© HAK CIPTA MILIK UNIVERSITAS ANDALAS

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
   a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
   b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar Unand.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Unand.

KELAS RAMSEY MINIMAL UNTUK KOMBINASI DUA GRAF LINTASAN P3 DAN P4

SKRIPSI

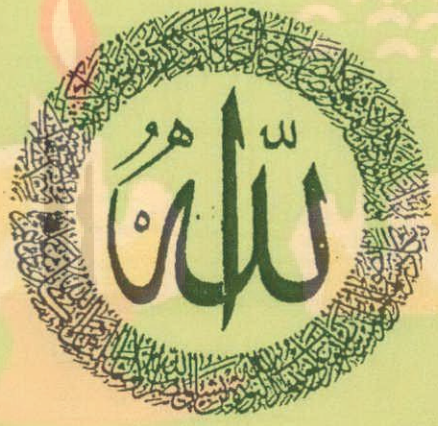
RIRI SRI WAHYUNI
07 934 032

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2012

Sesungguhnya disamping kesulitan itu ada kemudahan.
Maka apabila kamu telah selesai (mengerjakan suatu pekerjaan), kerjakanlah pekerjaan lain.
Dan hanya kepada Tuhanmu hendaknya kamu berharap.
(Qs.Al–Insyariaah 6-8)

" Pelajarilah olehmu akan ilmu, sebab mempelajari ilmu memberikan rasa takut kepada Allah, menuntutnya merupakan ibadah, mengulangnya merupakan tasbih, membahasnya merupakan jihad, mengajarinya kepada orang yang belum mengetahuinya merupakan sedekah, dan menyerahkan kepada ahlinya merupakan pendekatan diri kepada Allah SWT "
(HR Ibnu/Abdi Barr)

UNIVERSITAS ANDALAS
UNTUK KEDJAJAAN BANGSA



Alhamdulillahirabbil'alamiin

Puji Syukur hamba Ucapkan kepada Allah SWT

Shalawat tiada henti untuk Rasulullah SAW

Dan terimakasih untuk kedua orangtuaku tercinta

Goresan Tinta...

Rasa syukur setinggi-tingginya ku ucapkan kepada Allah SWT yang selalu memberikan kemudahan disetiap langkahku...Terimakasih Engkau telah mencintai hambamu ini ya Allah,..

Untuk kedua orangkuaku, papa Afrizal dan mama Len Sumarni yang selalu memberikan cinta, kasih sayang, doa, motivasi dan semangat yang tak pernah pudar. :') pa,..ma,.. akhirnya kita buktikan kita bisa tanpa 'mereka',.. I Love Dad,.. I Love Mom,..So Much...

Buat adekku Andi Anggara Putra, Tiara Tria Ningsih dan Mail (;) selamat datang dikeluarga kami yang penuh gelak tawa ini,..hihihi,..). Makasi support dan doanyaaa,..kalian adalah semangat juang ku,..(ayoo,..kita raih sukses dijalan kita masing2, mari kita bahagiakan dan buat papa,..mama,..bangga adek2ku ☺ ,..!!!).

Ucapan terimakasih yang sedalam-dalamnya untuk Ibuk Lyra Yulianti sebagai pembimbing yang telah sabar dan tabah membimbing serta memberikan semangatnya sampai skripsi ini selesai,..(makasii banyak buat waktu dan ilmunya yaa Buk ☺,..).

Untuk seseorang yang sangat berjasa di awal kuliahku 'Tek Mar',..(makasi atas bantuan, nasehat dan semangatnya Tek Mar,..tanpa bantuan Tek Mar cerita hidup Ri mungkin tidak akan seindah ini :') ,..).

Buat Papa dan Mama TKA,..(makasi untuk doa dan semangatnya pa,..ma,..makasi udah anggap Ri sebagai anak sendiri,..walau terkadang Winda cemburu tuh pa,..ma,.. :p hihihi,...).

Buat 'DWI WINDA ELKARTIKA' (sesuai janji kak win,..nama ... in gedeee kan,... :p hihihi,..makasi buat bantuannya,..doanya,..semangatnya,..dan kesabarannya saat ngadapin kak yang lagi strees, galau, panik dan sedih yaaa win :,.. ...ga langgeng ma lindonya dek,..hihihi,..).*

Untuk teman sekamar ku 'Vika',.. (dewaaa maaf ya ka,...hihihi,..kita s... ing salah paham ☹,..makasi untuk hari-harinya,..doanya,..nasehatnya,..dan semangatnya selama ini,..kapan kita gila-gilaan lagi nih cin :p,...).

Buat Arief dan Ronal,.. :') makasi atas bantuannya yang tiada henti selama ini,..untuk nasehat2 dan semangatnya,..(@Arief : Hayooo Rief,...ngebut buat skripsinya,.. ☺ ...mu pasti bisaaa,... @Ronal : Akhirnya impian kita setahun yang lalu di atas 'si hijau...' terwujud juga ya nal,.. :') kita bisa bareng2 wisudanya,...Horeee,..).

Untuk Zonia Management : Zonia n the killing tetris (B'ipop, gema, ngik,..), Doubleclick (Kaka, coky, tomi, ari, tika,..), D-zone (Kaka,coky,tomi,ari,B'ipop,..), Mahameru (Kaka, coky, tomi, ari, arya, wega,..). Saluuut buat kalian semua,..mudah2an impiannya jadi artis tercapai,..aamiin,..makasi atas doa dan semangatnya keluarga kecil ku ☺,..(@Pacar gelap (b'ipop): Rajin2 ngajarnya ya pak guruuu,..jangan godain siswinya trus, ckckck :p,...).

Buat teman2 McZoven (angkatan 07) yang ga bisa disebutin satu per satu,..(makasi banyak ya teman2 untuk perjuangan kita selama ini ☺,..). Uda dan Uni senior,..Jonior2 ku,..(terutama untuk Caca'10 yang udah nyediain baju buat kompre kak,..makasi dek :'),..). HIMATIKA yang udah banyak membantu. BEM KM UNAND (Kabinet Bersatu) yang slalu memberikan motivasi. UKS UA (Andalas Swara : terutama buat Asep yang super duper keceee :p,..makasi sep,.., Teater Rumah Teduh,.., HARPA Music Studio,..., Andalas Seruni Dance : terutama buat PJ ku 'Dilla',..cepat nyusul ya jeee ☺,.., Saroman,...) makasi udah beri pengalaman yang kereen habis untuk Ri,.. Makasi untuk segalanya keluarga2 ku,..

Untuk teman2 KKN Jorong Kampani, Kabupaten Padang Pariaman : Alev (ntar klo Ri ke Jakarta, kita jalan2 yaaa,.. Alev yang traktir, horee ☺,...), Putra (ayooo put, ngebut skripsinyaa,...hajarrrr,....), Andre (dikit lagi ndre, moga cepat kelar skripsinya ☺,..) dan Viko (kritikus hebaaat,...).

N The Special One buaaat Jangkrikku ' Eka Windu M.E ',..makasi udah slalu ada buat Ri kapan dan di mana aja,..makasi udah ngisi hari2 Ri,...Udaaah ngasih palajaran, motivasi, doa dan pengalaman2 seruuu,..buat si biru 'Boim' yang slalu bawa Ri Kemana-mana,..saluuut buat kesabarannya ngadapin sifat jelek Ri,..hehehehe,..i'll never forget it, thanks already there beside me boy :'),..Semoga slalu bisa jadi imam/penuntun Ri kelak, aamiin,... I Love U :,...*

Ya Allah SWT,...Limpahkan Rahmat dan Karuniamu

Kepada orang-orang yang telah

begitu baik untuk ku.

Aamiin,...

UNIVERSITAS ANDALAS
UNTUK KEDJAJAAN BANGSA

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Segala puji bagi Allah, Tuhan Pencipta alam semesta yang telah memberikan rahmat, hidayah dan kekuatan-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Kelas Ramsey Minimal untuk Kombinasi Dua Graf Lintasan P_3 dan P_4**". Shalawat dan salam kepada Rasulullah SAW yang telah membawa manusia dari alam kebodohan ke alam ilmu pengetahuan. Penulisan Skripsi ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S. Si) di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Andalas.

Terima kasih penulis ucapkan kepada semua pihak yang telah membantu penulisan skripsi ini, terutama kepada:

1. Ibu **Dr. Lyra Yulianti** selaku pembimbing yang dengan sabar telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, petunjuk, masukan dan motivasi selama penyusunan skripsi ini.

2. Bapak **Dr. Syafrizal Sy**, Bapak **Dr. Ahmad Iqbal Baqi** dan Bapak **Zulakmal, M. Si** selaku penguji yang telah bersedia membaca, menelaah dan menguji naskah skripsi ini serta memberikan pengarahan, kritik dan saran untuk perbaikan penulisan skripsi ini.

3. Bapak **Dr. Admi Nazra** selaku Penasehat Akademik yang telah memberikan motivasi kepada penulis.

UNIVERSITAS ANDALAS
UNTUK KEDJAJAAN BANGSA

4. Seluruh staf pengajar dan staf tata usaha Jurusan Matematika yang telah banyak memberikan bekal ilmu dan bantuannya selama penulis melaksanakan studi di Jurusan Matematika Universitas Andalas.

5. Sosok yang terindah **Eka Windu M.E** yang telah bermurah hati memberikan dukungan, pengorbanan, pengertian dan keikhlasannya selama ini.

6. Teman-teman di Jurusan Matematika, terutama McZoven (angkatan 07), HIMATIKA, BEM KM UNAND (Kabinet Bersatu) dan Keluarga Besar UKS-UA yang telah memberikan dorongan dan semangat kepada penulis.

Secara khusus penulis mengucapkan terimakasih kepada Ayahanda **Afrizal**, ibunda **Len Sumarni**, serta adik-adikku tersayang **Andi Anggara Putra** dan **Tiara Tria Ningsih** yang telah memberikan do'a motivasi, semangat dan dorongan yang luar biasa dan tiada henti. Selanjutnya kepada semua pihak yang turut membantu hingga selesainya skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan namanya satu persatu, terimakasih.

Penulis menyadari bahwa tulisan ini masih mempunyai banyak kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran sangat diharapkan demi penyempurnaannya. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat dalam perkembangan ilmu matematika, khususnya di Universitas Andalas.

Padang, Juni 2012

Penulis

ABSTRAK

Diberikan dua graf G dan H. Notasi $F \rightarrow (G, H)$ berarti bahwa pada sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F, terdapat subgraf merah yang memuat graf G atau subgraf biru yang memuat graf H. Graf F disebut sebagai graf Ramsey (G, H)-minimal jika $F \rightarrow (G, H)$ dan $F - e \nrightarrow (G, H)$ untuk sebarang sisi e di F. Semua graf Ramsey (G, H)-minimal dikelompokkan dalam kelas yang dinamakan kelas Ramsey (G, H)-minimal, dinotasikan dengan $\mathcal{R}(G, H)$. Dalam skripsi ini akan dikaji tentang graf-graf yang tidak memuat pohon dan daun yang menjadi anggota $\mathcal{R}(P_3, P_4)$.

Kata kunci : *Graf Ramsey minimal, lintasan.*

DAFTAR ISI

UNIVERSITAS ANDALAS

UNTUK KEDJAJAAN BANGSA

DAFTAR GAMBAR

UNIVERSITAS ANDALAS
UNTUK KEDJAJAAN BANGSA

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1735 oleh seorang matematikawan terkenal Swiss yang bernama Leonhard Euler. Teori graf pertama kali muncul sebagai representasi permasalahan jembatan Konigsberg yang terdiri dari tujuh jembatan yang berada di atas sungai Pregel di kota Konigsberg, salah satu kota yang terletak di Prusia bagian Timur Jerman. Sejak itu, teori graf sering digunakan untuk menyederhanakan atau menganalisis suatu permasalahan yang ditemui dalam kehidupan sehari-hari, seperti masalah jaringan listrik, jaringan telepon, jaringan komputer, jalan penghubung antar kota dan lain sebagainya.

Salah satu teori yang berkembang pesat dalam bidang graf adalah teori Ramsey. Teori Ramsey pertama kali dikemukakan oleh Frank Plumpton Ramsey yang berasal dari London pada tahun 1930. Dalam papernya Frank Plumpton Ramsey menunjukkan bahwa untuk bilangan asli n terdapat bilangan asli $R(n)$, sedemikian sehingga jika sisi-sisi dari graf lengkap dengan $R(n)$ titik diwarnai merah dan biru, maka graf tersebut akan selalu memuat subgraf K_n merah atau K_n biru.

Karena tingkat kesulitan yang cukup tinggi dalam menentukan $\mathcal{R}(G, H)$, hasil yang diperoleh masih sangat sedikit, bahkan untuk graf G dan H yang berukuran kecil atau yang berstruktur sederhana sekalipun. Oleh karena itu, masalah ini menjadi topik yang sangat menarik untuk dikaji.

1.2 Perumusan Masalah

Penentuan kelas Ramsey minimal memiliki tingkat kesulitan yang cukup tinggi, bahkan untuk graf yang berstruktur sederhana sekalipun. Graf lintasan merupakan graf yang berstruktur paling sederhana. Diberikan graf lintasan P_3 dan P_4, akan ditentukan anggota apa saja yang termasuk dalam kelas Ramsey minimal untuk kombinasi (P_3, P_4).

1.3 Pembatasan Masalah

Masalah pada tulisan ini dibatasi untuk graf yang tidak memuat pohon dan daun.

1.4 Tujuan Penulisan

Dari latar belakang masalah yang telah diuraikan di atas, maka tujuan dari penulisan ini adalah menentukan graf-graf yang tidak memuat pohon dan daun yang menjadi anggota $\mathcal{R}(P_3, P_4)$.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan ini terdiri dari empat bab. Pada Bab I, diuraikan tentang latar belakang masalah, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan dan sistematika penulisan. Konsep dasar dari teori graf berupa definisi dan terminologi, jenis-jenis graf, pengertian bilangan Ramsey, serta beberapa teori pendukung yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan disajikan pada Bab II. Selanjutnya, pada Bab III berisikan tentang pembahasan serta penyelesaian masalah yang dikaji dalam tulisan ini. Penulisan skripsi ini diakhiri dengan bagian kesimpulan dan saran yang disajikan pada Bab IV.

UNIVERSITAS ANDALAS
UNTUK KEDJAJAAN BANGSA

BAB II

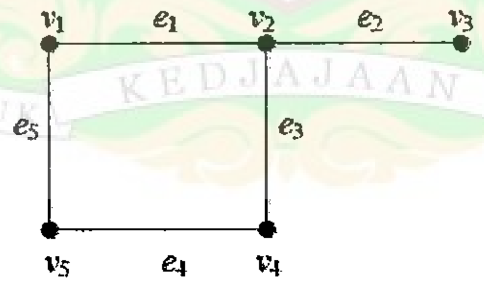
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas tentang definisi dan terminologi, jenis-jenis graf, pengertian graf Ramsey, serta teorema-teorema dan lema-lema pendukung untuk menyelesaikan permasalahan skripsi ini.

2.1 Definisi dan Terminologi

Semua definisi dan terminologi pada bagian ini dikutip dari [**1**].

Graf G=(**V, E**) adalah pasangan himpunan yang terdiri dari himpunan titik-titik (*vertices*) $V(G)$ dan himpunan sisi (*edges*) $E(G)$. Banyaknya titik di graf G dinotasikan dengan $\mid V(G) \mid = p$, disebut **orde** dari graf G. Banyaknya sisi di graf G dinotasikan dengan $\mid E(G) \mid = q$, disebut **ukuran** dari graf G.

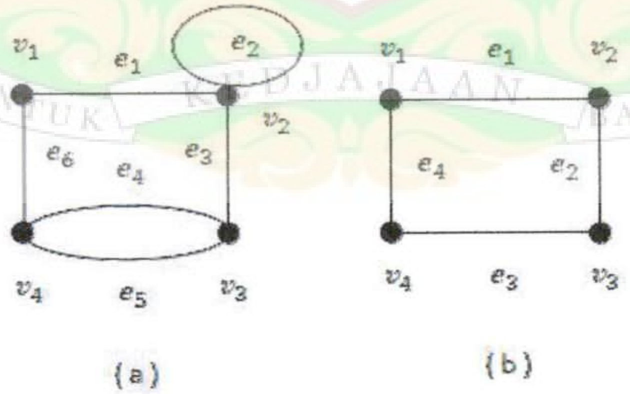


Gambar 2.1.1. Graf G

Gambar 2.1.1 merupakan contoh dari graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Graf G tersebut mempunyai $\mid V(G) \mid = 5$ dan $\mid E(G) \mid = 5$.

Misal terdapat graf G dengan sisi $e = uv \in E(G)$, maka titik u dikatakan **bertetangga** (*adjacent*) dengan v dan sisi e dikatakan **terkait** (*incident*) dengan titik u dan v. Sisi e_1 dan e_2 pada graf G disebut sisi-sisi bertetangga jika e_1 dan e_2 terkait pada satu titik yang sama. Sebagai contoh, pada Gambar 2.1.1 titik v_2 bertetangga dengan titik v_1, v_3 dan v_4, tetapi tidak bertetangga dengan titik v_5. Kemudian sisi e_1 dikatakan terkait dengan titik v_1 dan v_2. Selanjutnya sisi e_2 bertetangga dengan sisi e_1 dan e_3.

Misal terdapat graf H dengan sisi $e = uv \in E(H)$. Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan u dan v, maka graf H dikatakan graf yang memuat **sisi ganda**. Selanjutnya jika titik-titik ujung dari suatu sisi terkait pada titik yang sama, maka sisi tersebut dinamakan ***loop***. Graf H dikatakan **graf sederhana** apabila graf H tidak memuat sisi ganda dan *loop*.

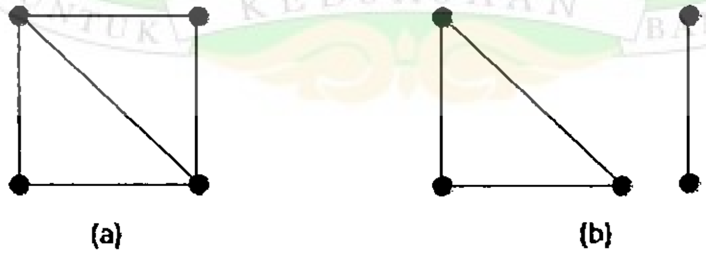


Gambar 2.1.2. (a) Graf yang memuat sisi ganda dan loop dan (b) Graf sederhana

Perhatikan Gambar 2.1.2, pada bagian (a) titik v_3 dan v_4 dihubungkan oleh lebih dari satu sisi yaitu sisi e_4 dan e_5 sehingga graf tersebut memuat sisi ganda. Selain itu, sisi e_2 terkait pada titik yang sama yaitu titik v_2 sehingga graf tersebut memuat *loop*. Pada bagian (b) diperlihatkan salah satu contoh graf sederhana dimana tidak terdapat sisi ganda dan *loop*. Untuk selanjutnya, pada tulisan ini hanya dibicarakan graf sederhana.

Jalan (*walk*) pada graf G, dinotasikan dengan W, adalah barisan berselang-seling antara titik-titik dan sisi-sisi di graf G. **Lintasan** pada graf G, dinotasikan dengan L, adalah jalan yang semua titiknya berbeda. Sebagai contoh pada Gambar 2.1.1, diperlihatkan $W = v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_2, v_2, e_3, v_4, e_4, v_5, e_5, v_1$ dan $L = v_1, e_1, v_2, e_3, v_4, e_4, v_5$.

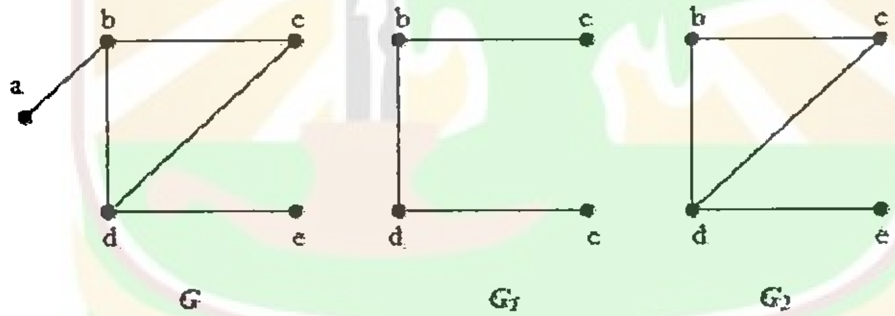
Misal F adalah suatu graf. Graf F dikatakan **terhubung** (*connected*) jika setiap dua titik berbeda pada graf F terdapat lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Pada gambar 2.1.3, bagian (a) memperlihatkan salah satu contoh graf terhubung dan bagian (b) memperlihatkan salah satu contoh graf yang tak terhubung.



Gambar 2.1.3. (a) Graf terhubung dan (b) Graf tak terhubung

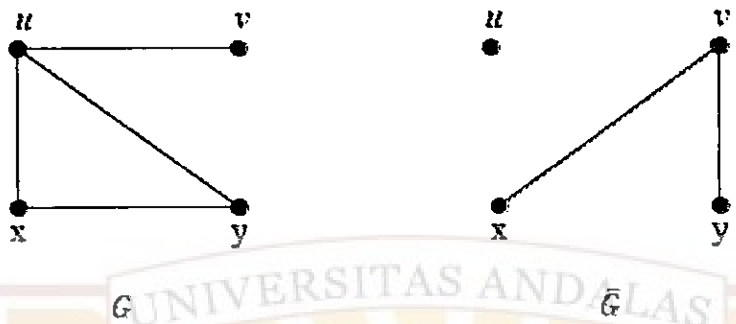
Derajat dari titik x di graf G adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik x dan dinotasikan dengan $d(x)$. **Derajat minimum** dari graf G, dinotasikan dengan $\delta(G)$, adalah derajat terkecil dari titik-titik di graf G sedangkan **derajat maksimum** dari graf G, dinotasikan dengan $\Delta(G)$ adalah derajat terbesar dari titik-titik di graf G. Sebagai contoh, pada Gambar 2.1.1 derajat minimumnya adalah satu dan maksimumnya adalah tiga.

Misal $G = (V, E)$ adalah suatu graf. $G' = (V', E')$ adalah **subgraf** dari graf G jika $V' \subseteq V$ dan $E' \subseteq E$. Pada Gambar 2.1.4 memperlihatkan salah satu contoh subgraf, graf G_1 dan G_2 adalah subgraf dari graf G, dimana elemen-elemen dari graf G_1 dan G_2 berada pada graf G.



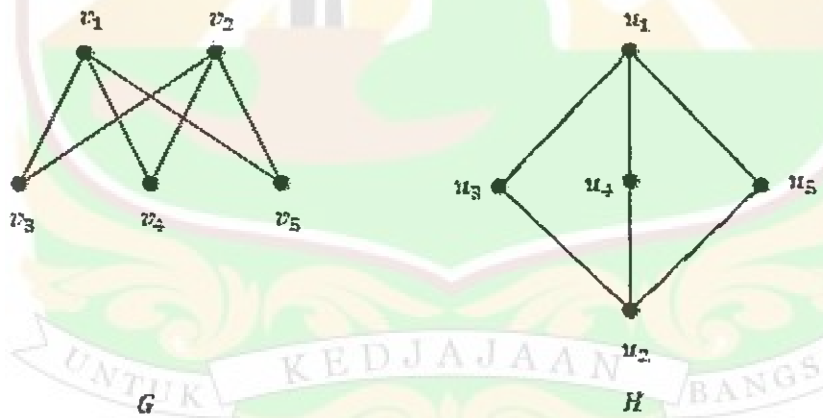
Gambar 2.1.4. $G_1 \subseteq G$ dan $G_2 \subseteq G$

Komplemen dari graf G, dinotasikan dengan $\bar{G}$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$, dimana dua titik bertetangga di $\bar{G}$ jika dan hanya jika dua titik tersebut tidak bertetangga di graf G. Gambar 2.1.5 memperlihatkan salah satu contoh graf dan komplemennya.



Gambar 2.1.5. Graf dan komplemennya

Dua graf G dan H dikatakan **isomorfik** jika terdapat bijeksi $\theta : V(G) \to V(H)$ dan $\phi : E(G) \to E(H)$, sedemikian sehingga $uv \in E(G)$ jika dan hanya jika $\phi(u)\phi(v) \in E(H)$. Gambar 2.1.6 memperlihatkan salah satu contoh graf G dan H yang isomorfik.



Gambar 2.1.6. Graf isomorfik

2.2 Jenis-jenis Graf

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa jenis. Berikut diberikan beberapa jenis graf yang akan digunakan dalam pembahasan.

2.2.1 Graf Lintasan (*Path*)

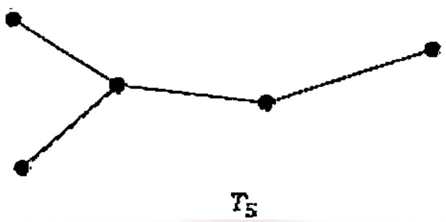
Graf lintasan (P_n) adalah graf dengan dua titik ujung berderajat satu dan $n-2$ titik yang berderajat dua. Gambar 2.2.7 memperlihatkan graf lintasan dengan 3 dan 4 titik.

Gambar 2.2.7. Graf lintasan P_3 dan P_4

2.2.2 Graf Pohon (*Tree*)

Graf pohon adalah graf terhubung berorde n yang tidak memuat siklus. Graf pohon dengan n titik dilambangkan dengan T_n. Titik-titik berderajat satu dinamakan daun. Gambar 2.2.8 memperlihatkan salah satu contoh graf pohon T_n dengan $n = 5$.

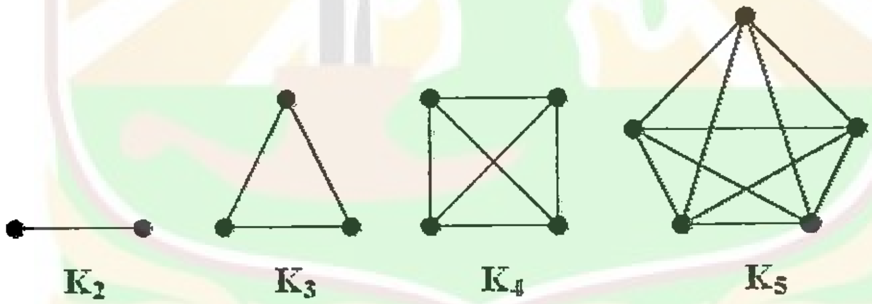
MILIK
UPT PERPUSTAKAAN
UNIVERSITAS ANDALAS



Gambar 2.2.8. Salah Satu Contoh Graf pohon T_5

2.2.3 Graf Lengkap (*Complete*)

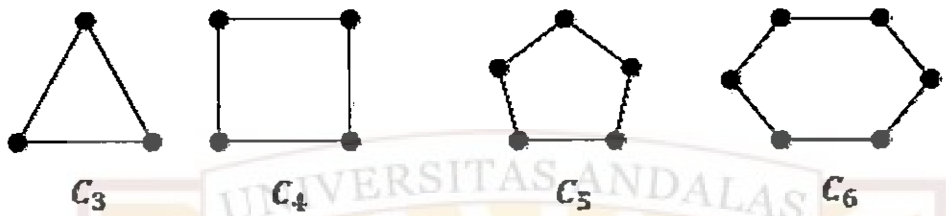
Graf lengkap adalah graf yang setiap titiknya bertetangga ke semua titik lainnya. Graf lengkap dengan n titik dilambangkan dengan K_n, memiliki $n(n-1)/2$ sisi. Gambar 2.2.9 memperlihatkan graf lengkap K_2,K_3,K_4, dan K_5.



Gambar 2.2.9. Graf lengkap K_2, K_3, K_4 dan K_5

2.2.4 Graf Siklus (*Cycle*)

Graf siklus adalah graf terhubung yang setiap titiknya berderajat dua. Graf siklus dengan n titik dilambangkan dengan C_n. Gambar 2.2.10 memperlihatkan graf siklus C_n dengan $3 \leq n \leq 6$.



Gambar 2.2.10. Graf siklus C_n, dengan $3 \leq n \leq 6$

2.3 Bilangan Ramsey

Misal diberikan graf G dan H sebarang. Notasi $F \to (G, H)$ berarti bahwa pada sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F, terdapat subgraf merah yang memuat graf G atau subgraf biru yang memuat graf H. Suatu *pewarnaan-*(G, H) pada graf F didefinisikan sebagai pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F, sedemikian sehingga tidak terdapat graf G merah dan juga H biru.

2.3.1 Bilangan Ramsey Klasik

Dengan menggunakan notasi panah yang telah dijelaskan sebelumnya, dapat didefinisikan bilangan Ramsey klasik sebagai berikut.

Definisi 2.3.1.1 [3] *Diberikan graf K_r dan K_s dengan r dan s adalah bilangan asli. Bilangan Ramsey klasik $R(K_r, K_s)$ didefinisikan sebagai*

$$R(K_r, K_s) = min\{n | K_n \to (K_r, K_s)\}.$$

Setiap sebarang pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf lengkap K_n akan memberikan dua subgraf berbeda warna dengan masing-masing n titik, sebut graf F dengan sisinya berwarna merah dan graf $\overline{F}$ dengan sisinya berwarna biru. Dalam hal ini, graf lengkap K_n akan terdekomposisi menjadi dua subgraf F dan $\overline{F}$, dapat dituliskan sebagai $K_n = F \oplus \overline{F}$.

Untuk menunjukkan bahwa bilangan Ramsey $R(K_r, K_s) = n$, dapat dilakukan dua pembuktian sebagai berikut:

1. Terdapat pewarnaan merah-biru pada semua sisi dari graf K_{n-1} yang tidak memuat graf K_r merah dan tidak juga memuat graf K_s biru, yang berarti menunjukkan batas bawah dari $R(K_r, K_s)$ yaitu $R(K_r, K_s) \geq n$.

2. Setiap sebarang pewarnaan merah-biru pada semua sisi dari graf K_n memuat graf K_r merah atau graf K_s biru, yang berarti menunjukkan batas atas dari (K_r, K_s) yaitu $R(K_r, K_s) \leq n$.

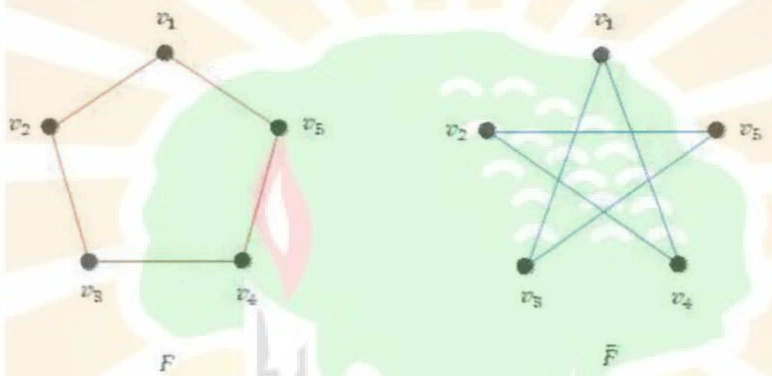
Contoh 2.3.1

$R(3, 3) = 6$.

Bukti.

1. $R(3,3) \geq 6$.

Misalkan terdapat graf lengkap K_5 dengan $V(K_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ maka $K_5 = F \oplus \overline{F}$ dengan sisi-sisi graf F berwarna merah dan sisi-sisi graf $\overline{F}$ berwarna biru seperti pada Gambar 2.3.11. Pada pewarnaan ini, tidak terdapat K_3 merah dan K_3 biru. Sehingga $R(3,3) \geq 6$.

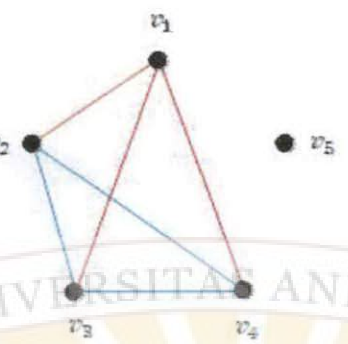


Gambar 2.3.11. $K_5 = F \oplus \overline{F}$

2. $R(3,3) \leq 6$.

Misalkan terdapat graf lengkap K_6 dengan $V(K_6) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$. Misal diberikan sebarang pewarnaan merah-biru pada sisi-sisi K_6, sedemikian sehingga terdapat paling sedikit tiga sisi yang berwarna sama. Tanpa mengurangi perumuman, asumsikan sisi v_1v_2, v_1v_3 dan v_1v_4 berwarna merah. Jika sebarang sisi v_2v_3, v_2v_4 atau v_3v_4 berwarna merah maka terdapat K_3 merah, jika sisi-sisi tersebut berwarna biru maka diperoleh K_3 biru seperti pada Gambar 2.3.12. Dengan demikian $R(3,3) \leq 6$.

MILIK
UPT PERPUSTAKAAN
UNIVERSITAS ANDALAS



Gambar 2.3.12. Pewarnaan merah-biru pada K_6

Dari pernyataan (1) dan (2) diperoleh $R(3,3) = 6$.■

2.3.2 Bilangan Ramsey Graf

Dengan menggunakan notasi panah yang telah dijelaskan sebelumnya, dapat didefinisikan bilangan Ramsey graf sebagai berikut.

Definisi 2.3.2.1 [3] *Diberikan graf G dan H. Bilangan Ramsey Graf $R(G,H)$ didefinisikan sebagai*

$$R(G,H) = min\{n | K_n \to (G,H)\}.$$

Untuk menunjukkan bahwa bilangan Ramsey $R(G,H) = n$, dapat dilakukan dua pembuktian sebagai berikut:

1. Terdapat pewarnaan merah-biru pada semua sisi dari graf K_{n-1} yang tidak memuat graf G merah dan tidak juga memuat graf H biru, yang berarti menunjukkan batas bawah dari $R(G,H)$ yaitu $R(G,H) \geq n$.

2. Setiap sebarang pewarnaan merah-biru pada semua sisi dari graf K_n memuat graf G merah atau graf H biru, yang berarti menunjukkan batas atas dari $R(G,H)$ yaitu $R(G,H) \leq n$.

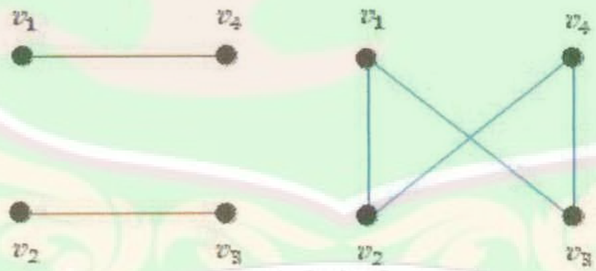
Contoh 2.3.2

$R(P_3, C_3) = 5$.

Bukti.

1. $R(P_3, C_3) \geq 5$.

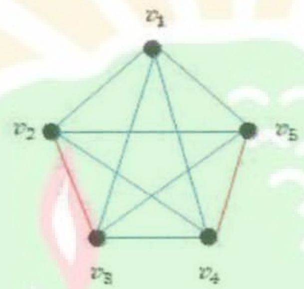
   Misalkan terdapat graf lengkap K_4 dengan $V(K_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ maka $K_4 = F \oplus \overline{F}$ dengan sisi-sisi graf F berwarna merah dan sisi-sisi graf $\overline{F}$ berwarna biru seperti pada Gambar 2.3.13. Pada pewarnaan ini, tidak terdapat P_3 merah dan C_3 biru. Sehingga $R(P_3, C_3) \geq 5$.



Gambar 2.3.13. $K_4 = F \oplus \overline{F}$

2. $R(P_3, C_3) \leq 5$.

   Misalkan terdapat graf lengkap K_5 dengan $V(K_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Misal diberikan sebarang pewarnaan merah-biru pada sisi-sisi K_5, sedemikian sehingga terdapat paling banyak dua sisi yang berwarna merah. Tanpa mengurangi perumuman, asumsikan sisi v_2v_3, v_4v_5 berwarna merah. Selanjutnya, warnai sisi-sisi yang tersisa dengan biru, sedemikian sehingga $\overline{F}$ memuat C_3 biru. Maka diperoleh C_3 biru pada $E(\overline{F})$ yaitu $\{v_1v_2v_5, v_1v_3v_4\}$ seperti pada Gambar 2.3.14. Dengan demikian $R(P_3, C_3) \leq 5$.



Gambar 2.3.14. Pewarnaan merah-biru pada K_5

Dari pernyataan (1) dan (2) diperoleh $R(P_3, C_3) = 5$.■

2.3.3 Bilangan Ramsey Sisi

Dengan menggunakan notasi panah yang telah dijelaskan sebelumnya, dapat didefinisikan bilangan Ramsey Sisi sebagai berikut.

Definisi 2.3.3.1 [3] *Diberikan graf G dan H. Bilangan Ramsey Sisi $\hat{r}(G, H)$ didefinisikan sebagai*

$$\hat{r}(G, H) = min\{\text{q(F)}|\ F \to (G, H) \text{ dan } F - e \nrightarrow (G, H)\},$$

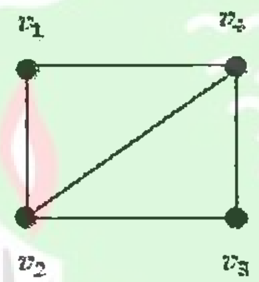
untuk sebarang sisi e di F.

Contoh 2.3.3

$\hat{r}(P_3, P_4) = 5$.

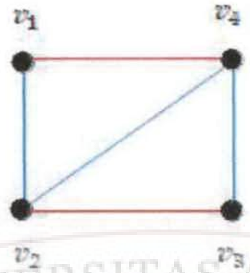
Bukti.

Misalkan terdapat graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1, v_2v_4\}$. Gambar 2.3.15 memperlihatkan salah satu contoh graf G.



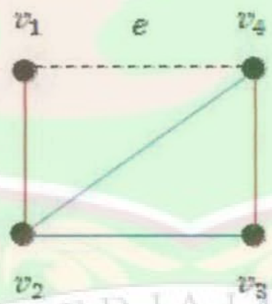
Gambar 2.3.15. Salah Satu Contoh Graf G

Misal diberikan sebarang pewarnaan merah-biru pada sisi-sisi G, sedemikian sehingga G tidak memuat P_3 merah. Maka haruslah G memuat paling banyak dua sisi merah yang saling bebas sebarang. Ini mengakibatkan G memuat P_4 biru. Sehingga diperoleh $G \rightarrow (P_3, P_4)$ atau dengan kata lain $\hat{r}(P_3, P_4) \leq 5$. Gambar 2.3.16 memperlihatkan salah satu contoh pewarnaan yang menyebabkan $G \rightarrow (P_3, P_4)$.



Gambar 2.3.16. $G \rightarrow (P_3, P_4)$

Selanjutnya, perhatikan $G - e$ untuk sebarang $e \in E(G)$. Diwarnai dua sisi yang saling bebas di $G - e$ dan sisi yang tersisa dengan biru, maka jelas $G - e$ tidak memuat P_3 merah dan P_4 biru. Sehingga diperoleh $G - e \nrightarrow (P_3, P_4)$ atau dengan kata lain $\hat{r}(P_3, P_4) \geq 5$. Gambar 2.3.17 memperlihatkan salah satu contoh pewarnaan yang menyebabkan $G - e \nrightarrow (P_3, P_4)$.



Gambar 2.3.17. $G - e \nrightarrow (P_3, P_4)$

Dengan demikian diperoleh $\hat{r}(P_3, P_4) = 5$.■

UNIVERSITAS ANDALAS
UNTUK KEDJAJAAN BANGSA

2.3.4 Graf Ramsey Minimal

Dengan menggunakan notasi panah yang telah dijelaskan sebelumnya, dapat didefinisikan kembali Graf Ramsey Minimal sebagai berikut.

Definisi 2.3.4.1 [2] *Diberikan graf G dan H. Graf F dikatakan sebagai graf Ramsey (G,H)-minimal jika*

1. $F \rightarrow (G, H)$,

2. $F - e \nrightarrow (G, H)$, *untuk sebarang sisi e di F.*

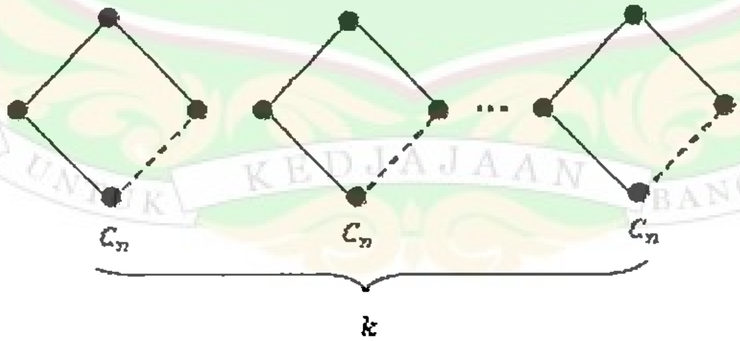
Semua graf Ramsey (G, H)-minimal dikelompokkan dalam kelas yang dinamakan *kelas Ramsey* $(G, H) - minimal$, dinotasikan dengan $\mathcal{R}(G, H)$. $\mathcal{R}(P_3, P_4)$ didefinisikan sebagai kelas Ramsey minimal untuk kombinasi (P_3, P_4). Sementara $\mathcal{R}^T(P_3, P_4)$ didefinisikan sebagai kelas Ramsey (P_3, P_4)-minimal yang memuat semua pohon yang termasuk dalam $\mathcal{R}(P_3, P_4)$. Selanjutnya $\mathcal{R}^*(P_3, P_4)$ didefinisikan sebagai kelas Ramsey (P_3, P_4)-minimal yang tidak memuat pohon . Kemudian $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$ didefinisikan sebagai kelas Ramsey (P_3, P_4)-minimal yang tidak memuat pohon dan daun. Sedangkan $\mathcal{R}_2^*(P_3, P_4)$ didefinisikan sebagai kelas Ramsey (P_3, P_4)-minimal yang tidak memuat pohon tetapi memuat daun.

BAB III

GRAF RAMSEY (P_3, P_4)-MINIMAL

Pada bagian ini ditentukan anggota dari $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$, yaitu kelas Ramsey minimal untuk pasangan (P_3, P_4) yang tidak memuat pohon dan daun. Jelas bahwa $F \in \mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$ harus memuat paling sedikit satu siklus. Pada setiap pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F, didefinisikan E_{merah} sebagai himpunan dari semua sisi merah di F dan E_{biru} sebagai himpunan dari semua sisi biru di graf tersebut.

Dapat dilihat bahwa graf kC_n untuk $k \geq 1$ dan $n \geq 4$ dapat diwarnai dengan merah dan biru, sedemikian sehingga graf tersebut memiliki pewarnaan-(P_3, P_4). Gambar 3.0.1 memperlihatkan graf kC_n.



Gambar 3.0.1. Graf kC_n

Akan dicari graf terhubung terkecil yang memuat setidaknya dua siklus tanpa daun. Pada subbab berikut akan dikaji dua kelas graf yang memuat graf anggota $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$.

3.1 $\mathcal{M}(n_1, n_2)$ dengan $n_1, n_2 \geq 4$

Misal C_{n_1} dan C_{n_2} merupakan dua siklus dengan panjang $n_1 \geq 4$ dan $n_2 \geq 4$. Misal x titik sebarang di C_{n_1} dan y titik sebarang di C_{n_2}. Graf $M(n_1, n_2)$ dibentuk dengan mengidentifikasi titik x dan y menjadi titik w. Notasikan kelas dari semua $M(n_1, n_2)$ sebagai $\mathcal{M}(n_1, n_2)$.

Didefinisikan titik-titik dan sisi-sisi $M(n_1, n_2)$ sebagai berikut.

$$V(M(n_1, n_2)) = \{w, u_1, u_2, ..., u_{n_1-1}, v_1, v_2, ..., v_{n_2-1}\},$$

$$E(M(n_1, n_2)) = E_1 \cup E_2 \cup E_3,$$

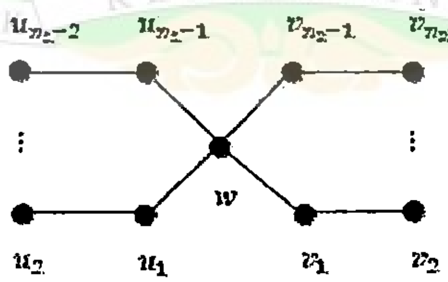
dimana

$$E_1 = \{wu_1, wu_{n_1-1}, wv_1, wv_{n_2-1}\},$$

$$E_2 = \{u_i u_{i+1} | i = 1, ..., n_1 - 2\},$$

$$E_3 = \{v_j v_{j+1} | j = 1, ..., n_2 - 2\}.$$

Gambar 3.1.2 memperlihatkan graf $M(n_1, n_2)$.

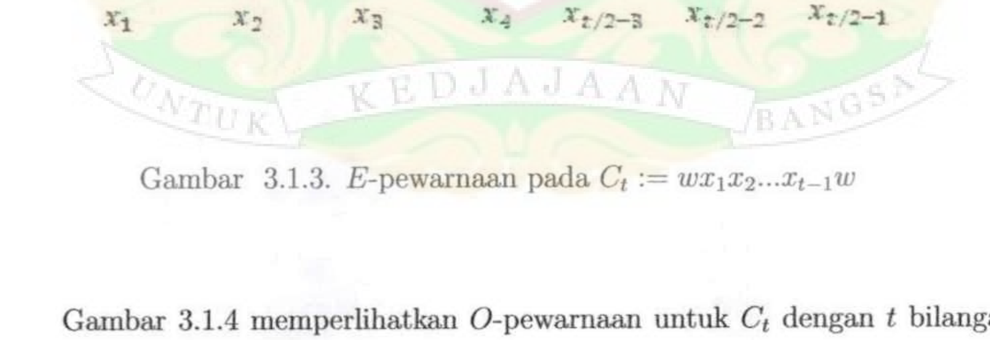


Gambar 3.1.2. Graf $M(n_1, n_2)$

Berikut adalah definisi yang akan digunakan dalam pembuktian teorema utama.

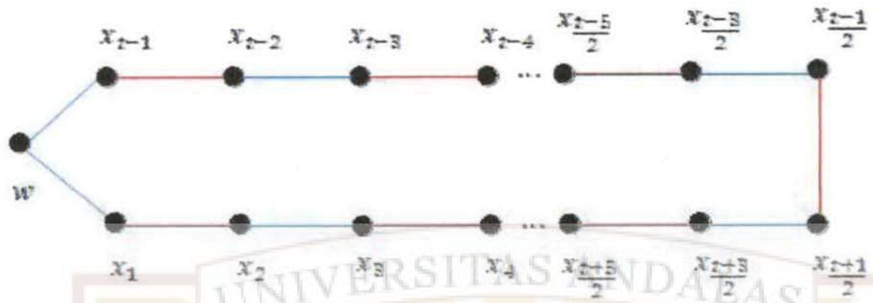
Definisi 3.1.1 [4] *Misal* $C_t := wx_1x_2...x_{t-1}w$ *adalah siklus dengan panjang* $t \geq 4$. *Jika* t *bilangan genap, maka didefinisikan suatu* E*-pewarnaan sebagai 2-pewarnaan dari graf siklus* C_t *sedemikian sehingga* $E_{merah} = \{x_ix_{i+1}|i = 1, 3, ..., t/2-2, t/2+1, ..., t-2\}$ *dan semua sisi yang tersisa berada di* E_{biru}. *Jika* t *bilangan ganjil, maka suatu* O*-pewarnaan adalah 2-pewarnaan sedemikian sehingga* $E_{merah} = \{x_jx_{j+1}|i = 1, 3, ..., \lceil t/2 \rceil, \lceil t/2 \rceil + 1, ..., t-2\}$ *dan semua sisi yang tersisa berada di* E_{biru}.

Gambar 3.1.3 memperlihatkan E-pewarnaan untuk C_t dengan t bilangan genap, $t \geq 4$.



Gambar 3.1.3. E-pewarnaan pada $C_t := wx_1x_2...x_{t-1}w$

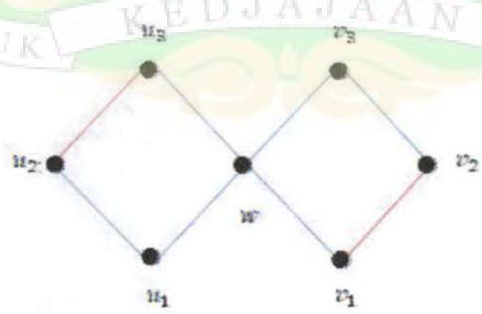
Gambar 3.1.4 memperlihatkan O-pewarnaan untuk C_t dengan t bilangan ganjil, $t \geq 5$.



Gambar 3.1.4. O-pewarnaan pada $C_t := wx_1x_2...x_{t-1}w$

Teorema 3.1.2 [4] *Misal n_1, n_2 adalah bilangan asli dengan $n_1, n_2 \geq 4$. Jika $M(n_1, n_2)$ menjadi anggota $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$ maka haruslah $n_1, n_2 = 4$.*

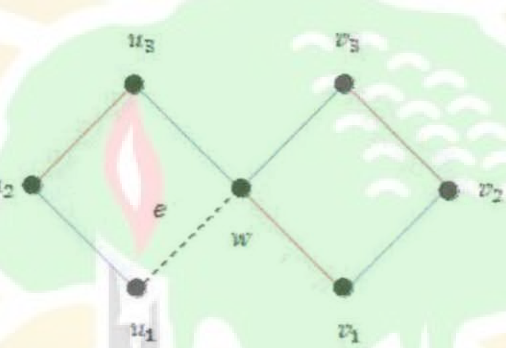
Bukti. Misalkan $n_1 = n_2 = 4$. Pertama-tama, ditunjukkan $M(4,4) \to (P_3, P_4)$. Asumsikan bahwa tidak ada P_3 merah di $M(4,4)$. Maka terdapat dua sisi merah yang saling bebas sebarang dalam graf tersebut. Kemudian sisi yang tersisa diwarnai dengan biru, sedemikian sehingga tidak memuat P_3 merah tetapi memuat P_4 biru di sisi yang tersisa pada $M(4,4)$. Gambar 3.1.5 memperlihatkan salah satu contoh pewarnaan yang menyebabkan $M(4,4) \to (P_3, P_4)$.



Gambar 3.1.5. $M(4,4) \to (P_3, P_4)$

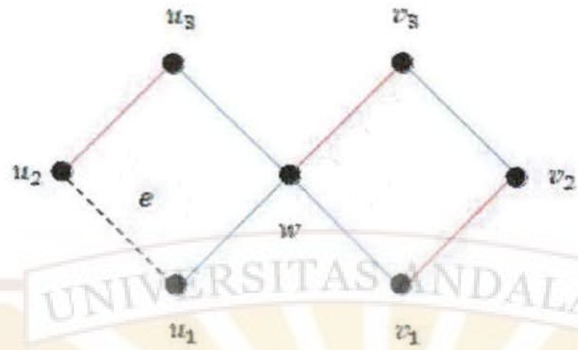
UNIVERSITAS ANDALAS
UNTUK KEDJAJAAN BANGSA

Kemudian, ditunjukkan $M(4,4)-e \nrightarrow (P_3, P_4)$ untuk setiap $e \in E(M(4,4))$. Misal $e \in E_1$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $e = wu_1$. Maka sisi wv_1, v_2v_3 dan u_2u_3 diwarnai dengan merah dan sisi yang tersisa dengan biru, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah dan P_4 biru dalam graf tersebut. Gambar 3.1.6 memperlihatkan salah satu contoh pewarnaan yang menyebabkan $M(4,4) - e \nrightarrow (P_3, P_4)$ untuk $e \in E_1$.



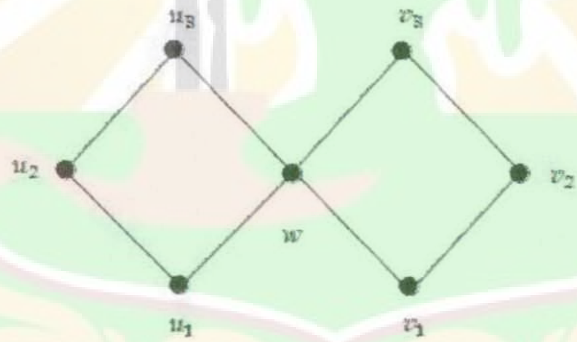
Gambar 3.1.6. $M(4,4) - e \nrightarrow (P_3, P_4)$ untuk $e \in E_1$

Selanjutnya, misalkan $e \in E_2$ atau $e \in E_3$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $e = u_1u_2$. Maka sisi wv_3, v_1v_2 dan u_2u_3 diwarnai dengan merah dan sisi yang tersisa dengan biru, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah dan P_4 biru dalam graf tersebut. Gambar 3.1.7 memperlihatkan salah satu contoh pewarnaan yang menyebabkan $M(4,4) - e \nrightarrow (P_3, P_4)$ untuk $e \in E_2$.



Gambar 3.1.7. $M(4,4) - e \nrightarrow (P_3, P_4)$ untuk $e \in E_2$

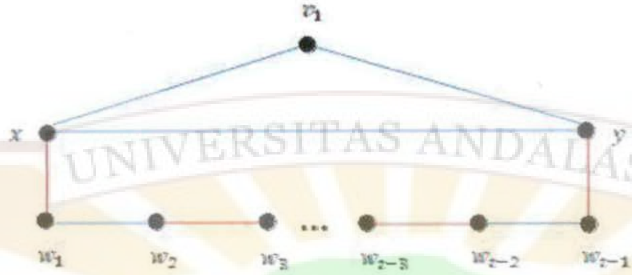
Karena $M(4,4)$ memenuhi (1) dan (2), maka diperoleh $M(4,4) \in \mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$. Gambar 3.1.8 memperlihatkan $M(4,4)$ yang menjadi anggota $R_1^*(P_3, P_4)$.



Gambar 3.1.8. $M(4,4)$

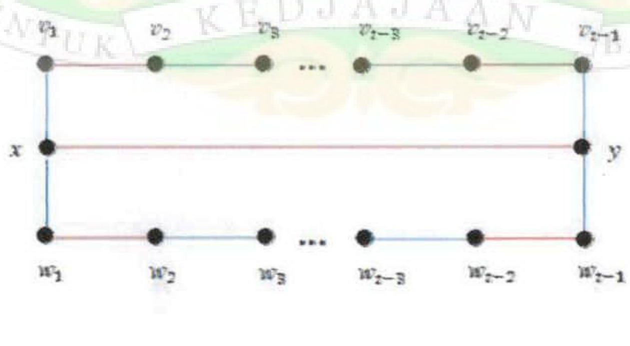
Selanjutnya tanpa mengurangi perumuman, misalkan $n_1 = 4$ dan $n_2 \neq 4$. Warnai sebarang dua sisi yang saling bebas di C_4 dengan merah dan sisi yang tersisa diwarnai dengan biru. Kemudian diterapkan pewarnaan yang sesuai (E- atau O-pewarnaan) untuk C_{n_2}, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah atau P_4

graf-graf di $\theta(1,2,m)$ dengan $m \geq 3$ bukan anggota dari $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$. Gambar 3.2.17 memperlihatkan $\theta(1,2,m)$ dengan $m \geq 3$.



Gambar 3.2.17. $\theta(1,2,m)$ dengan $m \geq 3$

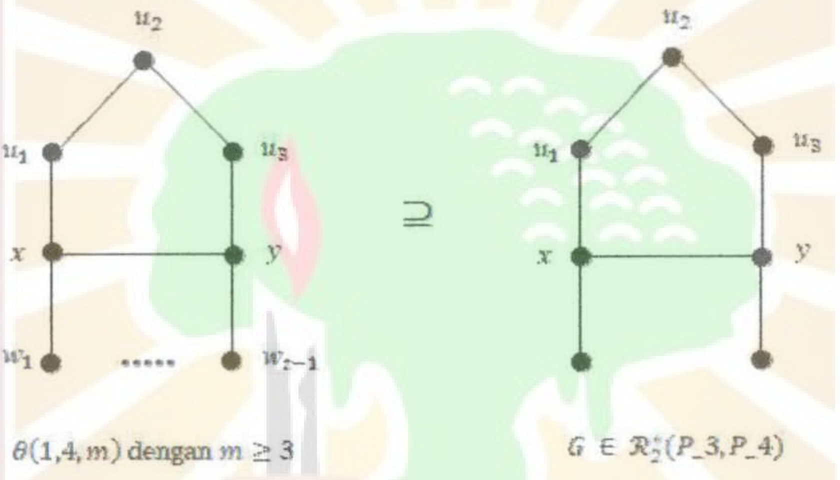
Selanjutnya, misalkan $k = 1$, $l \geq 3$, $l \neq 4$ dan $m \geq 3$, $m \neq 4$, maka dapat diatur pewarnaan sebagai berikut. Asumsikan sisi di P_{k+1} diwarnai dengan merah. Kemudian diterapkan pewarnaan E_3 atau O_3 yang sesuai pada P_{l+1} dan P_{m+1} dengan mengasumsikan l dan m bilangan ganjil atau genap, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah atau P_4 biru dalam graf tersebut. Maka graf-graf di $\theta(1,l,m)$ dengan $l \geq 3, l \neq 4, m \geq 3, m \neq 4$ bukan anggota dari $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$. Gambar 3.2.18 memperlihatkan $\theta(1,l,m)$ dengan $l \geq 3, l \neq 4, m \geq 3, m \neq 4$.



Gambar 3.2.18. $\theta(1,l,m)$ dengan $l \geq 3, l \neq 4, m \geq 3, m \neq 4$

Perhatikan bahwa jika paling sedikit salah satu dari l atau m sama dengan 4, maka semua graf dalam $\theta(1, l, m)$ dengan sifat ini bukanlah graf minimal untuk pasangan (P_3, P_4), karena memuat $G \in \mathcal{R}_2^*(P_3, P_4)$ sebagai subgrafnya [**4**]. Sebagai contoh, Gambar 3.2.19 memperlihatkan $\theta(1, 4, m)$ dengan $m \geq 3$ yang memuat $G \in R_2^*(P_3, P_4)$.■

UNIVERSITAS ANDALAS

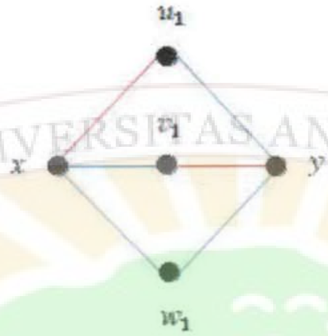


Gambar 3.2.19. $\theta(1, 4, m)$ dengan $m \geq 3$ memuat $G \in R_2^*(P_3, P_4)$

Lema 3.2.3 [4] *Misal $k = 2$, $l \geq 2$ dan $m \geq 2$, graf di $\Theta(2, l, m)$, $l \geq 2$, $m \geq 2$ yang menjadi anggota dari $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$ adalah $\theta(2, 2, 2)$,$\theta(2, 2, 4)$,$\theta(2, 4, 4)$.*

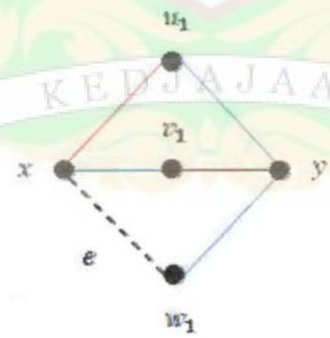
Bukti. Misalkan $k = 2$, $l = 2$ dan $m = 2$. Pertama-tama, ditunjukkan $\theta(2, 2, 2) \to (P_3, P_4)$. Asumsikan tidak ada P_3 merah di $\theta(2, 2, 2)$. Maka terdapat paling banyak dua sisi merah yang saling bebas sebarang dalam graf tersebut. Kemudian sisi yang tersisa diwarnai dengan biru, sedemikian sehingga tidak memuat P_3 merah tetapi memuat P_4 biru di sisi yang tersisa pada $\theta(2, 2, 2)$. Gambar 3.2.-

20 memperlihatkan salah satu contoh pewarnaan yang menyebabkan $\theta(2,2,2) \rightarrow (P_3, P_4)$.



Gambar 3.2.20. $\theta(2,2,2) \rightarrow (P_3, P_4)$

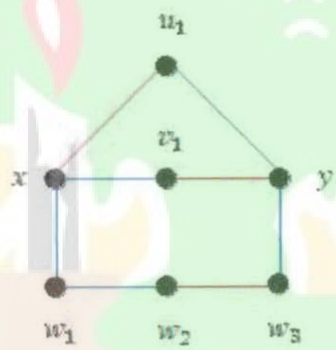
Selanjutnya, ditunjukkan $\theta(2,2,2) - e \nrightarrow (P_3, P_4)$ untuk setiap $e \in E(\theta(2,2,2))$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $e = xw_1$. Maka sisi xu_1 dan v_1y diwarnai dengan merah dan sisi yang tersisa dengan biru, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah dan P_4 biru dalam graf tersebut. Gambar 3.2.21 memperlihatkan salah satu contoh pewarnaan yang menyebabkan $\theta(2,2,2) - e \nrightarrow (P_3, P_4)$.



Gambar 3.2.21. $\theta(2,2,2) - e \nrightarrow (P_3, P_4)$

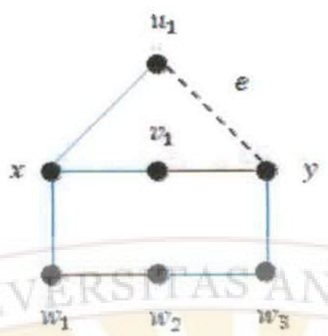
Karena $\theta(2,2,2)$ memenuhi (1) dan (2), maka $\theta(2,2,2) \in \mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$.

Misalkan $k = 2$, $l = 2$ dan $m = 4$. Pertama-tama, ditunjukkan $\theta(2,2,4) \rightarrow (P_3, P_4)$. Asumsikan tidak ada P_3 merah di $\theta(2,2,4)$. Maka sisi xu_1 dan v_1y diwarnai dengan merah. Kemudian sisi yang tersisa pada P_{k+1} dan P_{l+1} diwarnai dengan biru. Terapkan pewarnaan E_3 pada P_{m+1}, sedemikian sehingga tidak memuat P_3 merah tetapi memuat P_4 biru di sisi yang tersisa pada $\theta(2,2,4)$. Gambar 3.2.22 memperlihatkan salah satu contoh pewarnaan yang menyebabkan $\theta(2,2,4) \rightarrow (P_3, P_4)$.



Gambar 3.2.22. $\theta(2,2,4) \rightarrow (P_3, P_4)$

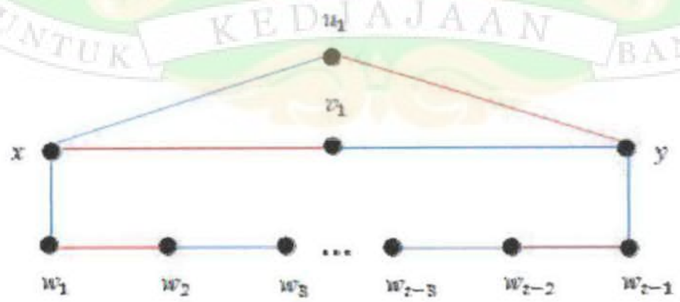
Selanjutnya, ditunjukkan $\theta(2,2,4) - e \nrightarrow (P_3, P_4)$ untuk setiap $e \in E(\theta(2,2,4))$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $e = u_1y$. Maka sisi v_1y diwarnai dengan merah. Kemudian sisi yang tersisa pada P_{k+1} dan P_{l+1} diwarnai dengan biru. Terapkan pewarnaan E_3 pada P_{m+1}, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah dan P_4 biru dalam graf tersebut. Gambar 3.2.23 memperlihatkan salah satu contoh pewarnaan yang menyebabkan $\theta(2,2,4) - e \nrightarrow (P_3, P_4)$.



Gambar 3.2.23. $\theta(2,2,4) - e \nrightarrow (P_3, P_4)$

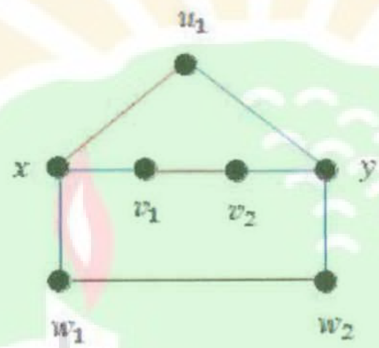
Karena $\theta(2,2,4)$ memenuhi (1) dan (2), maka $\theta(2,2,4) \in \mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$.

Misalkan $k = 2$, $m \geq 3$ dan $m \neq 4$. Maka diatur pewarnaan sebagai berikut. Sisi xv_1 dan u_1y diwarnai dengan merah. Kemudian sisi yang tersisa pada P_{k+1} dan P_{l+1} diwarnai dengan biru. Terapkan pewarnaan E_3 atau O_3 di P_{m+1} dengan m bilangan genap atau ganjil, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah atau P_4 biru dalam graf tersebut. Maka graf-graf di $\theta(2,2,m)$ dengan $m \geq 3, m \neq 4$ bukan anggota dari $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$. Gambar 3.2.24 memperlihatkan $\theta(2,2,m)$ dengan $m \geq 3, m \neq 4$.



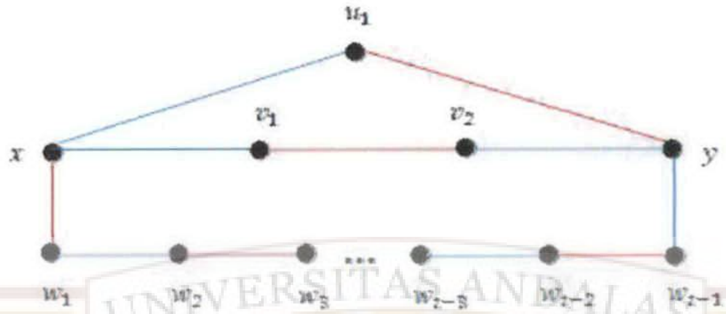
Gambar 3.2.24. $\theta(2,2,m)$ dengan $m \geq 3, m \neq 4$

Misalkan $k = 2$, $l = 3$ dan $m = 3$. Maka diatur pewarnaan sebagai berikut. Sisi xu_1, v_1v_2 dan w_1w_2 diwarnai dengan merah dan sisi yang tersisa dengan biru, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah atau P_4 biru dalam graf tersebut. Maka graf $\theta(2, 3, 3)$ bukan anggota dari $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$. Gambar 3.2.25 memperlihatkan $\theta(2, 3, 3)$.



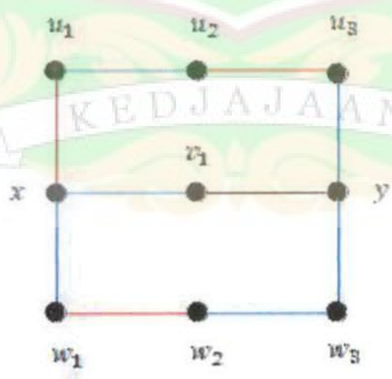
Gambar 3.2.25. $\theta(2, 3, 3)$

Selanjutnya, misalkan $k = 2$, $l = 3$ dan $m \geq 4$. Maka diatur pewarnaan sebagai berikut. Sisi u_1y dan v_1v_2 diwarnai dengan merah. Kemudian sisi yang tersisa pada P_{k+1} dan P_{l+1} diwarnai dengan biru. Terapkan pewarnaan E_2 atau O_2 di P_{m+1}, dengan m bilangan genap atau ganjil, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah atau P_4 biru dalam graf tersebut. Maka graf-graf di $\theta(2, 3, m)$ dengan $m \geq 3$ bukan anggota $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$. Gambar 3.2.26 memperlihatkan $\theta(2, 3, m)$ dengan $m \geq 3$.



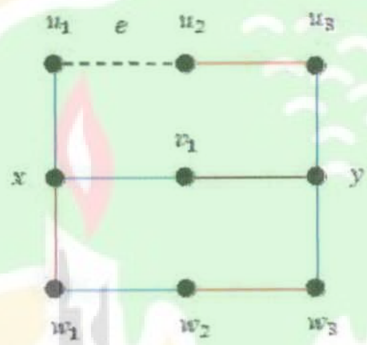
Gambar 3.2.26. $\theta(2,3,m)$ dengan $m \geq 3$

Misalkan $k = 2$, $l = 4$ dan $m = 4$. Pertama-tama, ditunjukkan $\theta(2,4,4) \rightarrow (P_3, P_4)$. Asumsikan tidak ada P_3 merah di $\theta(2,4,4)$. Maka sisi v_1y diwarnai dengan merah dan sisi yang tersisa di P_{k+1} diwarnai dengan biru. Kemudian terapkan pewarnaan E_2 pada P_{l+1} dan pewarnaan E_3 pada P_{m+1}, sedemikian sehingga tidak memuat P_3 merah tetapi memuat P_4 biru di sisi yang tersisa pada $\theta(2,4,4)$. Gambar 3.2.27 memperlihatkan salah satu contoh pewarnaan yang menyebabkan $\theta(2,4,4) \rightarrow (P_3, P_4)$.



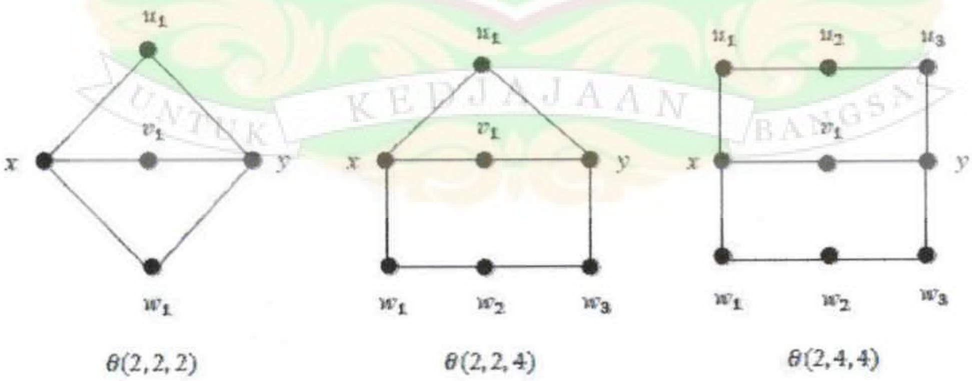
Gambar 3.2.27. $\theta(2,4,4) \rightarrow (P_3, P_4)$

Selanjutnya ditunjukkan $\theta(2,4,4)-e \nrightarrow (P_3,P_4)$ untuk setiap $e \in E(\theta(2,4,4))$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $e = u_1u_2$. Maka sisi u_2u_3 dan v_1y diwarnai dengan merah dan sisi yang tersisa di P_{k+1} dan P_{l+1} diwarnai dengan biru. Kemudian terapkan pewarnaan E_2 pada P_{m+1}, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah dan P_4 biru dalam graf tersebut. Gambar 3.2.28 memperlihatkan salah satu contoh pewarnaan yang menyebabkan $\theta(2,4,4)-e \nrightarrow (P_3,P_4)$.



Gambar 3.2.28. $\theta(2,4,4)-e \nrightarrow (P_3,P_4)$

Karena $\theta(2,4,4)$ memenuhi (1) dan (2), maka $\theta(2,4,4) \in \mathcal{R}_1^*(P_3,P_4)$.



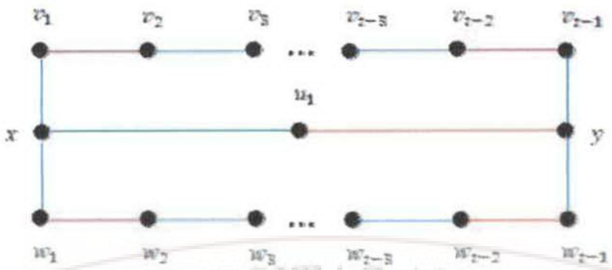
Gambar 3.2.29. $\theta(2,2,2), \theta(2,2,4), \theta(2,4,4)$

Gambar 3.2.29 memperlihatkan $\theta(2,2,2)$, $\theta(2,2,4)$ dan $\theta(2,4,4)$ yang menjadi anggota $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$.

Misalkan $m \geq 5$, maka dapat diatur pewarnaan sebagai berikut. Sisi xv_1, v_2v_3 dan u_1y diwarnai dengan merah dan sisi yang tersisa di P_{k+1} dan P_{l+1} diwarnai dengan biru. Terapkan pewarnaan E_3 atau O_3 di P_{m+1}, dengan mengasumsikan m bilangan genap atau ganjil, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah atau P_4 biru dalam graf tersebut. Maka graf-graf di $\theta(2,4,m)$ dengan $m \geq 5$ bukan anggota dari $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$. Gambar 3.2.30 memperlihatkan $\theta(2,4,m)$ dengan $m \geq 5$.

Gambar 3.2.30. $\theta(2,4,m)$ dengan $m \geq 5$

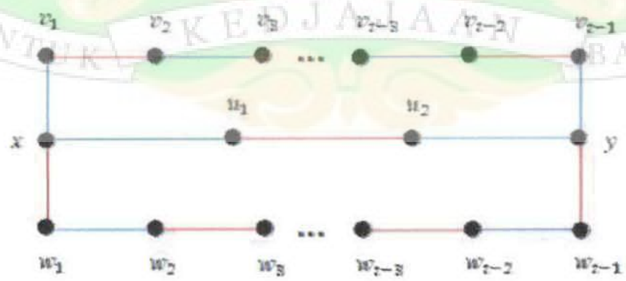
Misalkan $l \geq 5$ dan $m \geq 5$, maka diatur pewarnaan sebagai berikut. Sisi u_1y diwarnai dengan merah dan sisi yang tersisa di P_{k+1} diwarnai dengan biru. Kemudian diterapkan pewarnaan E_3 atau O_3 pada P_{l+1} dan P_{m+1}, dengan mengasumsikan l dan m bilangan genap atau ganjil, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah atau P_4 biru dalam graf tersebut. Maka graf-graf di $\theta(2,l,m)$ dengan $l,m \geq 5$ bukan anggota dari $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$. Gambar 3.2.31 memperlihatkan $\theta(2,l,m)$ dengan $l,m \geq 5$. ■



Gambar 3.2.31. $\theta(2, l, m)$ dengan $l, m \geq 5$

Lema 3.2.4 [4] *Misal $k = 3$, $l \geq 3$ dan $m \geq 3$, tidak terdapat graf di $\Theta(3, l, m)$, $l \geq 3$, $m \geq 3$ yang menjadi anggota $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$.*

Bukti. Misalkan $k = 3$, $l \geq 3$ dan $m \geq 3$, maka diatur pewarnaan sebagai berikut. Sisi u_1u_2 diwarnai dengan merah dan sisi yang tersisa di P_{k+1} diwarnai dengan biru. Kemudian diterapkan pewarnaan E_3 atau O_3 untuk P_{l+1} dan pewarnaan E_1 atau O_1 untuk P_{m+1}, dengan mengasumsikan l dan m bilangan genap atau ganjil, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah atau P_4 biru dalam graf tersebut. Maka graf-graf di $\theta(3, l, m)$ dengan $l, m \geq 3$ bukan anggota dari $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$. Gambar 3.2.32 memperlihatkan $\theta(3, l, m)$ dengan $l, m \geq 3$.■

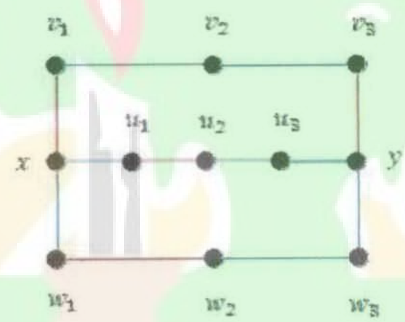


Gambar 3.2.32. $\theta(3, l, m)$ dengan $l, m \geq 3$

UNIVERSITAS ANDALAS
UNTUK KEDJAJAAN BANGSA

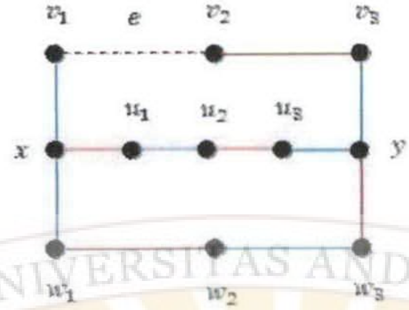
Lema 3.2.5 [4] *Misal $k = 4$, $l \geq 4$ dan $m \geq 4$, satu-satunya graf di $\Theta(4, l, m)$,$l \geq 4$,$m \geq 4$ yang menjadi anggota $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$ adalah $\theta(4, 4, 4)$.*

Bukti. Misalkan $k = 4$, $l = 4$ dan $m = 4$. Pertama-tama, ditunjukkan $\theta(4, 4, 4) \to (P_3, P_4)$. Sisi u_1u_2 diwarnai dengan merah dan sisi yang tersisa di P_{k+1} diwarnai dengan biru. Kemudian diterapkan pewarnaan E_2 pada P_{l+1} dan pewarnaan E_3 pada P_{m+1}, sedemikian sehingga tidak memuat P_3 merah tetapi memuat P_4 biru di sisi yang tersisa dalam $\theta(4, 4, 4)$. Gambar 3.2.33 memperlihatkan salah satu contoh pewarnaan yang menyebabkan $\theta(4, 4, 4) \to (P_3, P_4)$.



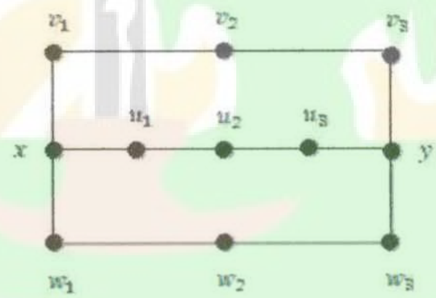
Gambar 3.2.33. $\theta(4, 4, 4) \to (P_3, P_4)$

Selanjutnya, ditunjukkan $\theta(4, 4, 4) - e \nrightarrow (P_3, P_4)$ untuk setiap $e \in E(\theta(4, 4, 4))$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $e = v_1v_2$. Maka sisi v_2v_3 diwarnai dengan merah dan sisi yang tersisa di P_{l+1} diwarnai dengan biru. Kemudian diterapkan pewarnaan E_2 pada P_{k+1} dan P_{m+1}, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah dan P_4 biru dalam graf tersebut. Gambar 3.2.34 memperlihatkan salah satu contoh pewarnaan yang menyebabkan $\theta(4, 4, 4) - e \nrightarrow (P_3, P_4)$.



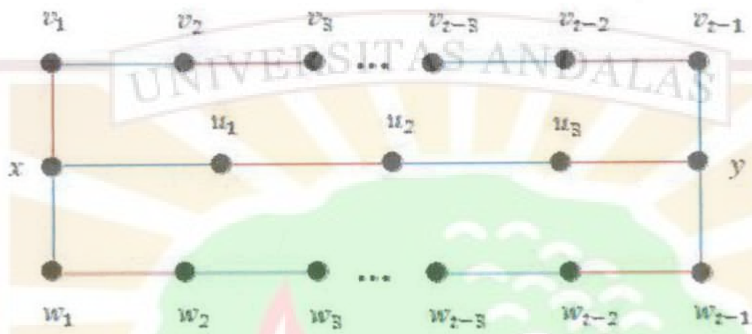
Gambar 3.2.34. $\theta(4,4,4) - e \nrightarrow (P_3, P_4)$

Karena $\theta(4,4,4)$ memenuhi (1) dan (2), maka $\theta(4,4,4) \in \mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$. Gambar 3.2.35 memperlihatkan $\theta(4,4,4)$ yang menjadi anggota $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$.



Gambar 3.2.35. $\theta(4,4,4)$

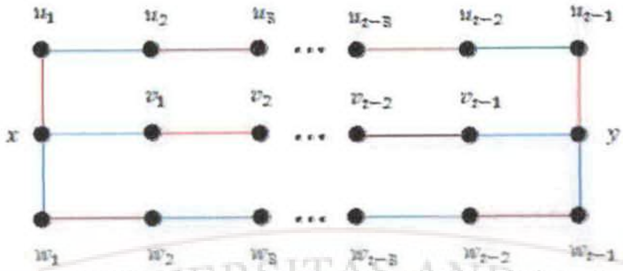
Misalkan $k = 4$, $l \geq 5$ dan $m \geq 5$. Maka diatur pewarnaan sebagai berikut. Sisi u_1u_2 dan u_3y diwarnai dengan merah dan sisi yang tersisa pada P_{k+1} diwarnai dengan biru. Kemudian diterapkan pewarnaan E_2 atau O_2 untuk P_{l+1} dan pewarnaan E_3 atau O_3 untuk P_{m+1}, dengan l dan m bilangan genap atau ganjil, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah atau P_4 biru dalam graf tersebut. Maka graf-graf di $\theta(4, l, m)$ dengan $l, m \geq 5$ bukan anggota dari $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$. Gambar 3.2.36 memperlihatkan $\theta(4, l, m)$ dengan $l, m \geq 5$. ■



Gambar 3.2.36. $\theta(4, l, m)$ dengan $l, m \geq 5$

Lema 3.2.6 [4] *Misal $k \geq 5$, $l \geq 5$ dan $m \geq 5$, tidak terdapat graf di $\Theta(k, l, m)$, $k \geq 5$, $l \geq 5$, $m \geq 5$ yang menjadi anggota $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$.*

Bukti. Misalkan $\theta(k, l, m)$ dengan $k, l, m \geq 5$, diatur pewarnaan sebagai berikut. Terapkan pewarnaan E_1 atau O_1 untuk P_{k+1}, pewarnaan E_3 atau O_3 untuk P_{l+1} dan P_{m+1}, dengan ketentuan k, l dan m bilangan genap atau ganjil, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah atau P_4 biru dalam graf tersebut. Maka graf-graf di $\theta(k, l, m)$ dengan $k, l, m \geq 5$ bukan anggota $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$. Gambar 3.2.37 memperlihatkan $\theta(k, l, m)$ dengan $k, l, m \geq 5$.■

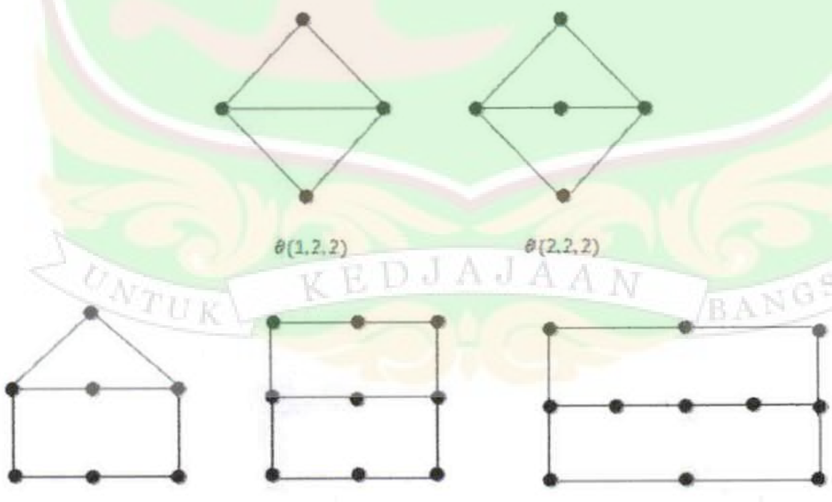


Gambar 3.2.37. $\theta(k, l, m)$ dengan $k, l, m \geq 5$

Dari Lema 3.2.2 - 3.2.6, diperoleh Teorema 3.2.7 sebagai berikut :

Teorema 3.2.7 *Misal* $m \geq l \geq k \geq 1$, *graf di* $\Theta(k, l, m)$ *yang menjadi anggota* $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$ *adalah* $\theta(1,2,2)$, $\theta(2,2,2)$, $\theta(2,2,4)$, $\theta(2,4,4)$ *dan* $\theta(4,4,4)$.

Gambar 3.2.38 memperlihatkan graf-graf $\Theta(k, l, m)$, $m \geq l \geq k \geq 1$ yang menjadi anggota $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$.



Gambar 3.2.38. $\theta(1,2,2)$, $\theta(2,2,2)$, $\theta(2,2,4)$, $\theta(2,4,4)$ dan $\theta(4,4,4)$

UNIVERSITAS ANDALAS
UNTUK KEDJAJAAN BANGSA

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pada pembahasan bab sebelumnya, diperoleh hasil kajian sebagai berikut.

Misal C_{n_1} dan C_{n_2} merupakan dua siklus dengan panjang $n_1 \geq 4$ dan $n_2 \geq 4$. Misal x titik sebarang di C_{n_1} dan y titik sebarang di C_{n_2}. Graf $M(n_1, n_2)$ dibentuk dengan mengidentifikasi titik x dan y menjadi titik w. Kelas dari semua $M(n_1, n_2)$ dinotasikan sebagai $\mathcal{M}(n_1, n_2)$. Maka telah ditunjukkan bahwa satu-satunya graf di $\mathcal{M}(n_1, n_2)$ yang menjadi anggota $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$ adalah $M(4, 4)$.

Graf *theta* $\theta(k, l, m)$ dengan $m \geq l \geq k \geq 1$ adalah gabungan dari tiga lintasan dengan panjang k, l dan m yang memiliki dua titik akhir yang sama, yaitu x dan y. Kelas dari semua $\theta(k, l, m)$ dinotasikan sebagai $\Theta(k, l, m)$ dan lintasan di $\theta(k, l, m)$ sebagai P_{k+1}, P_{l+1} dan P_{m+1} untuk $m \geq l \geq k \geq 1$. Maka telah ditunjukkan bahwa graf-graf di $\Theta(k, l, m)$ yang menjadi anggota $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$ adalah $\theta(1, 2, 2)$, $\theta(2, 2, 2)$, $\theta(2, 2, 4)$, $\theta(2, 4, 4)$ dan $\theta(4, 4, 4)$.

4.2 Saran

Diharapkan pada penelitian berikutnya, pembahasan dapat dilanjutkan yaitu dengan menentukan anggota $\mathcal{R}(P_3, P_4)$, selain $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$ dan $\mathcal{R}_2^*(P_3, P_4)$.

UNIVERSITAS ANDALAS
UNTUK KEDJAJAAN BANGSA

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bondy, J. A. and Murty, U. S. R. 1976. *Graph Theory with Applications.* The Macmillan Press, Canada.

[2] Burr, S. A., Erdos, P., dan Lovasz, L., (1976): On Graphs of Ramsey Type, *Ars Combinatoria*, 1,167-190.

[3] Yulianti, L. 2011. *Kelas Ramsey Minimal untuk Kombinasi Graf Dua Sisi dengan Siklus.* ITB Bandung. *Disertasi-S3.* Tidak diterbitkan.

[4] Yulianti, L., Assiyatun, H., Uttunggadewa, S., dan Baskoro, E. T. (2010) : On Ramsey $(K_{1,2}, P_4)$-Minimal Graphs, *Far East Journal of Mathematical Sciences*, **40** : 23-36.

UNIVERSITAS ANDALAS
UNTUK KEDJAJAAN BANGSA

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Riri Sri Wahyuni, dilahirkan di Bukittinggi pada tanggal 30 Oktober 1989 dari pasangan Afrizal dan Len Sumarni. Penulis menamatkan pendidikan Sekolah Dasar di SD Negeri 33 Bukittinggi pada tahun 2001, SMP Negeri 8 Bukittinggi pada tahun 2004 dan SMA Negeri 1 Bukittinggi pada tahun 2007. Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur SPMB (Seleksi Penerimaaan Mahasiswa Baru) Mandiri.

Selama menjadi mahasiswa di jurusan Matematika FMIPA Unand, penulis aktif dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA), Badan Eksekutif Mahasiswa Keluarga Mahasiswa (BEM KM) Universitas Andalas Kabinet Bersatu dan Unit Kegiatan Seni Universitas Andalas (UKS UA). Penulis pengajar privat mata pelajaran Matematika, serta sempat menjadi tenaga pengajar dan mengajar bimbel mata pelajaran matematika selama mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN). Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) pada tahun 2010 di Jorong Kampani, Nagari Lurah Ampalu, Kabupaten Padang Pariaman dalam rangka menyelesaikan salah satu mata kuliah wajib fakultas.