NOWHERE-ZERO 3-FLOW DALAM GRAF CAYLEY PADA SUBGRUP ABELIAN

SKRIPSI

SILFIANA RAHMAH
0810432084

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2012

BISMILLAHIRRAHMANIRRAHIM

Ya Allah . . . Segala puji bagi Mu . . . begitu besar nikmat yang engkau berikan pada hamba Mu ini . . . Jadikanlah hamba menjadi hamba Mu yang selalu bersyukur kepada Mu . . . dan . . . Tuntunlah tiap langkah hamba menuju jalan karidhoan Mu . . .

"Allah, tiada Tuhan selain Dia. Yang Maha hidup, yang terus menerus mengurus (makhluk-Nya), tidak mengantuk dan tidak tidur. Milik-Nya apa yang ada di langit dan apa yang ada di bumi. Tiada yang dapat memberi syafaat di sisi-Nya tanpa izin-Nya. Dia mengetahui apa yang di hadapan mereka dan apa yang ada di belakang mereka, dan mereka tidak mengetahui sesuatu apa pun tentang ilmu-Nya melainkan apa yang Dia kehendaki. Ilmu-Nya meliputi langit dan bumi. Dan Dia tidak merasa berat memelihara keduanya, dan Dia Mahatinggi, Mahabesar."

(Q. S. Al-Baqarah: 255)

Ku persembahkan karya ini kehadapan
Ayahanda Auzir dan Ibunda Sef Atmaidar
serta orang-orang yang kucintai.
Terimalah sebagai ungkapan kasih sayang, bakti dan
terimakasihku atas segala doa, curahan kasih sayang,
dukungan dan pengorbanan yang telah diberikan,
sehingga aku dapat menyelesaikan satu episode
dari kehidupanku
yang menjadi bekalku untuk menapaki hari esok.

Berjuta-juta terima kasih kepada yang sangat berjiwa besar Papa, yang terkasih Mama, dan Kakak tercinta Novia, serta Adik tersayang Zaki yang telah memberikan pengertian, dukungan, dan pengorbanan tak terhingga.

Dosen Pembimbing, Bapak Dr. Syafrizal Sy, beribu terimakasih atas bimbingan, arahan, saran dan waktunya dalam membimbing cipie Pak. Maaf selalu menggangu waktunya.

Dosen Penguji, Bapak Narwen, M.Si, Bapak Dr. Ahmad Iqbal Baqi, dan Bapak Dr. Dodi Devianto, atas pengarahan dan saran dalam penyelesaian tugas akhir ini.

Dosen-dosen Jurusan Matematika, Pak Syafruddin (makasih pak, atas bimbingan akademiknya), Pak Ginting, Pak Budi, Pak Efendi, S.Si Pak Efendi M.Si, Pak Muhafzan, Pak Werman, Pak Made, Pak Admi, Pak Yudi, Pak Jon, Pak Zulakmal, Bu Yozza, Bu Lyra, Bu Gema, Bu Ayu, Bu Iza, Bu Monik, Bu Sil, Bu Nova, Bu Riri, dan Bu Maiyastri. Terima kasih atas ilmunya yang berharga.

Staf dan Pegawai Jurusan Matematika, Mama Cun, Bu Eli, Pak Syamsir, Bu Dona, Bu opi, Ibu pustaka dan ibu CS.

Keluarga besar BEM KM FMIPA UNAND, uda Kharis (ma baju hitamnyo da?? hehhee), uda Erik, kak Iil, kak Restu (jan berang2 juo lae kak :), Eron (jangan salah nyebut nama aku lagi ron), Rina (alah tu praktikum jo na), Nanda (apolo tu Nda), Awal, Ana, dan teman-teman lainnya, maaf tidak bisa disebutkan satu persatu.

Keluarga besar HIMATIKA, semangat dan perjuangan bersama-sama selalu menjadi kenangan di kemudian hari yang tak terhingga nilainya. Selalu bangga menjadi bagian dari kalian.

BP 018 (Alhamdulillah masih di anggap, hehhee ..),uni Refni S.Si, uda Ciap (kama se Mbung ndak do nampak-nampak), uni Yulian, S.Si (mksi uni arahannya), dan si imut Suci (manjo sangaik), seperti tak ada dunia tanpa kalian. Terima kasih atas kekompakannya, semoga kita bisa sama-sama lagi dalam keadaan sukses.

Teman-teman gecha (urutan paling tua. Hehhee), Rere (kagak nahan gaya belanjanya) Midong (cueknya itu loh), Dadok (aku nemu baju toska dok :), Tikok Khairawatok (mudah-mudahan gag pelit-pelit lagi. Hehheee), Mandadok (cemungud ndok, apolotu. heheee), Welly (uuppzzz..pareman pasbar)

Teman-teman angkatan 2008 O'Laplace, Ivone, Liza, Via, Virza, Nurma, Vebby (kangen ma ketawa kamu bong), Elza (jangan rempong deh jak), Iin, Tikul, Ed, Ica (jan suko malala juo lae ngenet), Mimi, Kak Su, Anggi, Oji, Icel (lembut bwgt to bahasanya), Cinta (dah nyampe 670 lom cin??), Erik (eciwa. Hahaha ...), Shanda, Kak Ade, Tere, Hasan, Desi, Helcy, Lindo (kama se salamo ko ndo, ndak do nampak-nampak lae), Yuli (makasi mabk bantuannya selama ni), Opa, Ana, Mezi (uuuppzz.. Ado uni wak, atut :), Dinny (makasi ya Din atas penginapannya selama ini), Wili, Enid, Elvi (jangan lupa bagi-bagi film koreanya y vi), kak Cesa, Dina Irawati, Ririn, Meta, Rika, Dina Yelni, Uthe, Wiwiek, Kak Nini, Eris (sukses is m eehhm nya hehee..), Sarti, Bayu, Oni, Tama (nyalon wak lae tam. hehee), Neli, Putri, Rara, Lia, dan Yolwi (sukses ketua HIMA). Terima kasih untuk semua pengalaman yang kita lewati sejak tahun pertama.

Uda-uda dan Uni-uni senior Matematika, da Danil, da If, da Ma'Yuih, da Salim, da Wisga, da Berkah, da Santri, da Irsal, da Irfan, da Medi, da Yogi, da Angga 06, da Jon, da apj, da Ferdi, ni Prima, kak Vanny, dan yang lain maaf tidak bisa disebutkan satu persatu. Terima kasih atas pelajaran yang diberikan.

Adik-adik junior Matematika, Anggi, Rahmat, Zaki, Lucky, Zikra, Riska, Depong, Dian, Bey, Mira Tetti, Rina, Panjul, Catrine, Aulia, Kiki dan adik2 2011 yang masih baru, maaf tidak bisa di ingat satu persatu. Terima kasih atas semangatnya. Sahabatku Fitra Qalbina, alah tu praktikumnyo na, wisuda lae, hahahaaa... PJ nyo alun tibo-tibo juo lae duw na, hhmmm.. Sukses se yo na, tunggu pie di Bandung.

Kandang Melabung Community, Adit, Pindo, bg Roma, Reren, bang Puek, bang Haris, bang Willy, kak Wil, Pak Umar, Ica, dan teman-teman lainnya, maaf tidak bisa disebutkan satu persatu.

SILFIANA RAHMAH

KATA PENGANTAR

Syukur alhamdulillah, segala puji Penulis haturkan atas kehadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul "*Nowhere-Zero 3-Flow* dalam Graf Cayley pada Subgrup Abelian". Shalawat dan salam semoga selalu tercurahkan kepada Baginda Rasulullah SAW yang telah menebarkan ilmu dan iman dalam cahaya Islam yang beliau bawa. Penulis menyampaikan ungkapan terima kasih dan penghargaan yang tulus kepada yang terhormat :

1. Bapak Dr. Syafrizal Sy, sebagai ketua jurusan pada jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas sekaligus pembimbing yang telah telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, pengarahan, dan saran kepada penulis sampai selesainya skripsi ini.

2. Bapak Narwen, M.Si, Bapak Dr. Ahmad Iqbal Baqi, dan Bapak Dr. Dodi Devianto sebagai penguji yang telah memberikan pengarahan dan saran untuk perbaikan penulisan skripsi ini.

3. Bapak Drs. Syafruddin, M.Si selaku pembimbing akademis yang telah memberikan nasehat dan motivasi kepada penulis.

4. Seluruh staf pengajar jurusan Matematika Universitas Andalas yang telah banyak memberikan ilmu yang bermanfaat bagi penulis dan seluruh staf tata usaha jurusan Matematika yang telah banyak membantu selama penulis melaksanakan studi di jurusan Matematika Universitas Andalas.

5. Seluruh teman-teman yang telah mendukung dan memberikan semangat kepada penulis terutama teman-teman angkatan 2008 (O'laplace). Buat Manda, teman satu kamar sekaligus satu jurusan, yang selalu bersama dari awal hingga kuliah selesai, teman-teman gecha Rere, Elin, Mia, Tika, Welly terimakasih atas dukungan dan bantuannya. Buat Dinny dan Yuli yang

sama-sama berjuang dari awal penulisan skripsi hingga selesai, serta kakak-kakak senior dan adik-adik junior di Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA), dan Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) FMIPA UNAND yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

6. Semua pihak yang telah membantu penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Selesainya skripsi ini tidak lepas dari do'a yang tulus, motivasi, dorongan semangat, dan bantuan yang senantiasa diberikan oleh kedua orang tua, ayahanda Auzir dan ibunda Sef Atmaidar, S.Pd, kakanda Novia Sestika Rizki, dan adinda Khairul Zaki serta seluruh keluarga besar penulis.

Penulis menyadari penulisan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis mengharapkan kritik dan saran agar kedepannya diperoleh hasil yang lebih baik. Penulis berharap agar skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkannya. Amin.

Padang, Januari 2012

Silfiana Rahmah

ABSTRAK

Graf Cayley Cay(G,S) adalah suatu graf yang titik-titiknya adalah elemen di grup G, dan untuk sebarang dua titik $g, h \in V(G)$ bertetangga jika $gh^{-1} \in S$ atau $hg^{-1} \in S$, dimana $S \subset G$. Jika H merupakan suatu subgrup normal Abelian dari G, dimana indeks H di G adalah 2, maka terdapat suatu involution di $S \cap H$ sedemikian sehingga graf Cay(G,S) memuat suatu *nowhere-zero 3-flow.*

Kata Kunci: *Graf Cayley Cay(G,S), subgrup normal abelian, indeks, involution, nowhere-zero 3-flow.*

Daftar Isi

Daftar Gambar

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736 oleh seorang matematikawan asal Swiss yang bernama Leonhard Euler. Salah satu yang dipelajari dalam teori graf adalah kajian mengenai *nowhere-zero k-flow* dengan $k > 1$, dimana k adalah bilangan bulat. Secara sistematis, kajian *nowhere-zero k-flow* ini diperkenalkan oleh W.T. Tutte pada tahun 1954. Tutte membuktikan antara *k-flow* dan $\mathbb{Z}_k - flow$ mempunyai keterhubungan yang kuat. Pada tahun 1972, Tutte [2] mengemukakan konjektur bahwa setiap graf *2-edge-connected* yang tidak memuat *3-edge cut* merupakan suatu *3-flow.* Pada tahun 1976, Tutte [2] mengemukakan konjektur bahwa setiap graf *4-edge-connected* merupakan suatu *nowhere-zero 3-flow.*

Konsep mengenai graf Cayley pertama kali diperkenalkan oleh Cayley pada tahun 1878. Pada tahun 2002, Pötocnik, Skoviera and Skrekovski[9] memperlihatkan bahwa setiap graf Cayley dengan valensi paling sedikit empat pada grup Abelian mempunyai *nowhere-zero 3-flow.*

Dari paparan di atas, dapat dilihat bahwa permasalahan *nowhere-zero 3-flow* merupakan topik yang menarik untuk dikaji. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengkaji *nowhere-zero 3-flow* dalam graf Cayley pada subgrup *Abelian.*

1.2 Perumusan Masalah

Adapun masalah yang akan dikaji dalam skripsi ini adalah bagaimana eksistensi *nowhere-zero 3-flow* dalam graf Cayley dengan valensi paling sedikit empat pada subgrup *Abelian.*

1.3 Pembatasan Masalah

Agar penulisan ini terarah, maka penulis akan memfokuskan untuk membahas tentang eksistensi *nowhere-zero 3-flow* dalam graf Cayley yang bervalensi paling sedikit empat pada subgrup *Abelian* dengan indeks dua.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penulisan ini adalah untuk mengkaji eksistensi *nowhere-zero 3-flow* dalam graf Cayley yang bervalensi paling sedikit empat pada subgrup *Abelian* dengan indeks dua.

1.5 Sistematika Penulisan

Skripsi ini dibagi menjadi empat bab. Bab I terdiri dari latar belakang masalah, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan dan sistematika penulisan. Pada Bab II dijelaskan mengenai definisi dan terminologi dalam teori graf, definisi dan terminologi dalam teori grup, graf Cayley serta konsep tentang *nowhere-zero 3-flow.* Bab III memuat pembahasan mengenai eksistensi *nowhere-zero 3-flow* dalam graf Cayley pada subgrup *Abelian.* Kesimpulan dan saran dari hasil pembahasan terdapat pada Bab IV.

BAB II

LANDASAN TEORI

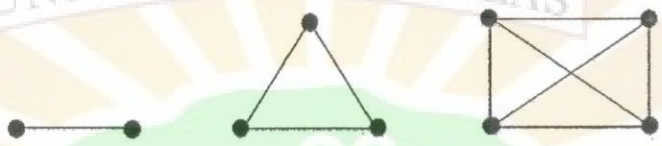
Dalam bab ini akan diberikan beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan permasalahan yang telah dikemukakan di Bab I. Definisi dan terminologi dalam teori graf disajikan pada Subbab 2.1, kemudian pada Subbab 2.2 diuraikan tentang definisi dan terminologi dalam teori grup, pada Subbab 2.3 diuraikan tentang graf Cayley, serta pada Subbab 2.4 diuraikan tentang konsep *nowhere-zero 3-flow*.

2.1 Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf

Suatu **graf** G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V(G), E(G)), dengan $V(G)$ adalah himpunan yang tak kosong dengan elemen-elemennya dinamakan **titik** dan $E(G)$ adalah himpunan **sisi** yang menghubungkan setiap dua titik.

Misalkan u dan v adalah suatu titik di G. Titik u dikatakan **bertetangga** ***(adjacent)*** dengan v jika sisi $uv \in E(G)$. Dalam hal ini e dikatakan **terkait** dengan uv, dan sebaliknya titik u dan v terkait dengan sisi e. **Orde** dari graf G adalah banyaknya titik di G (dinotasikan dengan $|V(G)|$) dan banyaknya sisi pada G dinamakan **ukuran** ***(size)*** dari G (dinotasikan dengan $|E(G)|$). Suatu graf dengan orde satu dinamakan **graf *trivial*.**

Valensi dari suatu titik $v \in G$ adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik v dan dinotasikan dengan $val(v)$. Suatu graf G adalah **genap** jika untuk setiap $v \in V(G)$ mempunyai valensi genap, dan sebaliknya. Jika untuk setiap $v \in V(G)$ dimana $val(v) = r$, maka graf G dinamakan **graf r-regular.** Secara khusus, graf 3-regular dinamakan **graf kubik.**



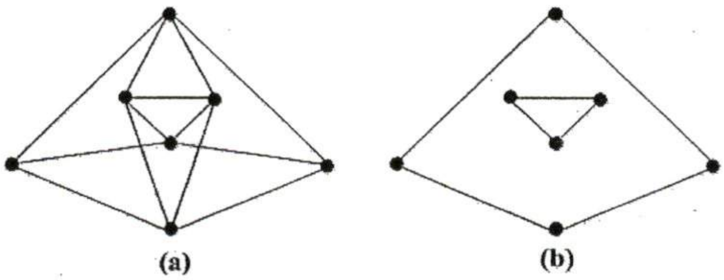
Gambar 2.1. Graf Regular

Suatu **jalan (*walk*)** dari titik u ke titik v di G adalah barisan titik dan sisi yang didefiniskan dengan

$$W : v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \cdots, e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_k$$

dimana $u = v_0, v = v_k$, $k \geq 0$, sedemikian sehingga $v_{i-1}v_i \in E(G)$ dan v_i, v_{i+1} bertetangga untuk $i = 0, 1, 2, \cdots, k-1$. Jika $u = v$, maka W dinamakan suatu **jalan tertutup** dan sebaliknya jika $u \neq v$ maka W dinamakan suatu **jalan terbuka**. Jika setiap titik di W hanya dilewati satu kali, maka dinamakan dengan **lintasan** *(path)*. **Panjang** suatu lintasan dinyatakan dengan banyaknya sisi dari lintasan tersebut. Lintasan dengan k titik dinotasikan dengan P_k, dimana panjang lintasan tersebut adalah $k-1$. Jika setiap dua titik di G dihubungkan oleh suatu lintasan, maka dinamakan **graf terhubung (*connected graph*)**.

Suatu ***trail*** di graf G adalah suatu jalan yang hanya melewati sisi satu kali.



Gambar 2.2. (a)Graf Terhubung (b) Graf tidak terhubung

Trail dikatakan **tertutup** jika titik awal dan akhirnya sama ($u = v$). Suatu *trail* tertutup dengan panjang lebih dari dua dinamakan ***cycle***. Suatu *cycle* dengan panjang k dinotasikan dengan ***k-cycle***. Jika panjang dari suatu *cycle* adalah ganjil, maka dinamakan dengan ***odd cycle*** dan sebaliknya jika panjang dari suatu *cycle* adalah genap, maka dinamakan dengan ***even cycle***.

Eulerian trail dari graf G adalah suatu *trail* yang hanya melewati setiap sisi di G satu kali. Suatu graf terhubung G dinamakan ***Eulerian*** jika graf tersebut mempunyai *trail* tertutup yang memuat semua sisi dari G, sehingga *trail* tersebut dinamakan ***Eulerian tour***.

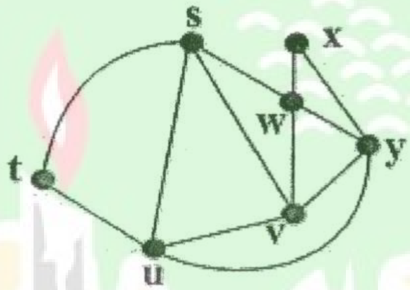
Lema 2.1. [4] *Suatu graf terhubung* G *adalah eulerian jika dan hanya jika setiap titik mempunyai valensi genap.*

Bukti. ($\Rightarrow$) Misalkan v adalah suatu titik yang dilewati k kali di W, dimana $v \neq u$ dan $W : u \to u$. Untuk setiap k kali sisi menuju suatu titik di G, maka sisi yang lain akan meninggalkan titik tersebut sehingga $val(v) = 2k$. Karena W dimulai dan diakhiri di titik v , maka $val(v)$ adalah genap.

($\Leftarrow$) Asumsikan G adalah suatu graf terhubung nontrivial sedemikian hingga

$val(v)$ adalah genap untuk setiap $v \in G$. Misalkan $W = v_0e_1v_1e_2 \ldots e_kv_k$ adalah suatu *trail* terpanjang di G. Karena untuk setiap $v \in G$ derajat titiknya genap, maka $v_0 = v_k$. Oleh karena itu W adalah *trail* tertutup.

Jika W bukan suatu Eulerian *tour*, maka terdapat suatu sisi $e = v_ku \in G$ untuk suatu k yang tidak ada di W. Oleh karena itu W bukan *trail* terpanjang di G. Hal ini merupakan suatu kontradiksi, sehingga haruslah W suatu Eulerian *tour*. ∎

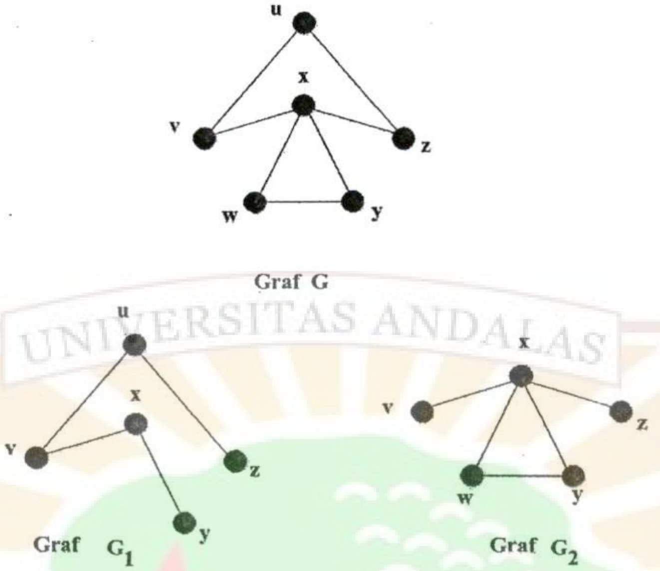


Gambar 2.3. Graf Eulerian

Graf **bipartit** G adalah graf yang semua himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan partisi X dan Y, sedemikian sehingga untuk setiap sisi (u, v) di $E(G)$, titik u dan v terletak didua subhimpunan partisi yang berbeda. Partisi (X, Y) ini disebut **bipartisi** dari graf G.

Suatu graf H adalah **subgraf** dari G (dinotasikan dengan $H \subseteq G$) jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Suatu subgraf H dari graf G dikatakan **komponen** dari G jika H adalah subgraf terhubung maksimum dari G. Banyaknya komponen dari G dinotasikan dengan $k(G)$.

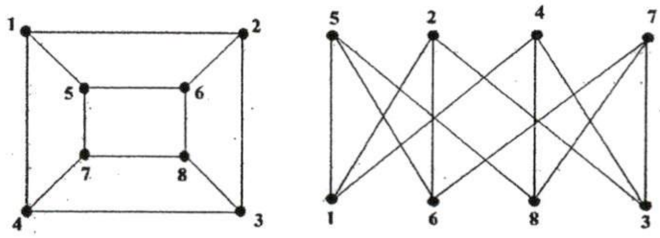
Suatu titik yang memisahkan dua titik lainnya pada komponen yang sama



Gambar 2.4. Graf G dan subgraf dari G

disebut suatu ***cut-vertex***, dan suatu sisi yang memisahkan ujung-ujungnya disebut suatu **jembatan** atau *cut-edge*. Himpunan dari cut-edge disebut ***edge-cut***.

Graf G dan H disebut **isomorfik** jika terdapat suatu bijeksi $\psi : V(G) \rightarrow V(H)$, juga suatu bijeksi dari $E(G)$ ke $E(H)$ ketika didefinisikan $\psi(uv) = \psi(u)\psi(v)$. Pemetaan ψ disebut suatu **isomorfisma** antara G dan H. G isomorfik ke H ditulis $G \cong H$. Sebarang pemetaan $\psi : V(G) \rightarrow V(G)$, yaitu G isomorfik ke dirinya sendiri disebut suatu **automorfisma** di G. Suatu graf G dikatakan **transitif-titik** jika untuk suatu 2 titik $v, w \in G$ terdapat suatu automorfisma dari G yang memetakan v ke w.



Gambar 2.5. Graf isomorfik

2.2 Definisi dan Terminologi dalam Teori Grup

Suatu grup adalah pasangan terurut $(G, \star)$, dimana G adalah suatu himpunan dan $\star$ adalah suatu operasi biner pada G, sedemikian sehingga memenuhi kondisi berikut:

1. Setiap $a, b \in G$ berlaku $a \star b \in G$. (G bersifat tutup terhadap operasi $\star$)
2. Setiap $a, b, c \in G$ berlaku $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$. ($G$ bersifat asosiatif terhadap operasi $\star$)
3. Ada suatu unsur dari G yang dilambangkan dengan e sehingga setiap $a \in G$ berlaku $a \star e = e \star a = a$. ($G$ memiliki unsur identitas terhadap operasi $\star$)
4. Setiap $a \in G$ terdapat $b \in G$ sehingga $a \star b = b \star a = e$. Dalam hal ini, b disebut invers dari a dan ditulis sebagai $a^{-1} = b$. (setiap unsur dari G mempunyai invers)

Grup $(G, \star)$ dinamakan grup Abelian jika

$$a \star b = b \star a \text{ utuk setiap } a, b \in G.$$

Kardinalitas dari grup G disebut **order** dari G. Suatu subhimpunan tak kosong H dari $(G, \star)$ merupakan **subgrup** dari G jika

1. untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $a \star b \in H$

2. untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $a^{-1} \in H$

Suatu grup G dikatakan **grup siklik** jika terdapat $a \in G$, sedemikian sehingga $G = \langle a \rangle = \{a \in G | a^n\}$ untuk suatu $n \in Z$ dan a adalah suatu **pembangkit** ***(generator)*** dari G. Jika diberikan suatu grup H, dimana H adalah subgrup dari G dan $H = \langle b \rangle$ maka H dinamakan suatu **subgrup siklik**. Jika diberikan grup $(G, \star)$ maka untuk $a \in G$, yang dimaksud dengan a^n untuk setiap $a \in Z$ adalah

$$a^n = \underbrace{a \star a \star \cdots \star a}_{\text{n faktor}}$$

Sebagai ilustrasi, misalkan diberikan suatu grup $G = \{\mathbb{Z}_3 - \{0\}, \cdot_3\}$,

a. untuk $g = 1$

$1^0 = 1$

$1^1 = 1$

$1^2 = 1$

$1^3 = 1$

$\vdots$

$\therefore$ 1 bukan pembangkit dari G

b. untuk $g = 2$

$2^0 = 1$

$2^1 = 2$

$2^2 = 1$

$2^3 = 2$

$\vdots$

$\therefore$ 2 merupakan pembangkit dari G

Maka $G = \langle 2 \rangle$ adalah suatu grup siklik dengan pembangkit 2.

Teorema 2.2. [5] *Misalkan G suatu grup siklik dengan generator a. Maka a^{-1} juga generator dari G .*

Bukti. Misalkan G suatu grup siklik dengan generator a. Ambil sebarang $x \in G$, maka $x = a^n$ untuk suatu bilangan bulat n.

Perhatikan bahwa

$$x = a^n = a^{-(-n)} = (a^{-1})^{-n}$$

Ini berarti, a^{-1} juga generator dari G. ■

Teorema 2.3. [5] *Setiap subgrup dari suatu grup siklik adalah siklik.*

Bukti. Misalkan $G = \langle g \rangle = \{g^k : k \in Z\}$ adalah grup siklik, dan misalkan H suatu subgrup dari G. Jika $H = \{1\}$, maka H adalah siklik. Sedangkan untuk $H \neq \{1\}$ dan misalkan $g^k \neq 1$, maka karena H adalah suatu subgrup $g^{-k} = (g^k)^{-1} \in H$. Akibatnya, karena k atau -k adalah positif, maka H memuat suatu pangkat positif dari g yang tidak sama dengan 1. Misalkan m adalah bilangan integer positif terkecil, sedemikian sehingga $g^m \in H$. Jelas bahwa untuk setiap pangkat dari g^m ada di H, sehingga didapat $\langle g^m \rangle \subseteq H$. Misalkan g^k adalah elemen dari H, dan $k = qm + r$ dengan $0 \leq r < m$ sehingga :

$$g^k = g^{qm+r}$$

$$= g^{qm} g^r$$

$$= (g^m)^q g^r$$

Akibatnya

$$g^r = (g^m)^{-q} g^k.$$

Karena m adalah bilangan integer positif terkecil dan $g^m \in H$ dengan $0 \leq r < m$ maka haruslah $r = 0$ sehingga $g^k = (g^m)^q \in \langle g^m \rangle$. Karena $H \subseteq \langle g^m \rangle$ dan $H = \langle g^m \rangle$, maka H adalah siklik dengan pembangkit g^m, dimana m adalah bilangan integer positif terkecil untuk suatu $g^m \in H$. ■

Teorema 2.4. [5] *Jika G adalah suatu grup siklik, maka G Abelian.*

Bukti. Misalkan G grup siklik, sehingga $G = \{a^k | k \in Z, a \in G\}$. Akan ditunjukkan bahwa G adalah suatu grup Abelian, yaitu berlaku $xy = yx$ untuk setiap $x, y \in G$.

Ambil sebarang $x, y \in G$, maka

$$x = a^m \text{ dan } y = a^n$$

untuk suatu $m, n \in Z$, sehingga

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

dan

$$yx = a^n a^m = a^{n+m} = a^{m+n} = a^m a^n = xy.$$

Karena $yx = xy$, maka G adalah Abelian. ■

Misalkan $(G, \circ)$ adlah suatu grup dan $H \leq G$, maka untuk $g \in G$ berlaku

1. Jika $g \star H = \{g \star h | h \in H\}$, maka dinamakan dengan **koset kiri** dari H di G (dinotasikan dengan G/H).

2. Jika $H \star g = \{h \star g | h \in H\}$, maka dinamakan dengan **koset kanan** dari H di G (dinotasikan dengan H/G).

Jika G adalah suatu grup dan $H \leq G$, maka banyaknya koset kanan dari H di G disebut **indeks** dari H di G. Grup G/H disebut grup faktor. Suatu subgrup H dari grup G dikatakan **subgrup normal** (ditulis $H \trianglelefteq G$), jika $gHg^{-1} = H$ untuk setiap $g \in G$.

Lema 2.5. [5] *Misalkan* G *suatu grup dengan* H *suatu subgrup normal dari* G. *Jika $K \trianglelefteq G$ dan $K \subseteq H$, maka $K \trianglelefteq H$ dan $H/K \trianglelefteq G/K$.*

Misalkan G adalah suatu grup. Untuk suatu $x \in G$, order elemen dari x didefinisikan sebagai bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga $x^n = e$. Jika untuk suatu $x \in G$ memenuhi $x^2 = e$, maka x dinamakan suatu ***involution***. **Pusat** dari suatu grup G, dinotasikan dengan $Z(G)$, adalah suatu subset dari semua anggota G sedemikan hingga $gh = hg$ untuk setiap $h \in G$. Suatu *involution* disebut ***involution* pusat** jika termuat dalam pusat dari suatu grup G. Sebagai ilustrasi, berikut diberikan suatu contoh. Misalkan $G = \{\mathbb{Z}_5 - \{0\}, \cdot_5\}$ adalah suatu grup. Sehingga untuk $x \in G$

- $1^2 = 1 \cdot_5 1 = 1$

- $2^2 = 2 \cdot_5 2 = 4$
- $3^2 = 3 \cdot_5 3 = 4$
- $4^2 = 4 \cdot_5 4 = 1$

Maka 4 merupakan *involution* di G, dan 4 juga merupakan *involution* pusat di G karena $4 \in Z(G)$.

Lema 2.6. [8] *Misalkan* G *suatu grup dengan involutory elemen* c *dan non-involutory elemen d. Jika terdapat suatu bilangan integer k sedemikian sehingga $d(cd)^k = 1$, maka* c *dan d commute.*

Bukti.

$$d(cd)^k = 1$$
$$cd(cd)^k c = c1c$$
$$d(cd)^k = c^2 1$$
$$(cd)^{k+1} = 1$$

Perhatikan bahwa

$$dc = cx$$
$$cdc = ccx$$
$$cdc = c^2 x$$
$$cdc = x$$
$$d(cd)^k cdc = x$$
$$d(cd)^{k+1} = x.1$$
$$d = x$$

Akibatnya $dc = cd$.■

Lema 2.7. [8] *Misalkan G suatu grup dan H suatu subgrup normal Abelian dengan indeks dua. Misalkan $H_1 \trianglelefteq G$ sedemikan sehingga $H_1 \trianglelefteq H$. Maka $H' = H/H_1$ adalah suatu subgrup normal Abelian dari $G' = G/H_1$ dengan indeks dua.*

Bukti. Misalkan $g \in G \backslash H$ dan $h \in H$. Jelaslah bahwa g bukan di H sehingga gH_1 bukan terdapat di H' dan $\langle H, g\rangle = G$. Karena H' adalah abelian dan berdasarkan Lemma 2.2.5, maka H' adalah subgrup normal dari H, sehingga $gH_1 = H_1g$ dan $g^{-1}H_1 = H_1g^{-1}$. Akibatnya

$$gH_1hH_1g^{-1}H_1 = ghg^{-1}H_1 \in H'$$

dan H' adalah subgrup normal abelian dari G'.

Karena $\langle H, g\rangle = G$, maka diperoleh $H' \cup gH_1 = G'$ dan mengakibatkan $|G'/H'| = 2$.■

2.3 Graf Cayley

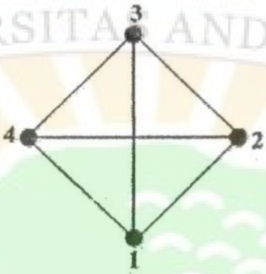
Jika G suatu grup dan $S \subset G$, maka **graf Cayley** $X = Cay(G, S)$ dapat didefinisikan sebagai berikut:

1. untuk setiap titik $v \in V(X)$ adalah elemen dari G
2. untuk suatu $g, h \in V(X)$ bertetangga jika $gh^{-1} \in S$ atau $hg^{-1} \in S$.

Berikut diberikan contoh dari graf Cayley dengan $G = \{Z_5 - \{0\}, \cdot_5\}$ adalah suatu grup dan $S = \{2, 3, 4\}$, seperti terlihat pada gambar 2.6.

- titik 1 bertetangga dengan 2, 3, 4

- titik 2 bertetangga dengan 1, 3, 4
- titik 3 bertetangga dengan 1, 2, 4
- titik 4 bertetangga dengan 1, 2, 3



Gambar 2.6. Graf Cay*(G,S)*

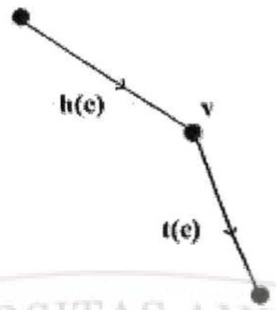
2.4 *k-flow*

Misalkan G adalah suatu graf tak berarah. Dengan menambahkan arah pada setiap sisi $e \in E(G)$, maka untuk setiap $v \in G$ yang terkait dengan e dapat dibedakan menjadi menjadi **tail** *(t(e))* dari e dan ***head*** *(h(e))* dari e. Dimana $t(e)$ adalah sisi yang berarah meninggalkan titik v, sedangkan $h(e)$ adalah sisi yang berarah menuju titik v. Untuk setiap $v \in V(G)$ yang arah flownya masuk semua dinamakan ***sink***, sebaliknya untuk setiap $v \in V(G)$ yang arah flownya keluar semua dinamakan ***source***.

Suatu $\mathbb{Z}$ – ***flow*** pada G adalah pemetaan

$$f : E(G) \to \mathbb{Z}.$$

dengan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. JIka $v \in V(G)$ dan $e \in E(G)$, maka



Gambar 2.7. *Head* dan *tail* dari sisi berarah e

$$\eta(e,v) = \begin{cases} 1, & jika\ v = h(e); \\ 0, & jika\ v\ tidak\ terkait\ dengan\ e; \\ -1, & jika\ v = t(e) \end{cases}$$

sedemikan sehingga untuk setiap $v \in V(G)$ berlaku

$$\textstyle\sum_{e\in E(G)} \eta(e,v)f(e) = 0.$$

Pemetaan f tersebut dikatakan ***nowhere zero*** $\mathbb{Z}$***-flow*** jika untuk setiap $e \in E(G)$ $f(e) \neq 0$. Untuk $k \geq 2$, k***-flow*** didefinisikan sebagai

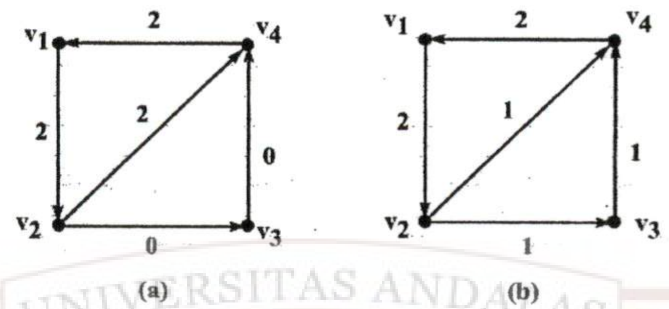
$$f : E(G) \to \mathbb{Z}_k.$$

Sedemikan sehingga untuk setiap $v \in V(G)$ berlaku

$$\textstyle\sum_{e\in E(G)} \eta(e,v)f(e) \equiv 0 \bmod k.$$

Support dari suatu k-*flow* f adalah himpunan sisi dari G dimana $f(e) \neq 0$, dan dinotasikan dengan

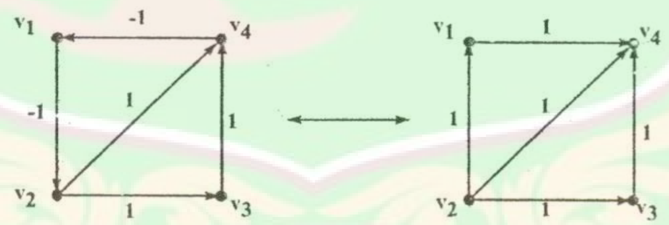
$$supp_k(f) = \{e \in E(G) : f(e) \neq 0(mod k)\}.$$



Gambar 2.8. (a) G memuat *3-flow* (b) G memuat *nowhere-zero 3-flow*

Suatu *k-flow* disebut ***nowhere-zero k-flow***, jika *supp* $(f) = E(G)$.

Pada gambar 2.8, *support S(f)* dari graf (a) adalah $\{v_1v_2, v_2v_4, v_4v_1\}$ dan *support S(f)* dari graf pada (b) adalah E(G). Untuk graf pada gambar (b), karena $2 \equiv -1$ mod 3 dan $-2 \equiv 1$ mod 3, maka graf G mempunyai nilai flow 1 dan -1. Dengan membalikkan arah semua *flow* yang bernilai -1, maka diperoleh graf G yang mempunyai *nowhere zero 3-flow* dengan *flow* yang bernilai 1.

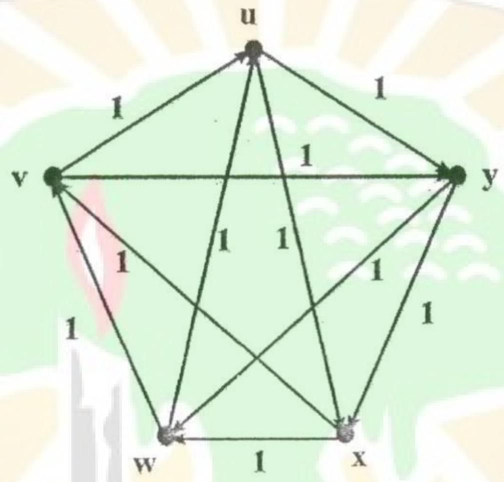


Gambar 2.9. Pergantian nilai *flow* di G yang memuat *nowhere-zero 3-flow*

Teorema 2.8. [11] *Misalkan graf G memuat suatu nowhere-zero 2-flow jika dan hanya jika graf G adalah graf Eulerian.*

Bukti. Misalkan graf G memuat suatu *nowhere-zero 2-flow*. Untuk suatu graf yang memuat *nowhere-zero 2-flow*, maka nilai *flow*nya adalah 1. Sedemikian sehingga setiap $v \in G$ bervalensi genap. Berdasarkan Lemma 2.1, maka graf G adalah graf Eulerian.

Jika graf G memuat *nowhere-zero 2-flow*, maka nilai *flow* untuk setiap sisi dari graf tersebut adalah 1. Akibatnya, setiap titik haruslah berderajat genap. Maka G adalah graf Eulerian. ■



Gambar 2.10. Graf G memuat *nowhere-zero 2-flow*

Lema 2.9. *Untuk setiap $k \geq 2$, pernyataan berikut ekivalen*

1. *G mempunyai nowhere-zero k-flow*
2. *G mempunyai nowhere-zero Z-flow dengan semua nilai flow terletak pada selang $[1-k, k-1]$.*

Bukti.

Dengan membalikkan arah semua sisi yang nilai *flow*nya negatif, diperoleh G yang merupakan k-*NZF* dengan semua nilai *flow*nya terletak pada selang $[1-k, k-1]$.

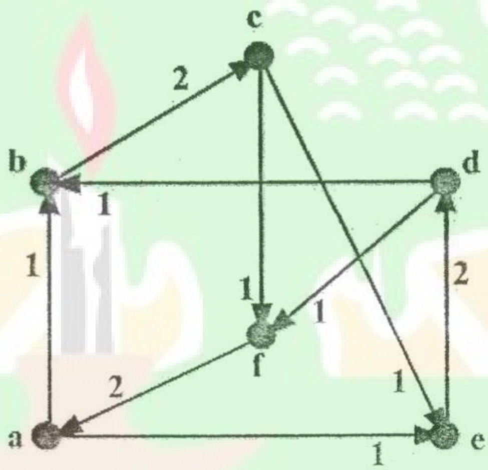
□

Teorema 2.10. [11] *Jika suatu graf G memuat suatu nowhere-zero k-flow, maka G memuat suatu nowhere-zero h-flow untuk setiap $h \geq k$.*

Bukti. Misalkan G mempunyai *nowhere-zero k-flow* maka dari Lema 2.9, G mempunyai *nowhere-zero Z-flow* dengan semua nilai *flow*-nya terletak pada selang $[1-k, k-1]$. Dengan mengganti semua *flow* bernilai negatif g dengan $s+g$, maka diperoleh sebuah *nowhere-zero s-flow.* ■

Teorema 2.11. [11] *Misalkan G adalah suatu graf kubik. G memuat suatu nowhere-zero 3-flow jika dan hanya jika G adalah bipartit.*

Bukti. Misalkan graf kubik G mempunyai *nowhere-zero 3-flow.* Arah dari graf tersebut dapat ditentukan sehingga semua *flow* bernilai 1. Ada dua kemungkinan yang dapat terjadi dari graf G ini, yaitu semua sisi berarah menuju setiap titik yang ada di G atau berarah meninggalkan setiap titik yang ada di G. Dengan mengelompokkan semua *sink* menjadi satu kelompok dan semua *source* menjadi satu kelompok yang lain, maka dapat dilihat bahwa G adalah sebuah graf bipartit. Sebaliknya misalkan graf kubik G adalah bipartit. Dengan memberi arah terhadap semua sisi dari satu kelas titik ke kelas titik yang lain dan memberi nilai *flow* 1 dihasilkan *nowhere-zero 3-flow* untuk G. ■



Gambar 2.11. Graf kubik bipartit G yang memuat *nowhere-zero 3-flow*

BAB III

NOWHERE-ZERO 3-FLOW DALAM GRAF CAYLEY PADA SUBGRUP ABELIAN

Pada bab ini akan dibahas hasil utama dari kajian skripsi ini, eksistensi *nowhere-zero 3-flow* dalam graf Cayley bervalensi paling sedikit empat pada grup Abelian dengan indeks dua . Hasil pembahasan tersebut disajikan dalam bentuk teorema. Suatu graf dengan valensi genap adalah graf Eulerian, dan setiap graf Eulerian memuat *nowhere-zero 2-flow*. Sehingga berdasarkan Teorema 2.10 graf dengan valensi genap juga memuat *nowhere-zero 3-flow*.

Lema 3.1. *Misalkan G adalah suatu grup, H suatu subgrup normal dari G dan $S \cap H = \emptyset$. Jika Cay $(G/H,S/H)$ memuat suatu nowhere-zero 3-flow, maka Cay(G,S) juga memuat suatu nowhere-zero 3-flow.*

Bukti. Misalkan f_1 adalah suatu *nowhere-zero 3-flow* pada Cay$(G/H,S/H)$. Untuk suatu xy pada Cay (G,S), maka terdapat $xHyH$ di Cay $(G/H,S/H)$. Sehingga

$$f_2(xy) = f_1(xHyH).$$

Ini berarti f_2 adalah suatu *nowhere-zero 3-flow* pada Cay(G,H). ■

Sebagai ilustrasi, berikut diberikan suatu contoh. Diberikan suatu grup $G = \{\mathbb{Z}_3, +_3\}$ dengan $S = \{0,1,2\}$, sehingga graf Cay(G,S) mempunyai valensi 3 dan memuat *nowhere-zero 3-flow*. Ambil $H = \{0,2\}$, perhatikan bahwa

- untuk $g = 0$
  - $0 +_3 2 +_3 0 = 2$
  - $0 +_3 1 +_3 0 = 1$
- untuk $g = 1$
  - $1 +_3 2 +_3 2 = 2$
  - $1 +_3 1 +_3 2 = 1$
- untuk $g = 2$
  - $2 +_3 2 +_3 1 = 2$
  - $2 +_3 1 +_3 1 = 1$

Jelas bahwa $H = \{1, 2, \}$ merupakan subgrup normal di G. Perhatikan bahwa

1. untuk $g = 0$
   - $0 +_3 1 = 1$
   - $0 +_3 2 = 2$
2. untuk $g = 1$
   - $1 +_3 1 = 2$
   - $1 +_3 2 = 0$
3. untuk $g = 2$
   - $2 +_3 1 = 0$

- $2 +_3 2 = 1$

Sehingga, himpunan $G/H = \{0,1,2\} = G$ dan $S = \{1,2\}$ diperoleh dari S_1/H, dimana $S_1 = \{0\}$. Graf Cay(G,S) merupakan Cay(G/H,S_1/H). Untuk mendapatkan bentuk graf Cay(G/H,S_1/H) dilakukan dengan cara berikut.

1. Setiap titik $v \in$ Cay(G/H,S_1/H) adalah suatu elemen di G;

2. Dua titik $g, h \in$ Cay(G/H,S_1/H) bertetangga jika $gh^{-1} \in S$ dan/atau $hg^{-1} \in S$. Perhatikan bahwa

   - $0 +_3 2 = 2 \in S$
   - $0 +_3 1 = 1 \in S$

   Jadi, titik 0 bertetangga dengan titik $1, dan 2$.

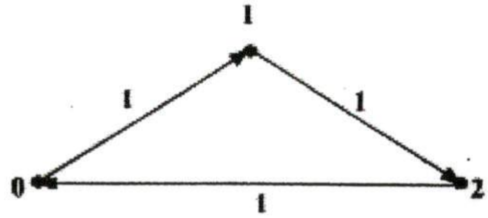
   - $1 +_3 0 = 1 \in S$
   - $1 +_3 1 = 2 \in S$

   Jadi, titik 1 bertetangga dengan titik $0, dan 2$.

   - $2 +_3 0 = 2 \in S$
   - $2 +_3 2 = 1 \in S$

   Jadi, titik 2 bertetangga dengan titik $0, dan 1$.

Akibatnya, graf Cay(G/H,S_1/H) memuat *nowhere-zero 3-flow* seperti yang terlihat pada Gambar 3.1.



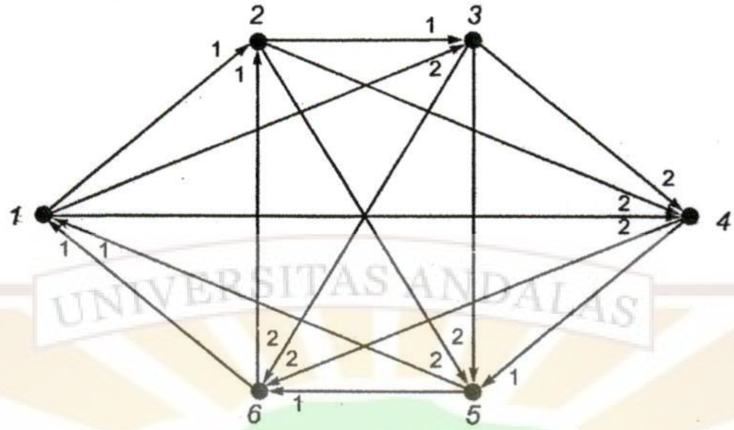
Gambar 3.1. Graf Cay$(G/H, S_1/H)$ memuat *nowhere-zero 3-flow*

Teorema 3.2. *Misalkan Cay(G,S) adalah suatu graf Cayley dengan valensi paling sedikit empat sedemikian sehingga S memuat suatu involution pusat. Maka Cay(G,S) mempunyai suatu nowhere-zero 3-flow.*

Bukti. Misalkan S mempunyai order ganjil dan S_1 adalah suhimpunan berorder tiga dari S, sehingga $S \setminus S_1$ mempunyai valensi genap dan memuat *involution* pusat. Sedemikian sehingga $Cay(G, S_1)$ mempunyai valensi 3, akibatnya $Cay(G, S_1)$ adalah graf kubik. Misalkan $Cay(G, S_1)$ mempunyai suatu *nowhere-zero 3-flow*, maka Cay*(G,S)* dibangun oleh suatu graf kubik bipartit $Cay(G, S_1)$ dan graf dengan valensi genap. Akibatnya graf Cay(G,S) mempunyai suatu *nowhere-zero 3-flow*.■

Untuk lebih jelasnya, perhatikan ilustrasi berikut. Diberikan suatu grup $G = \{\mathbb{Z}_7 - 0, \cdot_7\}$ dengan 6 adalah suatu *involution* pusat di G. Misalkan $S = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ yang juga memuat suatu *involution* pusat. Sehingga graf Cay(G,S) memuat *nowhere-zero 3-flow*, seperti yang terlihat pada Gambar 3.2.

Teorema 3.3. *Misalkan G adalah suatu grup, dan H suatu subgrup normal dari G. Misalkan Cay(G,S) adalah suatu graf Cayley dengan valency paling sedikit empat sedemikian sehingga terdapat suatu involution pada $S \cap H$. Maka Cay(G,S)*



Gambar 3.2. Graf Cay(G,S) memuat *involution*

mempunyai suatu nowhere-zero 3-flow.

Bukti. Misalkan terdapat suatu *involution* (misalkan a) pada $S \cap H$. Karena $a \in S \cap H$, maka $a \in H$ dan $a \in S$. Karena $a \in H$ maka H mempunyai order genap. Akibatnya a adalah suatu *involution* pusat pada H. Untuk kondisi ini, diperoleh dua kemungkinan sebagai berikut:

- Jika *involution* pusat c termuat dalam S, maka berdasarkan teorema 3.1 graf Cay*(G,S)* mempunyai *nowhere-zero 3-flow.*
- Jika *involution* pusat c bukan elemen S maka $H_1 = \langle c \rangle$ adalah subgrup normal di G dan H yang merupakan himpunan terpisah dengan S. Berdasarkan Lema 2.5 maka $H/H_1 \trianglelefteq G/H_1$ dan berdasarkan Lema 3.1 Cay(G,S) memuat suatu *nowhere-zero 3-flow.* ■

Teorema 3.4. *Misalkan G suatu grup yang memuat suatu subgrup Abelian dengan indeks dua, maka setiap Cay(G,S) dengan valensi paling sedikit empat memuat nowhere-zero 3-flow.*

Bukti. Misalkan H suatu subgrup Abelian dengan indeks dua. Akan ditunjukkan beberapa kasus $|H \cap S|$ yang memperlihatkan *connectivity* dari graf Cay(G,S).

1. **Untuk $|H \cap S| \leq 2$. Karena indeks dari H di G adalah 2, maka graf** Cay$(G, S \setminus H)$ adalah bipartit. Jelas bahwa terdapat paling sedikit tiga 1-faktor terpisah dimana gabungan ketiga 1-faktor tersebut adalah suatu graf kubik bipartit sedemikian sehingga memuat *nowhere-zero 3-flow.*

2. Untuk $|H \cap S| = 3$. Maka terdapat paling sedikit 1 involution di H (misalkan h), sehingga $H_1 = \langle h \rangle$. Jika h termuat di S, maka berdasarkan Teorema 3.2 graf Cay(G,S) mempunyai *nowhere-zero 3-flow.* Sebaliknya jika h yang tidak termuat di S, karena $H_1 = \langle h \rangle$ maka $H_1 \trianglelefteq H$,dan $H_1 \trianglelefteq G$. Berdasarkan Lema 2.5, maka $H_1/H \trianglelefteq G/H_1$. Misalkan $H' = H_1/H$ dan $G' = G/H_1$. Akibatnya, dari Lema 3.3 maka graf Cay(G,S) memuat *nowhere-zero 3-flow.*

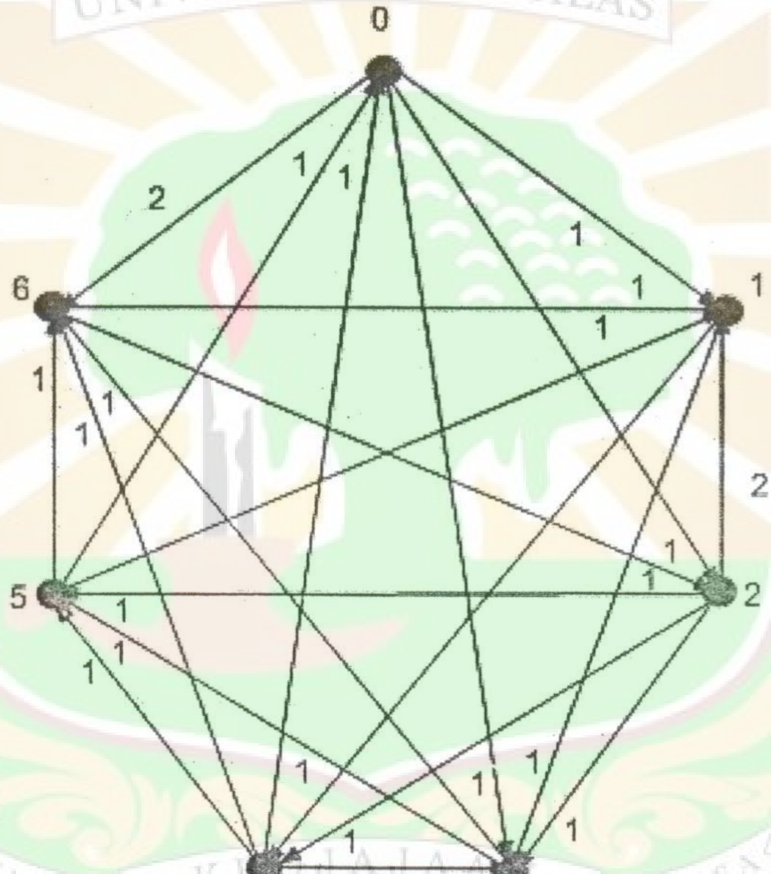
3. Untuk $|H \cap S| = 4$. Misalkan a suatu elemen dari $S \setminus H$, sehingga a adalah suatu *involution.* Dari kasus seperti ini maka dapat dibedakan menjadi 3 subkasus.

   - Jika $H \cap S$ memuat empat *involution*, maka terdapat suatu *spanning* subgraf Cayley kubik bipartit, sedemikian sehingga Cay(G,S) mempunyai *nowhere-zero 3-flow.*

   - Jika $H \cap S$ memuat dua *involution* dan dua non-*involution*, maka terdapat h di H sedemikian sehingga $H_1 = \{e, h\}$. Kondisi seperti ini dapat dibuktikan dengan menggunakan kasus $|H \cap S| = 3$, sehingga diperolah graf Cay(G,S) memuat suatu *nowhere-zero 3-flow.*

- Jika $H \cap S = \{c, c^{-1}, d, d^{-1}\}$. Jika c atau d tidak *commute* dengan a, maka graf memuat suatu *nowhere-zero 3-flow.* Sebaliknya, untuk c atau d *commute* dengan a, maka asumsikan $ca = ac$ dan $ad = da$. Maka a adalah suatu *involution* pusat di $\langle a, c, d\rangle$, sedemikian sehingga Cay(G,S) mempunyai suatu *nowhere-zero 3-flow.* ■

Sebagai ilustrasi, berikut diberikan suatu contoh. Misalkan $G = \{\mathbb{Z}_7, +_7\}$ adalah suatu grup Abelian, $H = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, sehingga graf Cay(G,S) mempunyai valensi 6. Berdasarkan Teorema 3.4 graf Cay(G,S) memuat nowhere-zero 3-flow, seperti yang terlihat pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3. Graf Cay(G,S) dengan valensi 6 yang memuat *nowhere-zero 3-flow*.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari hasil pembahasan sebelumnya dapat disimpulkan bahwa suatu graf Cayley = Cay(G,S) dengan H adalah suatu subgrup normal Abelian dari G dan $S \subset G$ merupakan suatu *nowhere-zero 3-flow.*

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya penulis menyarankan untuk mengkaji tentang *nowhere-zero 3-flow* pada graf Cayley yang bervalensi paling sedikit empat dalam subgrup Abelian dengan indeks lebih dari dua.

DAFTAR PUSTAKA

[1] B. Alspach, Y. Liu and C. Zang. 1996. *Nowhere-zero 4-flows and Cayley graphs solvable groups*, SIAM J. Discrete Math. 9 : 151 - 154.

[2] Bondy, J. A. and U.S.R.Murty. 1976. *Graph Theory with Applications.* Macmillan, London.

[3] C. Q. Zhang. 1993. *Integer Flows and Cycle Covers of Graphs*, Marcel Dekker, New York.

[4] Diestel, R. 2000. *Graph Theory.* Springer Verlag, New York.

[5] Dummit, D. S. and R. M. Foote. 1991. *Abstract Algebra.* Prentice Hall, New Jersey.

[6] Hartsfield, N. and G. Ringel. 1994. *Pearls in Graph Theory.* Academic Press, Inc., United States.

[7] Jaeger, F. 1979. Flows and Generalized Coloring Theorems in Graphs. *J. Combin. Theory.* Ser B. **26** : 205-216.

[8] Nanasiova, M. 2005. Flow in Cayley Graphs. Master's Thesis. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Institute of Informatics, Commenius University, Bratislava.

[9] Potočnik, et al. 2002. *Nowhere-zero 3-flows in Cayley graphs of Abelian groups.*

[10] Spindler, K. 1994. *Abstract Algebra with Applications, in Two Volumes, Volume I: Vector Spaces and Groups.* Marcel Dekker Inc, New York.

[11] Uttunggadewa, S. 2000. *Indonesian Graphs An Investigation of the Nowhere-Zero Five-Flow Conjecture and the Cycle Double Cover Conjecture.* Dissertation, Faculty of Mathematical Sciences, University of Twente, The Netherlands.

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Silfiana Rahmah, dilahirkan di P.Sinayan pada tanggal 23 Oktober 1990 dari pasangan Auzir dan Sef Atmaidar. Penulis adalah anak kedua dari tiga bersaudara. Penulis menamatkan pendidikan Sekolah Dasar di SDN 50 Babukik pada tahun 2002, SMPN 2 Kamang Magek pada tahun 2005, dan SMA Negeri 1 Bukittinggi pada tahun 2008. Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur SNMPTN (Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Nasional).

Selama menjadi mahasiswa di jurusan Matematika FMIPA Unand, penulis aktif dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA), Badan Aksekutif Mahasiswa Keluarga Mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas (BEM KM FMIPA UNAND), dan pengajar privat mata pelajaran Matematika. Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) pada tahun 2011 di Jorong Kandang Melabung, Kenagarian Mandahiling, Kecamatan Salimpaung, Kabupaten Tanah Datar dalam rangka menyelesaikan salah satu mata kuliah wajib fakultas.