# PELABELAN SISI AJAIB SUPER PADA GRAF HUTAN Kl m U 2nP2

**SKRIPSI**

**NOVI SRIYANTI**

**04 934 008**

**JURUSAN MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS ANDALAS**

**PADANG 2012**

# KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

Syukur Alhamdulillah Penulis ucapkan kehadiran Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-NYA, sehingga Penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul " **Pelabelan Sisi Ajaib Super Pada Graf Hutan $K_{1,m} \cup 2nP_2$** ".Salawat dan salam kepada Rasulullah SAW yang telah mengantarkan manusia dari abad kegelapan menuju abad terang benerang dan berilmu pengetahuan. Penulisan skripsi ini merupakan salah satu syarat untuk menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Andalas Padang.

Tidak lupa pula Penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penulisan skripsi ini terutama kepada :

1. Bapak Narwen, M.Si dan Ibu Dr. Lyra Yulianti sebagai pembimbing pertama dan pembimbing kedua yang telah banyak memberikan bimbingan, pengarahan dan saran kepada Penulis sampai selesainya tugas akhir ini.
2. Bapak Dr. Ahmad Iqbal Baqi, Bapak Zulakmal, M.Si dan Bapak Budi Rudianto, M.Si sebagai penguji yang telah banyak meluangkan waktu,yang telah membaca, memberikan bimbingan, pengarahan dan saran dalam penulisan skripsi ini.
3. Ibu Dr. Maiyastri sebagai Penasehat Akademik yang telah membantu Penulis dalam merancang studi penulis hingga selesai.

4. Bapak Dr. Syafrizal Sy, sebagai Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas Padang. Ibu Dr. Lyra Yulianti selaku koordinator pendidikan Jurusan Matematika Universitas Andalas.
5. Seluruh staf pengajar Jurusan Matematika Universitas Andalas yang telah banyak memberikan ilmu yang bermanfaat bagi Penulis. Dan seluruh staf tata usaha Jurusan Matematika yang telah banyak membantu selama penulis melaksanakan studi di Jurusan Matematika Universitas Andalas.
6. Dan tidak lupa pula penulis ucapkan terimakasih kepada teman-teman sekalian Riri Emarine Susur, S.Si, Dewi Hasriani,S.Si, Fitri Sari Gustian, S.Si, Dwi Nova Riza, S.Si. yang sudah membantu, memotivasi penulis agar bisa menyelesaikan studi dan cepat meraih gelar Sarjana sains.

Terima kasih juga yang sebesar-besarnya kepada kedua orang tua ayahanda mulia H. Syafrul Efendi dan ibu tercinta Hj. Asmanidar di Bukittinggi atas do'a dan kesabarannya selama ini, hingga saya ini dapat menyelesaikan tugas akhir ini tanpa hambatan. Adik-adik tercinta Devi Wahyuri, SE, Mona Syafrul dan Ridho Ilahi yang selalu memberi semangat saya dan do'a kepada penulis. Suami Adhian Purwana yang tercinta di Bangko dan kedua buah hati Afifah Nadjwa Purwana dan Afifah Nadjla Purwana yang sering ditinggal dalam penyelesaian tulisan ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih banyak kekurangannya. Untuk itu penulis sangat mengharapkan sekali kritik dan saran atas kekurangan tersebut. Akhir kata semoga skripsi ini bermanfaat bagi kita semua. Amin

Padang, Januari 2012

Penulis

**Novi Sriyanti**

# ABSTRAK

Hutan (*forest*) merupakan kumpulan dari pohon.Pohon didefinisikan sebagai graf terhubung berorde $n$ yang tidak memuat lingkaran dan dilambangkan dengan $T_n$. Hutan $F$ yang merupakan gabungan dari n buah graf lintasan dengan $2n$ titik dan graf bipartit lengkap dengan titik dilambangkan $F = K_{1,m} \cup 2nP_2$. Dalam tulisan ini, akan ditentukan pelabelan sisi ajaib super pada hutan $F = K_{1,m} \cup 2nP_2$ Untuk $m, n \geq 1$.

Kata Kunci : *Forest, Graf pohon, Graf lintasan, Graf bipartit lengkap, Pelabelan sisi ajaib super.*

# ABSTRACT

Forest is a collection of tree. The is defined as a connected graph of order $n$ that does not contain a cycle, and is denoted by $T_n$ . Forest $F$, which is a combination of $2n$ paths of 2 vertices and complete bipartite graph with $m + 1$ vertices, is denoted as $F = K_{1,m} \cup 2nP_2$ . The forest $F$ can be labeled such that the labeling is super magic. In this paper, it will be determined that the forest $F = K_{1,m} \cup 2nP_2$ has a super magic labeling.

Keywords: *Forest, trees, paths, complete bipartite graph, super magic labeling.*

## DAFTAR ISI


**KATA PENGANTAR** ........................................................................................ i

**ABSTRAK**........................................................................................................iv

**DAFTAR ISI**................................................................................................... v

**DAFTAR GAMBAR** ...................................................................................... vi

**BAB I PENDAHULUAN**................................................................................... 1

1.1 Latar Belakang Masalah .............................................................................. 1

1.2 Perumusan Masalah ..................................................................................... 2

1.3 Pembatasan Masalah .................................................................................... 2

1.4 Tujuan Penulisan.......................................................................................... 2

1.5 Sistematika Penulisan.................................................................................. 2

**BAB II LANDASAN TEORI** ............................................................................ 4

2.1 Teori Graf .................................................................................................... 4

2.2 Pelabelan Sisi Ajaib Super .......................................................................... 8

**BAB III PEMBAHASAN** ................................................................................ 14

**BAB IV KESIMPULAN**................................................................................... 36

**DAFTAR KEPUSTAKAAN** ............................................................................ 38

# DAFTAR GAMBAR


**Gambar 2.1.1** Ilustrasi titik dan sisi .......... 5

**Gambar 2.1.2** Graf Loop dan graf dengan sisi ganda .......... 5

**Gambar 2.1.3** Graf Lengkap .......... 6

**Gambar 2.1.4** Graf Lintasan $P_3, P_4$ .......... 6

**Gambar 2.1.5** Graf Pohon .......... 7

**Gambar 2.1.6** Graf Hutan $F = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$ .......... 7

**Gambar 2.1.7** Graf Bipartit Lengkap $K_{2,3}$ .......... 8

**Gambar 2.2.1** Graf G .......... 10

**Gambar 2.2.2** Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graf G .......... 10

**Gambar 2.2.3** Pelabelan Sisi Ajaib Super pada Graf G .......... 11

**Gambar 2.2.4** Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graf G .......... 12

**Gambar 3.1.1** Graf $F = K_{1,m} \cup 2nP_2$ .......... 15

**Gambar 3.1.2** Pelabelan titik untuk Graf $F = K_{1,m} \cup 2nP_2$ .......... 16

**Gambar 3.1.3** Pelabelan titik untuk Graf $F = K_{1,m} \cup 2nP_2$ .......... 17

**Gambar 3.1.4** *Forest* $F = K_{1,m} \cup 4P_2$ .......... 21

**Gambar 3.1.5** Pelabelan Sisi Ajaib super untuk Graf hutan $F = K_{1,m} \cup 4P_2$ .......... 23

**Gambar 3.1.6** Pelabelan Sisi Ajaib Super untuk Graf hutan $F = K_{1,3} \cup 4P_2$ .......... 26

**Gambar 3.1.7** Graf $F = K_{1,5} \cup 8P_2$ .......... 27

**Gambar 3.1.8** Pelabelan Sisi Ajaib Super untuk graf hutan

$F = K_{1,5} \cup 8P_2$ .................................................... 31

**Gambar 3.1.9** Pelabelan Sisi Ajaib Super untuk Graf hutan

$F = K_{1,3} \cup 4P_2$ .................................................... 35

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang Masalah

Masalah pelabelan dalam teori graf mulai dikembangkan pada pertengahan tahun 1960. Pelabelan graf muncul pertama kali dalam karya Rosa pada tahun 1967. [1]. Pelabelan graf adalah pemetaan satu-satu dari elemen-elemen graf ke bilangan bulat positif. Jika domain dari fungsi adalah titik, maka pelabelan disebut **pelabelan titik** (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi, maka disebut **pelabelan sisi** (*edge labeling*) dan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut **pelabelan total** (*total labeling*).

Untuk suatu graf $G$ dengan banyak titik $p$ dan banyak sisi $q$, fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,\dots,p+q\}$ merupakan pelabelan sisi ajaib dari $G$ jika untuk setiap $uv \in E(G)$ berlaku $f(u) + f(v) + f(uv) = k$ untuk suatu konstanta $k$. Konstanta $k$ disebut sebagai angka ajaib untuk pelabelan tersebut. Pelabelan ini kemudian diberi nama ulang menjadi pelabelan total sisi ajaib oleh Wallis dkk. Untuk membedakan dengan konsep pelabelan ajaib lainnya. Khususnya, bila $f(V(G)) = \{1,2,\dots,p\}$ maka $f$ disebut sebagai pelabelan sisi ajaib super.

Graf hutan (*forest*) merupakan kumpulan dari graf pohon (*tree*) didefinisikan sebagai graf terhubung berorde $n$ yang tidak memuat lingkaran. Pada tugas akhir ini, penulis melakukan kajian pelabelan sisi ajaib super (*super edge magic labeling*) pada salah satu sub kelas graf hutan yang merupakan gabungan graf bipartit lengkap $K_{1,m}$ dan $2nP_2$. Untuk selanjutnya, graf hutan dengan gabungan graf bipartit lengkap ini ditulis dengan $F = K_{1,m} \cup 2nP_2$ dimana $m$ dan $n$ adalah bilangan bulat positif dan $m, n \geq 1$.

## 1.2 Perumusan Masalah

Masalah yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah bagaimana memberikan pelabelan sisi ajaib super pada suatu graf hutan.

## 1.3 Pembatasan Masalah

Dalam skripsi ini permasalahan dibatasi pada kajian tentang pelabelan sisi ajaib super pada graf hutan $F = K_{1,m} \cup 2nP_2$ dimana $m$ dan $n$ adalah bilangan bulat positif dan $m, n \geq 1$.

## 1.4 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan dalam penulisan skripsi ini adalah untuk memperlihatkan bahwa graf hutan $F = K_{1,m} \cup 2nP_2$ mempunyai pelabelan sisi ajaib super.

## 1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini secara keseluruhan disajikan dalam empat bab. Bab I berisikan pendahuluan yang didalamnya tercakup latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan skripsi ini. Konsep dasar dari teori graf berupa definisi dan terminologi graf, pelabelan pada graf dan pelabelan total sisi ajaib, serta hutan pada Bab II sebagai landasan teori. Kemudian, pembahasan dari permasalahan tersebut akan diuraikan pada Bab III mengenai pelabelan sisi ajaib super pada hutan $F = K_{1,m} \cup 2nP_2$. Penulisan skripsi ini diakhiri dengan bagian kesimpulan yang disajikan pada Bab IV.

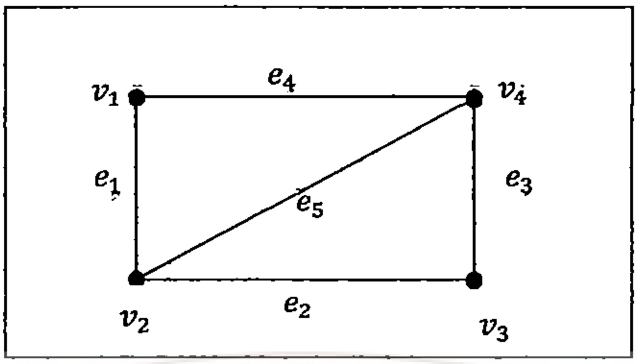
## BAB II

## LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan permasalahan yang telah dikemukakan pada Bab I. Definisi dan terminologi dalam teori graf diberikan pada Subbab 2.1, jenis-jenis graf pada Subbab 2.2, penjelasan tentang graf *forest* pada Subbab 2.3 dan penjelasan tentang pelabelan graf pada Subbab 2.4.

### 2.1 Teori Graf

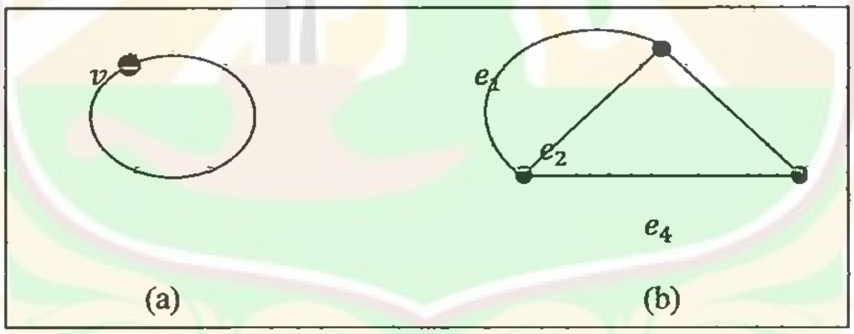
Suatu **graf** $G$ didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V, E)$, ditulis dengan $G = (V, E)$, di mana $V$ adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik dan $E$ adalah himpunan pasangan tak terurut dari elemen-elemen $V$. Elemen-elemen dari $V$ disebut **titik** (***vertices***) dari $G$ dan elemen-elemen dari $E$ disebut **sisi** (***edges***) dari $G$. Himpunan titik dari $G$ dinotasikan dengan $V(G)$ sedangkan himpunan sisi dari $G$ dinotasikan dengan $E(G)$. **Orde** (***order***) dari suatu graf $G$, dinotasikan $|V(G)| = v$, adalah banyaknya titik di graf $G$ dan **ukuran** (***size***) dari suatu graf $G$, dinotasikan $|E(G)| = e$, adalah banyaknya sisi di graf $G$. Pada Gambar 2.1.1 diilustrasikan pengertian titik dan sisi. Misalkan graf $G$ dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Dari gambar diperoleh $|V(G)| = 4$ dan $|E(G)| = 5$.




**Gambar 2.1.1**

Ilustrasi titik dan sisi

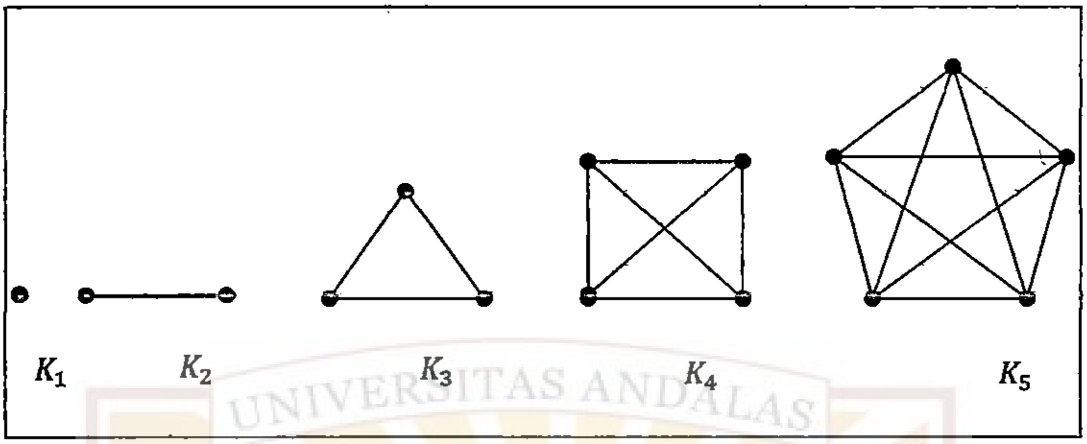
Pada kajian ini pembahasan dibatasi untuk graf sederhana, yaitu graf yang tidak memuat loop dan sisi ganda. Sebuah sisi yang menghubungkan suatu titik dengan titik itu sendiri disebut ***loop*** dan suatu sisi disebut **sisi ganda** jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik yang sama. Gambar 2.1.2 memperlihatkan sebuah *loop* dan graf dengan sisi ganda.




**Gambar 2.1.2**

(*a*) *Loop* (*b*) Graf dengan sisi ganda

**Graf lengkap** (***complete graph***) dengan $n$ titik, dinotasikan dengan $K_n$, adalah suatu graf yang setiap titiknya saling bertetangga.




**Gambar 2.1.3**

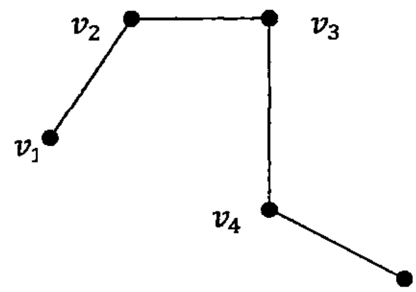
Graf Lengkap

**Lintasan** adalah suatu graf yang terdiri dari lintasan tunggal. Graf lintasan dengan *n* titik dilambangkan dengan $P_n$, graf lintasan dengan *n* titik memiliki *n-1* sisi. Pada Gambar 2.1.4 memperlihatkan graf lintasan dengan 3 dan 4 titik.


**Gambar 2.1.4**

Graf Lintasan $P_3$ dan $P_4$

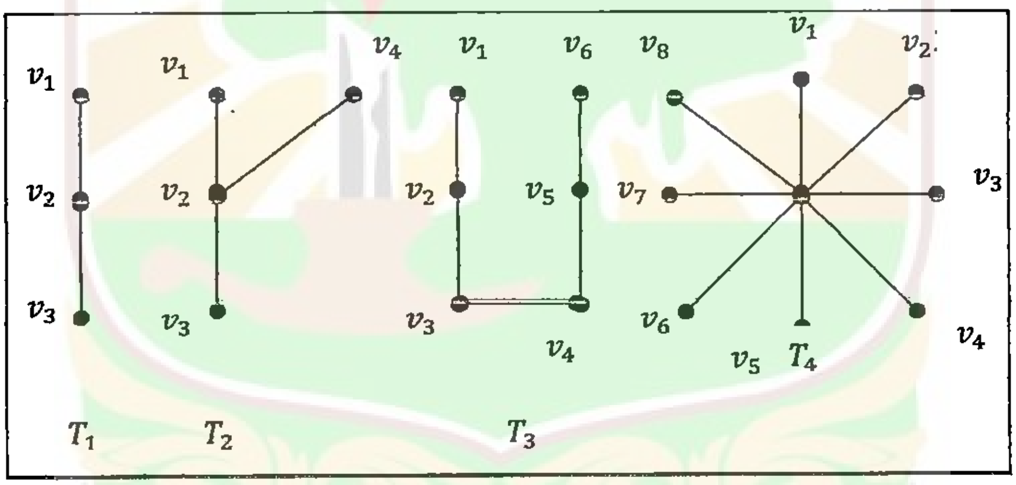
**Pohon** adalah graf terhubung berorde *n* yang tidak memuat lingkaran. Graf pohon dengan *n* titik dilambangkan dengan $T_n$. Titik-titik berderajat satu pada pohon dinamakan *daun*.




**Gambar 2.1.5**

Graf Pohon

Kumpulan dari pohon ini dinamakan dengan hutan (*forest*). Berikut ini merupakan beberapa kumpulan pohon.



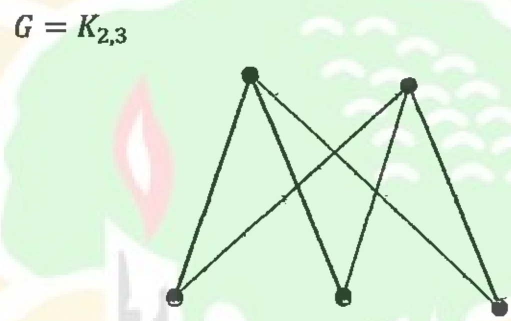

**Gambar 2.1.7**

Hutan $F = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$

Pada gambar 2.1.7 diberikan beberapa pohon $T_1, T_2, T_3, T_4$ maka $F = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$ merupakan hutan.

Graf $G$ dikatakan **bipartit** jika himpunan titik-titik $V(G)$ dapat dipisah menjadi dua himpunan $V_1(G)$ dan $V_2(G)$. Jika setiap pasang titik $v_1 \in V_1$ dan $v_2 \in V_2$ saling terhubung, maka graf tersebut dinamakan graf **bipartit lengkap**. Jika $|V_1| = m$ dan $|V_2| = n$ dengan $m$ titik dan $n$ titik,maka graf bipartit lengkap dinotasikan dengan $K_{m,n}$.

Gambar 2.1.8 memberikan ilustrasi dari sebuah graf bipartit lengkap dengan $m = 2$ dan $n = 3$.




**Gambar 2.1.8**

Graf Bipartit Lengkap $K_{2,3}$

**2.2 Pelabelan Sisi Ajaib Super**

**Pelabelan** pada suatu graf adalah sebarang pemetaan (fungsi) yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat). Jika domain dari fungsi adalah titik, maka pelabelan disebut **pelabelan titik** (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi, maka disebut **pelabelan sisi** (*edge labeling*), dan jika domainnya titik dan sisi maka disebut **pelabelan total** (*total labeling*).

Macam-macam pelabelan ajaib pada graf sebagai berikut:

1. Pelabelan Sisi-Titik Ajaib

   Pelabelan sisi titik ajaib pada graf $G = G(V,E)$ adalah pemetaan satu-satu dari $E(G)$ pada himpunan$\{1,2,\dots,e\}$, sedemikian sehingga jumlah label sisi yang berkaitan dengan setiap titik adalah sama.

2. Pelabelan Titik Sisi-Ajaib

   Pelabelan titik sisi-ajaib pada graf $G = G(V,E)$ adalah pemetaan satu-satu dari $V(G)$ pada himpunan $\{1,2,\dots,v\}$, sedemikian hingga untuk setiap sisi $xy$ di G berlaku $\lambda(x) + \lambda(y) = k$ untuk suatu bilangan bulat positif $k$.

3. Pelabelan Total Titik-Ajaib

   Pelabelan total titik ajaib pada graf $G = G(V,E)$ sebagai pemetaan satu-satu $\lambda$ dari V(G)∪ $E(G)$ pada himpunan $\{1,2,\dots,v+e\}$ sedemikian sehingga untuk setiap titik $x$ di $G$ berlaku:

$$\lambda(x) + \sum_{y \in N(x)} \lambda(xy) = k$$

   untuk suatu bilangan bulat positif $k$.

4. Pelabelan Total Sisi-Ajaib

   Pelabelan total sisi ajaib pada graf $G = G(V,E)$ adalah pemetaan satu-satu $\lambda$ dari $V(G) \cup E(G)$ pada $\{1,2,\dots,v+e\}$ sedemikian hingga untuk setiap sisi $xy$ di $G$ berlaku:

$$\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k$$

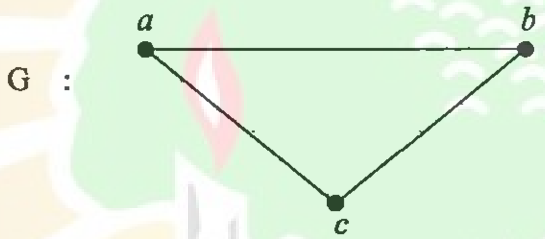
   untuk suatu bilangan bulat $k$ positif.

**Definisi 2.2.1** *Pelabelan total sisi ajaib pada graf G adalah fungsi bijektif* $f$ *dari* $V(G) \cup E(G)$ *pada* $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$ *sehingga untuk sebarang sisi UV di G berlaku*

$$f(u) + f(v) + f(uv) = k$$

*untuk suatu konstanta k.*

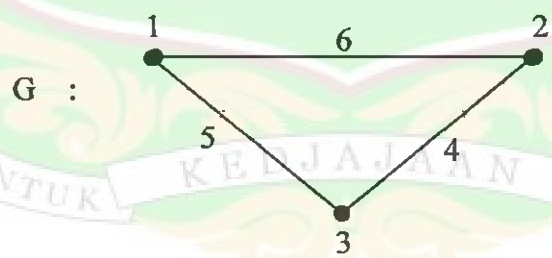
Selanjutnya $k$ disebut bilangan ajaib pada graf $G$ dan $G$ yang mempunyai sifat tersebut disebut total sisi ajaib. Sebagai contoh, perhatikan graf $G$ berikut dengan $V(G) = \{a, b, c\}$ dan $E(G) = \{ab, ac, bc\}$. Jadi orde $G$ adalah $|V(G)| = 3$ dan ukuran $G$ adalah $|E(G)| = 3$. Akan ditunjukkan bahwa graf $G$ adalah total sisi ajaib.




**Gambar 2.2.1**

Graf G

Jika dibuat fungsi $f$ dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sebagai berikut:




**Gambar 2.2.2**

Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graf G

diperoleh

$$f(a) + f(ab) + f(b) = 1 + 6 + 2 = 9$$

$$f(b) + f(bc) + f(c) = 2 + 4 + 3 = 9$$

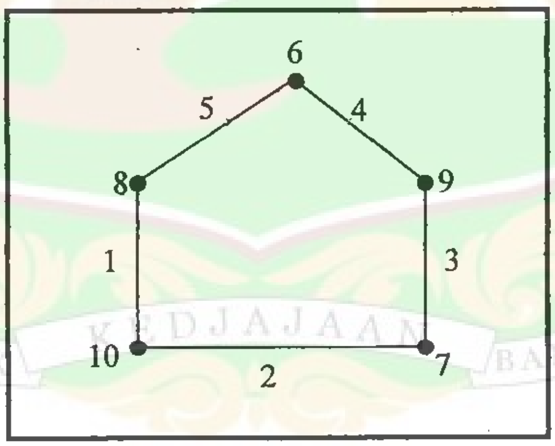
$$f(a) + f(ac) + f(c) = 1 + 5 + 3 = 9$$

graf $G$ adalah sisi ajaib dengan konstanta ajaib $k = 9$. ∎

**Definisi 2.2.2** *Pelabelan total sisi ajaib (edge magic labeling) f pada graf G disebut pelabelan sisi ajaib super (super edge magic total labeling) jika* $f(V(G)) = \{1, 2, 3, \dots, p\}$.

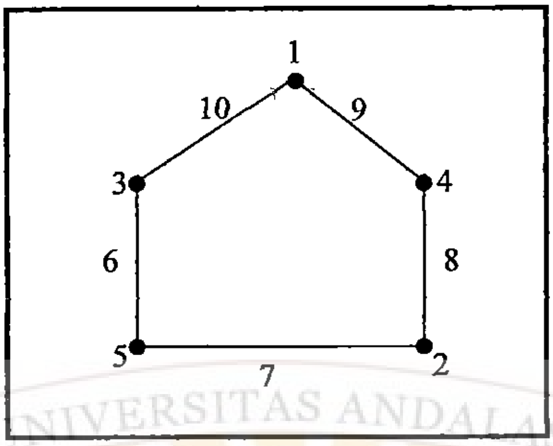
Dengan demikian, pelabelan sisi ajaib super adalah suatu bentuk khusus dari pelabelan total sisi ajaib. Setiap pelabelan sisi ajaib super pasti merupakan pelabelan total sisi ajaib, tetapi tidak sebaliknya. Graf yang dapat dikenai pelabelan sisi ajaib super disebut graf sisi ajaib super.

Perhatikan graf $G$ berikut :




**Gambar 2.2.3**

Pelabelan Sisi Ajaib Super pada Graf G




**Gambar 2.2.4**

Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graf G

Gambar 2.2.3 dan Gambar 2.2.4 di atas merupakan pelabelan total sisi ajaib. Meskipun demikian, pelabelan pada Gambar 2.2.3 disebut pelabelan sisi ajaib super, sedangkan pada Gambar 2.2.4 bukan pelabelan sisi ajaib super. Hal ini karena pada Gambar 2.2.3 himpunan titik dipetakan ke himpunan $\{1, 2, 3\}$, sedangkan pada Gambar 2.2.4,himpunan titik tidak dipetakan ke $\{1, 2, 3\}$.

**Lemma 2.2.3** *Suatu graf G dengan p titik dan q sisi adalah graf sisi ajaib super jika dan hanya jika terdapat suatu fungsi bijektif*

$$f : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, p\}$$

*sedemikian sehingga himpunan* $S = \{f(u) + f(v) | uv \in E(G)\}$ *terdiri dari q bilangan bulat terurut. Dalam kasus ini, f diperluas menjadi pelabelan sisi ajaib super dari G dengan konstanta ajaib* $k = p + q + s$ *dimana* $s = min(S)$ *dan*

$$\begin{aligned} S &= \{f(u) + f(v) | uv \in E(G)\} \\ &= \{k - (p + 1), k - (p + 2), \ldots, k - (p + q)\}. \end{aligned}$$

**Relatif Prima**

Dua buah bilangan bulat $a$ dan $b$ dikatakan *relatif prima* jika Pembagi bersama terbesar (PBB) dari $a$ dan $b$ adalah bilangan bulat terbesar 1. Dalam hal ini kita nyatakan bahwa PBB$(a, b) = 1$.

# BAB III

# PEMBAHASAN

Misal diberikan graf hutan $F$ yang merupakan gabungan graf bipartit lengkap $K_{1,m}$dengan lintasan $P_2$ sebanyak $2n$, selanjutnya ditulis $F \equiv K_{1,m} \cup 2nP_2$ dengan $m$ dan $n$ adalah bilangan bulat positif. Pada teorema berikut akan ditunjukkan bahwa $F$ tersebut adalah sisi ajaib super. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa jika $m + 2n$ $dan$ $2n + 1$ relatif prima maka pelabelan super sisi ajaib dari $F$ mempunyai valensi $2m + 9n + 4$ $dan$ $3m + 9n + 3$

**Teorema :** *Untuk m dan n bilangan bulat positif, berlaku* $F = K_{1,m} \cup 2nP_2$ *adalah sisi ajaib super. Selanjutnya jika* $m + 2n$ *dan* $2n + 1$ *adalah relatif prima, maka valensi dari pelabelan sisi ajaib super dari F adalah* $2m + 9n + 4$ *dan* $3 + 9n + 3$.

***Bukti*** :

Misalkan $F \equiv K_{1,m} \cup 2nP_2$ merupakan graf hutan dengan

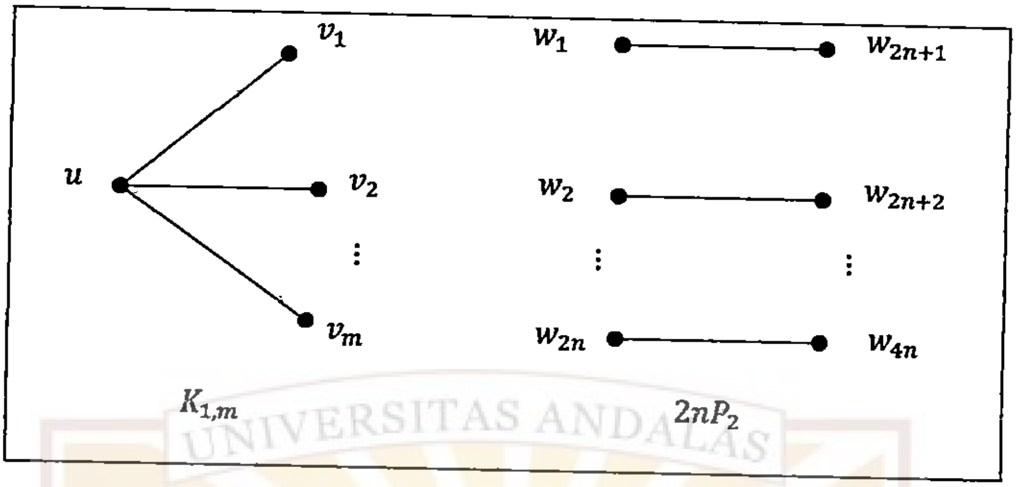
$$V(F) = \{u\} \cup \{v_i | 1 \leq i \leq m\} \cup \{w_i | 1 \leq i \leq 4n\},$$

$$|V(F)| = 1 + m + 4n$$

Dan himpunan sisi

$$E(F) = \{uv_i | 1 \leq i \leq m\} \cup \{w_i w_{2n+i} | 1 \leq i \leq 2n\},$$

$$|E(F)| = m + 2n$$




**Gambar 3.1.1**

Graf $F = K_{1,m} \cup 2nP_2$

Akan ditunjukkan bahwa F adalah graf sisi ajaib super dengan cara sebagai berikut :

Konstruksikan pelabelan titik terhadap F sebagai berikut :

$f, g : V(F) \to \{1, 2, \dots, p\}$ adalah pelabelan titik dari $F$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} n+1, & jika\ x = u; \\ (2n+i+1), & jika\ x = v_i\ dan\ 1 \le i \le m; \\ i, & jika\ x = w_i\ dan\ 1 \le i \le n; \\ i+1, & jika\ x = w_i\ dan\ n+1 \le i \le 2n; \\ m+n+i+1, & jika\ x = w_i\ dan\ 2n+1 \le i \le 3n; \\ m-n+i+1, & jika\ x = w_i\ dan\ 3n+1 \le i \le 4n; \end{cases}$$

Dengan valensi $2m + 9n + 4$.

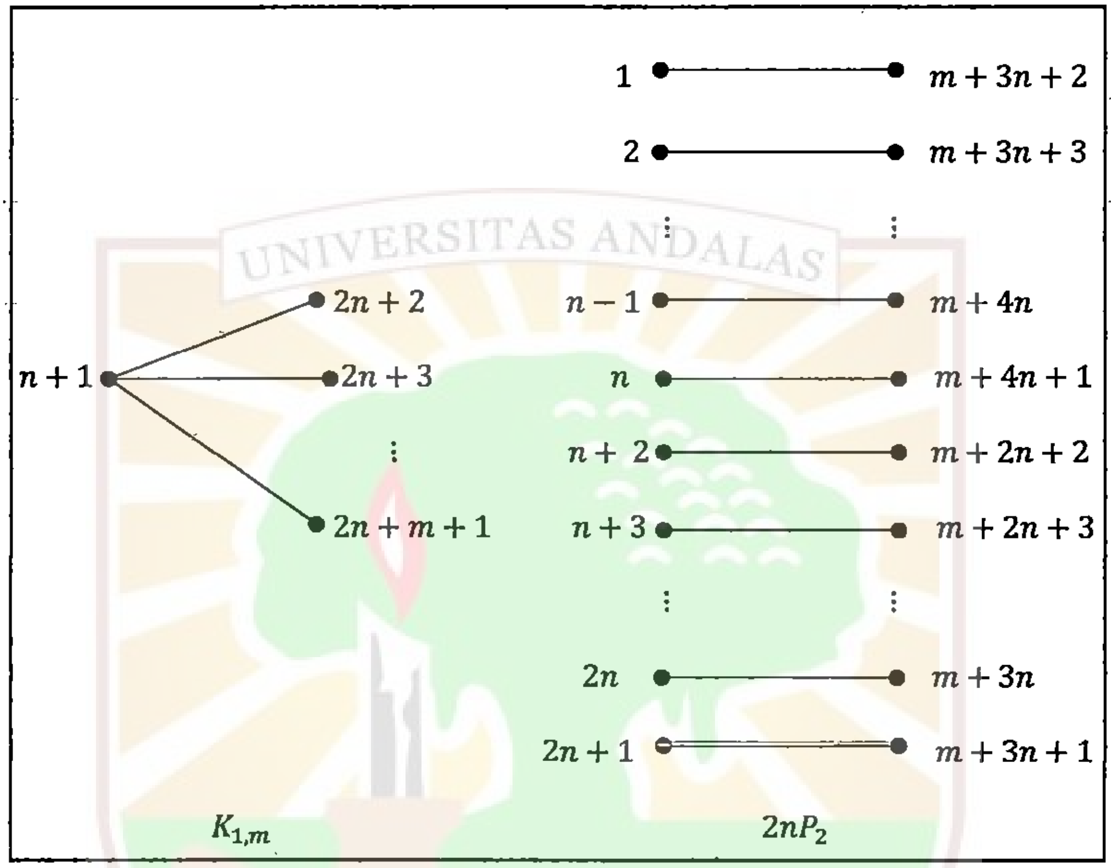
$$g(x) = \begin{cases} m+3n+1, & jika\ x = u; \\ i, & jika\ x = v_i dan\ 1 \le i \le m; \\ m+2i, & jika\ x = w_i\ dan\ 1 \le i \le n; \\ m-2n+2i-1, & jika\ x = w_i\ dan\ n+1 \le i \le 2n; \\ m+5n-i+1, & jika\ x = w_i\ dan\ 2n+1 \le i \le 3n; \\ m+7n-i+2; & jika\ x = w_i\ dan\ 3n+1 \le i \le 4n; \end{cases}$$

Dengan valensi $3m + 9n + 3$.

Untuk mencari valensi $k$ digunakan persamaan $k = p + q + \min(S)$

Diketahui nilai $p = 1 + m + 4n$ dan nilai $q = m + 2n$

Pada gambar 3.1.2, diberikan pelabelan terhadap titik-titik $F$ sebagai berikut :




**Gambar 3.1.2**

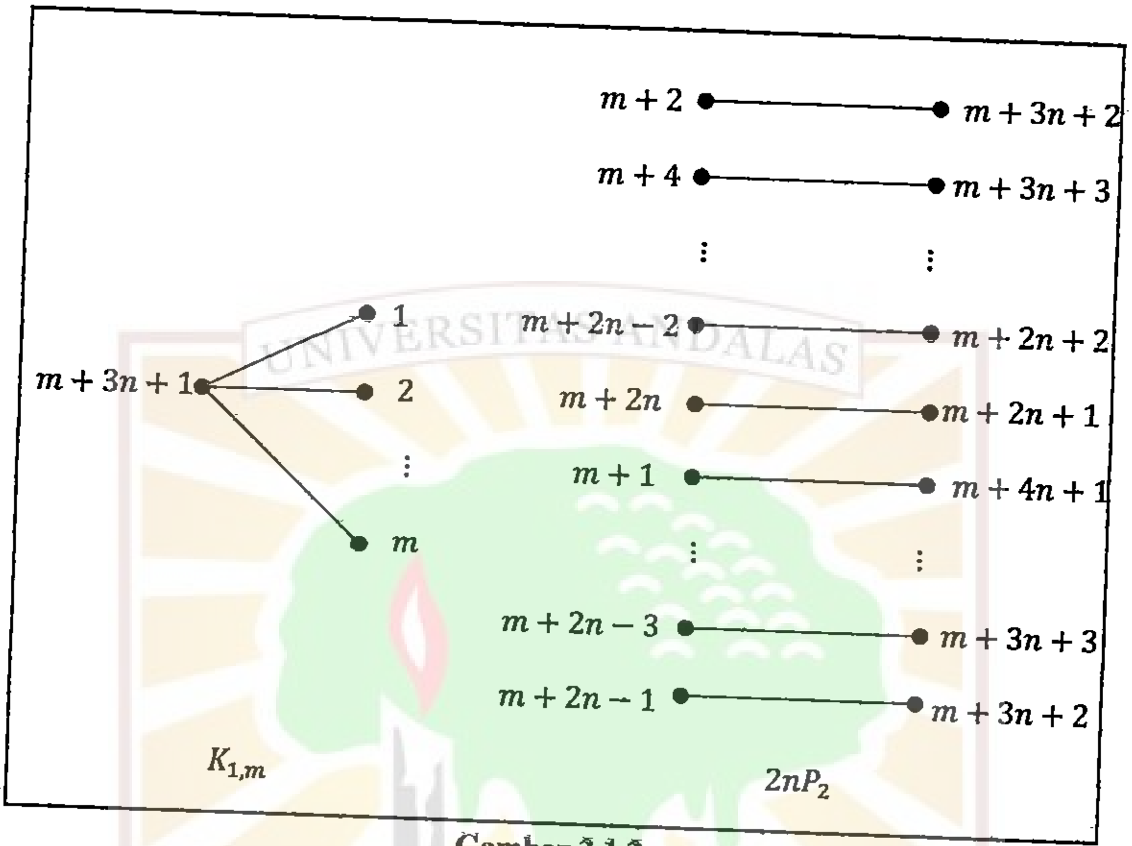
Pelabelan titik untuk Graf $F = K_{1,m} \cup 2nP_2$

Diperoleh nilai $S(f) = \{3n+3, 3n+4, \ldots, 3n+m+2\} \cup \{m+3n+3, m+3n+5, \ldots, m+5n-1, m+5n+1\} \cup \{m+3n+4, m+3n+6, \ldots, m+5n, m+5n+2\}$, dan diperoleh $s = \min(S) = 3n+3$ sehingga diperoleh nilai $k = p + q + \min(S)$

$$= (1 + m + 4n) + (m + 2n) + (3n + 3)$$

$$= 2m + 9n + 4$$

Pada gambar 3.1.3, diberikan pelabelan $g$ terhadap titik $F$ sebagai berikut :




**Gambar 3.1.3**

Pelabelan titik untuk Graf $F = K_{1,m} \cup 2nP_2$

Diperoleh nilai $S(f) = \{m+3n+2, m+3n+3, \ldots, 3n+2m\} \cup \{2m+3n+2, 2m+3n-3, \ldots, 2m+4n,\ 2m+4n+1,\ 2m+4n+2, \ldots, 2m+5n, 2m+5n+1\}$

Diperoleh nilai s = $\min(S) = m+3n+2$, sehingga diperoleh nilai $k = p+q+\min(s)$, sebagai berikut

$$= (1+m+4n) + (m+2n) + (m+3n+2)$$

$$= 3m+9n+3$$

Misalkan k adalah valensi dari pelabelan sisi ajaib super h terhadap F, maka :

$$k = \frac{(m-1)\, h(u) + \sum_{i=1}^{p+q} i}{q} = 2m + 8n + 3 + h(u) + \frac{(2n+1)(n+1-h(u))}{m+2n}$$

Ini berarti bahwa terdapat bilangan bulat α sedemikian sehingga $\alpha(m+2n) = n+1 - h(u)$. Karena $1 \leq h(u) \leq p$, maka diperoleh bahwa $\alpha = 0$ atau $-1$ adalah nilai-nilai yang mengarah pada valensi $2m + 9n + 4$ atau $3m + 9n + 3$ berturut–turut. Untuk pelabelan sisi ajaib (yang tidak super), diperoleh valensi lain, seperti yang terlihat pada akibat berikut.

**Akibat**

Diberikan $F \equiv K_{1,m} \cup 2nP_2$, di mana $m$ dan $n$ adalah bilangan bulat positif dengan $m + 2n$ dan $2n + 1$ relatif prima. Maka pada pelabelan sisi ajaib dari $F$ diperoleh valensi $2m + 9n + 4$, $3m + 9n + 3$ dan $4m + 9n + 2$ .

**Bukti :**

Untuk pembuktian ini, digunakan fakta-fakta dan notasi dari bukti teorema sebelumnya. Pertama misalkan pelabelan titik $h: V(F) \rightarrow \{1,2,\ldots,p\}$ dengan $h(v) = p + q + 1 - f(v)$, yang diperluas untuk pelabelan sisi ajaib dari F dengan valensi $4m + 9n + 2$.

Diketahui

$$k = 2m + 8n + 3 + h(u) + \frac{(2n+1)(n+1-h(u))}{(m+2n)} \qquad \ldots (1)$$

$\alpha(m+2n) = n + 1 - h(u)$ , sehingga diperoleh

$$\alpha = \frac{n+1-h(u)}{(m+2n)} \qquad \ldots (2)$$

1). Untuk $\alpha = 0$, maka dari persamaan (2) diperoleh

$$\alpha = \frac{n + 1 - h(u)}{(m + 2n)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad n + 1 - h(u) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad h(u) = n + 1 \qquad \ldots(3)$$

Substitusikan persamaan (3) kedalam persamaan (1)

$$k = 2m + 8n + 3 + h(u) + \frac{(2n + 1)(n + 1 - h(u))}{(m + 2n)}$$

$$k = 2m + 8n + 3 + n + 1 + 0 = 2m + 9n + 4 \qquad \blacksquare$$

2). Untuk $\alpha = -1$, maka dari persamaan (2) diperoleh

$$\alpha = \frac{n + 1 - h(u)}{(m + 2n)} = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad n + 1 - h(u) = -1(m + 2n)$$

$$\Leftrightarrow \quad n + 1 - h(u) = -m - 2n$$

$$\Leftrightarrow \quad m + 3n + 1 = h(u) \qquad \ldots(4)$$

Substitusikan persamaan (4) kedalam persamaan (1)

$$k = 2m + 8n + 3 + h(u) + \frac{(2n + 1)(n + 1 - h(u))}{(m + 2n)}$$

$$k = 2m + 8n + 3 + m + 3n + 1 + \frac{(2n + 1)(n + 1 - (m + 3n + 1))}{(m + 2n)}$$

$$k = 3m + 11n + 4 - \frac{(2n + 1)(-2n - m)}{(m + 2n)}$$

$$k = 3m + 11n + 4 - 2n - 1 = 3m + 9n + 3 \qquad \blacksquare$$

3). Untuk $\alpha = -2$, maka dari persamaan (2) diperoleh

$$\alpha = \frac{n + 1 = h(u)}{(m + 2n)} = -2$$

$$\Leftrightarrow \quad n + 1 - h(u) = -2(m + 2n)$$

$$\Leftrightarrow \quad n + 1 - h(u) = -2m - 4n$$

$$\Leftrightarrow \quad h(u) = 2m + 5n + 1 \qquad \ldots(5)$$

Substitusikan persamaan (5) kedalam persamaan (1)

$$k = 2m + 8n + 3 + h(u) + \frac{(2n + 1)(n + 1 - h(u))}{(m + 2n)}$$

$$k = 2m + 8n + 3 + 2m + 5n + 1 + \frac{(2n + 1)\big(n + 1 - (2m + 5n + 1)\big)}{(m + 2n)}$$

$$k = 4m + 13n + 4 - \frac{(2n + 1)(n + 1 - 2m - 4n - n - 1)}{(m + 2n)}$$

$$k = 4m + 13n + 4 + (2n + 1)(-2)$$

$$k = 4m + 13n + 4 - 4n + 2 = 4m + 9n + 2 \qquad \blacksquare$$

Telah ditunjukkan bahwa pada pelabelan sisi ajaib terhadap $F$ diperoleh valensi $2m + 9n + 4, 3m + 9n + 3 \text{ dan } 4m + 9n + 2$

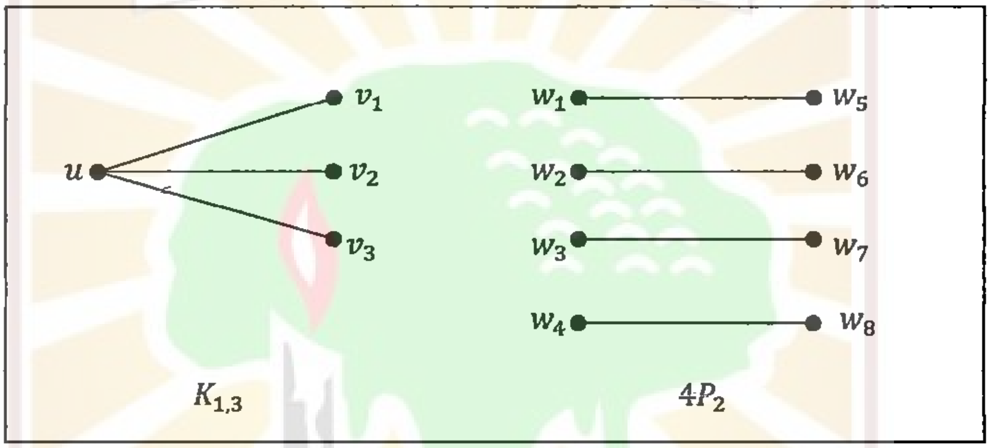
**Aplikasi Kasus 1**

Misal diberikan $F = K_{1,m} \cup 2nP_2$ dengan $m = 3$ dan $n = 2$. Selanjutnya akan ditentukan pelabelan sisi ajaib super dan konstanta ajaib dari graf $F = K_{1,3} \cup 4P_2$.

**Penyelesaian :**

Karena $n = 2$ dan $m = 3$ diperoleh $K_{1,m} = K_{1,3}$ dan $2nP_2 = 4P_2$ sehingga graf hutan yang terbentuk adalah $F = K_{1,3} \cup 4P_2$ . Perhatikan bahwa $m + 2n = 7$ dan $2n + 1 = 5$ adalah prima relatif.

Graf $F = K_{1,3} \cup 4P_2$ seperti yang terbentuk pada gambar




**Gambar 3.1.4**

Graf $F = K_{1,3} \cup 4P_2$

Berikut dikonstruksikan pelabelan pada titik dan sisi dari $F = K_{1,3} \cup 4P_2$

$$f(x) = \begin{cases} n+1 & ,x = u; \\ 2n+i+1 & ,u = v_1 \; untuk \; 1 \le i \le 3; \\ i & ,x = w_i \; untuk \; 1 \le i \le 2; \\ i+1 & ,x = w_i \; untuk \; 3 \le i \le 4; \\ m+n+i+1 & ,x = w_i untuk \; 5 \le i \le 6; \\ m-n+i+1 & ,x = w_i \; untuk \; 7 \le i \le 8; \end{cases}$$

Sehingga label titik dari $F = K_{1,3} \cup 4P_2$ adalah :

$f(u) \; = n + 1 = 3$

$f(v_1) = 2n + i + 1 = 2(2) + 1 + 1 = 6$

$f(v_2) = 2n + i + 1 = 2(2) + 2 + 1 = 7$

$f(v_3) = 2n + i + 1 = 2(2) + 3 + 1 = 8$

dan

$f(w_1) = 1$

$f(w_2) = 2$

$f(w_3) = 3 + 1 = 4$

$f(w_4) = 4 + 1 = 5$

$f(w_5) = 3 + 2 + 5 + 1 = 11$

$f(w_6) = 3 + 2 + 6 + 1 = 12$

$f(w_7) = 3 - 2 + 7 + 1 = 9$

$f(w_8) = 3 - 2 + 8 + 1 = 10$

Pada pelabelan ini terlebih dahulu dicari nilai valensi dari graf $F$, yaitu :

$$k = 2m + 9n + 4 = 2(3) + 9(2) + 4 = 28$$

Selanjutnya diberikan label sisi dari $K_{1,3}$ sebagai berikut :

- $f(uv_1) = k - f(u) + f(v_1)$

  $= 28 - 3 + 6 = 19$

- $f(uv_2) = k - f(u) + f(v_2)$

  $= 28 - 3 + 7 = 18$

- $f(uv_3) = k - f(u) + f(v_3)$

$= 28 - 3 + 8 = 17$

Dan label sisi untuk $4P_2$ adalah :

- $f(w_1w_5) = k - f(w_1) + f(w_5)$

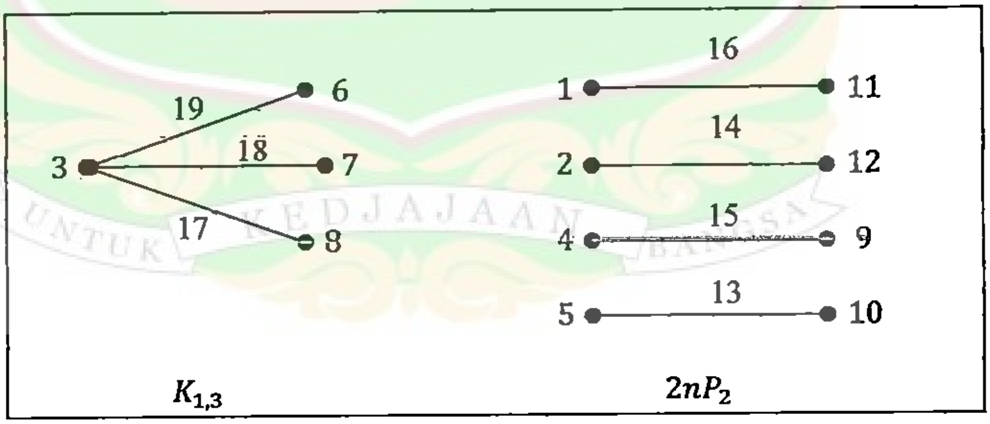
  $= 28 - 1 + 11 = 16$
- $f(w_2w_6) = k - f(w_2) + f(w_6)$

  $= 28 - 2 + 12 = 14$
- $f(w_3w_7) = k - f(w_3) + f(w_7)$

  $= 28 - 4 + 9 = 15$
- $f(w_4w_8) = k - f(w_4) + f(w_8)$

  $= 28 - 5 + 10 = 13$

Jika label sisi digabung dengan label titik sebelumnya, maka diperoleh pelabelan sisi ajaib super untuk graf $F = K_{1,3} \cup 4P_2$, seperti pada Gambar 3.1.3 berikut :




**Gambar 3.1.5**

Pelabelan Sisi Ajaib Super untuk Graf hutan $F = K_{1,3} \cup 4P_2$

Pada Gambar 3.1.3 terlihat bahwa pelabelan di atas merupakan pelabelan sisi ajaib super dengan konstanta ajaib 28.

Selanjutnya dikonstruksikan pelabelan lain pada titik dan sisi dari $\boldsymbol{F = K_{1,3} \cup 4P_2}$ sebagai berikut :

$$g(x) = \begin{cases} m + 3n + 1 & ,x = u; \\ i & ,u = v_1 \; untuk \;\; 1 \le i \le 3; \\ m + 2i & ,x = w_i \; untuk \; 1 \le i \le 2; \\ m - 2n + 2i - 1 & ,x = w_i \; untuk \;\; 3 \le i \le 4; \\ m + 5n - i + 1 & ,x = w_i untuk \; 5 \le i \le 6; \\ m + 7n - i + 2 & ,x = w_i \; untuk \; 7 \le i \le 8; \end{cases}$$

Pelabelan titik dari $F = K_{1,3} \cup 4P_2$ adalah :

$g(u) = 3 + 3(2) + 1 = 10$

$g(v_1) = 1$

$g(v_2) = 2$

$g(v_3) = 3$

dan

$g(w_1) = m + 2i = 3 + 2(1) = 5$

$g(w_2) = m + 2i = 3 + 2(2) = 7$

$g(w_3) = m - 2n + 2i - 1 = 3 - 2(2) + 2(3) - 1 = 4$

$g(w_4) = m - 2n + 2i - 1 = 3 - 2(2) + 2(4) - 1 = 6$

$g(w_5) = m + 5n - i + 1 = 3 + 5(2) - 5 + 1 = 9$

$g(w_6) = m + 5n - i + 1 = 3 + 5(2) - 6 + 1 = 8$

$g(w_7) = m + 7n - i + 2 = 3 + 7(2) - 7 + 2 = 12$

$g(w_8) = m + 7n - i + 2 = 3 + 7(2) - 8 + 2 = 11$

pada pelabelan ini terlebih dahulu dicari nilai valensi dari graf $F$ yaitu

$$k = 3m + 9n + 3 = 3(3) + 9(2) + 3 = 30$$

Selanjutnya diberikan label sisi dari $K_{1,3}$ sebagai berikut :

- $g(uv_1) = k - g(u) + g(v_1)$

  $= 30 - 10 + 1 = 19$

- $g(uv_2) = k - g(u) + g(v_2)$

  $= 30 - 10 + 2 = 18$

- $g(uv_3) = k - g(u) + g(v_3)$

  $= 30 - 10 + 3 = 17$

Dan label sisi untuk $4P_2$ adalah :

- $g(w_1w_5) = k - g(w_1) + g(w_5)$

  $= 30 - 5 + 9 = 16$

- $g(w_2w_6) = k - g(w_2) + g(w_6)$

  $= 30 - 7 + 8 = 15$

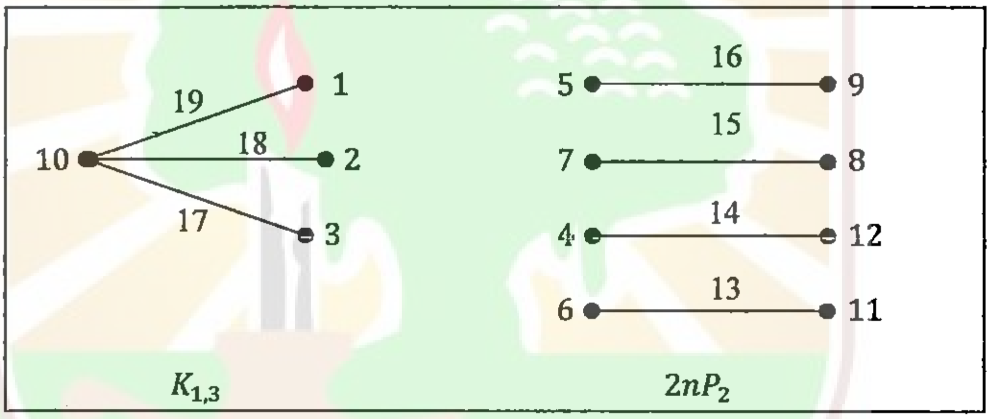
- $g(w_3w_7) = k - g(w_3) + g(w_7)$

  $= 30 - 4 + 12 = 15$

- $g(w_4w_8) = k - g(w_4) + g(w_8)$

  $= 30 - 6 + 11 = 13$

Jika nilai-nilai label sisi ini dimasukkan kedalam graf $F = K_{1,3} \cup 4P_2$ diperoleh graf dengan label pada Gambar 3.1.4




**Gambar 3.1.6**

Pelabelan Sisi Ajaib Super untuk Graf hutan $F = K_{1,3} \cup 4P_2$

Pada gambar 3.1.4 terlihat bahwa pelabelan itu merupakan pelabelan sisi ajaib super dengan konstanta ajaib 30.

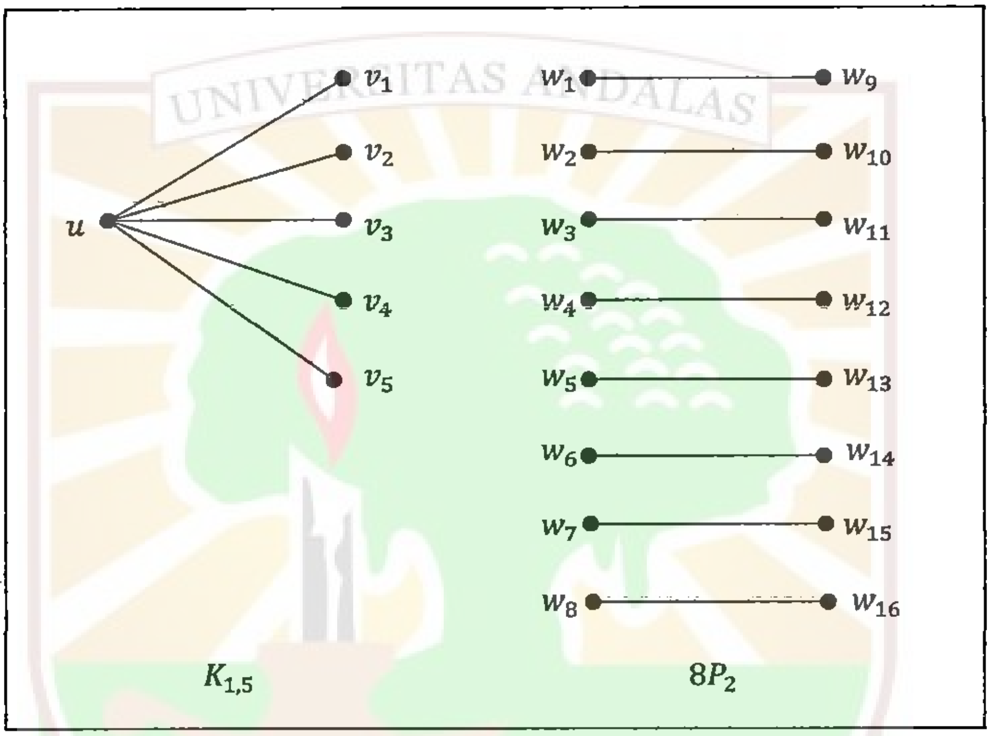
**Aplikasi Kasus 2**

Diberikan $F = K_{1,m} \cup 2nP_2$ dengan $m = 5$ dan $n = 4$. Selanjutnya akan ditentukan pelabelan sisi ajaib super dan konstanta ajaib dari graf $F = K_{1,m} \cup 2nP_2$.

**Penyelesaian**

Karena $n = 4$ dan $m = 5$, diperoleh $K_{1,m} = K_{1,5}$ dan $2nP_2 = 8P_2$, sehingga diperoleh graf hutan yang terbentuk adalah $F = K_{1,5} \cup 8P_2$,

Dengan bentuk graf $F$ seperti gambar berikut :




**Gambar 3.1.7**

Graf $F = K_{1,5} \cup 8P_2$

Berikut dikonstruksikan pelabelan pada titik dan sisi dari $F = K_{1,5} \cup 8P_2$

$$f(x) = \begin{cases} n+1, & jika\ x = u; \\ (2n+i+1), & jika\ u = v_i\ dan\ 1 \leq i \leq 5; \\ i, & jika\ x = w_i\ dan\ 1 \leq i \leq 4; \\ i+1, & jika\ x = w_i\ dan\ 5 \leq i \leq 8; \\ m+n+i+1, & jika\ x = w_i\ dan\ 9 \leq i \leq 12; \\ m-n+i+1, & jika\ x = w_i\ dan\ 13 \leq i \leq 16; \end{cases}$$

Sehingga label titik dari $F = K_{1,5} \cup 8P_2$ adalah :

$f(u) = 5$ ,

$f(v_1) = 2(4) + 1 + 1 = 10,$

$f(v_2) = 2(4) + 2 + 1 = 11,$

$f(v_3) = 2(4) + 3 + 1 = 12,$

$f(v_4) = 2(4) + 4 + 1 = 13,$

$f(v_5) = 2(4) + 5 + 1 = 14.$

dan

$f(w_1) = 1,$

$f(w_2) = 2,$

$f(w_3) = 3,$

$f(w_4) = 4,$

$f(w_5) = 6,$

$f(w_6) = 7,$

$f(w_7) = 8,$

$f(w_8) = 9,$

$f(w_9) = 5 + 4 + 9 + 1 = 19,$

$f(w_{10}) = 5 + 4 + 10 + 1 = 20,$

$f(w_{11}) = 5 + 4 + 11 + 1 = 21,$

$f(w_{12}) = 5 + 4 + 12 + 1 = 22,$

$f(w_{13}) = 5 - 4 + 13 + 1 = 15,$

$f(w_{14}) = 5 - 4 + 14 + 1 = 16,$

$f(w_{15}) = 5 - 4 + 15 + 1 = 17,$

$f(w_{16}) = 5 - 4 + 16 + 1 = 18.$

Pada pelabelan ini terlebih dahulu dicari nilai valensi dari graf $F$, yaitu :

$$k = 2m + 9n + 4 = 2(5) + 9(4) + 4 = 50$$

Selanjutnya diberikan label sisi dari $K_{1,5}$ sebagai berikut :

$f(uv_1) = k - (f(u) + f(v_1))$

$= 50 - (5 + 10) = 35$

$f(uv_2) = k - (f(u) + f(v_2))$

$= 50 - (5 + 11) = 34$

$f(uv_3) = k - (f(u) + f(v_3))$

$= 50 - (5 + 12) = 33$

$f(uv_4) = k - (f(u) + f(v_4))$

$= 50 - (5 + 13) = 32$

$f(uv_5) = k - (f(u) + f(v_5)$

$= 50 - (5 + 14) = 31$

Dan label sisi untuk $8P_2$ adalah :

$f(w_1w_9) = k - f(w_1) + f(w_9)$

$= 50 - 1 + 19 = 30$

$f(w_2w_{10}) = k - f(w_2) + f(w_{10})$

$= 50 - 2 + 20 = 28$

$f(w_3w_{11}) = k - f(w_3) + f(w_{11})$

$= 50 - 3 + 21 = 26$

$f(w_4w_{12}) = k - f(w_4) + f(w_{12})$

$= 50 - 4 + 22 = 24$

$f(w_5w_{13}) = k - f(w_5) + f(w_{13})$

$= 50 - 5 + 15 = 29$

$f(w_6w_{14}) = k - f(w_6) + f(w_{14})$

$= 50 - 6 + 16 = 27$

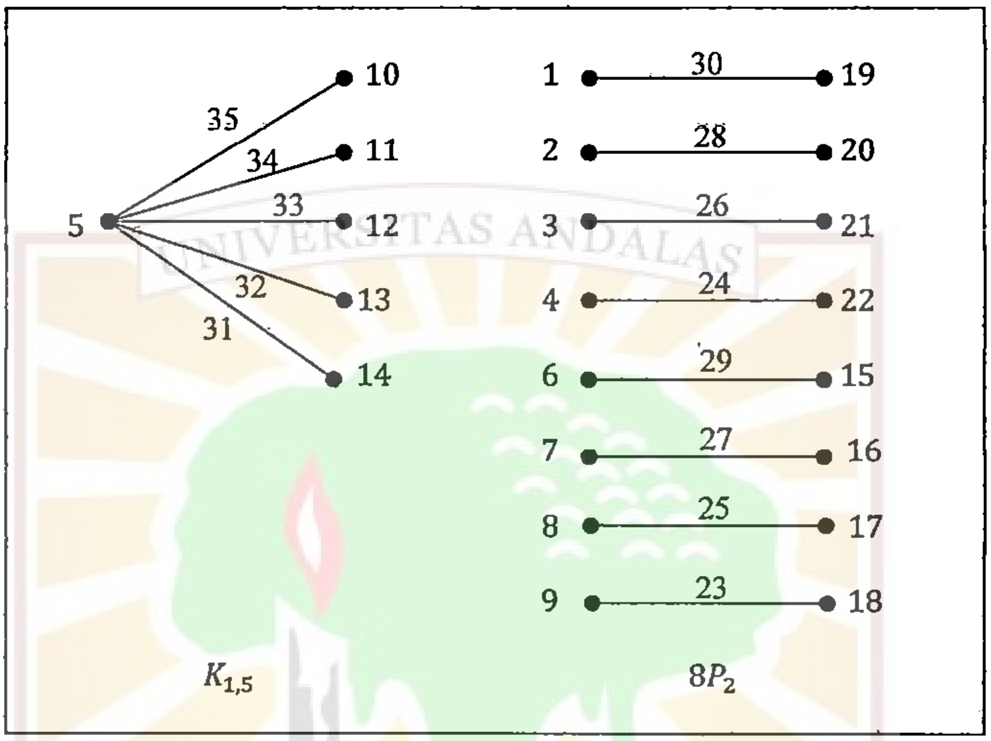
$f(w_7w_{15}) = k - f(w_7) + f(w_{15})$

$= 50 - 7 + 17 = 25$

$f(w_8w_{16}) = k - f(w_8) + f(w_{16})$

$= 50 - 8 + 18 = 23$

Jika label sisi digabung dengan label titik, maka diperoleh pelabelan total sisi ajaib pada $F = K_{1,5} \cup 8P_2$, dengan pelabelan seperti pada Gambar 3.1.8




**Gambar 3.1.8**

Pelabelan Sisi Ajaib Super untuk Graf hutan $F = K_{1,5} \cup 8P_2$

Pada Gambar 3.1.6 terlihat bahwa pelabelan diatas merupakan pelabelan sisi ajaib super dengan konstanta ajaib 50.

**Diberikan sebuah fungsi**

$$g(x) = \begin{cases} m + 3n + 1, & jika\ x = u; \\ i, & jika\ x = v_i dan\ 1 \leq i \leq 5; \\ m + 2i, & jika\ x = w_i\ dan\ 1 \leq i \leq 4; \\ m - 2n + 2i - 1, & jika\ x = w_i\ dan\ 5 \leq i \leq 8; \\ m + 5n - i + 1, & jika\ x = w_i\ dan\ 9 \leq i \leq 12; \\ m + 7n - i + 2, & jika\ x = w_i\ dan\ 13 \leq i \leq 16; \end{cases}$$

Pelabelan pada titik dan sisi dari $F = K_{1,5} \cup 8P_2$ adalah :

$g(u) = 5 + 3(4) + 1 = 18$

$g(v_1) = 1$ ,

$g(v_2) = 2$ ,

$g(v_3) = 3$ ,

$g(v_4) = 4$ ,

$g(v_5) = 5$ ,

dan

$g(w_1) = 7,$

$g(w_2) = 9,$

$g(w_3) = 11,$

$g(w_4) = 13,$

$g(w_5) = 5 - 2(4) + 2(5) - 1 = 5 - 8 + 10 - 1 = 6,$

$g(w_6) = 5 - 2(4) + 2(6) - 1 = 5 - 8 + 12 - 1 = 8,$

$g(w_7) = 5 - 2(4) + 2(7) - 1 = 5 - 8 + 14 - 1 = 10,$

$g(w_8) = 5 - 2(4) + 2(8) - 1 = 5 - 8 + 16 - 1 = 12,$

$g(w_9) = 5 + 5(4) - 9 + 1 = 17,$

$g(w_{10}) = 5 + 5(4) - 10 + 1 = 16,$

$g(w_{11}) = 5 + 5(4) - 11 + 1 = 15,$

$g(w_{12}) = 5 + 5(4) - 12 + 1 = 14,$

$g(w_{13}) = 5 + 5(4) - 13 + 2 = 22,$

$g(w_{14}) = 5 + 5(4) - 14 + 2 = 21,$

$g(w_{15}) = 5 + 5(4) - 15 + 2 = 20,$

$g(w_{16}) = 5 + 5(4) - 16 + 2 = 19.$

pada pelabelan ini terlebih dahulu dicari nilai valensi dari graf $F$ yaitu:

$$k = 3m + 9n + 3 = 3(5) + 9(4) + 3 = 54$$

Selanjutnya dapat diperoleh label sisi dari $K_{1,5}$ adalah :

$g(uv_1) = k - g(u) + g(v_1)$

$= 54 - 18 + 1 = 35$

$g(uv_2) = k - g(u) + g(v_2)$

$= 54 - 18 + 2 = 34$

$g(uv_3) = k - g(u) + g(v_3)$

$= 54 - 18 + 3 = 33$

$g(uv_4) = k - g(u) + g(v_4)$

$= 54 - 18 + 4 = 32$

$g(uv_5) = k - g(u) + g(v_5)$

$= 54 - 18 + 3 = 31$

Dan label sisi untuk $8P_2$ adalah :

$$g(w_1w_9) = k - g(w_1) + g(w_9)$$

$$= 54 - 7 + 17 = 30$$

$$g(w_2w_{10}) = k - g(w_2) + g(w_{10})$$

$$= 54 - 9 + 16 = 29$$

$$g(w_3w_{11}) = k - g(w_3) + g(w_{11})$$

$$= 54 - 11 + 15 = 28$$

$$g(w_4w_{12}) = k - g(w_4) + g(w_{12})$$

$$= 54 - 13 + 14 = 27$$

$$g(w_5w_{13}) = k - g(w_5) + g(w_{13})$$

$$= 54 - 6 + 22 = 26$$

$$g(w_6w_{14}) = k - g(w_6) + g(w_{14})$$

$$= 54 - 8 + 21 = 25$$

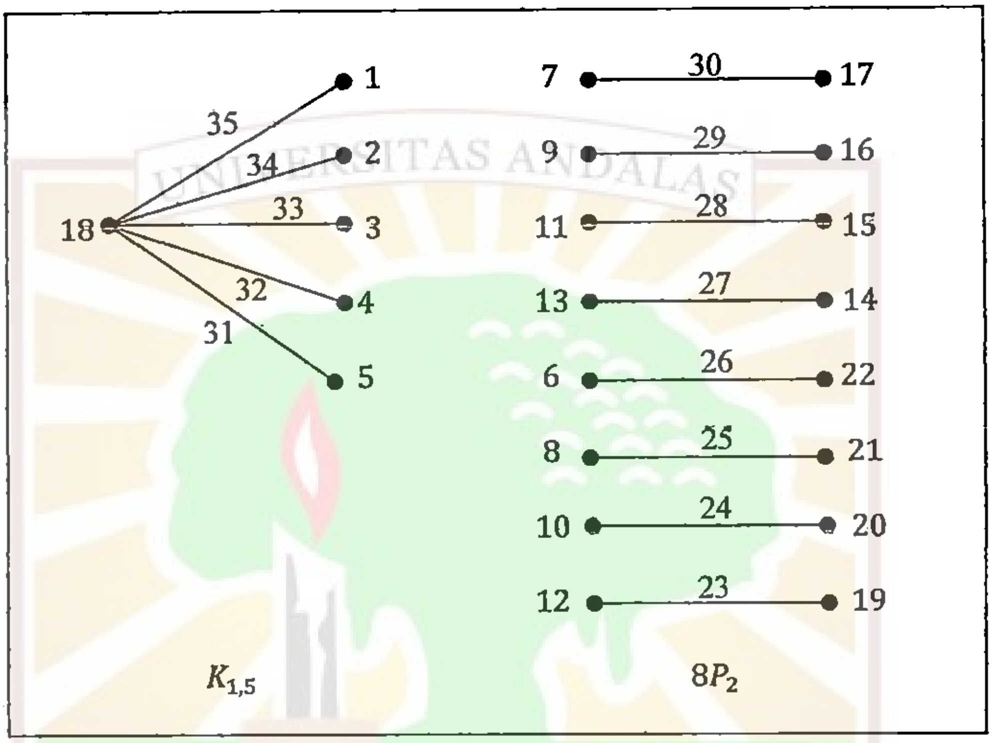
$$g(w_7w_{15}) = k - g(w_7) + g(w_{15})$$

$$= 54 - 10 + 20 = 24$$

$$g(w_8w_{16}) = k - g(w_8) + g(w_{16})$$

$$= 54 - 12 + 19 = 23$$

Jika nilai-nilai label sisi ini dimasukkan kedalam graf $F = K_{1,3} \cup 4P_2$ diperoleh pelabelan sisi ajaib super untuk $F = K_{1,3} \cup 4P_2$ dengan label pada Gambar 3.1.7




**Gambar 3.1.9**

Pelabelan Sisi Ajaib Super untuk Graf hutan $F = K_{1,3} \cup 4P_2$

Pada Gambar 3.1.7 terlihat bahwa pelabelan diatas merupakan pelabelan sisi ajaib super dengan konstanta ajaib 54.

# BAB IV

## KESIMPULAN

Misalkan terdapat graf hutan $F = K_{1,m} \cup 2nP_2$ dengan m dan n bilangan bulat positif, dan himpunan titik serta sisi didefinisikan sebagai berikut:

$$V(F) = \{u\} \cup \{v_i | 1 \le i \le m\} \cup \{w_i | 1 \le i \le 4n\}$$

dan

$$E(F) = \{uv_i | 1 \le i \le m\} \cup \{w_i w_{2n+i} | 1 \le i \le 2n\}$$

Pada tulisan ini telah ditunjukkan bahwa $F = K_{1,m} \cup 2nP_2$ mempunyai pelabelan sisi ajaib super dengan pelabelan titik

$f : V(F) \rightarrow \{1, 2,3\ \ldots, m + 4n + 1\}$ sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} n+1, & jika\ x = u; \\ (2n+i+1), & jika\ x = v_i\ dan\ 1 \le i \le m; \\ i; & jika\ x = w_i\ dan\ 1 \le i \le n; \\ i+1, & jika\ x = w_i\ dan\ n+1 \le i \le 2n; \\ m+n+i+1, & jika\ x = w_i\ dan\ 2n+1 \le i \le 3n; \\ m-n+i+1, & jika\ x = w_i\ dan\ 3n+1 \le i \le 4n; \end{cases}$$

dengan valensi $2m + 9n + 4$.

Selanjutnya juga diperoleh bahwa $F$ mempunyai pelabelan sisi ajaib super dengan pelabelan titik $f: V(F) \rightarrow \{1,2,3\ \ldots, m + 4n + 1\}$ sebagai berikut

$$g(x) = \begin{cases} m+3n+1, & jika\ x = u; \\ i, & jika\ x = v_i dan\ 1 \leq i \leq m; \\ m+2i, & jika\ x = w_i\ dan\ 1 \leq i \leq n; \\ m-2n+2i-1, & jika\ x = w_i\ dan\ n+1 \leq i \leq 2n; \\ m+5n-i+1, & jika\ x = w_i\ dan\ 2n+1 \leq i \leq 3n; \\ m+7n-i+2, & jika\ x = w_i\ dan\ 3n+1 \leq i \leq 4n; \end{cases}$$

dengan valensi $3m + 9n + 3$.

Valensi yang diperoleh pada pelabelan tersebut adalah $2m + 9n + 4$ dan $3m + 9n + 3$.

## DAFTAR KEPUSTAKAAN


[1] Baca, M. dan M. Miller. 2008, **Super Edge-Antimagic Graphs** Brown Walker Press, Boca Raton-Florida.

[2] Bondy, J.A, and Murty, U.S.R. 1976. **Graph Theory with Applications** Canada.

[3] Chartrand, G and Lesniak, L. 1986. **Graph and Digraph $2^{nd}$ Edition**. California: Wadsworth, Inc.

[4] Centeno,R. M. F, dkk. 2005. **On Edge Magic Labelings of Certain Disjoint Unions of Graphs.** *Australian Journal of Combinatorics*, 225-242.

[5] Munir, R. 2005. **Matematika Diskrit**. Edisi 3. Penerbit Informatika, Bandung.

[6] West, D.B. 2001. **Introduction to Graph Theory** Prentice-Hall, United States of America.

## RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis bernama Novi Sriyanti, dilahirkan di Bukittinggi pada tanggal 31 Oktober 1985, anak kedua dari lima bersaudara, buah hati dari pasangan H.Syafrul Efendi dan Hj.Asmanidar. Penulis menamatkan pendidikan dasar di SDN 24 Tarok Dipo, Bukittinggi pada tahun 1998 kemudian melanjutkan ke SLTPN 4 Panorama Bukittinggi dan menamatkannya pada tahun 2001. Penulis melanjutkan pendidikan ke SMAN 3 Bukittinggi dan selesai pada tahun 2004. Di tahun yang sama penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur SPMB.

Selama menjadi mahasiswa di jurusan Matematika FMIPA UNAND, penulis ikut Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA).Penulis melaksanakan Praktek Kerja Lapangan (PKL) pada tahun 2007 Kabupaten Merangin Bangko Provinsi Jambi. Dalam rangka menyelesaikan mata kuliah wajib.