR TABEL.....</b>	<b>x</b>
<b>DAFTAR GAMBAR.....</b>	<b>xi</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang Masalah .....	1
1.2 Perumusan Masalah .....	3
1.3 Pembatasan Masalah .....	3
1.4 Tujuan Penulisan .....	3
1.5 Sistematika Penulisan .....	3
<b>BAB II LANDASAN TEORI</b>	
2.1 Turunan.....	5
2.2 Sistem Persamaan Linear dan Matriks .....	5
2.3 Matriks Tridiagonal .....	7
2.4 Algoritma Matriks Tridiagonal .....	7
<b>BAB III PEMBAHASAN</b>	
3.1 Interpolasi Splin Kubik.....	11
3.1.1 Splin Alami.....	17
3.1.2 Splin Berujung Parabolik.....	18
3.2 Menentukan Nilai Turunan Kedua dari Fungsi Splin Kubik dengan Menggunakan Algoritma Matriks Tridiagonal Dan Menentukan Bentuk Fungsi Splin Kubik.....	20

**BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN**

4.1 Kesimpulan..... 30

4.2 Saran..... 30

**DAFTAR PUSTAKA ..... 31**

**LAMPIRAN ..... 32**



## DAFTAR TABEL

No	Halaman
3.2.1 Data Kecepatan Penerjun.....	20
3.2.2 Data Kecepatan Penerjun dan Interval Waktu.....	21



## DAFTAR GAMBAR

No	Halaman
3.2.1 Kurva Splin Alami.....	25
3.2.2 Kurva Splin Berujung Parabolik.....	28
3.2.3 Kurva Splin Alami yang Digabung dengan Splin Berujung Parabolik.....	29



# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Fitting data pada umumnya dapat dilakukan dengan berbagai metode, antara lain metode kuadrat terkecil dan interpolasi Lagrange. Metode-metode tersebut pada umumnya dapat digunakan dengan mudah apabila bentuk dari fungsi kurvanya diketahui dan sederhana, atau pada titik-titik tertentu, fungsi dan turunannya telah diketahui. Biasanya, metode-metode tersebut dapat berhasil secara baik, namun terkadang dapat juga mengalami kegagalan terutama untuk kedua titik data yang berada di ujung data yang sangat sukar untuk menentukan turunannya [5].

Oleh sebab itu, suatu pendekatan alternatif yang dapat digunakan untuk fitting data ini adalah dengan menerapkan polinomial orde rendah terhadap subkumpulan titik data. Polinomial penyambungan ini disebut dengan *fungsi splin*. Konsep splin berasal dari teknik menggambar dengan menggunakan lempengan yang fleksibel dan tipis (dinamakan *splin*) untuk menggambarkan kurva yang licin melalui sekumpulan titik.

Splin terdiri dari 3 jenis, yaitu splin linear, splin kuadratik, dan splin kubik. Dalam praktiknya, splin kubik yang sering dipakai karena memberikan aproksimasi yang lebih dapat diterima walaupun turunan ketiga atau yang lebih tinggi bisa diskontinu, namun biasanya tidak dapat dideteksi secara visual sehingga dengan sendirinya dapat diabaikan [7].

Tujuan interpolasi splin kubik ialah menurunkan suatu polinomial orde ketiga untuk setiap interval di antara titik data  $(x_j, p_j(x_j))$ , yaitu

$$p_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

dengan  $a_j, b_j, c_j$ , dan  $d_j$  adalah koefisien-koefisien yang nilai-nilainya akan dicari. Interpolasi ini sangat berguna untuk fitting data, dimana bentuk fungsinya maupun turunannya tidak diketahui.

Sebagaimana yang akan ditunjukkan pada Bab 3 nanti, turunan kedua dari setiap subfungsi pada interpolasi splin kubik di atas menentukan nilai-nilai koefisien  $b_j, c_j$ , dan  $d_j$ , sehingga perlu dicari solusinya. Permasalahan ini kemudian dapat dimodelkan dalam bentuk sistem matriks tridiagonal

$$\begin{bmatrix} v_1 & w_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ u_2 & v_2 & w_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & u_3 & v_3 & w_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & u_{n-1} & v_{n-1} & w_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_n & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ r_n \end{bmatrix},$$

dimana matriks kolom  $Z = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$  berisi turunan kedua dari sub-subfungsi pada interpolasi splin kubik.

Biasanya untuk menentukan solusi matriks kolom  $Z$  pada sistem persamaan di atas, metode Eliminasi Gauss seringkali dipakai. Akan tetapi, karena elemen-elemen yang bernilai nol lebih dominan pada matriks tridiagonal yang berukuran besar, maka dipandang perlu untuk menerapkan sebuah metode yang dapat mengefisienkan proses komputasi yang digunakan dalam menyelesaikan sistem tridiagonal tersebut. Salah satu metode yang dapat dipakai adalah *algoritma matriks tridiagonal* yang dikembangkan oleh Llewellyn Thomas, sehingga algoritma tersebut juga dikenal dengan nama *algoritma Thomas* [1].

## 1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah bagaimana cara menentukan nilai turunan kedua dari fungsi splin kubik dengan menggunakan algoritma matriks tridiagonal sehingga kurva dari fungsi splin kubik tersebut dapat dibuat.

## 1.3 Pembatasan Masalah

Pada penelitian ini, Penulis membatasi permasalahan pada penentuan nilai turunan kedua dari fungsi splin kubik dan bentuk fungsi splin kubik untuk jenis splin alami dan splin berujung parabolik dengan interval yang tidak seragam.

## 1.4 Tujuan Penulisan

Tulisan ini bertujuan untuk melihat penggunaan algoritma matriks tridiagonal pada interpolasi splin kubik.

## 1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada penelitian ini terdiri dari :

Bab I : Pendahuluan

Bab ini menjelaskan mengenai latar belakang penulisan, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan.

Bab II : Landasan Teori

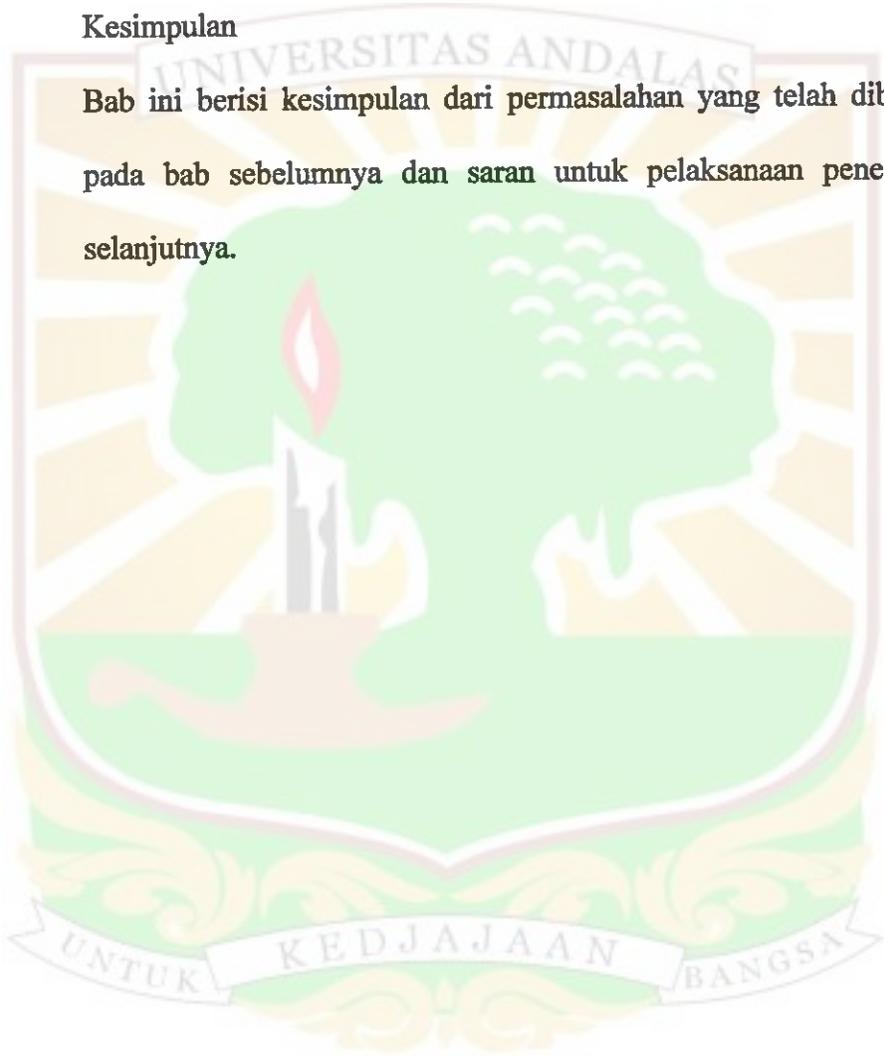
Bab ini berisi tentang teori-teori yang mendasari bagian pembahasan, yaitu turunan, sistem persamaan linear dan matriks, matriks tridiagonal, dan algoritma matriks tridiagonal.

**Bab III: Hasil dan Pembahasan**

Bagian ini merupakan bagian inti dari penulisan yang membahas mengenai interpolasi splin kubik, menentukan nilai turunan kedua dari fungsi splin kubik dengan menggunakan algoritma matriks tridiagonal dan menentukan bentuk fungsi splin kubik.

**Bab IV: Kesimpulan**

Bab ini berisi kesimpulan dari permasalahan yang telah dibahas pada bab sebelumnya dan saran untuk pelaksanaan penelitian selanjutnya.



## BAB II

### LANDASAN TEORI

#### 2.1 Turunan

##### Definisi 2.1.1 [6]

Turunan fungsi  $f$  adalah fungsi lain  $f'$  (dibaca “f aksen”) yang nilainya pada sebarang bilangan  $c$  adalah

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \right)$$

asalkan limit ini ada. Jika limit ini memang ada, maka dikatakan bahwa  $f$  terdiferensialkan (mempunyai turunan) di  $c$ .

##### Turunan Tingkat Tinggi [6]

Operasi pendiferensialan mengambil sebuah fungsi  $f$  dan menghasilkan sebuah fungsi baru  $f'$ . Jika  $f'$  didiferensialkan, maka masih menghasilkan fungsi lain, dinyatakan dengan  $f''$  dan disebut turunan kedua dari  $f$ . Kemudian dapat diturunkan lagi, dengan demikian menghasilkan  $f'''$ , yang disebut turunan ketiga, dan seterusnya.

#### 2.2 Sistem Persamaan Linear dan Matriks

Sebuah garis yang terletak pada bidang  $xy$  dapat dinyatakan secara aljabar dalam suatu persamaan berbentuk

$$a_1x + a_2y = b$$

dimana  $a_1$ ,  $a_2$ , dan  $b$  merupakan konstanta riil, dan  $a_1$  dan  $a_2$  tidak keduanya nol.

Persamaan ini disebut persamaan linear dengan variabel  $x$  dan  $y$ . Secara umum

didefinisikan, persamaan linear dengan  $n$  variabel  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sebagai pernyataan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b.$$

### Sistem Linear [3]

Sejumlah tertentu persamaan linear dalam variabel  $x_1, x_2, \dots, x_n$  disebut sistem persamaan linear atau sistem linear.

### Matriks

#### Definisi 2.2.1 [3]

Matriks adalah sebuah susunan segiempat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan elemen matriks. Ukuran sebuah matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan kolom. Untuk matriks  $M$  yang berukuran  $r \times s$  dapat ditulis sebagai berikut :

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1s} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{r1} & m_{r2} & \dots & m_{rs} \end{bmatrix} = [m_{ij}]_{r \times s}$$

dengan  $i = 1, 2, \dots, r$  dan  $j = 1, 2, \dots, s$ .

Elemen matriks  $M$  dinyatakan dengan huruf kecil dan diberi dua indeks. Elemen yang terletak pada baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  dari matriks  $M$  dinyatakan dengan  $m_{ij}$ .

Matriks bujursangkar adalah matriks yang jumlah baris dan kolomnya sama ( $r = s$ ) dan dikatakan berukuran  $r$  atau berukuran  $s$ .

#### Definisi 2.2.2 [3]

Jika  $A$  adalah matriks  $m \times r$  dan  $B$  adalah matriks  $r \times n$ , maka hasilkali  $AB$  adalah matriks  $m \times n$  yang elemen-elemennya ditentukan. Untuk mencari elemen pada baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  dari  $AB$ , pisahkanlah baris ke- $i$  dari matriks  $A$  dan

kolom ke- $j$  dari matriks  $B$ . Kalikan elemen-elemen yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil yang diperoleh.

### 2.3 Matriks Tridiagonal

Matriks tridiagonal adalah matriks bujursangkar yang seluruh elemen bukan 0 (nol) berada di sekitar elemen diagonal, sementara elemen lainnya bernilai 0 (nol). [8]

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

### 2.4 Algoritma Matriks Tridiagonal

Algoritma matriks tridiagonal biasa digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan tridiagonal. Suatu sistem tridiagonal untuk  $n$  yang tidak diketahui, dapat ditulis sebagai berikut

$$u_i z_{i-1} + v_i z_i + w_i z_{i+1} = r_i,$$

dimana  $u_1 = 0$  dan  $w_n = 0$ . Dalam bentuk matriks, sistem ini ditulis sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} v_1 & w_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ u_2 & v_2 & w_2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & u_3 & v_3 & w_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & u_{n-1} & v_{n-1} & w_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & u_n & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ r_n \end{bmatrix} \dots\dots(2.4.1)$$

Langkah pertama adalah memodifikasi koefisien-koefisien menjadi seperti berikut

:

$$\tilde{w}_i = \begin{cases} \frac{w_1}{v_1}, & i = 1 \\ \frac{w_i}{v_i - \tilde{w}_{i-1}u_i}, & i = 2, 3, \dots, n-1 \end{cases} \dots\dots\dots(2.4.2)$$

dan

$$\tilde{r}_i = \begin{cases} \frac{r_1}{v_1}, & i = 1 \\ \frac{r_i - \tilde{r}_{i-1}u_i}{v_i - \tilde{w}_{i-1}u_i}, & i = 2, 3, \dots, n \end{cases} \dots\dots\dots(2.4.3)$$

Langkah di atas merupakan bentuk eliminasi maju.

Langkah selanjutnya adalah menentukan solusi yang dapat diperoleh kemudian dengan substitusi mundur sebagai berikut:

$$z_n = \tilde{r}_n \text{ dan } x_i = \tilde{r}_i - \tilde{w}_i z_{i+1}; \quad i = n-1, n-2, \dots, 1 \quad [1] \dots\dots\dots(2.4.4)$$

**Catatan :**

1. Algoritma tersebut hanya dapat digunakan pada matriks yang diagonal utamanya dominan, yaitu  $|v_i| \geq |u_i| + |w_i|$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$  dan paling tidak ada satu  $i$  sedemikian sehingga  $|v_i| > |u_i| + |w_i|$ .
2. Banyaknya operasi aritmatik yang diperlukan dalam algoritma tersebut adalah sejumlah  $10n - 11$  operasi. Ini diperoleh dari penjumlahan seluruh operasi aritmatik yang dipakai pada persamaan (2.4.2), (2.4.3), dan (2.4.4).

Sedangkan pada eliminasi Gauss dibutuhkan sebanyak  $\frac{2n^3}{3} + \frac{3n^2}{2} - \frac{7n}{6}$  operasi aritmatik [2].

Dapat dilihat bahwa algoritma matriks tridiagonal lebih efisien dalam mencari solusi sistem tridiagonal (2.4.1) dibandingkan dengan Eliminasi Gauss untuk  $n \geq 3$ .

Contoh :

Selesaikan sistem persamaan berikut ini dengan menggunakan algoritma matriks tridiagonal

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Dengan menggunakan algoritma di atas, maka

$$\tilde{w}_1 = \frac{w_1}{v_1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tilde{w}_2 = \frac{w_2}{v_2 - \tilde{w}_1 u_2} = \frac{1}{2 - 1 \cdot 1} = 1$$

$$\tilde{w}_3 = \frac{w_3}{v_3 - \tilde{w}_2 u_3} = \frac{1}{2 - 1 \cdot 1} = 1$$

dan

$$\tilde{r}_1 = \frac{r_1}{v_1} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\tilde{r}_2 = \frac{r_2 - \tilde{r}_1 u_2}{v_2 - \tilde{w}_1 u_2} = \frac{5 - 4 \cdot 1}{2 - 1 \cdot 1} = 1$$

$$\tilde{r}_3 = \frac{r_3 - \tilde{r}_2 u_3}{v_3 - \tilde{w}_2 u_3} = \frac{6 - 1 \cdot 1}{2 - 1 \cdot 1} = 5$$

$$\tilde{r}_4 = \frac{r_4 - \tilde{r}_3 u_4}{v_4 - \tilde{w}_3 u_4} = \frac{7 - 5 \cdot 0}{1 - 1 \cdot 0} = 7$$

Kemudian dapat diperoleh solusinya sebagai berikut :

$$z_4 = \tilde{r}_4 = 7$$

$$z_3 = \tilde{r}_3 - \tilde{w}_3 z_4 = 5 - 1 \cdot 7 = -2$$

$$z_2 = \tilde{r}_2 - \tilde{w}_2 z_3 = 1 - 1 \cdot (-2) = 3$$

$$z_1 = \tilde{r}_1 - \tilde{w}_1 z_2 = 4 - 1 \cdot (3) = 1$$

Dengan demikian diperoleh :

$$Z = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$



### BAB III

### HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 3.1 Interpolasi Splin Kubik

Misalkan terdapat  $n$  titik data di bidang- $xy$ ,

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

yang nilai-nilainya diketahui. Titik-titik data ini diinterpolasi dengan menggunakan metode *splin kubik*, yaitu dengan membangun fungsi

$$P(x) = \begin{cases} p_1(x), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ p_2(x), & x_2 \leq x \leq x_3, \\ \vdots & \\ p_{n-1}(x), & x_{n-1} \leq x \leq x_n, \end{cases} \dots\dots\dots(3.1.1)$$

dimana  $p_j(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n - 1$  adalah polinomial pangkat tiga yang didefinisikan oleh

$$p_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3, \quad x_j \leq x \leq x_{j+1} \dots(3.1.2)$$

dengan  $a_j$ ,  $b_j$ ,  $c_j$ , dan  $d_j$  adalah koefisien yang nilai-nilainya akan dicari untuk menentukan  $P(x)$ . Perhatikan bahwa jarak antara dua titik data yang berdekatan pada koordinat- $x$  dapat dinyatakan secara umum dengan  $h_j = x_{j+1} - x_j$ ,

$$j = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Lebih lanjut, fungsi  $P(x)$  yang akan dibangun pada interpolasi splin kubik ini adalah fungsi yang memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

- (i)  $P(x)$  melalui seluruh titik data,
- (ii)  $P(x)$  kontinu pada interval  $[x_1, x_n]$ ,
- (iii)  $P'(x)$  kontinu pada interval  $[x_1, x_n]$ ,
- (iv)  $P''(x)$  kontinu pada interval  $[x_1, x_n]$ .

Dari sifat (i), dapat disimpulkan dengan jelas bahwa

$$P(x_j) = y_j \quad \dots\dots\dots(3.1.3)$$

untuk  $j = 1, 2, \dots, n$ . Karena  $x_j \in [x_j, x_{j+1}]$ , dari persamaan (3.1.1) dan (3.1.2) didapatkan  $P(x_j) = p_j(x_j) = a_j$ , sehingga dengan menggunakan persamaan (3.1.3) diperoleh

$$a_j = y_j \quad \dots\dots\dots(3.1.4)$$

untuk  $j = 1, 2, \dots, n - 1$ .

Kemudian dari sifat (ii) yang menyatakan bahwa  $P(x)$  kontinu di setiap titik data, maka setiap subfungsi  $p_j(x)$  pada persamaan (3.1.2) harus dibuat bertemu di titik-titik ujungnya yang berurutan, yaitu

$$p_{j+1}(x_{j+1}) = p_j(x_{j+1}) \quad \dots\dots\dots(3.1.5)$$

untuk  $j = 1, 2, \dots, n - 2$ . Dari persamaan (3.1.2), diketahui

$$p_{j+1}(x_{j+1}) = a_{j+1} \quad \dots\dots\dots(3.1.6)$$

dan

$$p_j(x_{j+1}) = a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3 \dots(3.1.7)$$

sehingga jika disubstitusikan dua persamaan terakhir ini ke persamaan (3.1.5) dan kemudian gunakan persamaan (3.1.4) dan  $h_j = x_{j+1} - x_j$ , maka diperoleh

$$y_{j+1} = y_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3, \quad j = 1, 2, \dots, n - 2 \quad \dots\dots\dots(3.1.8)$$

Khusus pada saat  $x = x_n$ , dari persamaan (3.1.1) dan (3.1.2) bisa ditulis

$$P(x_n) = p_{n-1}(x_n) = a_{n-1} + b_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + c_{n-1}(x_n - x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x_n - x_{n-1})^3 \quad \dots\dots\dots(3.1.9)$$

Dengan menggunakan persamaan (3.1.3) dan (3.1.4), persamaan (3.1.9) dapat ditulis kembali

$$y_n = y_{n-1} + b_{n-1}h_n + c_{n-1}h_n^2 + d_{n-1}h_n^3 \dots\dots\dots(3.1.10)$$

dengan  $h_n = x_{n+1} - x_n$ . Oleh karena itu, persamaan (3.1.8) dan (3.1.10) dapat digabung menjadi

$$y_{j+1} = y_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3, j = 1, 2, \dots, n - 1 \dots\dots\dots(3.1.11)$$

Sementara itu, turunan pertama dari  $P(x)$  pada persamaan (3.1.1) adalah

$$P'(x) = \begin{cases} p'_1(x) = b_1 + 2c_1(x - x_1) + 3d_1(x - x_1)^2, & x_1 \leq x \leq x_2, \\ p'_2(x) = b_2 + 2c_2(x - x_2) + 3d_2(x - x_2)^2, & x_2 \leq x \leq x_3, \dots(3.1.12) \\ \vdots \\ p'_{n-1}(x) = b_{n-1} + 2c_{n-1}(x - x_{n-1}) + 3d_{n-1}(x - x_{n-1})^2, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

dan turunan keduanya

$$P''(x) = \begin{cases} p''_1(x) = 2c_1 + 6d_1(x - x_1), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ p''_2(x) = 2c_2 + 6d_2(x - x_2), & x_2 \leq x \leq x_3, \dots\dots\dots(3.1.13) \\ \vdots \\ p''_{n-1}(x) = 2c_{n-1} + 6d_{n-1}(x - x_{n-1}), & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

Dengan memandang persamaan (3.1.12) di atas, maka sifat (iii) yang menyatakan  $P'(x)$  kontinu di seluruh titik data, dapat dibuat hubungan berikut:

$$p'_{j+1}(x_{j+1}) = p'_j(x_{j+1}) \dots\dots\dots(3.1.14)$$

untuk  $j = 1, 2, \dots, n - 2$ . Dari persamaan (3.1.12), diketahui bahwa

$$p'_{j+1}(x_{j+1}) = b_{j+1} \dots\dots\dots(3.1.15)$$

dan

$$p'_j(x_{j+1}) = b_j + 2c_j(x_{j+1} - x_j) + 3d_j(x_{j+1} - x_j)^2 \dots\dots\dots(3.1.16)$$

sehingga persamaan (3.1.14) menjadi

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2, j = 1, 2, \dots, n - 2 \dots\dots\dots(3.1.17)$$

dengan  $h_j = x_{j+1} - x_j$ .

Selanjutnya dari sifat (iv) dan dengan memandang persamaan (3.1.13), kita juga perlu mensyaratkan

$$p''_{j+1}(x_{j+1}) = p''_j(x_{j+1}) \dots\dots\dots(3.1.18)$$

untuk  $j = 1, 2, \dots, n - 2$ . Perhatikan pada saat  $x = x_j, j = 1, 2, \dots, n - 1$ , persamaan (3.1.13) menghasilkan hubungan

$$c_j = \frac{p''(x_j)}{2}, j = 1, 2, \dots, n - 1 \dots\dots\dots(3.1.19)$$

Dengan menggunakan hubungan di atas, pernyataan  $p''_j(x_{j+1})$  yang diperoleh dari persamaan (3.1.13) dapat ditulis

$$p''_j(x_{j+1}) = P''(x_j) + 6d_j(x_{j+1} - x_j), j = 1, 2, \dots, n - 1 \dots\dots(3.1.20)$$

Jika disubstitusikan persamaan terakhir ini ke persamaan (3.1.18) dan dari pernyataan  $P''(x_{j+1}) = p''_{j+1}(x_{j+1})$ , maka kita akan sampai pada hubungan berikut:

$$d_j = \frac{P''(x_{j+1}) - P''(x_j)}{6h_j}, j = 1, 2, \dots, n - 2 \dots\dots\dots(3.1.21)$$

dengan  $h_j = x_{j+1} - x_j$ . Khusus pada saat  $x = x_n$ , persamaan (3.1.13) memberikan

$$P''(x_n) = p''_{n-1}(x_n) = 2c_{n-1} + 6d_{n-1}(x_n - x_{n-1}) \dots\dots(3.1.22)$$

Karena  $c_{n-1} = \frac{P''(x_{n-1})}{2}$  (dari persamaan (3.1.19)) dan  $h_n = x_{n+1} - x_n$ , maka persamaan (3.1.22) dapat diubah menjadi

$$d_{n-1} = \frac{P''(x_n) - P''(x_{n-1})}{6h_n} \dots\dots\dots(3.1.23)$$

sehingga bersama-sama dengan persamaan (3.1.21) membentuk

$$d_j = \frac{P''(x_{j+1}) - P''(x_j)}{6h_j}, j = 1, 2, \dots, n - 1 \dots\dots\dots(3.1.24)$$

Terakhir, dengan memasukkan nilai  $c_j$  pada persamaan (3.1.19) dan  $d_j$  pada persamaan (3.1.24) ke persamaan (3.1.11), diperoleh

$$b_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \left[ \frac{P''(x_{j+1}) + 2P''(x_j)}{6} \right] h_j, j = 1, 2, \dots, n - 1. \dots(3.1.25)$$

Dengan demikian, telah didapatkan nilai-nilai untuk koefisien  $a_j, b_j, c_j,$  dan  $d_j$ . Hasil yang diperoleh dapat dirangkum dalam teorema berikut ini.

**Teorema (Interpolasi Splin Kubik)**

Diberikan  $n$  titik data  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  dengan  $h_j = x_{j+1} - x_j,$   $j = 1, 2, \dots, n - 1$ . Splin kubik

$$P(x) = \begin{cases} p_1(x), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ p_2(x), & x_2 \leq x \leq x_3, \\ \vdots & \\ p_{n-1}(x), & x_{n-1} \leq x \leq x_n, \end{cases}$$

dengan

$$p_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3, x_j \leq x \leq x_{j+1}$$

yang menginterpolasi titik-titik data yang diberikan, mempunyai koefisien-koefisien sebagai berikut

$$a_j = y_j,$$

$$b_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \left[ \frac{P''(x_{j+1}) + 2P''(x_j)}{6} \right] h_j,$$

$$c_j = \frac{P''(x_j)}{2},$$

$$d_j = \frac{P''(x_{j+1}) - P''(x_j)}{6h_j},$$

untuk  $j = 1, 2, \dots, n - 1$  .....(3.1.26)

Dari hasil ini, dapat dilihat bahwa nilai koefisien  $b_j, c_j,$  dan  $d_j$  tergantung dari nilai-nilai  $P''(x_1), P''(x_2), \dots, P''(x_n)$  yang belum diketahui. Oleh karena itu, nilai-nilai tersebut perlu dicari agar dapat ditentukan fungsi splin kubik  $P(x)$ .

Untuk melakukannya,  $b_j, c_j,$  dan  $d_j$  pada persamaan (3.1.26) disubstitusi ke

persamaan (3.1.17), sehingga diperoleh

$$\frac{y_{j+2}-y_{j+1}}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}P''(x_{j+2})}{6} - \frac{h_{j+1}P''(x_{j+1})}{3} = \frac{y_{j+1}-y_j}{h_j} - \frac{h_jP''(x_{j+1})}{6} - \frac{h_jP''(x_j)}{3} + P''(x_j)h_j + \frac{P''(x_{j+1})-P''(x_j)}{2h_j}h_j^2 \dots\dots\dots(3.1.27)$$

atau

$$h_jP''(x_j) + 2(h_j + h_{j+1})P''(x_{j+1}) + h_{j+1}P''(x_{j+2}) = 6 \left[ \frac{y_{j+2} - y_{j+1}}{h_{j+1}} - \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} \right]$$

untuk  $j = 1, 2, \dots, n - 2$ . .....(3.1.28)

Persamaan (3.1.28) di atas dapat ditulis dalam persamaan matriks sebagai berikut :

$$HP = 6K \dots\dots\dots(3.1.29)$$

dimana matriks

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} P''(x_1) \\ P''(x_2) \\ \vdots \\ P''(x_{n-1}) \\ P''(x_n) \end{bmatrix}, \text{ dan } 6K = 6 \begin{bmatrix} \frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1} \\ \frac{y_4-y_3}{h_3} - \frac{y_3-y_2}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} - \frac{y_{n-2}-y_{n-3}}{h_{n-3}} \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa sistem linear di atas terdiri dari  $n-2$  persamaan dengan  $n$  variabel  $P''(x_1), P''(x_2), \dots, P''(x_n)$ , sehingga untuk mendapatkan solusi  $P''(x_1), P''(x_2), \dots, P''(x_n)$  yang unik, dibutuhkan dua persamaan tambahan. Dua persamaan tambahan ini dapat diperoleh dari syarat batas yang berlaku pada  $P''(x_1)$  dan  $P''(x_n)$ . Terdapat beberapa jenis syarat batas yang dapat digunakan,

dua di antaranya adalah syarat batas pada splin alami dan splin berujung parabolik.

### 3.1.1. Splin Alami

Pada jenis ini, syarat batas yang digunakan adalah:

$$P''(x_1) = P''(x_n) = 0 \quad \dots\dots\dots(3.1.1.1)$$

Dengan menambahkan dua persamaan ini ke sistem (3.1.28), diperoleh

$$H_1 P = 6K \quad \dots\dots\dots(3.1.1.2)$$

dimana matriks

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} P''(x_1) \\ P''(x_2) \\ P''(x_3) \\ \vdots \\ P''(x_{n-2}) \\ P''(x_{n-1}) \\ P''(x_n) \end{bmatrix} \text{ dan } 6K = 6 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} - \frac{y_{n-2} - y_{n-3}}{h_{n-3}} \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Perhatikan bahwa dari persamaan (3.1.1.1),  $P''(x_1)$  dan  $P''(x_n)$  dapat dieliminasi dari sistem di atas, sehingga didapatkan

$$H_2 P = 6K \quad \dots\dots\dots(3.1.1.3)$$

dimana matriks

$$H_2 = \begin{bmatrix} 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & 2(h_3 + h_4) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2(h_{n-4} + h_{n-3}) & h_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} P''(x_2) \\ P''(x_3) \\ P''(x_4) \\ \vdots \\ P''(x_{n-3}) \\ P''(x_{n-2}) \\ P''(x_{n-1}) \end{bmatrix}, \text{ dan } 6K = 6 \begin{bmatrix} \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} \\ \frac{y_5 - y_4}{h_4} - \frac{y_4 - y_3}{h_3} \\ \vdots \\ \frac{y_{n-2} - y_{n-3}}{h_{n-3}} - \frac{y_{n-3} - y_{n-4}}{h_{n-4}} \\ \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} - \frac{y_{n-2} - y_{n-3}}{h_{n-3}} \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{bmatrix}$$

Sistem linear  $(n - 2) \times (n - 2)$  di atas dapat diselesaikan untuk mendapatkan solusi unik  $P''(x_2), P''(x_3), \dots, P''(x_{n-1})$ , sedangkan untuk  $P''(x_1)$  dan  $P''(x_n)$  ditentukan oleh persamaan (3.1.1.1), yaitu  $P''(x_1) = P''(x_n) = 0$ .

Secara fisik, splin alami akan menghasilkan ujung-ujung dari splin penggambar memanjang secara bebas tanpa hambatan di luar titik-titik penginterpolasi. Bagian-bagian ujung splin di luar titik-titik penginterpolasi akan membentuk suatu garis lurus, yang mengakibatkan  $P''(x)$  tidak ada pada titik-titik ujung  $x_1$  dan  $x_n$ . Oleh karena itu, dihasilkan syarat matematis  $P''(x_1) = P''(x_n) = 0$ . Splin alami cenderung untuk meluruskan kurva penginterpolasi pada titik-titik ujung, yang mungkin tidak dikehendaki.

**3.1.2 Splin Berujung Parabolik**

Jenis ini menggunakan syarat batas

$$P''(x_1) = P''(x_2) \dots \dots \dots (3.1.2.1)$$

dan

$$P''(x_n) = P''(x_{n-1}) \dots\dots\dots(3.1.2.2)$$

Dengan menambahkan dua persamaan ini ke sistem (3.1.28), diperoleh

$$H_3 P = 6K \dots\dots\dots(3.1.2.3)$$

dimana matriks

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} P''(x_1) \\ P''(x_2) \\ P''(x_3) \\ \vdots \\ P''(x_{n-2}) \\ P''(x_{n-1}) \\ P''(x_n) \end{bmatrix} \text{ dan } 6K = 6 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} - \frac{y_{n-2} - y_{n-3}}{h_{n-3}} \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Persamaan (3.1.2.1) dan (3.1.2.2) dapat digunakan untuk mengeliminasi  $P''(x_1)$  dan  $P''(x_n)$  pada sistem di atas sehingga didapatkan sistem linear  $(n - 2) \times (n - 2)$  berikut ini:

$$H_4 P = 6K \dots\dots\dots(3.1.2.4)$$

dimana matriks

$$H_4 = \begin{bmatrix} 3h_1 + 2h_2 & h_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & 2(h_3 + h_4) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2(h_{n-4} + h_{n-3}) & h_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & h_{n-2} & 3h_{n-2} + 2h_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} P''(x_2) \\ P''(x_3) \\ P''(x_4) \\ \vdots \\ P''(x_{n-3}) \\ P''(x_{n-2}) \\ P''(x_{n-1}) \end{bmatrix} \quad \text{dan } 6K = 6 \begin{bmatrix} \frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1} \\ \frac{y_4-y_3}{h_3} - \frac{y_3-y_2}{h_2} \\ \frac{y_5-y_4}{h_4} - \frac{y_4-y_3}{h_3} \\ \vdots \\ \frac{y_{n-2}-y_{n-3}}{h_{n-3}} - \frac{y_{n-3}-y_{n-4}}{h_{n-4}} \\ \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} - \frac{y_{n-2}-y_{n-3}}{h_{n-3}} \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{bmatrix}$$

Setelah solusi unik  $P''(x_2), P''(x_3), \dots, P''(x_{n-1})$  dari sistem di atas diperoleh, maka kemudian  $P''(x_1)$  dan  $P''(x_n)$  masing-masing dapat ditentukan dari persamaan (3.1.2.1) dan (3.1.2.2). Secara fisis, splin berujung parabolik berbentuk kurva parabola pada interval-interval ujungnya.

### 3.2 Menentukan Nilai Turunan Kedua dari Fungsi Splin Kubik dengan Menggunakan Algoritma Matriks Tridiagonal dan Menentukan Bentuk Fungsi Splin Kubik

Algoritma matriks tridiagonal, dapat digunakan untuk menentukan solusi matriks kolom  $X$ . Pada interpolasi splin kubik, matriks kolom  $X$  yang dimaksud merupakan nilai-nilai turunan kedua dari subfungsi yang akan dicari (dinotasikan dengan  $P''(x)$ ), sehingga bentuk dan turunan fungsi pada interpolasi splin kubik untuk kedua jenis splin (splin alami dan splin berujung parabolik) dapat ditentukan secara efisien

Tabel 3.2.1 Data Kecepatan Penerjun [7]

No data ( $j$ )	1	2	3	4	5
$x$	1	3	5	7	13
$y$	800	2310	3090	3940	4755

Keterangan :  $x$  = waktu (detik)

$y$  = kecepatan (cm/detik)

Dari data di atas, dapat dilihat bahwa untuk setiap waktu yang diberikan dengan interval tertentu, kecepatan seorang penerjun bernilai tertentu. Pada  $j=1$  sampai dengan  $j=4$ , interval masing-masing  $x$ -nya seragam tetapi interval kecepataannya berbeda. Sedangkan untuk  $j=4$  ke  $j=5$ , interval  $x$ -nya jauh berbeda dan diketahui kecepataannya masing-masing seperti pada tabel. Maka untuk ukuran waktu yang lain pada interval  $[1,13]$  bisa diperoleh kecepataannya dengan melihat kurva yang nanti akan terbentuk dari fungsi splin yang dibangun.

Sebagai contoh, akan ditentukan bentuk fungsi interpolasi splin kubik dari data pada Tabel 3.2.1 untuk jenis splin alami dan splin berujung parabolik dengan bantuan algoritma matriks tridiagonal.

Dari data nilai-nilai interval antar- $x$  (dinotasikan dengan  $h$ ) sebagaimana yang tercantum pada Tabel 3.2.2.

Tabel 3.2.2 Data Kecepatan Penerjun dan Interval Waktu

No data ( $j$ )	1	2	3	4	5
$x$	1	3	5	7	13
$y$	800	2310	3090	3940	4755
$h_j = x_{j+1} - x_j$	2	2	2	6	

**a. Splin Alami**

Jumlah titik data yang ingin diinterpolasi adalah  $n = 5$ , sehingga persamaan (3.1.1.3) menjadi

$$\begin{bmatrix} 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 \\ h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 \\ 0 & h_3 & 2(h_3 + h_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P''(x_2) \\ P''(x_3) \\ P''(x_4) \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} \\ \frac{y_5 - y_4}{h_4} - \frac{y_4 - y_3}{h_3} \end{bmatrix}$$

Input nilai-nilai pada Tabel 3.2.2 ke sistem di atas, maka

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P''(x_2) \\ P''(x_3) \\ P''(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2190 \\ 210 \\ -1735 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya algoritma matriks tridiagonal digunakan untuk menentukan nilai  $P''(x)$  sebagai berikut :

1. Substitusikan persamaan (2.4.2) dan (2.4.3) ke persamaan (2.4.1), maka

$$\tilde{w}_1 = \frac{w_1}{v_1} = \frac{2}{8} = 0.25$$

$$\tilde{w}_2 = \frac{w_2}{v_2 - \tilde{w}_1 u_2} = \frac{2}{8 - 0.25 \cdot 2} = 0.27$$

dan

$$\tilde{r}_1 = \frac{r_1}{v_1} = \frac{-2190}{8} = -273.75$$

$$\tilde{r}_2 = \frac{r_2 - \tilde{r}_1 u_2}{v_2 - \tilde{w}_1 u_2} = \frac{210 - (-273.75 \cdot 2)}{8 - (0.25 \cdot 2)} = 101$$

$$\tilde{r}_3 = \frac{r_3 - \tilde{r}_2 u_3}{v_3 - \tilde{w}_2 u_3} = \frac{-1735 - (101 \cdot 2)}{16 - (0.27 \cdot 2)} = -125.24$$

2. Gunakan persamaan (2.4.4) untuk menentukan

$P''(x_2)$ ,  $P''(x_3)$ , dan  $P''(x_4)$ , sehingga diperoleh

$$P''(x_4) = \tilde{r}_3 = -125.24$$

$$P''(x_3) = \tilde{r}_2 - \tilde{w}_2 P''(x_4) = 134.40$$

$$P''(x_2) = \tilde{r}_1 - \tilde{w}_1 P''(x_3) = -307.35$$

$P''(x_1)$  dan  $P''(x_5)$  diperoleh dari syarat batas splin alami, yaitu :

$$P''(x_1) = P''(x_5) = 0.$$

3. Selanjutnya, nilai  $a_j, b_j, c_j,$  dan  $d_j$  dapat ditentukan untuk memperoleh  $P(x)$  dengan menggunakan persamaan (3.1.26), sehingga diperoleh sebagai berikut :

$$a_j = y_j, \text{ maka}$$

$$a_1 = y_1 = 800$$

$$a_2 = y_2 = 2310$$

$$a_3 = y_3 = 3090$$

$$a_4 = y_4 = 3940$$

$$b_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \left[ \frac{P''(x_{j+1}) + 2P''(x_j)}{6} \right] h_j, \text{ maka}$$

$$b_1 = 857.45$$

$$b_2 = 550.10$$

$$b_3 = 377.15$$

$$b_4 = 386.31$$

$$c_j = \frac{P''(x_j)}{2}, \text{ maka}$$

$$c_1 = 0.00$$

$$c_2 = 153.67$$

$$c_3 = 67.20$$

$$c_4 = -62.62$$

$$d_j = \frac{P''(x_{j+1}) - P''(x_j)}{6h_j}, \text{ maka}$$

$$d_1 = -25.61$$

$$d_2 = 36.81$$

$$d_3 = -21.64$$

$$d_4 = -3.48$$

4. Perhatikan persamaan (3.1.1) dan (3.1.2), yaitu fungsi splin kubik

$$P(x) = \begin{cases} p_1(x), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ p_2(x), & x_2 \leq x \leq x_3, \\ \vdots \\ p_{n-1}(x), & x_{n-1} \leq x \leq x_n, \end{cases}$$

dengan

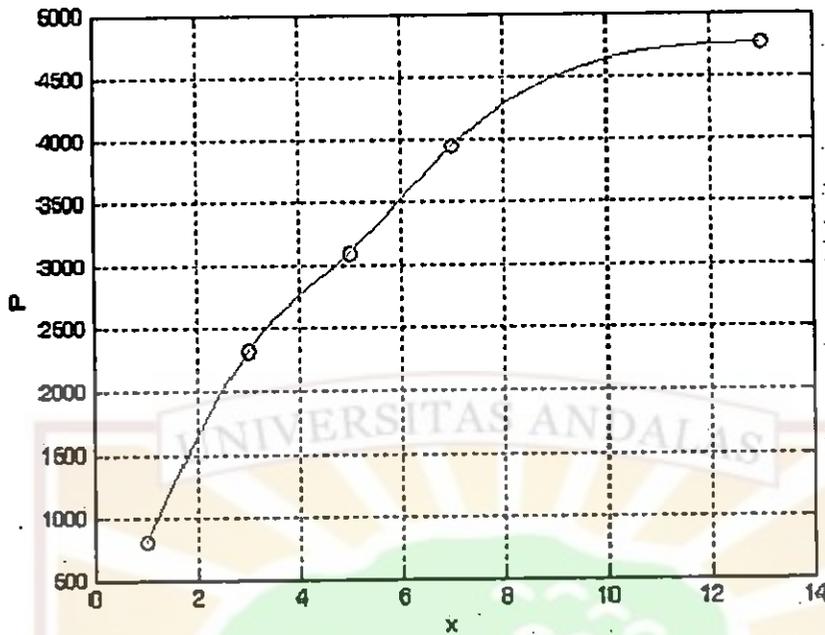
$$p_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3, \quad x_j \leq x \leq x_{j+1}.$$

Dari nilai-nilai koefisien yang sudah didapatkan di atas, diperoleh bentuk fungsi splin kubik

$$P(x) = \begin{cases} p_1(x) = 800 + 857.45(x - 1) - 25.61(x - 1)^3, & 1 \leq x \leq 3, \\ p_2(x) = 2310 + 550.10(x - 3) - 153.67(x - 3)^2 + 36.81(x - 3)^3, & 3 \leq x \leq 5, \\ p_3(x) = 3090 + 377.15(x - 5) + 67.20(x - 5)^2 - 21.64(x - 5)^3, & 5 \leq x \leq 7, \\ p_4(x) = 3940 + 386.31(x - 7) - 62.62(x - 7)^2 - 3.48(x - 7)^3, & 7 \leq x \leq 13 \end{cases}$$

Dengan menggunakan Matlab 6.5, kurva fungsi splin kubik tersebut dapat digambarkan sebagai berikut :

UNTUK KEDJAJAAN BANGSA



Gambar 3.2.1 Kurva Splin Alami

**b. Splin Berujung Parabolik**

Untuk  $n = 5$ , persamaan (3.1.2.4) menjadi

$$\begin{bmatrix} 3h_1 + 2h_2 & h_2 & 0 \\ h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 \\ 0 & h_3 & 2(h_3 + h_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P''(x_2) \\ P''(x_3) \\ P''(x_4) \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} \\ \frac{y_3 - y_4}{h_3} - \frac{y_4 - y_3}{h_4} \end{bmatrix}$$

Input nilai-nilai pada Tabel 3.2.2 ke sistem di atas, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P''(x_2) \\ P''(x_3) \\ P''(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2190 \\ 210 \\ -1735 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya algoritma matriks tridiagonal digunakan untuk menentukan nilai,  $P''(x)$  sebagai berikut :

1. Substitusikan persamaan persamaan (2.4.2) dan (2.4.3) ke persamaan (2.4.1), sehingga diperoleh :

$$\tilde{w}_1 = \frac{w_1}{v_1} = \frac{2}{10} = 0.20$$

$$\tilde{w}_2 = \frac{w_2}{v_2 - \tilde{w}_1 u_2} = \frac{2}{8 - 0.20 \cdot 2} = 0.26$$

dan

$$\tilde{r}_1 = \frac{r_1}{v_1} = \frac{-2190}{10} = -219$$

$$\tilde{r}_2 = \frac{r_2 - \tilde{r}_1 u_2}{v_2 - \tilde{w}_1 u_2} = \frac{210 - (-219 \cdot 2)}{8 - (0.20 \cdot 2)} = 85.26$$

$$\tilde{r}_3 = \frac{r_3 - \tilde{r}_2 u_3}{v_3 - \tilde{w}_2 u_3} = \frac{-1735 - (85.26 \cdot 2)}{16 - (0.26 \cdot 2)} = -123.15$$

2. Gunakan persamaan (2.4.4) untuk menentukan

$P''(x_2)$ ,  $P''(x_3)$ , dan  $P''(x_4)$ , sehingga diperoleh

$$P''(x_4) = \tilde{r}_3 = -123.15$$

$$P''(x_3) = \tilde{r}_2 - \tilde{w}_2 P''(x_4) = 117.67$$

$$P''(x_2) = \tilde{r}_1 - \tilde{w}_1 P''(x_3) = -242.53$$

$P''(x_1)$  dan  $P''(x_5)$  diperoleh dari syarat batas splin berujung parabolic,

yaitu :  $P''(x_1) = P''(x_2) = -242.53$  dan  $P''(x_5) = P''(x_4) = -123.15$

3. Selanjutnya, nilai  $a_j$ ,  $b_j$ ,  $c_j$ , dan  $d_j$  dapat ditentukan untuk memperoleh

fungsi  $P(x)$ . dengan menggunakan persamaan (3.1.26), yaitu

$$a_j = y_j, \text{ maka}$$

$$a_1 = y_1 = 800$$

$$a_2 = y_2 = 2310$$

$$a_3 = y_3 = 3090$$

$$a_4 = y_4 = 3940$$

$$b_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \left[ \frac{P''(x_{j+1}) + 2P''(x_j)}{6} \right] h_j, \text{ maka}$$

$$b_1 = 993.14$$

$$b_2 = 512.47$$

$$b_3 = 387.60$$

$$b_4 = 505.28$$

$$c_j = \frac{P''(x_j)}{2}, \text{ maka}$$

$$c_1 = -117.97$$

$$c_2 = -121.27$$

$$c_3 = 58.84$$

$$c_4 = -61.58$$

$$d_j = \frac{P''(x_{j+1}) - P''(x_j)}{6h_j}, \text{ maka}$$

$$d_1 = 0.55$$

$$d_2 = 30.02$$

$$d_3 = -20.07$$

$$d_4 = 0.00$$

4. Perhatikan persamaan (3.1.1) dan (3.1.2), yaitu fungsi splin kubik

$$P(x) = \begin{cases} p_1(x), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ p_2(x), & x_2 \leq x \leq x_3, \\ \vdots & \\ p_{n-1}(x), & x_{n-1} \leq x \leq x_n, \end{cases}$$

dengan

$$p_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3, \quad x_j \leq x \leq x_{j+1}.$$

Dari nilai-nilai koefisien yang sudah didapatkan di atas, maka diperoleh bentuk fungsi splin kubik sebagai berikut

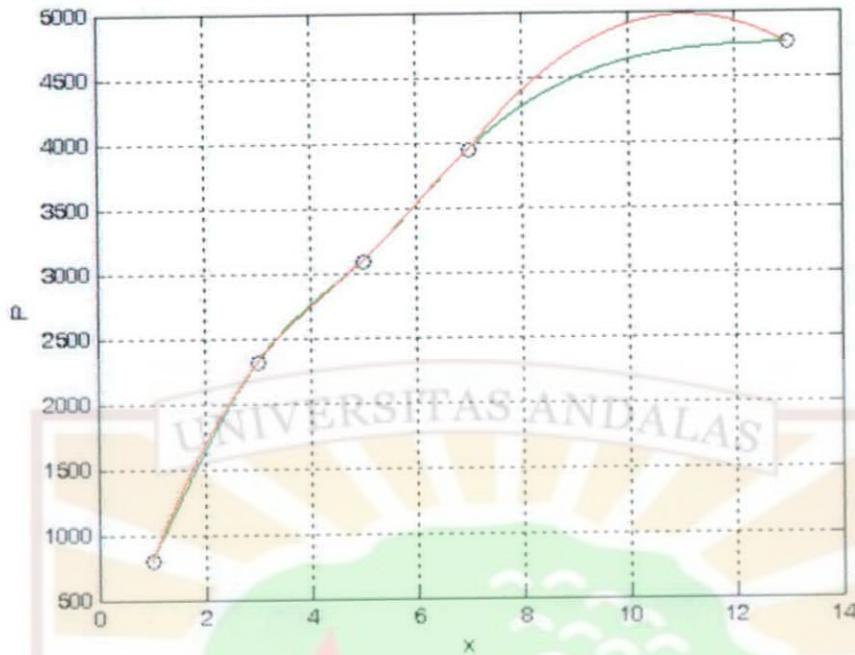
$$P(x) = \begin{cases} p_1(x) = 800 + 993.14(x - 1) - 117.97(x - 1)^2 - 0.55(x - 1)^3, & 1 \leq x \leq 3, \\ p_2(x) = 2310 + 512.47(x - 3) - 121.27(x - 3)^2 + 30.02(x - 3)^3, & 3 \leq x \leq 5, \\ p_3(x) = 3090 + 387.60(x - 5) + 58.84(x - 5)^2 - 20.07(x - 5)^3, & 5 \leq x \leq 7, \\ p_4(x) = 3940 + 505.28(x - 7) - 61.58(x - 7)^2, & 7 \leq x \leq 13. \end{cases}$$

Dengan menggunakan Matlab 6.5, kurva dari fungsi splin kubik tersebut dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 3.2.2 Kurva Splin Berujung Parabolik

Apabila kurva splin alami digabung dengan kurva splin berujung parabolik, maka akan terlihat perbedaan bentuk kurvanya, seperti pada gambar di bawah ini



Gambar 3.2.3 Kurva Splin Alami yang Digabung dengan Kurva Splin Berujung Parabolik

Keterangan :

kurva berwarna hijau : splin alami

kurva berwarna merah : splin berujung parabolik

Dari kurva di atas, perbedaan signifikan terlihat pada masing-masing ujung kurva. Hal ini disebabkan oleh syarat batas splin alami dan splin berujung parabolik yang berbeda.

## BAB IV

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### 4.1 Kesimpulan

Dari penelitian ini, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Metode pendekatan melalui interpolasi splin kubik dapat dijabarkan sehingga turunan kedua dari setiap subfungsinya membentuk matriks tridiagonal.
2. Bentuk fungsi splin kubik dapat ditentukan dengan mencari nilai turunan kedua dari setiap subfungsinya, dengan menggunakan algoritma matriks tridiagonal. Algoritma ini memudahkan penentuan turunan kedua pada fungsi splin kubik.
3. Dari dua jenis splin yang diuraikan, yaitu splin alami dan splin berujung parabolik, dihasilkan bentuk fungsi splin kubik yang berbeda. Hal ini mempengaruhi bentuk kurva, karena fungsi splin kubik dibangun oleh nilai-nilai koefisien  $a_j, b_j, c_j$  dan  $d_j$  yang berbeda. Ini disebabkan oleh syarat batas pada masing-masing jenis splin yang digunakan.

#### 4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya, Penulis menyarankan agar membahas interpolasi splin kubik dengan algoritma matriks tridiagonal untuk jenis yang lain, seperti splin berujung kubik, periodik, dan clamped.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anonymous. No Year. Tridiagonal Matrix Algorithm.  
[http://www.tridiagonal\\_matrix\\_algorithm.htm](http://www.tridiagonal_matrix_algorithm.htm). 11 Juni 2011.  
20:45:10 WIB
- [2] Anonymous. 2001. Cost of Solving a System of Linear Equations Using Gaussian Elimination. <http://ceee.rice.edu/Books/CS/chapter5/cost1>.  
2 Juli 2011. 21:10:15 WIB
- [3] Anton, H. dan C. Rorres. 2004. *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi Edisi ke-8 jilid 1*. Alih Bahasa : Refina Indriasari, Irzam Harmein. Erlangga, Jakarta.
- [4] Anton, H. dan C. Rorres. 2004. *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi Edisi ke-8 jilid 2*. Alih Bahasa : Irzam Harmein, Julian Gressando. Erlangga, Jakarta.
- [5] Lasijo. Fitting Kurva dengan Menggunakan Spline Kubik.  
[http://www.batan.go.id/ppin/lokakarya/LKSTN\\_03/splinecubic.pdf](http://www.batan.go.id/ppin/lokakarya/LKSTN_03/splinecubic.pdf).  
16 Maret 2011. 21:22:22 WIB.
- [6] Purcell, E.J. dan D. Varberg. 1999. *Kalkulus dan Geometri Analitis disi ke-5 jilid 1*. Alih Bahasa : I Nyoman Susila, Bana Kartasasmita, Rawuh. Erlangga, Jakarta.
- [7] Scheid, F. 1992. *Analisis Numerik*. Alih Bahasa : Pantur Silaban. Erlangga, Jakarta.
- [8] Suparno, S. 2008. *Komputasi untuk Sains dan Teknik dalam Matlab*. Universitas Indonesia, Jakarta.

## Lampiran

### a. membuat kurva splin alami

```
x=[1,3,5,7,13]; %data x
y=[800,2310,3090,3940,4755]; %data y

%nilai-nilai koefisien splin kubik
a=[800,2310,3090,3940,4755];
b=[857.45,550.10,377.15,386.31];
c=[0.00,-153.67,67.20,-62.62];
d=[-25.61,36.81,-21.64,3.48];
%%%-----

dx=0.01; %step domain x (semakin kecil dx, semakin mulus kurva yang dihasilkan)
zall=[]; %vektor kosong
pall=[]; %vector kosong

for i=1:4
    z=[x(i):dx:x(i+1)]; %interval splin kubik
    p=a(i)+b(i)*(z-x(i))+c(i)*(z-x(i)).^2+d(i)*(z-x(i)).^3; %fungsi splin kubik
    zall=[zall,z]; %interval splin kubik yang digabung
    pall=[pall,p]; %fungsi splin kubik yang digabung
end

plot(x,y,'ko',zall,pall,'g');
xlabel('x');
ylabel('P');
```

### b. membuat kurva splin berujung parabolik

```
x=[1,3,5,7,13]; %data x
y=[800,2310,3090,3940,4755]; %data y

%nilai-nilai koefisien splin kubik
a=[800,2310,3090,3940,4755];
b=[993.14,512.47,387.60,505,28];
c=[-117.97,-121.27,58.84,-61.58];
d=[-0.55,30.02,-20.07,0.00];
%%%-----

dx=0.01; %step domain x (semakin kecil dx, semakin mulus kurva yang dihasilkan)
zall=[]; %vektor kosong
pall=[]; %vector kosong

for i=1:4
    z=[x(i):dx:x(i+1)]; %interval splin kubik
    p=a(i)+b(i)*(z-x(i))+c(i)*(z-x(i)).^2+d(i)*(z-x(i)).^3; %fungsi splin kubik
    zall=[zall,z]; %interval splin kubik yang digabung
    pall=[pall,p]; %fungsi splin kubik yang digabung
end

plot(x,y,'ko',zall,pall,'r');
xlabel('x');
ylabel('P');
```

c. membuat kurva splin alami digabung dengan splin berujung parabolik

```
x=[1,3,5,7,13]; %data x
y=[800,2310,3090,3940,4755]; %data y

%nilai-nilai koefisien splin kubik
aa=[800,2310,3090,3940,4755];
ba=[857.45,550.10,377.15,386.31];
ca=[0.00,-153.67,67.20,-62.62];
da=[-25.61,36.81,-21.64,3.48];
ep=[800,2310,3090,3940,4755];
bp=[993.14,512.47,387.60,505.28];
cp=[-117.97,-121.27,58.84,-61.58];
dp=[-0.55,30.02,-20.07,0.00];
***

dx=0.01; %step domain x (semakin kecil dx, semakin mulus kurva yang dihasilkan)
zalla=[]; %vektor kosong
palla=[]; %vektor kosong
zallp=[]; %vektor kosong
pallp=[]; %vektor kosong

for i=1:4
    za=[x(i):dx:x(i+1)]; %interval splin kubik
    pa=aa(i)+ba(i)*(za-x(i))+ca(i)*(za-x(i)).^2+da(i)*(za-x(i)).^3; %fungsi splin kubik
    zalla=[zalla,za]; %interval splin kubik yang digabung
    palla=[palla,pa]; %fungsi splin kubik yang digabung
    zp=[x(i):dx:x(i+1)]; %interval splin kubik
    pp=ep(i)+bp(i)*(zp-x(i))+cp(i)*(zp-x(i)).^2+dp(i)*(zp-x(i)).^3; %fungsi splin kubik
    zallp=[zallp,zp]; %interval splin kubik yang digabung
    pallp=[pallp,pp]; %fungsi splin kubik yang digabung
end

plot(x,y,'ko',zalla,palla,'g',zallp,pallp,'r');
xlabel('x');
ylabel('P');
```