DIMENSI PARTISI DARI GARF BIPARTIT

SKRIPSI

AFRI LEGINA

07 134 036

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

PADANG 2011

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini menyatakan bahwa :

Nama	: Afri Legina
No. Buku Pokok	: 07 134 036
Jurusan	: Matematika
Bidang	: Kombinatorik
Judul Skripsi	: **DIMENSI PARTISI DARI GRAF BIPARTIT**

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal 8 Agustus 2011 berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing / Penguji	Penguji
1.	a.n 1.
Dr. Syafrizal Sy NIP. 196708071993091001	Dr. Susila Bahri NIP. 196803031993022001
2.	2.
Dr. Lyra Yulianti NIP. 197507061999032003	Narwen, M.Si NIP. 196704101997021001
	3.
	Hazmira Yozza, M.Si NIP. 196903081994032002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand

Dr. Syafrizal Sy
NIP. 196708071993091001

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Alhamdulillah puji dan syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT, yang senantiasa melimpahkan berkah, rahmat, dan karunia-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini dengan judul **"DIMENSI PARTISI DARI GRAF BIPARTIT"**. Skripsi ini pada hakikatnya merupakan suatu tambahan ilmu pengetahuan bagi penulis dan diajukan untuk menyelesaikan program pendidikan strata satu pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas, Padang.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan-kekurangan baik dalam segi penulisan, pembahasan maupun tata bahasanya, namun penulis telah berusaha semaksimal mungkin sesuai dengan kemampuan yang penulis miliki untuk menyelesaikan skripsi ini.

Rasa cinta kasih dan bangga penulis berikan untuk apa, ama, uda, uni, adik, dan teman-teman serta semua pihak yang telah memberikan dukungan dan pengorbanan yang tulus dan tak pernah lelah menyemangati penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Rasa hormat dan terima kasih yang tulus juga penulis sampaikan kepada:

1. Bapak Dr. Syafrizal Sy dan Ibu Dr. Lyra Yulianti selaku pembimbing yang telah memberikan dukungan moril dan materil serta telah meluangkan waktu, fikiran, bimbingan, pengarahan, dan perbaikan-perbaikan dalam proses penyusunan skripsi ini.

2. Ibu Dr. Susila Bahri, Bapak Narwen, M.Si, dan Ibu Hazmira Yozza, M.Si selaku penguji yang telah memberikan bantuan dan berbagai masukan untuk kesempurnaan skripsi ini.
3. Ibu Hazmira Yozza, M.Si. tercinta selaku pembimbing akademik yang senantiasa memberikan dukungan, bimbingan dan arahan kepada penulis selama menempuh pendidikan di Jurusan Matematika Universitas Andalas.
4. Bapak/Ibu Dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam yang selama ini telah memberikan ilmu pengetahuan yang sangat berguna bagi penulis.
5. Bapak/Ibu Karyawan/Karyawati Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam yang selama ini senantiasa memberikan bantuan dan nasihat yang sangat berguna bagi penulis.
6. Serta semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini yang tidak mungkin penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat beserta anugerah-Nya kepada kita semua dan memberikan balasan yang lebih baik kepada semua pihak. Harapan penulis, semoga skripsi ini bermanfaat untuk kita semua. Amin.

Padang, 8 Agustus 2011

Penulis

ABSTRAK

Misalkan terdapat suatu graf terhubung G, dan S adalah subhimpunan dari $V(G)$, dinotasikan $S \subseteq V(G)$. Misalkan terdapat $v \in V(G)$, maka jarak titik v terhadap subhimpunan S dinotasikan dalam bentuk $d(v,S) = min\{d(v,x) | x \in S\}$. Kemudian, misalkan terdapat himpunan terurut k-partisi dari $V(G)$, tulis $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$, maka diperoleh representasi v terhadap Π, yaitu $r(v|\Pi) = (d(v,S_1), d(v,S_2), \dots, d(v,S_k))$. Himpunan partisi Π disebut sebagai partisi penyelesaian jika representasi setiap $v \in V(G)$ terhadap Π berbeda. Kardinalitas minimum dari k-partisi penyelesaian terhadap $V(G)$ disebut sebagai dimensi partisi dari G, yang dinotasikan dengan $pd(G)$. Dalam skripsi ini akan ditunjukkan partisi penyelesaian dari suatu graf bipartit $K_{s,t}$ yang berorde n dengan $n \geq 3$. Kemudian, akan ditunjukkan dimensi partisi dari graf bipartit yaitu $pd(K_{s,t}) = n - 1$.

Kata kunci : *Graf Terhubung, Graf Bipartit, Resolving Partisi dan Dimensi Partisi.*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

No. Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Graf merupakan salah satu bidang dalam matematika yang banyak berkaitan dengan ilmu komputer. Suatu graf G merupakan sebuah diagram yang memuat himpunan titik dan himpunan garis yang menghubungkan himpunan titik tersebut yang dapat ditulis sebagai $G = (V, E)$ dengan V adalah himpunan titik pada graf G yang tidak boleh kosong dan E (mungkin kosong) adalah himpunan sisi pada G. Setiap sisi menghubungkan tepat dua titik dan setiap titik dapat memiliki banyak sisi yang menghubungkannya dengan titik-titik lainnya.

Banyak permasalahan yang dapat diselesaikan dengan teori graf, misalnya masalah jaringan lalu lintas. Dengan menggunakan graf, jaringan lalu lintas dapat divisualisasikan dalam titik dan sisi, dengan persimpangan dinyatakan sebagai titik dan jalan dinyatakan sebagai sisi. Seiring dengan perkembangan zaman dan kemajuan teknologi, aplikasi teori graf telah merambah berbagai disiplin ilmu dan membantu mempermudah penyelesaian berbagai masalah. Sampai saat ini, teori graf terus berkembang seiring dengan ditemukannya masalah-masalah dalam kehidupan yang dapat diselesaikan dengan teori graf seperti masalah jaringan listrik, jaringan telepon, jaringan komputer, psikologi, riset operasional, dan lain sebagainya.

Pada teori graf terdapat istilah dimensi partisi yang digunakan untuk membantu penyelesaian suatu masalah. Representasi dari suatu titik dapat dianggap sebagai vektor atau koordinat yang menunjukkan lokasi titik tersebut relatif terhadap partisi yang dipilih. Suatu representasi yang baik harus memiliki vektor koordinat yang berbeda. Namun, karena pemilihan partisi adalah sebarang, maka representasi yang dihasilkan tidaklah tunggal. Hal ini mengakibatkan tidak semua pilihan partisi dapat menghasilkan representasi yang baik. Pemilihan partisi yang tepat dapat menghasilkan suatu representasi di mana semua titiknya memiliki vektor koordinat yang berbeda. Jika hal ini terjadi, maka partisi tersebut disebut dengan partisi penyelesaian (*resolving partition*).

Misalkan titik $u, v \in G$. Jarak $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v pada graf G. Jika $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ adalah himpunan titik-titik pada graf G dan $v \in G$, maka $r(v|W) = \big(d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k)\big)$ merupakan representasi dari titik v terhadap W. Himpunan W dikatakan partisi penyelesaian untuk graf G apabila semua titik di G mempunyai representasi yang berbeda. Partisi penyelesaian dengan kardinalitas minimum disebut minimum partisi penyelesaian, dan kardinalitas tersebut menyatakan dimensi partisi dari G.

Berikut diberikan gambaran mengenai partisi penyelesaian dan dimensi partisi pada graf. Misalkan terdapat beberapa kota pada sebuah provinsi dalam suatu negara. Masing-masing kota dan jalan yang menghubungkan antar kota dapat digambarkan dalam sebuah graf terhubung dimana titik merepresentasikan kota dan sisi merepresentasikan jalan yang menghubungkan antar kota.

Kemudian, untuk suatu keperluan tertentu kota-kota tersebut dipartisi menjadi beberapa partisi dengan ketentuan dalam sebuah partisi tidak terdapat kota yang sama. Banyaknya partisi yang dapat dibentuk dari kota-kota dalam provinsi tersebut, dengan syarat dalam sebuah partisi tidak terdapat kota yang sama ini disebut dengan partisi penyelesaian. Namun, dalam membentuk partisi ke himpunan yang minimum cukup sulit dilakukan. Misalkan titik-titik yang akan dipartisi tersebut dibentuk ke dalam himpunan terurut k-partisi, sebut Π. Lalu ditentukan jarak minimum dari masing– masing kota terhadap Π. Jika masih terdapat dua kota yang memiliki jarak yang sama, maka pembentukan partisi tersebut harus diubah sampai diperoleh jarak minimum dari tiap kota berbeda. Banyaknya partisi yang dapat dibuat seminimal mungkin inilah yang dinamakan dengan dimensi partisi.

Pada tulisan ini akan dikaji tentang batas atas dan batas bawah serta dimensi partisi dari graf bipartit. Graf bipartit adalah suatu graf yang dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian sedemikian sehingga setiap sisi pada graf G menghubungkan sebuah titik pada kedua himpunan bagian tersebut. Pada kajian sebelumnya telah diperoleh dimensi partisi dari graf lintasan P_n dan graf lengkap K_n untuk setiap $n \geq 2$. Menarik untuk dikaji apakah terdapat hubungan antara dimensi partisi dari graf bipartit dengan graf lintasan dan graf lengkap.

1.2 Rumusan Masalah

Misal diberikan suatu graf bipartit dengan banyak titik paling sedikit 3 atau $n \geq 3$. Bagaimana menentukan dimensi partisi dari graf tersebut.

1.3 Batasan Masalah

Karena terdapat begitu banyak jenis graf, maka permasalahan pada tugas akhir ini akan dibatasi pada pembahasan dimensi partisi dari graf bipartit.

1.4 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan dalam penulisan tugas akhir ini adalah untuk menentukan dimensi partisi dari graf bipartit.

1.5 Sistematika Penulisan

Agar penulisan tugas akhir ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika pembahasan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab.

Bab I adalah pendahuluan yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan dalam tugas akhir ini. Bab berikutnya Bab II adalah landasan teori yang membahas tentang konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang pengertian dan terminologi dalam teori graf, beberapa graf sederhana khusus, pengertian dimensi partisi, dan teorema pendukung yang digunakan untuk membantu menyelesaikan permasalahan dalam skripsi ini.

Bab III adalah bagian yang menyajikan pembahasan/pemaparan tentang permasalahan yang dihadapi yaitu dimensi partisi pada graf bipartit berorde n. Bagian terakhir adalah bab IV yaitu penutup. Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran.

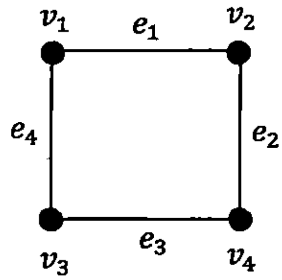
BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan disajikan mengenai beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan permasalahan yang telah dikemukakan pada Bab I. Definisi dan terminologi yang terdapat dalam teori graf disajikan pada Subbab 2.1. Kemudian pada Subbab 2.2 dijelaskan beberapa graf sederhana khusus. Selanjutnya, pada Subbab 2.3 akan dijelaskan tentang dimensi partisi. Teorema dan lemma pendukung untuk menyelesaikan permasalahan dalam skripsi ini diberikan pada Subbab 2.4.

2.1 Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf

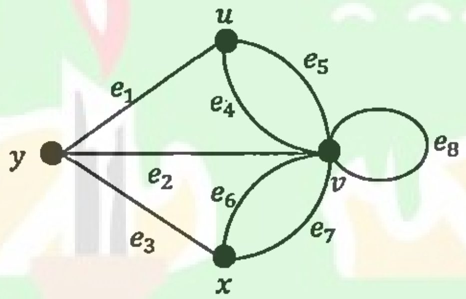
$G = (V, E)$ dikatakan suatu **graf** jika terdiri dari pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan **titik** pada graf G dan E adalah himpunan pasangan tak terurut dari unsur-unsur di V. Elemen-elemen E disebut juga dengan **sisi.** Himpunan titik dari G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisinya dinotasikan dengan $E(G)$. Banyaknya titik-titik pada G disebut dengan **orde** G yang dinotasikan dengan $|V(G)|$ dan banyak sisi pada G disebut dengan **size** G yang dinotasikan dengan $|E(G)|$ [2]. Untuk lebih jelasnya perhatikan Gambar 2.1.1 berikut.



Gambar 2.1.1 Graf dengan 4 titik dan 4 sisi

Dari gambar 2.1.1 dapat dilihat bahwa himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $|V(G)| = 4$, dan $|E(G)| = 4$.

Misalkan $u, v \in V(G)$. Jika sisi $e = uv$ menghubungkan titik u dan v maka titik u dikatakan **bertetangga** dengan titik v dan demikian sebaliknya. Dalam hal ini, sisi e dikatakan **terkait** dengan titik u dan titik v. Untuk suatu titik v di G, sisi $e = vv$ dinamakan dengan ***loop***. Jika dua titik di G terkait lebih dari satu sisi maka sisi tersebut dinamakan dengan **sisi ganda** [2]. Jadi, suatu titik di G dapat memiliki lebih dari satu sisi yang menghubungkannya dengan titik lainnya. Gambar 2.1.2 berikut ini menunjukkan suatu graf yang memiliki *loop* dan *sisi ganda*.



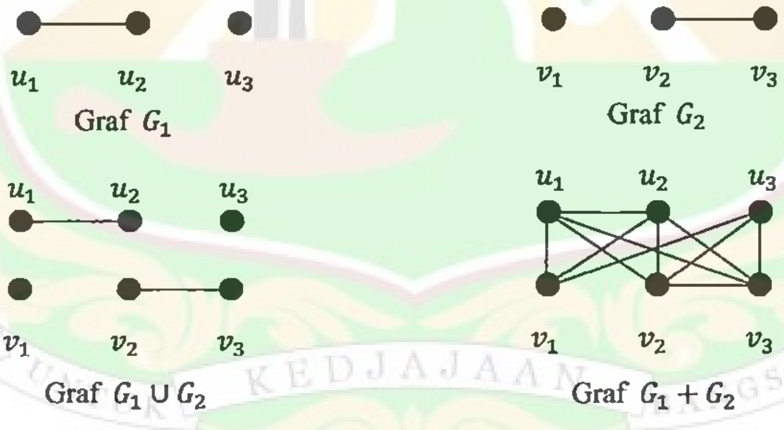
Gambar 2.1.2 Graf dengan *loop* dan *sisi ganda*

Dari Gambar 2.1.2 terlihat bahwa titik v memiliki *loop*, kemudian pada titik u dan titik v terdapat sisi ganda. Selain itu, pada gambar juga terlihat bahwa titik u terhubung dengan titik v dan titik u terkait dengan sisi e_1, e_4, e_5.

Suatu graf H dikatakan ***subgraf*** dari graf G jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Misalkan terdapat graf U dengan $V(U) \subseteq V(G)$. Graf U dikatakan sebagai **subgraf terinduksi** dari G, dinotasikan dengan $\langle U \rangle$, apabila graf U adalah himpunan tak kosong dari titik-titik pada graf G dengan setiap dua titik pada U yang bertetangga di G maka titik tersebut juga harus bertetangga di U [2], atau sebagai D didefinisikan sebagai jarak maksimum antara dua titik di G, yaitu $D = max\{d(u,v)|u,v \in V(G)\}$ [6].

Siklus adalah suatu lintasan dimana titik awalnya sama dengan titik akhir. Siklus dengan panjang n dinotasikan dengan C_n. Siklus yang mempunyai jumlah titik yang ganjil disebut siklus ganjil. Misalkan $x \in V(G)$, maka **lingkungan** dari x adalah $N(x) = \{v \in V(G)|xv \in E(G)\}$ [6].

Misalkan dua buah graf G_1, G_2. **Gabungan** dari graf G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$, didefinisikan sebagai suatu graf dengan himpunan titik-titik $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$. **Operasi jumlah** pada graf G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G_1 + G_2$ didefinisikan sebagai suatu graf dengan himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv\,|u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ [8]. Gambar berikut adalah ilustrasi dari operasi penjumlahan pada graf.

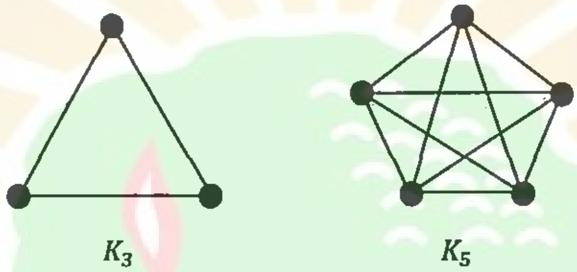


Gambar 2.1.4 Operasi penjumlahan pada graf

2.2 Beberapa graf sederhana khusus

Suatu graf G dikatakan **graf terhubung** apabila terdapat lintasan yang menghubungkan setiap dua titik pada graf G tersebut [2]. Graf pada Gambar 2.1.1 merupakan salah satu contoh dari suatu graf terhubung. Suatu graf G dikatakan graf **terhubung nontrivial** apabila graf tersebut merupakan suatu graf terhubung dan memiliki lebih dari satu titik. Panjang untuk setiap lintasan di graf terhubung G adalah $min\{p-1, q\}$ dengan q adalah *size* dan p adalah orde dari graf tersebut [2].

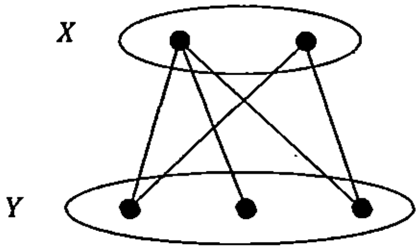
Graf lengkap K_n, $n > 1$, adalah suatu graf dengan n titik yang setiap dua titiknya saling bertetangga [2]. Apabila sisi sebarang pada graf K_n dihapus, maka graf yang diperoleh dinotasikan sebagai $K_n - \{e\}$. Gambar 2.2.1 berikut merupakan contoh dari graf lengkap.



Gambar 2.2.1 Graf lengkap K_3 dan K_5

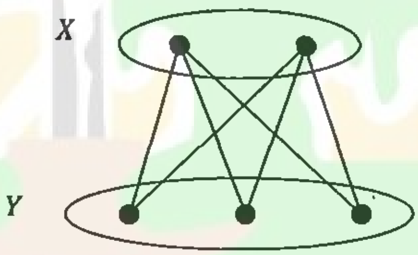
Dari Gambar 2.2.1 dapat terlihat bahwa K_3 dan K_5 merupakan contoh dari graf lengkap karena setiap titik yang ada pada masing-masing graf tersebut bertetangga.

Suatu graf G dikatakan **graf bipartit** jika $V(G)$ dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian, sebut X dan Y, sedemikian sehingga setiap sisi dari G menghubungkan sebuah titik di X dengan sebuah titik di Y, dinotasikan dengan (X, Y) bipartisi dari G atau $K_{r,s}$. X dan Y dinamakan **himpunan partit** [2]. Untuk lebih jelasnya perhatikan Gambar 2.2.2 berikut. Gambar 2.2.2 memperlihatkan bahwa $K_{2,3}$ merupakan suatu graf bipartit dengan X dan Y adalah himpunan partit dimana $|X| = 2$ dan $|Y| = 3$.



Gambar 2.2.2 Graf bipartit

Suatu graf G dikatakan **graf sederhana** apabila graf tersebut tidak memiliki sisi ganda dan *loop*. Apabila G adalah suatu graf sederhana dan bipartit dengan partisi (X, Y) sedemikian sehingga setiap titik di X bertetangga dengan setiap titik di Y, maka G disebut **graf bipartit lengkap**. Graf bipartit lengkap dinotasikan dengan $K_{s,t}$ dengan s dan t adalah banyaknya titik di kedua partisi tersebut [2]. Gambar berikut ini merupakan contoh graf bipartit lengkap.



Gambar 2.2.3 Graf bipartit lengkap $K_{2,3}$

Terlihat pada Gambar 2.2.3 terdapat suatu graf bipartit lengkap, yaitu $K_{2,3}$ yang terdiri dari lima titik dimana titik-titik tersebut dibagi menjadi dua himpunan partit dengan $s = 2$ dan $t = 3$.

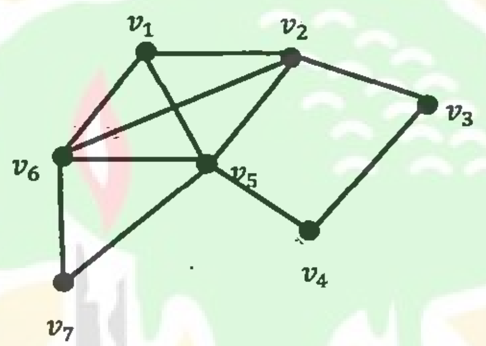
Graf yang terdiri dari satu lintasan disebut **graf lintasan.** Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n atau dapat juga ditulis dengan bentuk $P_n: v_1, v_{2,} \ldots, v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ [2]. Contoh graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.6 berikut.

(a) **(b)**

Gambar 2.2.4 (a) Lintasan P_2 (b) Lintasan P_3

Dari Gambar 2.2.4 (a) terlihat bahwa terdapat dua titik di P_2 dan dari Gambar 2.2.4 (b) terdapat tiga titik di P_3 dimana pada masing-masing graf tersebut hanya terdapat satu lintasan.

Clique adalah subgraf yang setiap dua titiknya saling bertetangga [2]. ***Clique* maksimum** adalah suatu *clique* dengan jumlah titik paling banyak.



Gambar 2.2.5 Suatu *Clique*

Perhatikan Gambar 2.2.5 himpunan $\{v_5, v_6, v_7\}$ membentuk suatu *clique.* Himpunan $\{v_1, v_2, v_5, v_6\}$ adalah *clique* maksimum, sedangkan himpunan $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ bukanlah suatu *clique* karena titik v_2 dan v_4 tidak bertetangga begitu pula dengan v_3 dan v_5.

2.3 Pengertian Dimensi Partisi pada Graf

Misalkan $S \subseteq V(G)$ dan misalkan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ adalah suatu himpunan terurut dari titik-titik pada graf terhubung G, maka **representasi** titik v pada graf G terhadap himpunan W dari k-vektor dapat ditulis dalam bentuk $r(v|W) = \big(d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k)\big)$ [4]. Definisi berikut memberikan pengertian dari jarak suatu titik terhadap sebuah himpunan dalam suatu graf.

ii. Suatu bilangan $w \in R$ *dikatakan batas bawah dari* S *jika* $w \leq s$ *untuk setiap* $s \in S$.

2.4 Teorema Dan Lema Pendukung

Di bawah ini adalah beberapa teorema dan lema yang mendukung untuk menyelesaikan masalah utama dalam skripsi ini.

Teorema 2.4.1 [2]. *Misalkan* G *adalah sebuah graf terhubung dan misalkan* $u, v, w \in V(G)$, *maka :*

i. $d(u,v) = 0$ *jika dan hanya jika* $u = v$.

ii. $d(u,v) = d(v,u)$ *untuk setiap* $u, v \in V(G)$.

iii. $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$ *untuk setiap* $u, v, w \in V(G)$.

Dimensi partisi pada graf bipartit dijelaskan pada teorema berikut.

Teorema 2.4.2 [3]. *Misalkan* G *suatu graf bipartit terhubung dengan himpunan partisi* V_1 *dan* V_2 *dengan kardinalitas* r *dan* s, *berturut-turut. Maka*

i. $pd(G) \leq r + 1$, *jika* $r = s$, *dan*

ii. $pd(G) \leq max\,\{r, s\}$, *jika* $r \neq s$.

Selanjutnya, kesamaan i dan ii terpenuhi jika dan hanya jika G *adalah graf bipartit lengkap.*

Hubungan antara dimensi partisi dan dimensi metrik dari suatu graf dapat dilihat pada torema di bawah ini.

Teorema 2.4.3 [3]. *Jika* G *adalah suatu graf terhubung nontrivial, maka* $pd(G) \leq dim(G) + 1$.

Bukti. Lihat [3] halaman 47

Teorema 2.4.4 [5]. *Misalkan G adalah sebuah graf dengan banyak titik $n \geq 4$, maka $\dim(G) = n - 2$ jika dan hanya jika G salah satu dari $G = K_{s,t}(s, t \geq 1)$, $G = K_s + \overline{K_t}(s \geq 1, t \geq 2)$ atau $G = K_s + (K_1 \cup K_t)(s, t \geq 1)$.*

Bukti. Lihat [5] halaman 104

Untuk membantu membentuk suatu partisi penyelesaian pada graf digunakan lema berikut.

Lema 2.4.5 [3]. *Diberikan suatu graf terhubung G. Misalkan Π adalah partisi penyelesaian dari $V(G)$ dan $u, v \in V(G)$. Jika $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G)\backslash\{u, v\}$, maka u dan v termasuk pada kelas-kelas yang berbeda dari Π.*

Bukti. Lihat [3] halaman 48.

Penjelasan tentang hubungan graf bipartit dan siklus ganjil terdapat pada lema dan teorema berikut.

Lema 2.4.6 [8]. *Setiap jalan ganjil yang tertutup memuat siklus ganjil.*

Bukti. Lihat [8] halaman 17.

Teorema 2.4.7 [8]. *Suatu graf dikatakan bipartit jika dan hanya jika tidak memuat siklus ganjil.*

Bukti. Lihat [8] halaman 20.

BAB III

DIMENSI PARTISI PADA GRAF BIPARTIT

Pada bab ini, kajian dibagi menjadi dua bagian yaitu tentang batas dimensi partisi dari suatu graf dan dimensi partisi dari graf bipartit.

3.1 Batas Dimensi Partisi

Misalkan G adalah suatu graf berorde n dengan $n \geq 3$ dan diameternya adalah D. Untuk suatu bilangan bulat n dan D dengan $n > D \geq 2$, didefinisikan $g(n, D)$ sebagai bilangan bulat terkecil k dengan $(D+1)^k \geq n$. Pada subbab ini akan dibuktikan bahwa $g(n, D) \leq pd\,(G) \leq n - D + 1$, untuk lebih jelasnya perhatikan Teorema 3.1.1 berikut.

Teorema 3.1.1 [3] *Jika G suatu graf berorde n dengan $n \geq 3$ dan diameter D, maka* $g(n, D) \leq pd\,(G) \leq n - D + 1$.

Bukti. Pertama akan ditentukan batas atas dari dimensi partisi pada graf G. Untuk batas atas, akan dipilih dua titik yang paling berjauhan, katakanlah $u, v \in V(G)$ sehingga $d(u, v) = D$, dan misalkan $u = v_1, v_2, \dots, v_{D+1} = v$ adalah lintasan uv dengan panjang D. Misalkan bahwa $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_D, \dots, v_n\}$. Hal ini jelas menunjukkan bahwa partisi $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_{n-D+1}\}$ dari $V(G)$, dengan $S_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_D\}$ dan $S_i = \{v_{i+D-1}\}$ untuk $2 \leq i \leq n - D + 1$, adalah suatu $(n - D + 1)$-partisi penyelesaian dari G. Ini berarti bahwa $n - D + 1$ adalah batas atas dari graf G. Akibatnya $pd(G) \leq n - D + 1$.

Selanjutnya, akan ditentukan batas bawah dari dimensi partisi pada graf G, yaitu $pd(G) \geq g(n, D)$. Misalkan $pd(G) = k$ dan Π suatu k-partisi penyelesaian

Bukti. Misalkan G adalah graf terhubung berorde $n \geq 3$ dan graf G salah satu dari graf $K_{1,n-1}, K_n - \{e\}, K_1 + (K_1 \cup K_{n-1})$. Akan ditunjukkan bahwa dimensi partisi dari salah satu graf tersebut adalah $n - 1$. Perhatikan 3 kasus berikut.

Kasus 1. Misalkan G adalah suatu graf bintang $K_{1,n-1}$. Akan ditunjukkan bahwa $pd(G) = n - 1$. Untuk sebarang graf bintang, diperoleh beberapa bentuk partisi penyelesaian. Misalkan G adalah suatu graf bipartit, maka G dapat ditulis sebagai $K_{A,B}$. Jadi, graf bintang $K_{1,n-1}$ adalah suatu graf bipartit dengan $|A| = 1$ dan $|B| = n - 1$.

Misalkan $v_1, v_2 \in V(G)$ sebarang. Karena pada graf $K_{A,B}$ berlaku $d(v_1, w) = d(v_2, w)$ untuk suatu $w \in V(G) \backslash \{v_1, v_2\}$ maka berdasarkan Lema 2.4.5 haruslah v_1 dan v_2 berada pada kelas Π yang berbeda. Karena v_1 dan v_2 adalah sebarang titik pada partisi B dari graf bipartit, maka untuk setiap titik pada partisi B di graf bintang harus berada pada kelas yang berbeda dari Π. Dengan demikian setiap himpunan partisi yang ada pada partisi B hanya terdiri dari satu titik saja. Jadi, dari suatu $K_{1,n-1}$, hanya dapat dibuat dua kemungkinan bentuk k-partisi.

Sekarang perhatikan partisi $\Pi_1 = \{S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}\}$ dengan $S_1 = (v_1, v_n)$ dan $S_i = v_i$ untuk $2 \leq i \leq n - 1$. Apabila dibuat representasi v_i terhadap Π dengan $1 \leq i \leq n - 1$ maka hanya entri ke i dari $r(v_i | \Pi_1)$ yang bernilai 0. Ini berarti bahwa representasi v_i terhadap Π_1 berbeda untuk $1 \leq i \leq n - 1$.

Selain itu, diperoleh juga bahwa entri pertama dari $r(v_n | \Pi_1)$ adalah 0. Dengan demikian diperoleh $r(v_n | \Pi_1)$ berbeda dengan setiap $r(v_i | \Pi_1)$ untuk $2 \leq i \leq n - 1$. Selanjutnya perhatikan bahwa entri ke $n - 1$ dari $r(v_1 | \Pi_1)$ adalah 1, sedangkan entri ke $n - 1$ dari $r(v_i | \Pi_1)$ adalah 2. Oleh karena itu, diperoleh

$r(v_n|\Pi_1) \neq r(v_i\,|\Pi_1)$. Akibatnya, dapat disimpulkan $r(v_n|\Pi_1) \neq r(v_i\,|\Pi_1)$ untuk $1 \leq i \leq n-1$. Hal ini berarti bahwa Π_1 merupakan partisi penyelesaian dari G.

Selanjutnya perhatikan partisi $\Pi_2 = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ dengan $S_i = v_i$ untuk $1 \leq i \leq n$. Seperti halnya di atas, representasi $r(v_i|\Pi_2)$ juga berbeda untuk setiap $1 \leq i \leq n$ sehingga diperoleh bahwa Π_2 juga merupakan partisi penyelesaian dari G. Karena kardinalitas minimum dari k-partisi penyelesaian yang dapat dibentuk dari $G = K_{1,n-1}$ adalah $n-1$, maka berdasarkan Definisi 2.3.3 diperoleh bahwa $pd(G) = n-1$.

Kasus 2. Misalkan G adalah graf $K_n - \{e\}$. Akan ditunjukkan $pd(G) = n-1$. Untuk sebarang graf G, akan diperoleh beberapa bentuk partisi penyelesaian. Karena graf G adalah graf lengkap yang salah satu sisinya dihapus, ini berarti setiap dua titik di G bertetangga kecuali titik yang dihapus sisinya. Oleh karena itu, berdasarkan Lema 2.4.5 titik-titik yang bertetangga haruslah berada pada kelas partisi yang berbeda. Ini berarti, tidak boleh ada titik yang bertetangga berada pada kelas yang sama.

Pertama, partisi graf G sebanyak n partisi, dengan n adalah banyak titik pada graf G. Misalkan $\Pi_1 = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ dengan $S_i = v_i$ untuk $1 \leq i \leq n$. Apabila dibuat representasi v_i terhadap Π_1 dengan $1 \leq i \leq n$ maka hanya entri ke i dari $r(v_i\,|\Pi_1)$ yang bernilai 0. Ini berarti bahwa representasi v_i terhadap Π_1 berbeda untuk $1 \leq i \leq n$. Karena representasi $r(v_i\,|\Pi_1)$ berbeda untuk setiap $1 \leq i \leq n$ maka sesuai dengan Definisi 2.3.2 diperoleh bahwa Π_1 merupakan suatu partisi penyelesaian dari G.

Selanjutnya partisi graf G dengan n titik menjadi $n-1$ partisi. Misalkan $\Pi_2 = \{S_1, S_2, \dots, S_{n-1}\}$ dengan $S_1 = (v_1, v_n)$ dan $S_i = v_i$ untuk $2 \leq i \leq n-1$.

Apabila dibuat representasi v_i terhadap Π_2 dengan $1 \leq i \leq n-1$ maka hanya entri ke i dari $r(v_i\,|\Pi_2)$ yang bernilai 0. Ini berarti bahwa representasi v_i terhadap Π_2 berbeda untuk $1 \leq i \leq n-1$.

Selain itu, diperoleh juga bahwa entri pertama dari $r(v_n\,|\Pi_2)$ adalah 0. Dengan demikian diperoleh $r(v_n\,|\Pi_2)$ berbeda dengan setiap $r(v_i\,|\Pi_2)$ untuk $2 \leq i \leq n-1$. Kemudian, perhatikan bahwa entri ke $n-1$ dari $r(v_1\,|\Pi_2)$ adalah 1, sedangkan entri ke $n-1$ dari $r(v_i\,|\Pi_2)$ adalah 2. Oleh karena itu, diperoleh bahwa $r(v_n|\Pi_2) \neq r(v_i\,|\Pi_2)$. Jadi, dapat disimpulkan $r(v_n|\Pi_2) \neq r(v_i\,|\Pi_2)$ dengan $1 \leq i \leq n-1$. Ini berarti bahwa Π_2 merupakan partisi penyelesaian dari G. Karena kardinalitas minimum dari k-partisi penyelesaian yang dapat dibentuk dari $G = K_n - \{e\}$ adalah $n-1$, maka berdasarkan Definisi 2.3.3 diperoleh bahwa $pd(G) = n-1$.

Kasus 3. Misalkan G adalah graf $K_1 + (K_1 \cup K_{n-1})$. Akan ditunjukkan bahwa $pd(G) = n-1$. Untuk sebarang graf G, akan diperoleh beberapa bentuk partisi penyelesaian. Karena graf G adalah graf bipartit, ini berarti graf G memuat dua titik yang saling bertetangga. Oleh karena itu, berdasarkan Lema 2.4.5 titik-titik yang bertetangga haruslah berada pada kelas partisi yang berbeda. Ini berarti, tidak boleh ada titik yang bertetangga berada pada kelas yang sama.

Pertama, partisi graf G sebanyak $n-1$ partisi, dengan n jumlah titik pada graf G yaitu: $\Pi_1 = \{S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}\}$ dengan $S_1 = (v_1, v_n)$ dan $S_i = v_i$ untuk $2 \leq i \leq n-1$. Apabila dibuat representasi v_i terhadap Π dengan $1 \leq i \leq n-1$ maka hanya entri ke i dari $r(v_i\,|\Pi_1)$ yang bernilai 0. Ini berarti bahwa representasi v_i terhadap Π_1 berbeda untuk $1 \leq i \leq n-1$.

Asumsi kedua, G bukan graf bipartit. Karena G bukan graf bipartit, maka G memuat siklus ganjil. Misalkan $C_{2\ell+1}$ adalah siklus ganjil terkecil di G. Karena diameter $G = 2$, ini berarti $C_{2\ell+1}$ adalah C_3 atau C_5. Untuk membuktikannya digunakan metode kontradiksi. Misalkan $C_{2\ell+1} = C_5$ merupakan siklus ganjil di G dengan titik-titik $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_{n-2}\}$, adalah partisi dari titik-titik di G, dengan $S_1 = \{v_1, v_2, v_3\}, S_2 = \{v_4\}, S_3 = \{v_5\}$ dan $S_i (4 \leq i \leq n-2)$ memuat titik tunggal $V(G) - \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1\}$. Karena $r((v_1|\Pi)) = (0, 2, 1, \dots)$, $r((v_2|\Pi)) = (0, 2, 2, \dots)$, dan $r((v_3|\Pi)) = (0, 1, 2, \dots)$, menghasilkan representasi yang berbeda, maka menurut Definisi 2.3.2 diperoleh bahwa Π merupakan $(n-2)$-partisi penyelesaian dari G. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan $pd(G) = n - 1$. Oleh karena itu haruslah $C_{2\ell+1} = C_3$ yang menjadi siklus ganjil terkecil di G. Ini berarti bahwa G memuat K_3 sebagai subgraf dan $|Y| \geq 3$.

Misalkan Y adalah himpunan titik-titik dari sebuah *clique* maksimum di G. Akan ditunjukkan bahwa $|Y| \geq 3$. Misalkan $U = V(G) - Y$. Karena G bukan graf lengkap, maka $|U| \geq 1$. Ini berarti kita bisa mengasumsikan $|U| = 1$, dan $|U| \geq 1$.

Jika $|U| = 1$, maka berdasarkan Teorema 2.4.3 dan Teorema 2.4.4 diperoleh $G = K_s + (K_1 \cup K_t)$ untuk suatu bilangan bulat s dan t. Karena G adalah suatu graf terhubung maka $s \geq 1$, dan karena G bukan graf lengkap maka $t \geq 1$. Misalkan bahwa $V(K_s) = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$, $V(K_t) = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$, dan $V(K_1) = \{w\}$. Perhatikan dua kasus berikut.

Kasus 1. Untuk $s \geq t$. Misalkan suatu partisi $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_{s+1}\}$, dengan $S_i = \{u_i, v_i\} (1 \leq i \leq t)$, $S_i = \{u_i\} (t+1 \leq i \leq s)$, dan $S_{s+1} = \{w\}$. Karena

$d(u,w) = 1$ untuk $u \in V(K_s)$ dan $d(v,w) = 1$ untuk $v \in V(K_t)$, ini berarti Π adalah $(s+1)$-partisi penyelesaian dari $V(G)$. Oleh karena itu, $pd(G) \leq s+1$. Akibatnya, menurut Lema 2.4.5 diperoleh $pd(G) \geq s$. Namun, $pd(G) \neq s$ untuk selain $s = n-1$ dan $G = K_n$. Oleh karena itu, $pd(G) = s+1$. Karena dimensi partisi $pd(G) = n-1$, ini berarti $s = n-2$ dan $t = 1$. Sehingga diperoleh bahwa $G = K_{n-2} + (K_1 \cup K_1) = K_n - \{e\}$.

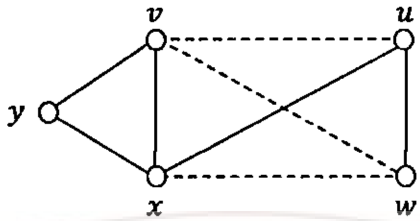
Kasus 2. Untuk $s < t$. Misalkan suatu partisi $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_{t+1}\}$, dengan $S_i = \{u_i, v_i\}(1 \leq i \leq s)$, $S_i = \{u_i\}\,(t+1 \leq i \leq s)$, dan $S_{t+1} = \{w\}$, adalah suatu partisi penyelesaian dari $V(G)$. Hal ini berarti bahwa $pd(G) \leq t+1$. Sehingga berdasarkan Lema 2.4.5, $pd(G) \geq t$, akan tetapi $pd(G) \neq t$ untuk selain $t = n-1$ dan $s = 0$, hal ini menunjukkan bahwa G bukan suatu graf terhubung. Sehingga $pd(G) = t+1$. Karena $pd(G) = n-1$, maka $t = n-2$ dan $s = 1$, maka $G = K_1 + (K_1 \cup K_{n-2})$.

Selanjutnya asumsikan $|U| \geq 2$. Pertama tunjukkan U himpunan titik-titik yang saling bebas. Akan dibuktikan dengan metode kontradiksi. Andaikan U suatu himpunan dari titik-titik yang tidak saling bebas. Ini berarti bahwa U memuat dua titik u dan w yang saling bertetangga. Berdasarkan sifat definisi Y, terdapat $v \in Y$ sedemikian sehingga $uv \notin E(G)$ dan $v' \in Y$ sehingga $wv \notin E(G)$, dengan v dan v' tidak harus berbeda. Perhatikan dua kasus berikut.

Kasus 1. Terdapat sebuah titik $v \in Y$ sedemikian sehingga $uv, wv \notin E(G)$. Perhatikan dua subkasus berikut:

Subkasus 1.1. Terdapat satu titik $x \in Y$ yang bertetangga ke tepat satu titik u atau w, katakanlah x bertetangga dengan u. Karena $|Y| \geq 3$, maka terdapat titik

$y \in Y$ yang berbeda dari v dan x. Jadi G memuat subgraf yang ditunjukkan pada Gambar 3.3.1. Garis putus-putus menunjukkan bahwa tidak ada sisi-sisi di $E(G)$.



Gambar 3.2.1 Subgraf untuk subkasus 1.1

Misalkan partisi $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_{n-2}\}$, dengan $S_1 = \{u, w, y\}, S_2 = \{x\}, S_3 = \{v\}$ dan masing-masing himpunan $S_i (4 \leq i \leq n-2)$ memuat tepat satu titik $V(G)-\{\, u\, , w\, , y\, , x\, , v\, \}$. Maka diperoleh:

$$r(u|\Pi) = (0, 1, 2, \dots),$$

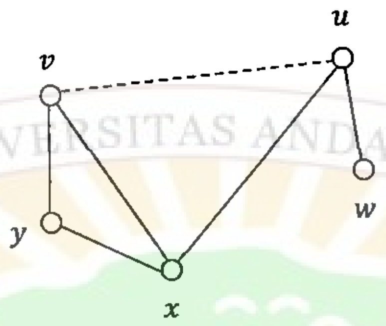
$$r(w|\Pi) = (0, 2, 2, \dots),$$

$$r(y|\Pi) = (0, 1, 1, \dots).$$

Sesuai dengan Definisi 2.2.2 maka Π adalah suatu $(n-2)$-partisi penyelesaian dari $V(G)$. Hal ini kontradiksi dengan $pd(G) = n-1$. Sehingga subkasus ini tidak bisa diterima.

Subkasus 1.2. Setiap titik di Y bertetangga dengan kedua titik u dan w atau tidak dengan keduanya. Jika u dan w bertetangga dengan setiap titik di Y selain titik v, yang ditulis $Y \backslash \{v\}$, maka titik-titik di $(Y \backslash \{v\}) \cup \{u, w\}$ merupakan pasangan bertetangga. Hal ini kontradiksi dengan sifat definisi Y yaitu Y adalah himpunan titik-titik *clique* maksimum. Akibatnya terdapat sebuah titik $y \in Y$ sedemikian sehingga titik y berbeda dari v, dan titik y tidak bertetangga ke salah satu u maupun w.

Karena diameter $G = 2$, maka terdapat sebuah titik x pada graf G yang bertetangga dengan kedua titik u dan v. Sehingga G memuat subgraf seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.3.2. Garis putus-putus menunjukkan bahwa tidak ada sisi-sisi di $E(G)$.



Gambar 3.2.2 Subgraf untuk subkasus 1.2

Misalkan partisi $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_{n-2}\}$, dengan $S_1 = \{x, y, w\}$, $S_2 = \{u\}$, $S_3 = \{v\}$ dan masing-masing himpunan $S_i (4 \leq i \leq n-2)$ hanya memuat satu titik $V(G) - \{u, w, y, x, v\}$. Maka diperoleh :

$$r(x|\Pi) = (0,1,1, \dots),$$

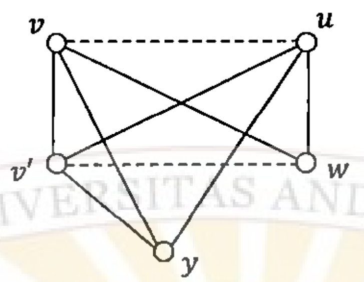
$$r(y|\Pi) = (0,2,1, \dots),$$

$$r(w|\Pi) = (0,1,2, \dots).$$

Sesuai dengan Definisi 2.2.2 maka Π adalah suatu $(n-2)$-partisi penyelesaian dari $V(G)$. Hal ini kontradiksi dengan $pd(G) = n - 1$. Sehingga subkasus 1.2 juga tidak bisa diterima. Akibatnya, kasus 1 tidak bisa diterima.

Kasus 2. Terdapat titik-titik yang berbeda $v, v' \in Y$ sedemikian sehingga $uv, wv' \notin E(G)$. Pada kenyataannya untuk masing-masing titik $y_0 \in Y$, y_0 bertetangga dengan paling sedikit satu u dan w, untuk selainnya kita punya kondisi pada kasus 1. Jelas bahwa $vw, v'u \in E(G)$. Karena $|Y| \geq 3$, maka terdapat satu titik $y \in Y$ berbeda dari v dan v'. Juga paling sedikit satu dari sisi yu

dan yw harus ada di G, katakanlah sisi yu. Sehingga G memuat subgraf yang ditunjukkan pada Gambar 3.3.3. Garis putus-putus menunjukkan bahwa tidak ada sisi-sisi di $E(G)$.



Gambar 3.2.3 Subgraf untuk kasus 2

Misalkan partisi $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_{n-2}\}$, dengan $S_1 = \{u, w, y\}, S_2 = \{v\}, S_3 = \{v'\}$ dan masing-masing himpunan $S_i (4 \leq i \leq n-2)$ hanya memuat satu titik $V(G) - \{u, w, y, v, v'\}$. Maka diperoleh:

$r(u|\Pi) = (0, 2, 1, \dots)$,

$r(w|\Pi) = (0, 1, 2, \dots)$,

$r(y|\Pi) = (0, 1, 1, \dots)$.

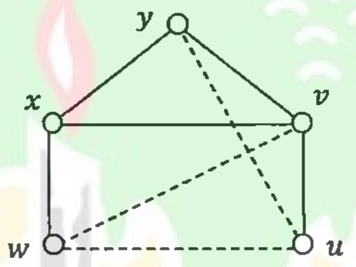
Sesuai dengan Definisi 2.2.2 maka Π merupakan suatu $(n-2)$-partisi penyelesaian dari $V(G)$. Hal ini kontradiksi dengan $pd(G) = n - 1$. Sehingga, kasus 2 juga tidak bisa diterima. Ini berarti U merupakan himpunan bebas.

Selanjutnya klaim $N(u) = N(w)$ untuk setiap $u, w \in U$. Ini cukup untuk menunjukkan bahwa jika $uv \in E(G)$, maka $uw \in E(G)$. Misalkan $uv \in E(G)$ untuk suatu titik v di G. Jelas bahwa $v \in Y$. Akan ditunjukkan bahwa $uw \in E(G)$ dengan kontadiksi. Andaikan $wv \notin E(G)$. Karena Y adalah himpunan titik dari sebuah *clique* maksimum maka terdapat $y \in Y$ sedemikian sehingga $uy \notin E(G)$.

Karena G adalah graf terhubung dan U adalah himpunan bebas, maka w bertetangga dengan suatu titik di Y. Perhatikan dua subkasus berikut.

Subkasus 2.1. w hanya bertetangga dengan y. Karena w dan y tidak bertetangga dengan u, maka diperoleh $d(w,u) = 3$. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan diameter $G = 2$. Sehingga seharusnya u bertetangga dengan w.

Subkasus 2.2. Misalkan terdapat sebuah titik $x \in Y$, yang berbeda dari y sedemikian sehingga $wx \in E(G)$. Sehingga G memuat subgraf seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.2.4. Garis putus-putus menunjukkan bahwa tidak ada sisi-sisi di $E(G)$.



Gambar 3.2.4 Subgraf untuk subkasus 2.2

Misalkan partisi $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_{n-2}\}$, dengan $S_1 = \{u, w, x\}, S_2 = \{v\}$, $S_3 = \{y\}$ dan masing-masing himpunan $S_i (4 \le i \le n-2)$ hanya memuat satu titik dari $V(G) - \{u, w, x, v, y\}$. Maka diperoleh;

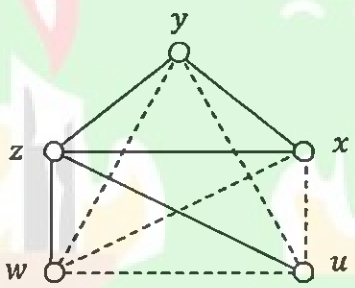
$$r(u|\Pi) = (0, 1,2, \dots),$$

$$r(w|\Pi) = (0, 2,2 \dots),$$

$$r(x|\Pi) = (0, 1,1, \dots).$$

Berdasarkan Definisi 2.2.2, maka Π adalah suatu $(n-2)$-partisi penyelesaian dari $V(G)$. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan $pd(G) = n - 1$.

Oleh karena itu $V(G) = Y \cup U$, dengan $\langle Y \rangle$ adalah suatu graf lengkap, U himpunan bebas, $|Y| \geq 3$, $|U| \geq 2$, dan $N(u) = N(w)$ untuk setiap $u, w \in U$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $u \in U$, terdapat paling banyak satu titik di Y yang tidak termuat dalam $N(u)$. Akan ditunjukkan dengan kontradiksi bahwa terdapat dua titik $x, y \in Y$ yang tidak termuat dalam $N(u)$. Misalkan w adalah sebuah titik di U yang berbeda dari u. Oleh karena itu $wx, wy \notin E(G)$. Karena G adalah graf terhubung, maka terdapat $z \in Y$ sedemikian sehingga $z \in N(u) = N(w)$. Sehingga G memuat subgraf seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.2.5. Garis putus-putus menunjukkan bahwa tidak ada sisi-sisi di $E(G)$.



Gambar 3.2.5 Subgraf dengan $x, y \in Y$ tidak termuat di $N(u)$

Misalkan partisi $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_{n-2}\}$, dengan $S_1 = \{y, z, w\}, S_2 = \{u\}, S_3 = \{x\}$ dan masing-masing himpunan $S_i (4 \leq i \leq n-2)$ hanya memuat satu titik dari $V(G) - \{y, z, w, u, x\}$. Maka diperoleh:

$$r(y|\Pi) = (0,2,1, \dots),$$

$$r(z|\Pi) = (0,1,1, \dots),$$

$$r(w|\Pi) = (0,2,2, \dots).$$

Berdasarkan Definisi 2.2.2, diperoleh bahwa Π adalah suatu $(n-2)$-partisi penyelesaian dari $V(G)$, kontradiksi dengan pernyataan $pd(G) = n - 1$.

Selanjutnya $N(u) = Y$ atau $N(u) = Y - \{v\}$ untuk suatu $v \in Y$. Jika $N(u) = Y$, maka $G = K_s + \overline{K}_t$ untuk $s = |Y| \geq 3$ dan $t = |U| \geq 2$. Jika $N(u) = Y - \{v\}$, maka diperoleh $G = K_s + (K_1 \cup \overline{K}_t)$, dengan $V(K_1) = \{v\}$, $s = |Y| - 1 \geq 2$, dan $t = |U| \geq 2$. Bagaimanapun, $K_s + (K_1 \cup \overline{K}_t) = K_s + \overline{K}_{t+1}$. Pada kasus lain, $G = K_s + \overline{K}_t$, dengan $t \geq 3$ dan $s \leq n - 3$. Misalkan $V(K_s) = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$, $V(\overline{K}_t) = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$. Perhatikan tiga kasus berikut.

Kasus 1. $s = t$. Misalkan partisi $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_{s+1}\}$, dengan $S_i = \{u_i, v_i\}$ $(1 \leq i \leq s-1)$, $S_s = \{u_s\}$, dan $S_{s+1} = \{v_s\}$. Karena $d(u, v_s) = 1(u \in V(K_s))$ dan $d(v, v_s) = 2(v \in V(K_t))$, ini berarti bahwa Π adalah suatu $(s+1)$-partisi penyelesaian dari $V(G)$. Karena $pd(G) = s + 1 \leq n - 3 + 1 = n - 2$ maka kontradiksi dengan $pd(G) \leq n - 1$. Sehingga kasus ini tidak bisa terjadi.

Kasus 2. $s > t$. Misalkan partisi yang dibentuk $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_{s+1}\}$, dengan $S_i = \{u_i, v_i\}(1 \leq i \leq t-1), S_i = \{u_i\}\ (t+1 \leq i \leq s)$, dan $S_{s+1} = \{v_t\}$. Karena $d(u, v_t) = 1(u \in V(K_s))$ dan $d(v, v_t) = 2(v \in V(K_t))$, ini berarti Π adalah $(s+1)$-partisi penyelesaian dari $V(G)$. Karena dimensi partisi dari graf G, $pd(G) \leq s + 1 \leq n - 3 + 1 = n - 2$ maka kontradiksi dengan $pd(G) \leq n - 1$. Sehingga kasus ini juga tidak bisa terjadi.

Kasus 3. $s < t$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_t\}$, dengan $S_i = \{u_i, v_i\}(1 \leq i \leq s)$, $S_i = \{v_i\}(s+1 \leq i \leq t)$. Karena Π suatu $(s+1)$-partisi penyelesaian dari $V(G)$, ini berarti bahwa $pd(G) \leq t \leq n - 2$. Hal ini kontradiksi dengan $pd(G) \leq n - 1$. Sehingga kasus ini juga tidak bisa terjadi. ∎

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh pada Bab III, maka dapat disimpulkan bahwa, jika graf G adalah suatu graf terhubung dengan $n \geq 2$, maka:

1. Suatu graf G selalu memiliki batas bawah dimensi partisi 2. Jadi diperoleh $pd(G) \geq 2$.
2. Untuk $n \geq 3$, graf G bisa memiliki lebih dari satu bentuk partisi penyelesaian.
3. Untuk suatu graf bipartit dengan $n \geq 3$, maka akan diperoleh kardinalitas minimum dari partisi penyelesaian graf tersebut adalah $n - 1$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa dimensi partisi dari graf bipartit adalah $n - 1$, atau dapat ditulis $pd(K_{r,s}) = n - 1$.

4.2 Saran

Karena masih terdapat banyak bentuk partisi penyelesaian dan dimensi partisi graf terhubung yang belum ditemukan, maka penulis menyarankan untuk mengkaji graf lainnya, seperti graf lingkaran, *tree* dan graf *unicyclic.*

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bartle, R.G. dan Sherbert D.R. 1994. *Introduction to The Real Analysis.* John Wiley&Sons (SEA) Pte. Ltd, Singapore

[2] Chartrand, G. dan Oellermann O.R. 1993. *Applied And Algorithmic Graph Theory*. United States Copyright Act, USA.

[3] Chartrand, G., Salehi E. dan Zhang P. 2000. The partition dimension of a graph. *Aequationes Mathematicae.* **59**: 45-54.

[4] Chartrand, G. dan Zhang P. 2001. The forcing dimension of graph. *Mathematica Bohemica.* **4** : 711-720.

[5] Chartrand, G., Eroh L, Johnson M dan Oellermann O.R.. 2000. Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics.* **105**: 99-113.

[6] Hartsfield, N. dan Ringel G. 1994. *Pearls in Graph Theory.* Academic Press, United States of America.

[7] Javaid, I. dan Shokat S. 2008. On the partition dimension of some wheel related graphs. *Prime Research in Mathematica.* **4**: 154-164.

[8] West, D.B. 1996. *Introduction to Graph Theory.* Prentice-Hall, United States of America.

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis dilahirkan di Payakumbuh pada tanggal 5 April 1988. Penulis merupakan anak kelima dari pasangan Asnil dan Betris Elita. Penulis memulai pendidikannya di TK Manunggal VI Talawi Payakumbuh Utara pada tahun 1994. Pada tahun 1995, penulis melanjutkan pendidikannya di SD Negeri 10 Balai Betung Payakumbuh. Pada tahun 2001, penulis melanjutkan pendidikannya di Madrasah Tsanawiyah Negeri Koto Nan Gadang Payakumbuh. Pada tahun 2004, penulis melanjutkan pendidikannya di Madrasah Aliyah Negeri 2 Payakumbuh dan lulus pada tahun 2007. Pada tahun yang sama, penulis diterima menjadi mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Andalas melalui jalur Seleksi Penerimaan Mahasiswa Baru (SPMB). Selama dibangku perkuliahan penulis pernah menjadi pengurus HIMATIKA periode 2010/2011 pada divisi kesejahteraan anggota dan aktif di berbagai kegiatan HIMATIKA. Untuk syarat meraih gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika FMIPA UNAND, penulis pernah mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Nagari Lurah Ampalu, Kabupaten Padang Pariaman pada bulan Juli s/d Agustus 2010.