METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER

SKRIPSI

CUT NATHALIA RAHMI
07 134 038

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2011

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa :

Nama	: Cut Nathalia Rahmi
No. Buku Pokok	: 07 134 038
Jurusan	: Matematika
Bidang	: Terapan
Judul Skripsi	: **Metode Dekomposisi Adomian untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Linier**

Telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal 8 Agustus 2011 berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing

1.

Dr. Muhafzan
NIP. 19670602 199302 1 002

2.

Efendi, M.Si
NIP. 19780717 200212 1 002

Penguji

1.

Dr. Syafrizal Sy
NIP. 19670807 199309 1 001

2.

Dr. Maiyastri
NIP. 19650531 199103 2 001

3.

Dr. Ahmad Iqbal Baqi
NIP. 19671012 199402 1 001

Mengetahui, Ketua Jurusan Matematika
FMIPA Universitas Andalas

Dr. Syafrizal Sy
NIP. 19670807 199309 1 001

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis haturkan ke hadirat ALLAH SWT, karena berkat rahmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini dengan judul ***"Metode Dekomposisi Adomian untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Biasa"***, yang merupakan salah satu syarat untuk menempuh ujian Sarjana Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang.

Pada kesempatan ini, perkenankanlah penulis menyampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang tulus kepada yang terhormat:

1. Bapak Dr. Muhafzan dan Bapak Efendi, M.Si sebagai dosen pembimbing yang telah memberikan bimbingan, waktu dan pikiran kepada penulis hingga akhirnya penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
2. Bapak Dr. Syafrizal Sy, Ibu Dr. Maiyastri, dan Bapak Dr. Ahmad Iqbal Baqi sebagai dosen penguji yang telah membaca, menelaah, mengoreksi, mengedit serta memberi kritikan yang konstruktif untuk penyempurnaan tugas akhir ini.
3. Bapak Dr.Safrizal Sy sebagai Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas.
4. Ibu Ir. Hazmira Yozza, M.Si sebagai Penasehat Akademik.
5. Staf Pengajar dan Staf Tata Usaha Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas.
6. Orang Tua, Teuku Abdul Muthalib(Alm) dan Neni Amdani terima kasih atas dukungan, perhatian, kritikan cinta dan kasih sayang dari

papa dan mama yang selalu diberikan tiada henti pada ananda serta kakanda-kakanda dan adinda tercinta yang selalu memberikan semangat.

7. Teman-teman tercinta yang tak bisa disebutkan satu-satu terutama Matematika Angkatan 2007, senior dan junior di jurusan Matematika.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini masih banyak terdapat kekurangan, karena keterbatasan waktu, pengetahuan dan pengalaman yang penulis miliki. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari semua pihak yang membaca tugas akhir ini. Akhirnya penulis berharap apa yang penulis lakukan dapat bermanfaat bagi penulis dan semua pihak yang membutuhkan.

Padang, Agustus 2011

Penulis

ABSTRAK

Metode dekomposisi Adomian mengurai suatu fungsi *u(x,y)* menjadi bentuk penjumlahan tak hingga dari komponen $u_n(x,y)$, yang didefinisikan sebagai $u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y)$ dengan u_n komponen $u_n(x,y)$, $n \geq 0$. Diberikan suatu sistem persamaan diferensial linier dalam bentuk operator sebagai berikut $L_x u(x,y)+M_x u(x,y)=g(x,y)$ dengan L_x merupakan operator turunan orde terendah pada x yang diasumsikan dapat dibalik, M_x merupakan operator diferensial linier lainnya, dan $g(x,y)$ merupakan suku nonhomogen. Penyelesaian persamaan diferensial linier dapat ditentukan dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian, yaitu dengan menentukan operator invers dari persamaan tersebut kemudian gunakan operator inversnya lalu uraikan fungsi tersebut ke dalam dekomposisi Adomian. Hasil yang diperoleh adalah solusi dalam bentuk deret.

Kata kunci: *metode dekomposisi Adomian, persamaan diferensial linier.*

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat satu atau lebih turunan pada suatu fungsi. Suatu persamaan diferensial dikatakan linier jika persamaan itu berderajat satu dalam peubah bebasnya dan turunannya. Solusi suatu persamaan diferensial linier pada suatu daerah R di dalam ruang peubah-peubah bebasnya ialah fungsi yang memiliki turunan yang muncul di dalam persamaan itu, yang didefinisikan pada suatu domain yang mengandung R dan memenuhi persamaan itu di mana-mana di dalam R. Dalam beberapa dekade terakhir ini, ada beberapa metode untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial linier, seperti metode Karakteristik, metode Hamming, metode Milne-Simpson, dan metode iterasi .

Pada dasarnya, metode-metode yang disebutkan di atas telah dapat memberikan solusi yang benar dalam menyelesaikan suatu persamaan diferensial linier, tetapi dalam beberapa kasus terdapat penghitungan yang rumit dan proses yang panjang. Tugas akhir ini akan mengkaji suatu metode baru yang efektif dan mudah digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial linier, yang disebut dengan metode dekomposisi Adomian.

Metode dekomposisi Adomian pertama kali dikenalkan pada tahun 1980-an oleh George Adomian. Ia mengenalkan suatu metode yang efektif dan mudah digunakan untuk menyelesaikan masalah dalam berbagai bidang kasus linier dan nonlinier. Metoda Dekomposisi Adomian ini telah banyak digunakan untuk menyelesaikan masalah dalam berbagai bidang matematika, fisika, biologi, dan kimia. Dalam banyak kasus, metode dekomposisi ini menunjukkan kekonvergenan yang cepat dari suatu solusi sehingga memberikan beberapa keuntungan yang signifikan.

Diberikan suatu sistem persamaan diferensial linier dengan bentuk umum sebagai berikut

$$L_x u(x,y) + M_x u(x,y) = g(x,y)$$

dengan L_x merupakan operator turunan orde terendah pada x, M_x merupakan operator diferensial linier lainnya, dan $g(x,y)$ merupakan suku nonhomogen. Metode dekomposisi Adomian mengurai suatu fungsi $u(x,y)$ menjadi bentuk penjumlahan tak hingga dari beberapa komponen $u_n(x,y)$, yang didefinisikan sebagai

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y)$$

dengan u_n komponen $u_n(x,y)$, $n \geq 0$, yang ditentukan secara rekursif. Metode dekomposisi ini menjelaskan cara menemukan komponen-komponen $u_0, u_1, u_2, \ldots$. Penentuan komponen ini dapat dicapai dengan cara yang mudah melalui hubungan rekursif yang biasanya melibatkan integral sederhana.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan dari latar belakang masalah di atas, maka dapat dirumuskan permasalahannya sebagai berikut: bagaimana menyelesaikan persamaan diferensial linier dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian.

1.3 Pembatasan Masalah

Pada penulisan tugas akhir ini, penulis membatasi masalah hanya pada menyelesaikan persamaan diferensial biasa linier orde-n dan persamaan diferensial parsial linier orde satu dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah menemukan metode baru untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier, yakni metode dekomposisi Adomian.

1.5 Sistematika Penulisan

BAB I : PENDAHULUAN

Bab ini merupakan pendahuluan yang berisikan latar belakang masalah, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan.

BAB II : LANDASAN TEORI

Bab ini berisikan landasan teori yang akan digunakan dalam menyelesaikan permasalahan yang dibahas pada penelitian ini.

BAB III : HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini berisikan pembahasan mengenai permasalahan yang dibahas beserta hasilnya. Agar mudah dipahami, hasil dan pembahasan dalam bab ini disertai dengan beberapa contoh.

BAB IV : PENUTUP

Bab ini diakhiri dengan kesimpulan dari penelitian dan saran bagi penelitian selanjutnya.

BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam bab II ini akan dikemukakan teori-teori yang berguna untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian. Bab ini terdiri dari tiga subbab, yaitu subbab 2.1, 2.2, dan subbab 2.3. Pada subbab 2.1 akan dijelaskan mengenai konsep dasar persamaan diferensial. Kemudian pada subbab 2.2 akan dijelaskan mengenai operator diferensial, dan pada subbab 2.3 akan dijelaskan mengenai metode dekomposisi Adomian.

2.1 Persamaan Diferensial

Definisi 2.1.1: [4]

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu atau beberapa fungsi, dengan bentuk umum sebagai berikut

$$F(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

dengan

$$y^{(1)} = y' = \frac{dy}{dx}\ ,\ y^{(2)} = y'' = \frac{d^2y}{dx^2}\ ,\ \ldots\ ,\ y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Ada dua macam persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa yaitu persamaan di mana fungsi hanya memuat satu variabel bebas saja. Persamaan diferensial parsial yaitu persamaan diferensial di mana suatu fungsi memuat dua atau lebih variabel bebas.

Definisi 2.1.2: [4]

Orde persamaan diferensial adalah tingkat tertinggi turunan yang ada pada suatu persamaan diferensial.

Definisi 2.1.3: [4]

Sebuah persamaan diferensial termasuk persamaan diferensial linier jika memenuhi dua hal berikut:

1. *Variabel-variabel terikat dan turunannya paling tinggi berpangkat satu.*
2. *Tidak mengandung bentuk perkalian antara:*

   (i). sebuah variabel terikat dengan variabel terikat lainnya,

   (ii). turunan yang satu dengan turunan yang lainnya, atau

   (iii). variabel terikat dengan sebuah turunan.

   Sehingga bentuk umum persamaan diferensial linier orde-n adalah:

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = g(x), \qquad (2.1.1)$$

   dengan a_i, $i = 0,1,\ldots,n$, adalah variabel koefisien.

Definisi 2.1.4: [4]

Persamaan diferensial linier dikatakan homogen jika setiap suku dari persamaan diferensial linier mengandung variabel tak bebasnya atau salah satu dari turunannya, bila tidak maka persamaan itu dikatakan tak homogen.

Jadi jika $g(x) = 0$, maka persamaan (2.1.1) disebut persamaan diferensial linier homogen orde-n, sedangkan jika $g(x) \neq 0$, maka persamaan (2.1.1) disebut persamaan diferensial linier tak homogen orde-n.

Bentuk umum persamaan diferensial linier homogen adalah:

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0,$$

di mana $a_0, a_1, \ldots, a_n$ adalah variabel koefisien.

2.2 Operator Diferensial

Definisi 2.2.1: [6]

Operator matematika adalah operator yang digunakan untuk operasi matematis terhadap suatu nilai data.

Beberapa contoh operator matematika misalnya operator penjumlahan, operator pengurangan, operator pangkat, dan lain-lain. Untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial linier dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian digunakan beberapa jenis operator, yaitu:

1. Operator diferensial biasa yakni D, dengan $D = \frac{d}{dx}$.
2. Operator invers D^{-1}, dengan $D^{-1} = \int_0^x (.) dx$.
3. Operator diferensial parsial yakni L, dengan $L = \frac{\partial}{\partial x}$.
4. Operator invers L^{-1}, dengan $L^{-1} = \int_0^x (.) dx$.

2.3 Metode Dekomposisi Adomian: [5]

Metode Dekomposisi Adomian merupakan suatu teknik untuk menyelesaikan suatu persamaan fungsi dalam bentuk *u(x,y)* yang diuraikan ke dalam suatu bentuk deret tak hingga ke dalam subkomponen utama, yang didefinisikan oleh

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,y). \tag{2.3.1}$$

Dalam beberapa ruang fungsi F, solusi u dianggap sebagai jumlah dari deret

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}u_n. \tag{2.3.2}$$

Metode dekomposisi ini menguraikan bentuk *F(u(x,y))* menjadi $A_0(u_0)+A_1(u_o,u_1)+A_2(u_0,u_1,u_2)+\ldots$, sehingga

$$F(u(x,y))=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(u_0,u_1,\ldots,u_n), \tag{2.3.3}$$

di mana A_n disebut juga dengan polinomial Adomian.

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

Seperti yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya, metode dekomposisi Adomian dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Pada bab ini akan dibahas mengenai hasil utama dari kajian tugas akhir ini, yaitu menentukan solusi persamaan diferensial linier dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian.

Metode dekomposisi Adomian menguraikan suatu fungsi $u(x,y)$ menjadi jumlah tak hingga dari beberapa komponen yang didefinisikan dengan

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y), \tag{3.1}$$

di mana komponen-komponen $u_n(x,y)$, $n \geq 0$ akan ditentukan secara rekursif. Metode dekomposisi ini menjelaskan cara menentukan komponen-komponen $u_0, u_1, u_2, \ldots$. Penentuan komponen ini dapat dicapai dengan cara yang mudah melalui hubungan rekursif yang biasanya melibatkan integral sederhana.

Selanjutnya, akan dikemukakan penyelesaian persamaan diferensial linier secara umum dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian. Diberikan suatu sistem persamaan diferensial biasa linier dan parsial linier dalam bentuk operator sebagai berikut

$$D_x u + M_x u = g \tag{3.2}$$

dan

$$L_x u + M_x u = g$$

dengan D_x merupakan turunan biasa orde terendah pada x yang diasumsikan dapat dibalik, L_x merupakan turunan parsial orde terendah pada x yang diasumsikan dapat dibalik, M_x merupakan operator diferensial linier lainnya, dan g merupakan suku nonhomogen.

Tanpa mengurangi keumuman, terlebih dahulu akan dibahas secara umum untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian, yaitu pada persamaan diferensial linier. Dengan menggunakan operator balik L^{-1} pada ke dua sisi persamaan (3.2) dan kondisi awal yang diberikan, maka diperoleh

$$u = f - L^{-1}(M_x u), \tag{3.1}$$

dengan f merepresentasikan hasil integral dari fungsi g. Seperti yang dinyatakan sebelumnya, metode dekomposisi Adomian mendefinisikan solusi u sebagai deret tak hingga dari komponen-komponen

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n. \tag{3.2}$$

Substitusikan (3.4) pada persamaan (3.3), diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = f - L^{-1}\left(M_x\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\right). \tag{3.3}$$

Dengan mengekspansi persamaan (3.5) diperoleh

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = f - L^{-1}(M_x(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots)). \tag{3.4}$$

Untuk mengkonstruksi hubungan rekursif yang diperlukan dalam menentukan $u_0, u_1, u_2, \ldots,$ perlu diperhatikan bahwa metode dekomposisi Adomian menyatakan suku ke u_0 diperoleh dari fungsi f, yaitu suku-suku yang tidak melibatkan operator L^{-1} dan u_n di dalamnya, di mana f didapatkan dari suku nonhomogen yang diintegralkan. Maka dari itu, didapatkan hubungan rekursif sebagai berikut

$$\begin{aligned} u_0 &= f, \\ u_{k+1} &= -L^{-1}(M_x(u_k)),\ k \geq 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

yang ekivalen dengan

$$\begin{aligned} u_0 &= f, \\ u_1 &= -L^{-1}(M_x(u_0)), \\ u_2 &= -L^{-1}(M_x(u_1)), \\ u_3 &= -L^{-1}(M_x(u_2)), \\ &\vdots \\ u_n &= -L^{-1}(M_x(u_{n-1})). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Begitu selanjutnya untuk mendapatkan suku-suku u_n berikutnya. Selanjutnya akan dikaji metode dekomposisi Adomian untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa linier orde-n dan persamaan diferensial parsial linier orde satu.

3.1 Metode Dekomposisi Adomian untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Biasa Linier Orde-*n*

Diberikan suatu persamaan diferensial biasa linier

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = g(x), \tag{3.1.1}$$

dengan a_i adalah variabel koefisien. Dalam bentuk operator, persamaan (3.1.1) dapat ditulis menjadi

$$(a_n D_x^n + a_{n-1} D_x^{n-1} + \ldots + a_2 D_x^2 + a_1 D_x + a_0) y = g(x), \tag{3.1.2}$$

dengan

$$D_x^n = \frac{d^n}{dx^n}. \tag{3.1.3}$$

Tanpa mengurangi keumuman, pada skripsi ini akan dikaji persamaan diferensial biasa linier orde dua. Diberikan suatu sistem persamaan diferensial biasa linier orde dua sebagai berikut

$$u''(x) - u(x) = f, \;\; u(0) = A, \;\; u'(0) = B. \tag{3.1.4}$$

Dalam bentuk operator, persamaan (3.1.4) dapat ditulis menjadi

$$Du - u = f, \tag{3.1.5}$$

dengan operator diferensial D diberikan oleh

$$D_x^2 = \frac{d^2}{dx^2}. \tag{3.1.6}$$

Asumsikan D dapat dibalik, sedemikian sehingga operator balik D^{-1} ada, dan diberikan oleh

$$D^{-1}(.) = \int_0^x \int_0^x (.)dxdx. \tag{3.1.7}$$

Dengan menggunakan D^{-1} serta kondisi awal yang diberikan pada ke dua sisi persamaan (3.1.5), diperoleh

$$D^{-1}(Du) = D^{-1}(f) + D^{-1}(u), \tag{3.1.8}$$

maka

$$u(x) - xu'(0) - u(0) = D^{-1}(f) + D^{-1}u, \tag{3.1.8}$$

yang ekivalen dengan

$$u(x) = A + Bx + D^{-1}(f) + D^{-1}(u). \tag{3.1.9}$$

Substitusikan persamaan (3.4) ke persamaan (3.1.9), menghasilkan

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = A + Bx + D^{-1}(f) - D^{-1}(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)). \qquad (3.1.10)$$

Berdasarkan metode dekomposisi Adomian, diperoleh hubungan rekursif sebagai berikut

$$\begin{aligned} u_0(x) &= A + Bx + D^{-1}f, \\ u_{k+1}(x) &= D^{-1}(u_k(x)),\ k \geq 0. \end{aligned} \qquad (3.1.11)$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} u_0(x) &= A + Bx + D^{-1}f, \\ u_1(x) &= D^{-1}(u_0(x)), \\ u_2(x) &= D^{-1}(u_1(x)), \\ &\vdots \\ u_n(x) &= D^{-1}(u_{n-1}(x)). \end{aligned} \qquad (3.1.12)$$

Selanjutnya akan diberikan contoh kasus untuk permasalahan diferensial biasa linier orde dua.

Contoh 1.

Diberikan persamaan diferensial biasa berikut ini

$$u''(x) = xu(x),\ \ u(0) = 1,\ \ u'(0) = 1. \qquad (3.9)$$

Akan ditentukan solusi untuk persamaan (3.9).

Dalam bentuk operator, persamaan (3.9) dapat ditulis menjadi

$$Du = xu, \qquad (3.10)$$

di mana operator diferensial D diberikan oleh

$$D_x^2 = \frac{d^2}{dx^2}.$$

Asumsikan D dapat dibalik, sedemikian sehingga operator balik D^{-1} ada, dan diberikan oleh

$$D^{-1}(.) = \int_0^x \int_0^x (.)dxdx. \tag{3.11}$$

Gunakan D^{-1} dan kondisi awal yang diberikan pada ke dua sisi persamaan (3.10), diperoleh

$$D^{-1}(Du) = D^{-1}(xu),$$

maka

$$u(x) - xu'(0) - u(0) = D^{-1}(xu),$$

yang ekivalen dengan

$$u(x) = 1 + x + D^{-1}(xu). \tag{3.11}$$

Substitusikan persamaan (3.4) ke persamaan (3.11), menghasilkan

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 1 + x + D^{-1}(x\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)).$$

Berdasarkan metode dekomposisi Adomian, diperoleh hubungan rekursif sebagai berikut

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1 + x, \\ u_{k+1}(x) &= D^{-1}(xu_k(x)),\ k \geq 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1 + x, \\ u_1(x) &= D^{-1}(xu_0(x)) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12}, \\ u_2(x) &= D^{-1}(xu_1(x)) = \frac{x^6}{180} + \frac{x^7}{504}, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.13}$$

begitu selanjutnya untuk suku-suku u_n berikutnya. Substitusikan persamaan (3.13) ke persamaan (3.4) sehingga memberikan solusi dalam bentuk deret sebagai berikut

$$u(x)=(1+\frac{x^3}{6}+\frac{x^6}{180}+...)+(x+\frac{x^4}{12}+\frac{x^7}{504}+...) \qquad (3.14)$$

3.2 Metode Dekomposisi Adomian untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Parsial Orde Satu

Diberikan suatu persamaan diferensial parsial orde satu berikut

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y),\ u(0,y)=g(y),\ u(x,0)=h(x). \qquad (3.2.1)$$

Dalam bentuk operator, persamaan (3.2.1) dapat ditulis menjadi

$$L_x u+L_y u=f(x,y), \qquad (3.2.2)$$

dengan

$$L_x=\frac{\partial}{\partial x},\ L_y=\frac{\partial}{\partial y}.$$

Asumsikan keduanya dapat dibalik, sedemikian sehingga operator balik L_x^{-1} dan L_y^{-1} keduanya ada, dan diberikan oleh

$$L_x^{-1}(.)=\int_0^x (.)dx,$$

$$L_y^{-1}(.)=\int_0^y (.)dy.$$

Ini bermakna

$$L_x^{-1}(L_x u(x,y))=u(x,y)-u(0,y). \qquad (3.2.3)$$

Dengan menggunakan L_x^{-1} pada kedua sisi persamaan (3.2.2) menghasilkan

$$L_x^{-1}(L_x u) = L_x^{-1}(f(x,y)) - L_x^{-1}(L_y u),$$

yang ekivalen dengan

$$u(x,y) = g(y) + L_x^{-1}\left(f(x,y)\right) - L_x^{-1}\left(L_y u\right). \tag{3.2.4}$$

Persamaan (3.2.4) diperoleh dengan menggunakan persamaan (3.2.3) dan kondisi awal $u(0,y) = g(y)$. Dengan menggunakan dekomposisi Adomian seperti yang dirumuskan dalam (3.4), maka persamaan (3.2.4) dapat ditulis menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y) = g(y) + L_x^{-1}\left(f(x,y)\right) - L_x^{-1}\left(L_y\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y)\right)\right). \tag{3.2.5}$$

Dengan mengekspansi persamaan (3.2.5) diperoleh

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots = g(y) + L_x^{-1}\left(f(x,y)\right) - L_x^{-1}L_y(u_0 + u_1 + u_2 + \ldots).$$

Seperti yang telah dinyatakan oleh metode dekomposisi Adomian, komponen u_0 diperoleh dari kondisi awal yang diberikan dan suku hasil integral dari $L_x^{-1}\left(f(x,y)\right)$ yang diasumsikan diketahui. Maka dari itu

$$u_0(x,y) = g(y) + L_x^{-1}(f(x,y)). \tag{3.2.6}$$

Komponen-komponen lainnya, u_{k+1}, $k \geq 0$ ditentukan dengan menggunakan hubungan

$$u_{k+1}(x,y) = -L_x^{-1}L_y(u_k),\ k \geq 0. \tag{3.2.7}$$

Dengan mengkombinasikan persamaan (3.2.6) dan (3.2.7), diperoleh hubungan rekursif

$$\begin{aligned} u_0(x,y) &= g(y) + L_x^{-1}(f(x,y)), \\ u_{k+1}(x,y) &= -L_x^{-1}L_y(u_k),\ k \geq 0. \end{aligned}$$

Maka dari itu, komponen-komponennya adalah

$$\begin{aligned} u_0(x,y) &= g(y) + L_x^{-1}(f(x,y)), \\ u_1(x,y) &= -L_x^{-1}(L_y u_0(x,y)), \\ u_2(x,y) &= -L_x^{-1}(L_y u_1(x,y)), \\ u_3(x,y) &= -L_x^{-1}(L_y u_2(x,y)), \end{aligned}$$

dan seterusnya.

Selanjutnya akan diberikan contoh kasus untuk permasalahan diferensial parsial linier orde satu.

Contoh 2.

Diberikan persamaan diferensial parsial berikut ini

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = x + y,\ u(0,y) = 0,\ u(x,0) = 0. \tag{3.15}$$

Akan ditentukan solusi untuk persamaan (3.15).

Dalam bentuk operator, persamaan (3.15) dapat ditulis menjadi

$$L_x u = x + y - L_y u, \tag{3.16}$$

dengan,

$$L_x = \frac{\partial}{\partial x},\ L_y = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Dari persamaan di atas, maka jelas bahwa L_x dapat dibalik, maka dari itu L_x^{-1} ada dan diberikan oleh

$$L_x^{-1}(.) = \int_0^x (.)dx.$$

Solusi untuk x:

Solusi ini dapat diperoleh dengan menggunakan L_x^{-1} pada ke dua sisi persamaan (3.16), sehingga diperoleh

$$L_x^{-1}L_x u = L_x^{-1}(x+y) - L_x^{-1}L_y u,$$

yang ekivalen dengan

$$\begin{aligned} u(x,y) &= u(0,y) + \frac{1}{2}x^2 + xy - L_x^{-1}(L_y u) \\ &= \frac{1}{2}x^2 + xy - L_x^{-1}(L_y u), \end{aligned} \tag{3.17}$$

Dengan menggunakan dekomposisi Adomian seperti yang dirumuskan dalam (3.4), maka persamaan (3.17) dapat ditulis menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy - L_x^{-1}\left(L_y\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y)\right)\right). \tag{3.18}$$

Dengan mengekspansi persamaan (3.18) diperoleh

$$u_0 + u_1 + u_2 + ... = \frac{1}{2}x^2 + xy - L_x^{-1}\left(L_y\left(u_0 + u_1 + u_2 + ...\right)\right).$$

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, komponen u_0 diperoleh dari kondisi yang diberikan dan dengan mengintegralkan $f(x,y) = x + y$, sehingga

$$u_0(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy.$$

Komponen-komponen berikutnya dapat ditentukan dengan hubungan rekursif

$$u_0(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy,$$
$$u_{k+1}(x,y) = -L_x^{-1}\left(L_y(u_k)\right),\ k \geq 0.$$

Hal ini memberikan

$$u_1(x,y) = -L_x^{-1}\left(L_y u_0\right) = -L_x^{-1}\left(L_y\left(\frac{1}{2}x^2 + xy\right)\right) = -\frac{1}{2}x^2,$$
$$u_2(x,y) = -L_x^{-1}\left(L_y u_1\right) = -L_x^{-1}\left(L_y\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\right) = 0.$$

Karena itu, $u_k = 0,\ k \geq 2$. Dengan menentukan komponen-komponen $u(x,y)$, diperoleh

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots = \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}x^2 = xy.$$

Solusi untuk y:

Solusi dari persamaan (3.15) juga dapat diselesaikan dengan mencari solusi y. Dalam bentuk operator, persamaan (3.15) dapat ditulis menjadi

$$L_y u = x + y - L_x u, \qquad (3.19)$$

dengan,

$$L_x = \frac{\partial}{\partial x},\ L_y = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Dari persamaan di atas, maka jelas bahwa L_y dapat dibalik, maka dari itu L_y^{-1} ada dan diberikan oleh

$$L_y^{-1}(.) = \int_0^y (.)dy.$$

Solusi ini dapat diperoleh dengan menggunakan L_y^{-1} pada ke dua sisi persamaan (3.19), sehingga diperoleh

$$L_y^{-1}L_y u = L_y^{-1}(x+y) - L_y^{-1}L_x u,$$

yang ekivalen dengan

$$u(x,y) = = xy + \frac{1}{2}y^2 - L_y^{-1}(L_x u), \tag{3.20}$$

Dengan menggunakan dekomposisi Adomian seperti yang dirumuskan dalam (3.4), maka persamaan (3.20) dapat ditulis menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y) = xy + \frac{1}{2}y^2 - L_y^{-1}\left(L_x\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y)\right)\right). \tag{3.21}$$

Dengan mengekspansi persamaan (3.21) diperoleh

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots = xy\frac{1}{2}y^2 - L_y^{-1}\left(L_x\left(u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\right)\right).$$

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, komponen u_0 diperoleh dari kondisi awal yang diberikan dan dengan mengintegralkan $f(x,y) = x + y$, sehingga

$$u_0(x,y) = xy + \frac{1}{2}y^2.$$

Komponen-komponen berikutnya dapat ditentukan dengan hubungan rekursif

$$u_0(x,y) = xy + \frac{1}{2}y^2,$$
$$u_{k+1}(x,y) = -L_y^{-1}\left(L_x\left(u_k\right)\right),\ k \geq 0.$$

Hal ini memberikan

$$u_1(x,y) = -L_y^{-1}(L_x u_0) = -L_y^{-1}\left(L_x\left(xy + \frac{1}{2}x^2\right)\right) = -\frac{1}{2}y^2,$$

$$u_2(x,y) = -L_y^{-1}(L_x u_1) = -L_y^{-1}\left(L_x\left(-\frac{1}{2}y^2\right)\right) = 0.$$

Karena itu, $u_k = 0,\ k \geq 2$. Dengan menentukan komponen-komponen $u(x,y)$, diperoleh

$$u(x,y) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots = \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}x^2 = xy.$$

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh pada bab pembahasan sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa penyelesaian dari suatu persamaan diferensial linier dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian tidak selalu memberikan hasil analitis, tetapi dalam bentuk fungsi khusus yang konvergen terhadap suatu nilai. Maka dari itu, untuk menggunakan metode dekomposisi Adomian perlu adanya pengetahuan dasar mengenai beberapa fungsi khusus. Adapun langkah-langkah untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian adalah sebagai berikut:

1. Ubah bentuk persamaan diferensial linier ke dalam bentuk operator.
2. Gunakan invers dari operator tersebut pada kedua sisi persamaan diferensial linier yang telah ditulis dalam bentuk operator.
3. Set fungsi $u(x,y)$ yang tidak diketahui ke dalam deret dekomposisi

   $$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,y).$$

   Substitusikan persamaan di atas ke dalam hasil persamaan sebelumnya.
4. Tentukan komponen $u_0(x,y)$ dari kondisi awal yang diberikan dan hasil integral dari fungsi yang diberikan.
5. Tentukan komponen-komponen u_k, $k\geq 1$ dengan menggunakan hubungan rekursif.

6. Substitusikan hasil komponen-komponen tersebut ke persamaan yang telah diperoleh sebelumnya untuk mendapatkan penyelesaian dalam bentuk deret

4.2 Saran

Karena pada tugas akhir ini dikaji metode dekomposisi Adomian untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier, maka penulis menyarankan pada penelitian selanjutnya dikaji metode dekomposisi Adomian untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Wazwaz, A.M. 2001. *A New Algorithm for Solving Differential Equations of the Lane-Emden Type*. *Appl. Math. Comput.*, 118(2/3), 287–310.

[2] Wazwaz, A.M. 2009. *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. Higher Education Press, Beijing.

[3] Adomian, G. 1986. *Nonlinear Stochastic Operator Equations*. Academic Press, San Diego.

[4] Santoso, W. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*, Edisi Kedua. Erlangga, Jakarta.

[5] Yonggui Zhu, dkk. 2005. *A new algorithm for calculating Adomian polynomials*. Science Direct, Applied Mathematics and Computation 169 : 402–416.

[6] http://matematika-website.blogspot.com/2008/04/operator-matematika.html. Tanggal akses : 29 Desember 2011 pukul 11.50 WIB.

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Cut Nathalia Rahmi, dilahirkan di Padang pada tanggal 13 Juni 1989 dari pasangan Teuu Abdul Muthalib dan Neni Amdani. Penulis adalah anak Ketiga dari empat bersaudara. Penulis menamatkan pendidikan Sekolah Dasar di SD Baiturrahmah Padang pada tahun 2001, SMP Maria Padang pada tahun 2004, dan SMA Negeri 10 Padang pada tahun 2007. Pada tahun 2007, penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur SPMB (Seleksi Penerimaan Mahasiswa Baru).

Selama menjadi mahasiswa di Jurusan Matematika FMIPA Unand, penulis aktif dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA), pengajar privat mata pelajaran Matematika dan Bendahara Asisten Laboratorium Statistika dan Komputasi Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas. Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) pada tahun 2010 di Jorong Ketinggian Kenagarian Guguk VIII Koto Kecamatan Guguk Kabupaten Lima Puluh Kota dalam rangka menyelesaikan salah satu mata kuliah wajib fakultas.