GELANGGANG QUATERNION RILL

SKRIPSI

DIDI YUDA PRAWIRA
06134029

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA
DAN ILMU PENGETAHUAN
ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2011

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum wr. wb

Puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT, dimana berkat rahmat dan hidayah-Nya pada akhirnya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Skripsi yang berjudul " **Gelanggang Quaternion Riil** " ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang.

Proses penulisan skripsi ini dapat berjalan dengan baik tidak terlepas dari peranan berbagai pihak yang telah memberikan bimbingan, bantuan, doa dan motivasi kepada penulis. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terimakasih dan penghargaan kepada:

1. Kedua orang tua dan keluarga, yang selalu mendoakan dan senantiasa memberikan dukungan kepada penulis.
2. Ibu Nova Noliza Bakar, M.Si dan Ibu Haripamyu, M.Si selaku dosen pembimbing yang telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan dalam penulisan skripsi ini.
3. Ibu Monika Rianti Helmi, M.Si dan Bapak Zulakamal, M.Si selaku dosen penguji yang telah memberikan masukan dan kritikan yang membangun dalam penulisan skripsi ini.
4. Ibu Izzati Rahmi HG, M.Si selaku dosen Pembimbing Akademik.
5. Bapak Dr. Syafrizal Sy selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Andalas.
6. Bapak / Ibu dosen beserta karyawan di jurusan matematika Universitas Andalas.

7. Rekan- rekan di jurusan matematika, terutama Angkatan 2006.
8. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang ikut membantu baik secara langsung maupun tidak langsung hingga terselesaikannya skripsi ini.

Penulis menyadari skripsi ini masih banyak kekurangannya, karenanya kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis dan para pembaca. Amien ya Rabbal 'Alamien.

Padang, Mei 2011

Penulis

ABSTRAK

isal $\mathbb{H}$ adalah himpunan bilangan quaternion riil yang didefinisikan sebagai

$$\mathbb{H} = \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k : a_p \in \mathbb{R}, p = 0,1,2,3\}$$

engan $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

ada penulisan tugas akhir ini ditunjukkan bahwa $\mathbb{H}$ membentuk gelanggang. Gelanggang rsebut dinamakan gelanggang quaternion riil. Kemudian ditunjukkan bahwa gelanggang uaternion riil merupakan gelanggang pembagi.

isal $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}$, adjoin dari a dinotasikan dengan a^* dan didefinisikan bagai

$$a^* = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k,$$

emudian, norm dari a dinotasikan dengan $N(a)$ dan didefinisikan sebagai

$$N(a) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

aka untuk setiap a, b di $\mathbb{H}$ dan setiap bilangan riil δ dan γ berlaku :

i. $(\delta a + \gamma b)^* = \delta a^* + \gamma b^*$.
ii. $(a^*)^* = a$.
iii. $(ab)^* = b^* a^*$.
iv. $a^2 - 2a_0 a + N(a) = 0$.
v. $N(ab) = N(a)N(b)$.

ata kunci : *Himpunan bilangan quaternion riil,gelanggang, gelanggang quaternion riil, orm, adjoin, dan gelanggang pembagi.*

DAFTAR ISI

1.3 Pembatasan Masalah

Dalam tulisan ini, pembahasan sifat-sifat dari gelanggang quaternion riil dibatasi pada sifat norm dan adjoin, serta melihat kaitan antara gelanggang quaternion riil dan gelanggang pembagi.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah menunjukkan beberapa sifat dari gelanggang quaternion riil, yaitu sifat norm, adjoin, dan kaitan gelanggang quaternion riil dengan gelanggang pembagi.

1.5 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini terdiri dari empat bab, yakni : Bab I Pendahuluan, berisi : latar belakang masalah, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan tugas akhir ini. Sedangkan Bab II Landasan Teori, memuat teori-teori yang mendasari bagian pembahasan, yaitu teori tentang grup, gelanggang, dan gelanggang pembagi. Bab III Pembahasan, merupakan bagian inti dari penulisan tugas akhir ini yang membahas mengenai sifat-sifat dari gelanggang quaternion riil. Kemudian Bab IV Kesimpulan, berisi kesimpulan dari permasalahan yang telah dibahas pada bab sebelumnya.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diuraikan beberapa definisi dan teorema tentang grup, gelanggang, dan gelanggang pembagi, yang akan digunakan pada pembahasan.

2.1 Grup

Misalkan S suatu himpunan yang tidak kosong. Operasi " * " pada elemen-elemen S disebut operasi biner, apabila setiap $a, b \in S$ maka $(a * b) \in S$. Atau dapat juga dikatakan bahwa operasi " * " merupakan pemetaan dari $S x S$ ke S. Operasi " * " pada S merupakan operasi biner dapat juga dikatakan bahwa operasi " * " pada S bersifat tertutup[2].

Definisi 2.1.1[4]

Suatu himpunan tak kosong dari elemen-elemen G dikatakan membentuk sebuah grup jika di G didefinisikan sebuah operasi biner " * " sedemikian sehingga

1. Jika $a, b \in G$ maka $a * b \in G$ (tutup).
2. Jika $a, b, c \in G$ maka $a * (b * c) = (a * b) * c$ (asosiatif).
3. Terdapat sebuah elemen $e \in G$ sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$ untuk semua $a \in G$ (terdapat elemen identitas di G).
4. Untuk setiap $a \in G$ terdapat elemen $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (terdapat invers di G).

Jika G membentuk grup terhadap operasi biner " * " maka grup G dapat ditulis dengan notasi $< G,* >$.

Definisi 2.1.2[4]

Suatu grup $< G,* >$ disebut grup abelian jika operasi biner " * " pada G bersifat komutatif.

2.2 Gelanggang

Definisi 2.2.1[4]

Himpunan tak kosong S dikatakan membentuk sebuah gelanggang jika di S dapat didefinisikan dua operasi biner yang ditulis sebagai " + " (operasi penjumlahan) dan " . " (operasi perkalian) sedemikian sehingga setiap $a, b, c \in S$ berlaku:

1. $a + b \in S$.
2. $a + b = b + a$.
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$.
4. Terdapat suatu elemen 0 di S sedemikian sehingga $a + 0 = a$ (0 disebut unsur identitas terhadap operasi penjumlahan).
5. Terdapat unsur $-a$ di S sedemikian sehingga $a + (-a) = 0$.
6. $a.b \in S$.
7. $(a.b).c = a.(b.c)$.
8. $a.(b + c) = a.b + a.c$ dan $(a + b).c = a.c + b.c$.

Misal S suatu gelanggang, maka dari aksioma 1,2,3,4, dan 5 pada Definisi 2.2.1, S memenuhi sifat grup komutatif terhadap operasi penjumlahan. Aksioma 6 dan 7 masing-masing menyatakan bahwa S bersifat tutup dan asosiatif terhadap operasi perkalian, sedangkan aksioma 8 menyatakan bahwa S bersifat distributif kanan dan kiri.

Contoh dari gelanggang yaitu himpunan bilangan riil dan himpunan bilangan bulat.

Definisi 2.2.2 [4]

Misalkan R suatu gelanggang. Jika terdapat suatu unsur yang ditulis sebagai " 1 " sehingga $a.1 = 1.a = a$ untuk setiap $a \in R$ maka R disebut gelanggang dengan unsur kesatuan.

Contoh gelanggang dengan unsur kesatuan adalah gelanggang dari himpunan bilangan riil dan bilangan bulat.

Definisi 2.2.3 [4]

Sebuah gelanggang dikatakan gelanggang pembagi jika elemen-elemen tak nol dari gelanggang tersebut membentuk grup terhadap perkalian.

Gelanggang dari himpunan bilangan riil merupakan gelanggang pembagi, sedangkan gelanggang yang dibentuk dari bilangan bulat bukan merupakan gelanggang pembagi.

Teorema 2.2.4 [4]

Misalkan R suatu gelanggang , maka untuk setiap $a, b \in R$ berlaku:

1. $a.0 = 0.a = 0$.
2. $a.(-b) = (-a).b = -(a.b)$.
3. $(-a).(-b) = a.b$.

Jika R mempunyai unsur kesatuan 1 maka

4. $(-1).a = -a$.
5. $(-1).(-1) = 1$.

Bukti :

1. Misalkan R suatu gelanggang .

   Ambil $a \in R$ sebarang. Akan dibuktikan $a.0 = 0.a = 0$.

   Karena R grup komutatif terhadap penjumlahan, maka $0 \in R$.

Perhatikan bahwa:

$0 + 0 = 0$

$a.(0 + 0) = a.0$

$a.0 + a.0 = a.0$

karena $a, 0 \in R$ dan R gelanggang maka $a.0 \in R$, akibatnya terdapat $-(a.0) \in R$ sehingga $-(a.0) + a.0 = 0$, sehingga diperoleh

$-(a.0) + a.0 + a.0 =-(a.0) + a.0$

$(-(a.0) + a.0) + a.0 = 0$

$0 + a.0 = 0$

$a.0 = 0.$

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $0.a = 0$, sehingga diperoleh $a.0 = 0.a = 0$.

2. Misalkan R suatu gelanggang. Ambil $a, b \in R$ sebarang.

   Akan ditunjukkan bahwa $a.(-b) = (-a).(b) = -(a.b)$

   Perhatikan bahwa:

   $a.b + a.(-b) = a.(b + (-b))$ (sifat distributif)

   $= a.0$

   $= 0$..(2.2.1).

   $a.-b + a.b = a.(-b + b)$

   $= a.0$

   $= 0$..(2.2.2).

   Dari persamaan (2.2.1) dan (2.2.2) diperoleh

   $$a.b + a.(-b) = a.-b + a.b = 0.$$

   Karena invers tunggal, maka diperoleh

$a.-b = -(a.b)$..(2.2.3).

$a.b + (-a).b = (a + (-a)).b$

$= 0.b$

$= 0$..(2.2.4).

$(-a).b + a.b = ((-a) + a).b$

$= 0.b$

$= 0$..(2.2.5).

Dari persamaan (2.2.4) dan (2.2.5) diperoleh

$$(-a).b + a.b = a.b + (-a).b = 0.$$

Karena invers tunggal, diperoleh

$(-a).b = -(a.b)$..(2.2.6).

Dari persamaan (2.2.3) dan (2.2.6) diperoleh

$$a.(-b) = (-a).(b) = -(a.b).$$

3. Misalkan R suatu gelanggang dan $a, b \in R$. Akan ditunjukkan bahwa $(-a).(-b) = a.b$.

   Perhatikan bahwa :

   $(-a).(-b) = -(a.(-b))$

   $= -(-(a.b))$

   $= a.b.$

4. Misalkan R suatu gelanggang dengan unsur kesatuan 1. Ambil $a \in R$ sebarang.

   Perhatikan bahwa

   $a + (-(a)) = 0$..(2.2.7).

$$a + (-1).a = 1.(a) + (-1).a$$
$$= (1 + (-1)).a$$
$$= 0.a$$
$$=$$
$$0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.2.8).$$

Berdasarkan persamaan (2.2.7) dan (2.2.8) diperoleh $0 = a + (-(a)) = a + (-1).a$. Karena R merupakan grup komutatif terhadap operasi jumlah dan invers pada grup bersifat tunggal , maka dari hubungan

$$0 = a + (-(a))$$
$$= a + (-1).a$$

diperoleh $-(a) = (-1).a$.

5. Misalkan R suatu gelanggang dengan unsur kesatuan 1. Akan ditunjukkan bahwa $-(1).(-1) = 1$.

Sebelumnya telah diperoleh bahwa $(-a).(-b) = (a.b)$ untuk setiap $a, b \in R$.

Ambil $a = 1$ dan $b = 1$, maka diperoleh

$$(-1).(-1) = 1.1 = 1.$$

Untuk selanjutnya, perkalian $a.b$ akan ditulis dalam bentuk ab.

BAB III

PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan ditunjukkan bahwa himpunan bilangan quaternion riil membentuk gelanggang yang disebut gelanggang quaternion riil. Selanjutnya akan dibahas tentang sifat-sifat bilangan quaternion riil, dan akan ditunjukkan bahwa gelanggang quaternion riil merupakan gelanggang pembagi.

3.1 Gelanggang Quaternion Riil

Untuk membahas sifat-sifat dari himpunan bilangan quaternion riil, diperlukan definisi tentang himpunan bilangan quaternion riil sebagai berikut.

Definisi 3.1.1[1]

Himpunan bilangan quaternion riil, dinotasikan dengan $\mathbb{H}$, dan didefinisikan sebagai berikut :

$$\mathbb{H} = \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k : a_p \in \mathbb{R}, p = 0,1,2,3\}$$

dengan $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Misal $\mathbb{H} = \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k : a_p \in \mathbb{R}, p = 0,1,2,3\}$ adalah himpunan bilangan quaternion riil. Untuk semua a dan $b \in \mathbb{H}$ dengan

$$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

$$b = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k,$$

didefinisikan operasi penjumlahan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} a + b &= (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) + (b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k. \end{aligned}$$

Dan dengan menggunakan sifat perkalian quaternion dalam tabel di bawah ini

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

didefinisikan operasi perkalian sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
ab &= (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)\,(b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k)\\
&= a_0(b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k)\\
&\quad + a_1 i(b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k)\\
&\quad + a_2 j(b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k)\\
&\quad + a_3 k(b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k)\\
&= a_0 b_0 + a_0 b_1 i + a_0 b_2 j + a_0 b_3 k\\
&\quad + a_1 b_0 i + a_1 b_1 i^2 + a_1 b_2 ij + a_1 b_3 ik\\
&\quad + a_2 b_0 j + a_2 b_1 ji + a_2 b_2 j^2 + a_2 b_3 jk\\
&\quad + a_3 b_0 k + a_3 b_1 ki + a_3 b_2 kj + a_3 b_3 k^2\\
&= a_0 b_0 + a_1 b_1(-1) + a_2 b_2(-1) + a_3 b_3(-1)\\
&\quad + a_0 b_1 i + a_1 b_0 i + a_0 b_2 j + a_2 b_0 j\\
&\quad + a_0 b_3 k + a_3 b_0 k + a_1 b_2 k + a_1 b_3(-j)\\
&\quad + a_2 b_1(-k) + a_2 b_3 i + a_3 b_1 j + a_3 b_2(-i)\\
&= a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3\\
&\quad + (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2) i\\
&\quad + (a_0 b_2 + a_2 b_0 - a_1 b_3 + a_3 b_1) j\\
&\quad + (a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1) k
\end{aligned}
$$

Akan ditunjukkan himpunan bilangan quaternion riil $\mathbb{H}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian seperti yang telah didefinisikan sebelumnya membentuk gelanggang.

Ambil $a, b, c \in \mathbb{H}$

dengan

$$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$$
$$b = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$$
$$c = c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 k.$$

Perhatikan bahwa :

1. $a + b = (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) + (b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k)$

   $= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k$

   $= c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 k$ untuk suatu $c_i = a_i + b_i$.

   Hal ini menunjukkan bahwa untuk setiap $a, b \in \mathbb{H}$ berlaku $a + b \in \mathbb{H}$. Dengan kata lain bilangan quaternion riil tertutup terhadap penjumlahan.

2. $a + b = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k$

   $= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)i + (b_2 + a_2)j + (b_3 + a_3)k$

   $= (b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k) + (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)$

   $= b + a.$

   Jadi $\mathbb{H}$ bersifat komutatif terhadap penjumlahan.

3. $(a + b) + c = ((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k)$

   $+ c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 k$

   $= ((a_0 + b_0) + c_0) + ((a_1 + b_1) + c_1)i$

   $+ ((a_2 + b_2) + c_2)j + ((a_3 + b_3) + c_3)k$

   $= (a_0 + (b_0 + c_0)) + (a_1 + (b_1 + c_1))i$

$$+\left(a_2 + (b_2 + c_2)\right)j + (a_3 + (b_3 + c_3))k$$

$$= a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3$$

$$+\left((b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)i + (b_2 + c_2)j + (b_3 + c_3)k\right)$$

$$= a + (b + c).$$

Jadi $\mathbb{H}$ bersifat asosiatif terhadap penjumlahan.

4. $\bar{0} = 0 + 0i + 0j + 0k$ adalah identitas bilangan quaternion riil terhadap operasi penjumlahan karena

$$a + \bar{0} = (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k\ ) + (0 + 0i + 0j + 0k)$$

$$= (a_0 + 0) + (a_1 + 0)i + (a_2 + 0)j + (a_3 + 0)k$$

$$= a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

$$= a.$$

Jadi $\mathbb{H}$ mempunyai identitas terhadap penjumlahan.

5. $-a = -a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$ merupakan invers dari a karena

$$a + (-a) = (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) + (-a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k)$$

$$= (a_0 - a_0) + (a_1 - a_1)i + (a_2 - a_2)j + (a_3 - a_3)k$$

$$= 0 + 0i + 0j + 0k$$

$$= \bar{0}.$$

Jadi $\mathbb{H}$ mempunyai invers terhadap penjumlahan.

6. $ab = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$

$$+(a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2)i$$

$$+(a_0 b_2 + a_2 b_0 - a_1 b_3 + a_3 b_1)j$$

$$+(a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1)k$$

$$= z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k,$$

untuk suatu $z_0 = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$

$$z_1 = a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2$$

$$z_2 = a_0b_2 + a_2b_0 - a_1b_3 + a_3b_1$$

$$z_3 = a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1$$

Hal ini menunjukkan bahwa untuk setiap $a, b \in \mathbb{H}$ berlaku $ab \in \mathbb{H}$. Dengan kata lain bilangan quaternion riil tertutup terhadap perkalian.

7. $(ab)c = [a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3$

$$+(a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)i$$
$$+(a_0b_2 + a_2b_0 - a_1b_3 + a_3b_1)j$$
$$+(a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)k](c_0 + c_1i + c_2j + c_3k)$$
$$= (a_0b_0c_0 - a_1b_1c_0 - a_2b_2c_0 - a_3b_3c_o)$$
$$+(a_0b_1c_0 + a_1b_0c_0 + a_2b_3c_0 - a_3b_2c_0)i$$
$$+(a_0b_2c_0 + a_2b_0c_0 - a_1b_3c_0 + a_3b_1c_0)j$$
$$+(a_0b_3c_0 + a_3b_0c_0 + a_1b_2c_0 - a_2b_1c_0)k$$
$$+(a_0b_0c_1 - a_1b_1c_1 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1)i$$
$$+(a_0b_1c_1 + a_1b_0c_1 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1)i^2$$
$$+(a_0b_2c_1 + a_2b_0c_1 - a_1b_3c_1 + a_3b_1c_1)ji$$
$$+(a_0b_3c_1 + a_3b_0c_1 + a_1b_2c_1 - a_2b_1c_1)ki$$
$$+(a_0b_0c_2 - a_1b_1c_2 - a_2b_2c_2 - a_3b_3c_2)j$$
$$+(a_0b_1c_2 + a_1b_0c_2 + a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2)ij$$
$$+(a_0b_2c_2 + a_2b_0c_2 - a_1b_3c_2 + a_3b_1c_2)j^2$$
$$+(a_0b_3c_2 + a_3b_0c_2 + a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2)kj$$
$$+(a_0b_0c_3 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 - a_3b_3c_3)k$$
$$+(a_0b_1c_3 + a_1b_0c_3 + a_2b_3c_3 - a_3b_2c_3)ik$$
$$+(a_0b_2c_3 + a_2b_0c_3 - a_1b_3c_3 + a_3b_1c_3)jk$$

$$+(a_0b_3c_3 + a_3b_0c_3 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3)k^2$$

$$= (a_0b_0c_0 - a_1b_1c_0 - a_2b_2c_0 - a_3b_3c_0)$$

$$+(a_0b_1c_0 + a_1b_0c_0 + a_2b_3c_0 - a_3b_2c_0)i$$

$$+(a_0b_2c_0 + a_2b_0c_0 - a_1b_3c_0 + a_3b_1c_0)j$$

$$+(a_0b_3c_0 + a_3b_0c_0 + a_1b_2c_0 - a_2b_1c_0)k$$

$$+(a_0b_0c_1 - a_1b_1c_1 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1)i$$

$$+(a_0b_1c_1 + a_1b_0c_1 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1)(-1)$$

$$+(a_0b_2c_1 + a_2b_0c_1 - a_1b_3c_1 + a_3b_1c_1)(-k)$$

$$+(a_0b_3c_1 + a_3b_0c_1 + a_1b_2c_1 - a_2b_1c_1)j$$

$$+(a_0b_0c_2 - a_1b_1c_2 - a_2b_2c_2 - a_3b_3c_2)j$$

$$+(a_0b_1c_2 + a_1b_0c_2 + a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2)k$$

$$+(a_0b_2c_2 + a_2b_0c_2 - a_1b_3c_2 + a_3b_1c_2)(-1)$$

$$+(a_0b_3c_2 + a_3b_0c_2 + a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2)(-i)$$

$$+(a_0b_0c_3 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 - a_3b_3c_3)k$$

$$+(a_0b_1c_3 + a_1b_0c_3 + a_2b_3c_3 - a_3b_2c_3)(-j)$$

$$+(a_0b_2c_3 + a_2b_0c_3 - a_1b_3c_3 + a_3b_1c_3)i$$

$$+(a_0b_3c_3 + a_3b_0c_3 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3)(-1)$$

$$= a_0(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3)$$

$$+a_1(-b_0c_1 - b_1c_0 - b_2c_3 + b_3c_2)$$

$$+a_2(-b_0c_2 - b_2c_0 - b_3c_1 + b_1c_3)$$

$$+a_3(-b_0c_3 - b_3c_0 - b_1c_2 + b_2c_1)$$

$$+a_0i(b_0c_1 + b_1c_0 + b_2c_3 - b_3c_2)$$

$$+a_1i(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3)$$

$$+a_2i(b_0c_3 + b_3c_0 + b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$
\begin{aligned}
&+a_3 i(-b_0c_2 - b_2c_0 - b_3c_1 + b_1c_3)\\
&+a_0 j(b_0c_2 + b_2c_0 + b_3c_1 - b_1c_3)\\
&+a_1 j(-b_0c_3 - b_3c_0 - b_1c_2 + b_2c_1)\\
&+a_2 j(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3)\\
&+a_3 j(b_0c_1 + b_1c_0 + b_2c_3 - b_3c_2)\\
&+a_0 k(b_0c_3 + b_3c_0 + b_1c_2 - b_2c_1)\\
&+a_1 k(b_0c_2 + b_2c_0 + b_3c_1 - b_1c_3)\\
&+a_2 k(-b_0c_1 - b_1c_0 - b_2c_3 + b_3c_2)\\
&+a_3 k(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3)\\
= &\ a_0[(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3)\\
&+(b_0c_1 + b_1c_0 + b_2c_3 - b_3c_2)i\\
&+(b_0c_2 + b_2c_0 + b_3c_1 - b_1c_3)j\\
&+(b_0c_3 + b_3c_0 + b_1c_2 - b_2c_1)k]\\
&+a_1 i[(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3)\\
&+(b_0c_1 + b_1c_0 + b_2c_3 - b_3c_2)i\\
&+(b_0c_2 + b_2c_0 + b_3c_1 - b_1c_3)j\\
&+(b_0c_3 + b_3c_0 + b_1c_2 - b_2c_1)k]\\
&+a_2 j[(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3)\\
&+(b_0c_1 + b_1c_0 + b_2c_3 - b_3c_2)i\\
&+(b_0c_2 + b_2c_0 + b_3c_1 - b_1c_3)j\\
&+(b_0c_3 + b_3c_0 + b_1c_2 - b_2c_1)k]\\
&+a_3 k[(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3)\\
&+(b_0c_1 + b_1c_0 + b_2c_3 - b_3c_2)i\\
&+(b_0c_2 + b_2c_0 + b_3c_1 - b_1c_3)j
\end{aligned}
$$

$+(b_0c_3 + b_3c_0 + b_1c_2 - b_2c_1)k]$

$= (a_0 + a_1i + a_2j + a_3k)[(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3)$

$+(b_0c_1 + b_1c_0 + b_2c_3 - b_3c_2)i$

$+(b_0c_2 + b_2c_0 + b_3c_1 - b_1c_3)j$

$+(b_0c_3 + b_3c_0 + b_1c_2 - b_2c_1)k]$

$= a(bc).$

Jadi $\mathbb{H}$ bersifat asosiatif terhadap perkalian.

8.(i). $a(b + c) = (a_0 + a_1i + a_2j + a_3k)\big((b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)i\big)$

$+(b_2 + c_2)j + (b_3 + c_3))k$

$= (a_0(b_0 + c_0) - a_1(b_1 + c_1) - a_2(b_2 + c_2)$

$-a_3(b_3 + c_3))$

$+(a_0(b_1 + c_1) + a_1(b_0 + c_0) + a_2(b_3$

$+c_3) - a_3(b_2 + c_2))i$

$+(a_0(b_2 + c_2) + a_2(b_0 + c_0) - a_1(b_3 + c_3)$

$+a_3(b_1 + c_1))j$

$+(a_0(b_3 + c_3) + a_3(b_0 + c_0)$

$+a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1))k$

$= (a_0b_0 + a_0c_0) - (a_1b_1 + a_1c_1)$

$-(a_2b_2 + a_2c_2)-(a_3b_3 + a_3c_3)$

$+((a_0b_1 + a_0c_1)+(a_1b_0 + a_1c_0)$

$+(a_2b_3 + a_2c_3) - (a_3b_2 + a_3c_2))i$

$+\big((a_0b_2 + a_0c_2)+(a_2b_0 + a_2c_0\big)$

$-(a_1b_3 + a_1c_3) + (a_3b_1 + a_3c_1))j$

$+((a_0b_3 + a_0c_3)+(a_3b_0 + a_3c_0)$

$+(a_1b_2 + a_1c_2) - (a_2b_1 + a_2c_1))k$

$= (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)$

$+(a_0c_0 - a_1c_1 - a_2c_2 - a_3c_3)$

$+(a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)i$

$+(a_0c_1 + a_1c_0 + a_2c_3 - a_3c_2)i$

$+(a_0b_2 + a_2b_0 - a_1b_3 + a_3b_1)j$

$+(a_0c_2 + a_2c_0 - a_1c_3 + a_3c_1)j$

$+(a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)k$

$+(a_0c_3 + a_3c_0 + a_1c_2 - a_2c_1)k$

$= ((a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)$

$+(a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)i$

$+(a_0b_2 + a_2b_0 - a_1b_3 + a_3b_1)j$

$+(a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)k)$

$+((a_0c_0 - a_1c_1 - a_2c_2 - a_3c_3)$

$+(a_0c_1 + a_1c_0 + a_2c_3 - a_3c_2)i$

$+(a_0c_2 + a_2c_0 - a_1c_3 + a_3c_1)j$

$+(a_0c_3 + a_3c_0 + a_1c_2 - a_2c_1)k)$

$= ab + ac.$

Jadi sifat distributif kanan berlaku di $\mathbb{H}$.

8.(ii). $(a + b)c = [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k]$

$(c_0 + c_1i + c_2j + c_3k)$

$= ((a_0 + b_0)c_0 - (a_1 + b_1)c_1$

$-(a_2 + b_2)c_2 - (a_3 + b_3)c_3)$

$+((a_0 + b_0)c_1 - (a_1 + b_1)c_0$

$$
\begin{aligned}
&+(a_2 + b_2)c_3 - (a_3 + b_3)c_2)i \\
&+((a_0 + b_0)c_2 + (a_2 + b_2)c_0 \\
&-(a_1 + b_1)c_3 + (a_3 + b_3)c_1)j \\
&+((a_0 + b_0)c_3 + (a_3 + b_3)c_0 \\
&+(a_1 + b_1)c_2 - (a_2 + b_2)c_1)k \\
= {} & (a_0c_0 - a_1c_1 - a_2c_2 - a_3c_3) \\
&+(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3) \\
&+(a_0c_1 + a_1c_0 + a_2c_3 - a_3c_2)i \\
&+(b_0c_1 + b_1c_0 + b_2c_3 - b_3c_2)i \\
&+(a_0c_2 + a_2c_0 - a_1c_3a_3c_1)j \\
&+(b_0c_2 + b_2c_0 - b_1c_3 + b_3c_1)j \\
&+(a_0c_3 + a_3c_0 + a_1c_2 - a_2c_1)k \\
&+(b_0c_3 + b_3c_0 + b_1c_2 - b_2c_1)k \\
= {} & [(a_0c_0 - a_1c_1 - a_2c_2 - a_3c_3) \\
&+(a_0c_1 + a_1c_0 + a_2c_3 - a_3c_2)i \\
&+(a_0c_2 + a_2c_0 - a_1c_3 + a_3c_1)j \\
&+(a_0c_3 + a_3c_0 + a_1c_2 - a_2c_1)k \\
&+[(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3) \\
&+(b_0c_1 + b_1c_0 + b_2c_3 - b_3c_2)i \\
&+(b_0c_2 + b_2c_0 - b_1c_3 + b_3c_1)j \\
&+(b_0c_3 + b_3c_0 + b_1c_2 - b_2c_1)k \\
= {} & ac + bc.
\end{aligned}
$$

Jadi sifat distributif kiri berlaku pada $\mathbb{H}$.

Berdasarkan Definisi 2.2.1 maka himpunan bilangan quaternion riil $\mathbb{H}$ membentuk gelanggang.

3.2 Sifat Bilangan Quaternion Riil

Definisi 3.2.1[4]

Misal $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}$, adjoin dari a dinotasikan dengan a^* dan didefinisikan sebagai berikut :

$$a^* = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k.$$

Teorema 3.2.2[4]

Misal $\mathbb{H}$ himpunan bilangan quaternion riil, maka

1. $(a^*)^* = a$
2. $(\delta a + \gamma b)^* = \delta a^* + \gamma b^*$
3. $(ab)^* = b^* a^*$

untuk semua a, b di $\mathbb{H}$ dan semua bilangan riil δ dan γ.

Bukti :

Ambil a dan $b \in \mathbb{H}$ dengan

$$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

$$b = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k, \text{ dan } \delta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Perhatikan bahwa :

1. Karena $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ sehingga $a^* = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$, maka

$$\begin{aligned}(a^*)^* &= (a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k)^* \\ &= (a_0 + (-a_1) i + (-a_2) j + (-a_3) k)^* \\ &= a_0 - (-) a_1 i - (-) a_2 j - (-) a_3 k\end{aligned}$$

$= a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$

$= a.$

2. Karena $\delta a + \gamma b = (\delta a_0 + \gamma b_0) + (\delta a_1 + \gamma b_1)i + (\delta a_2 + \gamma b_2)j$
$+(\delta a_3 + \gamma b_3)k$

maka

$(\delta a + \gamma b)^* = (\delta a_0 + \gamma b_0) - (\delta a_1 + \gamma b_1)i - (\delta a_2 + \gamma b_2)j - (\delta a_3 + \gamma b_3)k$

$= \delta a_0 + \gamma b_0 - \delta a_1 i - \gamma b_1 i - \delta a_2 j - \gamma b_2 j - \delta a_3 k - \gamma b_3 k$

$= \delta(a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k) + \gamma(b_0 - b_1 i - b_2 j - b_3 k)$

$= \delta a^* + \gamma b^*$

3. Karena $(ab)^* = (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3)$
$-(a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2)i$
$-(a_0 b_2 + a_2 b_0 - a_1 b_3 + a_3 b_1)j$
$-(a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1)k$, dan

$b^* a^* = (b_0 - b_1 i - b_2 j - b_3 k)(a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k)$

$= (b_0 a_0 - b_1 a_1 - b_2 a_2 - b_3 a_3)$
$+(-b_0 a - b_1 a_0 - b_2 a_3 + b_3 a_2)i$
$+(-b_0 a_2 - b_2 a_0 + b_1 a_3 - b_3 a_1)j$
$+(-b_0 a_3 - b_3 a_0 - b_1 a_2 + b_2 a_1)k$

$= (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3)$
$-(a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2)i$
$-(a_0 b_2 + a_2 b_0 - a_1 b_3 + a_3 b_1)j$
$-(a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1)k$

maka $(ab)^* = b^* a^*$.

Definisi 3.2.3[4]

Misal $a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in \mathbb{H}$, norm dari a dinotasikan dengan $N(a)$ dan didefinisikan sebagai berikut :

$$N(a) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

Teorema 3.2.4

Misal $a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in \mathbb{H}$, maka :

$$a^2 - 2a_0a + N(a) = 0$$

Bukti :

Misal $a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ dan $a^* = a_0 - a_1i - a_2j - a_3k$,

maka

$$\begin{aligned} a + a^* &= (a_0 + a_1i + a_2j + a_3k) + (a_0 - a_1i - a_2j - a_3k) \\ &= 2a_0. \end{aligned}$$

Jadi dapat ditulis :

$$a^* = 2a_0 - a$$

sehingga :

$$a.a^* = N(a)$$

$$a(2a_0 - a) = N(a)$$

$$2a_0a - a^2 = N(a)$$

$$a^2 - 2a_0a + N(a) = 0.$$

Teorema 3.2.5[4]

Untuk semua $a, b \in \mathbb{H}$, maka berlaku :

$$N(ab) = N(a)N(b).$$

Bukti :

Misal $a, b \in \mathbb{H}$ sebarang, maka $N(a) = aa^*$ dan $N(b) = bb^*$, sehingga diperoleh

$N(ab) = (ab)\,(ab)^*$

$\quad = (ab)(b^*a^*)$

$\quad = a(bb^*)a^*$

$\quad = aN(b)\,a^*$

$\quad = aa^*N(b)$

$\quad = N(a)N(b).$

Berikut ini adalah contoh penggunaan sifat norm pada $\mathbb{H}$ dalam membuktikan Identitas Lagrange.

Teorema 3.2.6[4]

(Identitas Lagrange) Jika a_0, a_1, a_2, a_3 dan b_0, b_1, b_2, b_3 adalah bilangan riil, maka

$$
\begin{aligned}
({a_0}^2 + {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2)(b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = {} & (a_0b_0 - a_1b - a_2b_2 - a_3b_3)^2 \\
& +(a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)^2 \\
& +(a_0b_2 - a_1b_3 + a_2b_0 + a_3b_1)^2 \\
& +(a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0)^2.
\end{aligned}
$$

Bukti :

Misal $a, b \in \mathbb{H}$,

$a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ dan $b = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k.\quad a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,3.$

Perhatikan bahwa :

$$N(a) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$N(b) = b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$$

$$N(a)N(b) = N(ab)$$

$({a_0}^2 + {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2)(b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = (a_0b_0 - a_1b - a_2b_2 - a_3b_3)^2$

$$+(a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)^2$$
$$+(a_0b_2 - a_1b_3 + a_2b_0 + a_3b_1)^2$$
$$+(a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0)^2$$

sehingga Identitas Lagrange terbentuk.

Teorema 3.2.7

Gelanggang quaternion riil merupakan gelanggang pembagi.

Bukti :

Misal $\mathbb{H}$ gelanggang quaternion riil. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{H}$ merupakan gelanggang pembagi. Pada Subbab 3.1 telah ditunjukkan bahwa himpunan bilangan quaternion riil memenuhi sifat tutup dan asosiatif terhadap perkalian. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 2.2.3 cukup ditunjukkan terdapat unsur identitas terhadap perkalian dan setiap $a \in \mathbb{H}$ dengan $a \neq 0$, mempunyai invers terhadap perkalian.

1. Misal $a \in \mathbb{H}$ sebarang dengan $a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$, maka

   terdapat $\bar{1} = 1 + 0i + 0j + 0k \in \mathbb{H}$ sehingga

   $$\begin{aligned} a\bar{1} &= (a_0 + a_1i + a_2j + a_3k)(1 + 0i + 0j + 0k) \\ &= a_01 - a_10 - a_20 - a_30 \\ &\quad +(a_00 + a_11 + a_20 - a_30)i \\ &\quad +(a_00 + a_21 - a_10 + a_30)j \\ &\quad +(a_00 + a_31 + a_10 - a_20)k \\ &= a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \\ &= a, \text{ dan} \end{aligned}$$

   $$\bar{1}a = (1 + 0i + 0j + 0k)(a_0 + a_1i + a_2j + a_3k)$$

$$= 1.a_0 - 0a_1 - 0a_2 - 0a_3$$

$$+1.a_1 + 0a_0 + 0a_3 - 0a_2)i$$

$$+(1.a_2 + 0a_0 - 0a_3 + 0a_1)j$$

$$+(1.a_3 + 0a_0 + 0a_2 - 0a_1)k$$

$$= a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

$$= a.$$

Jadi $\bar{1}a = a\bar{1} = a$ untuk setiap $a \in \mathbb{H}$. Ini menunjukkan bahwa terdapat identitas terhadap perkalian di $\mathbb{H}$.

2. Ambil $a \neq 0$ di $\mathbb{H}$ dengan $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$. Akan dicari $a^{-1} \in \mathbb{H}$, sedemikian sehingga $aa^{-1} = a^{-1}a = \bar{1}$.

Perhatikan bahwa :

$$a\,a^* = (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)(a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k)$$

$$= (a_0a_0 + a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3)$$

$$+(-a_0a_1 + a_1a_0 - a_2a_3 + a_3a_2)i$$

$$+(-a_0a_2 + a_2a_0 + a_1a_3 - a_3a_1)j$$

$$+(-a_0a_3 + a_3a_0 - a_1a_2 + a_2a_1)k$$

$$= a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$= N(a)$, dan

$$a^*\,a = (a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k)\,(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)$$

$$= (a_0a_0 + a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3)$$

$$+(-a_0a_1 + a_1a_0 - a_2a_3 + a_3a_2)i$$

$$+(-a_0a_2 + a_2a_0 + a_1a_3 - a_3a_1)j$$

$$+(-a_0a_3 + a_3a_0 - a_1a_2 + a_2a_1)k$$

$$= a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$= N(a).$

Jadi $a\,a^* = a^*\,a = N(a)$

Karena $a \neq 0$, sehingga $N(a) \neq 0$, maka diperoleh

$$a\frac{a^*}{N(a)} = \frac{a^*}{N(a)}a = \bar{1}.$$

Pilih $a^{-1} = \frac{a^*}{N(a)}$. Maka untuk setiap $a \in \mathbb{H}$ terdapat a^{-1} sehingga

$$aa^{-1} = a^{-1}a = \bar{1}.$$

Jadi $\mathbb{H}$ mempunyai invers terhadap perkalian.

Berdasarkan Definisi 2.2.3 maka gelanggang quaternion riil merupakan gelanggang pembagi.

BAB IV

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan pada bab sebelumnya, maka diperoleh kesimpulan bahwa

1. Himpunan bilangan quaternion riil yang didfinisikan sebagai

$$\mathbb{H} = \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k : a_p \in \mathbb{R}, p = 0,1,2,3\}$$

dengan $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

membentuk suatu gelanggang yang dinamakan gelanggang quaternion riil.

2. Misal $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}$, adjoin dari a dinotasikan dengan a^* dan didefinisikan sebagai

$$a^* = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k,$$

kemudian, norm dari a dinotasikan dengan $N(a)$ dan didefinisikan sebagai

$$N(a) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

maka untuk setiap a, b di $\mathbb{H}$ dan setiap bilangan riil δ dan γ berlaku :

i. $(\delta a + \gamma b)^* = \delta a^* + \gamma b^*$.

ii. $(a^*)^* = a$.

iii. $(ab)^* = b^* a^*$.

iv. $a^2 - 2a_0 a + N(a) = 0$.

v. $N(ab) = N(a)N(b)$.

3. Gelanggang quaternion riil merupakan gelanggang pembagi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] C.J. Joly. 1905. *A Manual of Quaternion.* New York : The Macmillan Company.

[2] Fraleigh, J.B.1994. *A First Course in Abstract Algebra.* New York : Houghton Miffin Company.

[3] Hamilton, W.R. 1982. *Elements of Quaternions.* London : Longmans, Green, and Company.

[4] Heirstein, I. N. 1975. *Topics in Algebra*, 2^{nd}. New York : Jhon Wiley and Sons.