CENTRE DARI CRUP ALJABAR CC DAN KARAKTERISTIKNYA

SKRIPSI

ROSMELY
07934008

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2011

Sabar itu bagaikan jamu, pahit rasanya,

tetapi akibatnya lebih manis daripada madu.

Jadilah penyabar jika kemarahan mengujimu,

dan lebih penyabar lagi jika musibah datang menghampiri

Siapa yang belum pernah merasakan sulitnya belajar walau sesaat, maka dia akan merasakan hinanya kebodohan sepanjang hidupnya.

Demi Allah, hidup seseorang itu dengan ilmu dan ketakwaan,
jika keduanya tidak ada, maka keberadaanya tidak dianggap.

Karya ini ku persembahkan buat Ama dan Apa orang paling penting dalam hidupku.

Special Thank's to...

Orang yang paling-paling-paling aQ sayang Ama dan Apa. Sangat bersyukur di lahirkan dari rahim wanita sekuat dan setegar Ama dan laki-laki sesabar Apa.

Adek2Q mimi, pitra, dan yeni semoga jadi orang sukses dan bisa buat Ama, Apa dan semua orang bangga. Amin

KeluargaQ yang selalu memberi dukungan, semangat, dan do'a; almh.enek, ante Nis, pak etek, om, ante Yol, pak uncu, nek masin, inyik, dan bayak lagi yang lain yang Q sayangi dan menyayangiQ tanpa mengharapkan balasan.

Sahabat SISIJA jauh di mata dekat di hati, Su"(orang paling baik dan kocak), Anis(sering2 k BKT y!), Thia (cepat sembuh dan tetap semangat), Arun(semoga urusannya dimudahkan ya!), Febri(Beda udah tambah dewasa skarang), dan Ayu(harus PD!). Kapan ya Qt bisa ketemu dan gila-gilaan lagi???

Fajrin orang yang paling bijak yang suka kasih masukan2 yang sangat bermanfaat dari dulu sampai sekarang, temen sekamar, temen jalan, temen PTH selalu bareng Fajrin...Miz U Jrin.

Sabat yang bagaikan keluarga Ida(tQ udah jadi sahabat selama ini dan semoga untuk selamanya), Tia(ketua yang sabar ya!), Cita(cepat sembuh y), Amel(seriuslah lagi kuliahnya!), Revi, Ami, dan Is kalau udah ngumpul heboh banget! Kapan Qt jalan-jalan lagi???

Kak Leli makasih bantuan belajarnya kak dan nasehat2nya!

Saudara sebimbingan Tia, ni Mega, dan da Irfan cayoooooo! Revi(Alhamdulillah selesai juga walau banyak rintangan), da Santri(suka pamer buat emosi hehe...maaf ya!).

SoBeb...Lina, uniBeb...uni Novi dan uni Eka semagat ya!, adikBeb...Iin, Dian, Sofi (semoga cepat menyusul).

Kawan2 Mc Zoven (Echa, Riri, Andra, Jeng Prima, Dia, Ipat, Ane, Anggun, Iwid, Pia, Ami, Mia, Novi, Ciap, Joko, Newton, Yona, Ona, Icut, Jesi, Desma, Yulian, Jeng Meri, Winda, Resti, Dian, Lia, Tia, Ririn, Doeng, Imel, Nurul, Vivi, Melisa, Rian, Puput, Tika, Hime, Ferdi, Sobri, Paul, Angga).

Anggota HIMATIKA dan Mahasiswa Matematika Unand yang tidak bisa diucap semua.

Serta siapa saja yang pernah membantu dan hadir dalam hidupQ. Terimakasih tak terhingga buat semuanya. Semoga Qt semua dalam lindungan Allah. Amin

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

Alhamdulillah, puji syukur penulis sampaikan kehadirat Allah SWT karena berkat ridho dan izin-Nya jualah penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul **"*Centre* dari Grup Aljabar $\mathbb{C}G$ dan Karakteristiknya"**. Salawat dan salam tidak lupa penulis kirimkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW yang telah membawa umat manusia dari zaman kebodohan ke zaman yang penuh ilmu pengetahuan. Skripsi ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang.

Selanjutnya, penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini, terutama kepada :

1. Ibu Monika Rianti Helmi, M.Si selaku Pembimbing I yang telah dengan sabar membantu mengarahkan penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Serta ilmu, ide, saran, dan nasihat yang diberikan selama proses bimbingan tugas akhir maupun selama penulis menjalani perkuliahan.
2. Bapak Efendi, M.Si selaku Pembimbing II yang telah membantu penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini. Serta ilmu yang didapat selama penulis menjalani perkuliahan.
3. Bapak Narwen, M.Si, Bapak Prof. Dr. I Made Arnawa, dan Ibu Dr. Susila Bahri selaku penguji yang telah membaca, memberi masukan dan saran kepada penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.

4. Bapak Prof. Dr. I Made Arnawa selaku Pembimbing Akademik yang telah membantu penulis dalam urusan akademik terutama dalam merancang studi agar dapat selesai tepat pada waktunya. Serta nasihat dan ilmu yang telah diberikan selama penulis menjalani proses studi.
5. Bapak Dr. Syafrizal Sy selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang.
6. Bapak/Ibu dosen dan karyawan/i Jurusan Matematika FMIPA Unand.

Penulis selalu terbuka terhadap sumbangan pemikiran baik kritik maupun saran, karena tidak ada sesuatu yang sempurna dalam hidup ini, sehingga proses belajar dari kehidupan itu sendiri menjadi sangat penting dalam rangka pendewasaan diri baik pikiran maupun sikap dalam menyikapi kehidupan. Besar harapan, semoga skripsi ini bermanfaat untuk sivitas akademik Universitas Andalas khususnya dan masyarakat umumnya. Amin.

Padang, Agustus 2011

Penulis

ABSTRAK

Misalkan G adalah grup hingga dengan unsur-unsur $g_1, g_2, \dots, g_n$ dan misalkan F adalah lapangan $\mathbb{C}$, maka ruang vektor atas $\mathbb{C}$ dengan $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ sebagai basis dinamakan ruang vektor $\mathbb{C}G$. Unsur-unsur $\mathbb{C}G$ berbentuk : $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_n g_n$ dengan $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Grup aljabar $\mathbb{C}$G adalah suatu ruang vektor $\mathbb{C}$G yang didalamya didefinisikan perkalian sebagai berikut :

$\sum_{g \in G} \lambda_g g \sum_{h \in G} \mu_h h = \sum_{g,h \in G} \lambda_g \mu_h (gh)$ dengan $\lambda_g, \mu_h \in \mathbb{C}$ dan untuk setiap g, h $\in$ G.
Dalam grup aljabar $\mathbb{C}$G terdapat suatu subruang yang dinamakan *centre* dari grup aljabar $\mathbb{C}$G, ditulis Z($\mathbb{C}$G). Z($\mathbb{C}$G) memuat unsur-unsur yang komutatif dengan semua unsur di grup aljabar $\mathbb{C}$G. $Z(\mathbb{C}G) \subseteq \mathbb{C}G$. Aksi dari unsur $Z(\mathbb{C}G)$ dengan unsur dari $\mathbb{C}G$-modul tak tereduksi merupakan perkalian skalar dengan unsur $\mathbb{C}G$-modul tersebut. $Z(\mathbb{C}G)$ mempunyai hubungan dengan *centre* dari grup G, $Z(G)$, karena untuk setiap $g \in G$ dapat dituliskan dalam bentuk ruang vektor $\mathbb{C}G$, maka $Z(G) \subseteq Z(\mathbb{C}G)$. Aksi dari unsur $\mathbb{C}G$-modul *faithful* tak tereduksi dengan $\mathbb{C}^*$ grup multiplikatif dari bilangan kompleks tak nol, sehingga $Z(G) \cong \{\lambda_z : z \in Z(G)\}$ merupakan subgrup hingga dari $\mathbb{C}^*$, adalah siklik.

Kata kunci: *grup aljabar $\mathbb{C}G$, centre dari grup aljabar $\mathbb{C}G$, karakteristik dari* $Z(\mathbb{C}G)$.

DAFTAR ISI

BAB IV KESIMPULAN

DAFTAR PUSTAKA

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam aljabar abstrak dikenal suatu teori yang mempelajari grup dalam bentuk matriks. Teori ini dikenal dengan nama Teori Representasi. Representasi dari grup G adalah homomorfisma grup

$$\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$$

untuk suatu $n \in \mathbb{N}$, dimana $GL_n(\mathbb{C})$ adalah grup linier umum berderajat n atas $\mathbb{C}$ yang beranggotakan matriks $n \times n$ yang dapat diinverskan dengan komponennya adalah unsur di bilangnan kompleks $\mathbb{C}$. Bilangan asli n dinamakan derajat dari ρ. Dengan demikian, jika ρ adalah suatu fungsi G ke $GL_n(\mathbb{C})$, maka ρ adalah suatu representasi jika dan hanya jika

$$\rho(gh) = \rho(g)\rho(h) \text{ untuk semua } g, h \in G.$$

Representasi dari grup G mempunyai hubungan erat dengan $\mathbb{C}G$-modul. Suatu $\mathbb{C}G$-modul yaitu suatu ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan $\mathbb{C}$ yang didalamnya didefinisikan suatu perkalian gv dengan $g \in G$ dan $v \in V$ yang memenuhi kondisi tertentu. Misalkan G adalah grup hingga dengan unsur-unsur $g_1, g_2, \dots, g_n$ dan misalkan F adalah lapangan $\mathbb{C}$, maka ruang vektor atas $\mathbb{C}$ dengan $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ sebagai basis dinamakan ruang vektor $\mathbb{C}G$.

Unsur-unsur $\mathbb{C}G$ berbentuk :

$$\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_n g_n \text{ dengan } \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

Jika $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ dan $v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i g_i$, maka penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{C}G$ didefinisikan dengan :

$$u + v = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) g_i \text{ dan } ku = \sum_{i=1}^{n} (k\lambda_i) g_i.$$

Dengan demikian, $\mathbb{C}G$ merupakan suatu ruang vektor atas $\mathbb{C}$ berdimensi $n = |G|$ dengan basis $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$.

Salah satu teori yang menjadi dasar dari teori representasi adalah teori tentang grup aljabar $\mathbb{C}G$. Grup aljabar $\mathbb{C}G$ adalah suatu ruang vektor $\mathbb{C}G$ yang didalamya didefinisikan perkalian sebagai berikut :

$$\sum_{g \in G} \lambda_g g \sum_{h \in G} \mu_h h = \sum_{g,h \in G} \lambda_g \mu_h (gh),$$

dengan $\lambda_g, \mu_h \in \mathbb{C}$ dan untuk setiap $g, h \in G$. Dalam grup aljabar $\mathbb{C}G$ terdapat suatu subruang yang dinamakan *centre* dari grup aljabar $\mathbb{C}G$. *Centre* dari grup aljabar $\mathbb{C}G$ ditulis $Z(\mathbb{C}G)$, dan didefinisikan sebagai berikut :

$$Z(\mathbb{C}G) = \{z \in \mathbb{C}G | \, zr = rz \;\; \forall \, r \in \mathbb{C}G\}. [4]$$

Dengan kata lain $Z(\mathbb{C}G)$ memuat unsur-unsur yang komutatif dengan semua unsur di grup aljabar $\mathbb{C}G$. Dalam tulisan ini akan dijelaskan karakteristik dari $Z(\mathbb{C}G)$ dan hubungannya dengan *centre* dari grup G, yaitu $Z(G)$, yang didefinisikan sebagai berikut :

$$Z(G) = \{z \in G | \, zg = gz \;\; \forall \, g \in G\}. [4]$$

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka perumusan masalah dalam penelitian ini adalah :

1. Bagaimana karakteristik dari $Z(\mathbb{C}G)$.
2. Bagaimana hubungan antara $Z(\mathbb{C}G)$ dengan $Z(G)$.

1.3 Pembatasan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka dalam tulisan ini hanya akan dibahas *centre* dari grup aljabar $\mathbb{C}G$, yang dibangun dari grup hingga dan ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan kompleks.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Menjelaskan karakteristik dari $Z(\mathbb{C}G)$.
2. Menjelaskan hubungan antara $Z(\mathbb{C}G)$ dengan $Z(G)$.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut: Bab 1 Pendahuluan yang menjelaskan latar belakang masalah, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan. Bab 2 Landasan Teori berisi teori-teori yang digunakan untuk pembahasan pada bab berikutnya, yaitu Bab 3. Pada Bab 3 berisi pembahasan yang akan menjelaskan karakteristik dari $Z(\mathbb{C}G)$ dan hubungannya dengan $Z(G)$. Dan Kesimpulan pada Bab 4 berisi kesimpulan-kesimpulan dari pembahasan.

BAB II

LANDASAN TEORI

Bab ini berisi teori-teori yang digunakan untuk pembahasan pada bab berikutnya.

2.1 Grup

Definisi 2.1.1 [5]

Misalkan G adalah suatu himpunan tak kosong. G dikatakan suatu grup jika pada G dapat didefinisikan suatu operasi biner, ditulis ' $*$ ' sedemikian sehingga:

1. Untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$.
2. Untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.
3. Terdapat suatu unsur di G yang dilambangkan dengan e, sehingga untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$.
4. Untuk setiap $a \in G$, terdapat suatu unsur $b \in G$, sehingga berlaku $a * b = b * a = e$. Dengan b disebut invers dari a dan ditulis $b = a^{-1}$.

Definisi 2.1.2 [5]

Misalkan G suatu grup. G disebut grup komutatif (grup abel) jika setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$.

Grup G dengan operasi biner ' $*$ ', ditulis $(G,*)$, dan untuk setiap $a, b \in G$, ditulis $a * b$. Untuk selanjutnya dalam tulisan ini $a * b$ hanya akan ditulis ab.

Lema 2.1.3

Misalkan $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ dan $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ adalah grup pada bilangan kompleks tak nol terhadap operasi perkalian pada bilangan kompleks. $\mathbb{C}^*$ dinamakan grup multiplikatif.

Bukti.

Akan ditunjukkan $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ merupakan grup terhadap operasi perkalian pada bilangan kompleks:

i. Bersifat tutup. Akan ditunjukkan $z_1z_2 \in \mathbb{C}^*$. Ambil sebarang $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, maka z_1 dan z_2 tidak keduanya nol. Karena $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ maka dapat ditulis $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ dengan $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

   Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
z_1z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\
&= x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 - y_1y_2 \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).
\end{aligned}
$$

   Namakan $x_1x_2 - y_1y_2 = x_3$ dan $x_1y_2 + x_2y_1 = y_3$ dengan $x_3, y_3 \in \mathbb{C}^*$. Akibatnya $z_1z_2 = x_3 + iy_3 \in \mathbb{C}^*$.

ii. Bersifat asosiatif. Akan ditunjukkan $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$. Ambil sebarang $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$. Karena $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ maka dapat ditulis $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ dan $z_3 = x_3 + iy_3$ dengan $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$.

   Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
[z_1z_2]z_3 &= [(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)](x_3 + iy_3) \\
&= [x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 - y_1y_2](x_3 + iy_3) \\
&= x_1x_2x_3 + ix_1x_2y_3 + ix_1x_3y_2 - x_1y_2y_3 + ix_2x_3y_1 - x_2y_1y_3 \\
&\qquad - x_3y_1y_2 - iy_1y_2y_3 \\
&= (x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3 - x_3y_1y_2) \\
&\qquad + i(x_1x_2y_3 + x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1 - y_1y_2y_3)
\end{aligned}
$$

$$= [x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(x_2y_3 + x_3y_2)]$$

$$+ i[x_1(x_2y_3 + x_3y_1) + y_1(x_2x_3 - y_2y_3)]$$

$$= (x_1 + iy_1)[(x_2x_3 - y_2y_3) + i(x_2y_3 + x_3y_2)]$$

$$= (x_1 + iy_1)[(x_2 + iy_2)(x_3 + iy_3)]$$

$$= z_1[z_2z_3].$$

Ini berarti bahwa $\mathbb{C}^*$ bersifat asosiatif.

iii. Ambil $z \in \mathbb{C}^*$, terdapat $1 \in \mathbb{C}^*$ sehingga $z1 = 1z = z$ untuk setiap $z \in \mathbb{C}^*$. Karena $z \in \mathbb{C}^*$ dan $1 \in \mathbb{C}^*$ maka dapat ditulis $z = x + iy$ dan $1 = 1 + i0$.

Perhatikan bahwa

$$z1 = (x + iy)(1 + i0) = (1 + i0)(x + iy) = 1z = z.$$

Ini berarti bahwa $\mathbb{C}^*$ mempunyai identitas.

iv. Ambil $z \in \mathbb{C}^*$, terdapat $z^{-1} \in \mathbb{C}^*$ sehingga berlaku $zz^{-1} = 1$. Akan dicari $z^{-1} \in \mathbb{C}^*$. Karena $z, z^{-1} \in \mathbb{C}^*$, maka dapat ditulis $z = x + iy$ dan misalkan $z^{-1} = u + iv$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} zz^{-1} &= (x + iy)(u + iv) \\ &= xu + ixv + iyu - yv \\ &= (xu - yv) + i(xv + yu) \\ &= 1 + i0. \end{aligned}$$

Diperoleh

$$(xu - yv) = 1 \text{ dan } (xv + yu) = 0.$$

Dengan menggunakan aturan Cramer diperoleh

$$u = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -y \\ 0 & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}}, \quad \det(u) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$v = \frac{\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}}, \quad \det(v) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

Ini berarti bahwa,

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Jadi, karena $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ memenuhi ke-4 kondisi tersebut, maka $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ adalah grup pada bilangan kompleks tak nol terhadap operasi perkalian pada bilangan kompleks, namakan grup multiplikatif.■

Definisi 2.1.4 [4]

Misalkan G suatu grup. Banyaknya unsur di G disebut orde dari G, yang dinotasikan dengan $|G|$. Jika banyaknya unsur di G adalah hingga, maka G adalah grup hingga.

Definisi 2.1.5 [2]

Orde dari unsur $g \in G$, dinotasikan dengan $o(g)$, adalah bilangan bulat terkecil n. Jika itu ada, sedemikian sehingga g^n adalah identitas. Jika n tidak ada, maka g mempunyai orde tak hingga dan ditulis $o(g) = \infty$.

Definisi 2.1.6 [4]

Centre dari grup G, ditulis $Z(G)$, didefinisikan oleh

$$Z(G) = \{z \in G : zg = gz \ \forall\, g \in G\}.$$

Definisi 2.1.7 [4]

Misalkan G suatu grup dan H himpunan bagian tak kosong dari G. H disebut subgrup dari G jika H membentuk grup terhadap operasi biner yang ada di G.

Definisi 2.1.8 [5]

Misalkan G suatu grup. G disebut grup siklik (grup yang dibangun oleh satu unsur) jika terdapat $a \in G$ sehingga $G = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Dalam hal ini a disebut generator (pembangun) dari G dan ditulis sebagai $G = \langle a \rangle$.

Contoh 2.1.9 [4]

Misalkan n adalah bilangan bulat positif dan $\mathbb{C}$ notasi untuk himpunan bilangan kompleks. Himpunan akar ke-n dari satu pada $\mathbb{C}$, dengan perkalian pada bilangan kompleks, adalah grup dengan orde n, yang ditulis dengan $\mathbb{C}_n$ dan disebut grup siklik dengan orde n. Jika $a = e^{2\pi i/n}$, maka

$$\mathbb{C}_n = \{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}\} = \langle a \rangle \text{ dan } a^n = 1.$$

Definisi 2.1.10 [4]

Misalkan G suatu grup dan N suatu subgrup dari G. N disebut subgrup normal dari G jika setiap $g \in G$ dan setiap $n \in N$ berlaku $gng^{-1} \in N$.

Lema 2.1.11 [5]

N adalah subgrup normal dari G jika dan hanya jika $gNg^{-1} = N$ untuk setiap $g \in G$.

Bukti untuk Lema diatas dapat dilihat di [5] hal.50

Definisi 2.1.12 [5]

Misalkan G dan H suatu grup, maka fungsi $\theta: G \to H$ dikatakan homomorfisma jika untuk semua $x, y \in G$ berlaku $\theta(xy) = \theta(x)\,\theta(y)$.

Teorema (Lagrange) 2.1.13 [4]

Misalkan G grup hingga dan H subgrup dari G, maka $|H|$ membagi $|G|$.

Bukti untuk Teorema diatas dapat dilihat di [4] hal.9.

Akibat (Teorema Lagrange) 2.1.14 [2]

Misalkan G grup hingga dengan orde n dan $g \in G$. Maka $o(g)$ membagi $|G|$ dan $g^{|G|} = 1$.

Bukti untuk Akibat diatas dapat dilihat di [2] hal.24.

2.2 Ruang Vektor

Definisi 2.2.1 [1]

Misalkan V adalah suatu himpunan tak kosong dari objek-objek sebarang, dimana dua operasinya didefinisikan, yaitu penjumlahan dan perkalian dengan skalar (bilangan riil). Operasi penjumlahan dapat diartikan sebagai suatu aturan yang mengasosiasikan setiap pasang objek u dan v pada V dengan suatu objek $u + v$, yang disebut jumlah dari u dan v. Operasi perkalian skalar dapat diartikan sebagai suatu aturan yang mengasosiasikan setiap skalar k dan setiap objek u pada V dengan suatu objek ku, yang disebut kelipatan skalar dari u oleh k. Jika aksioma-aksioma berikut dipenuhi oleh semua objek u, v, w pada V dan semua skalar k dan l, maka V disebut ruang vektor dan objek-objek pada V sebagai vektor.

1. Jika $u, v \in V$, maka $u + v \in V$.
2. $u + v = v + u$.
3. $u + (v + w) = (u + v) + w$.

4. Terdapat $\mathbf{0} \in V$, yang disebut vektor nol untuk V, sedemikian sehingga $\mathbf{0} + u = u + \mathbf{0} = u$ untuk semua $u \in V$.
5. Untuk setiap $u \in V$ terdapat $-u \in V$, sedemikian sehingga $u + (-u) = (-u) + u = \mathbf{0}$.
6. Jika k adalah skalar sebarang dan $u \in V$, maka $ku \in V$.
7. $k(u + v) = ku + kv$.
8. $(k + l)u = ku + lu$.
9. $k(lu) = (kl)(u)$.
10. $1u = u$.

Definisi 2.2.2 [4]

Misalkan V ruang vektor atas lapangan F dan $U \subseteq V$. U disebut subruang dari V jika U membentuk ruang vektor terhadap operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar yang didefinisikan di V dan memenuhi kondisi berikut:

1. $\mathbf{0} \in U$.
2. Jika $u, v \in U$ maka $u + v \in U$.
3. Jika $\lambda \in \mathbb{C}$ dan $u \in U$ maka $\lambda u \in U$.

2.3 Pemetaan Linier

Definisi 2.3.1 [4]

Misalkan V dan W adalah ruang vektor atas lapangan F. Pemetaan dari V ke W adalah suatu fungsi $T: V \to W$ yang memenuhi:

1. Jika $u, v \in V$, maka $T(u + v) = T(u) + T(v)$.
2. Jika $v \in V$ dan $k \in \mathbb{C}$, maka $T(kv) = kT(v)$.

Definisi 2.3.2 [3]

Suatu pemetaan linier dari $T: V \rightarrow W$ dikatakan satu-satu jika $u, v \in V$ dan $T(u) = T(v)$ sedemikian sehingga $u = v$. T dikatakan pada jika peta$(T) = W$. T dikatakan isomorfisma jika T satu-satu dan pada. Jika terdapat suatu isomorfisma $T: V \rightarrow W$ maka ruang vektor V dan W dikatakan isomorfik.

Pemetaan satu-satu disebut injektif, pemetaan pada disebut surjektif, dan pemetaan satu-satu dan pada disebut bijektif.

Definisi 2.3.3 [4]

Suatu pemetaan linier dari ruang vektor V ke dirinya sendiri disebut endomorfisma dari V.

2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.4.1 [4]

Misalkan V suatu ruang vektor berdimensi n atas lapangan F, dan misalkan θ adalah suatu endomorfisma dari V. Skalar λ disebut nilai eigen dari θ jika $\theta(v) = \lambda v$ untuk suatu vektor tak nol v di V. Vektor v dikatakan suatu vektor eigen dari θ yang bersesuian dengan λ.

Teori yang mempelajari grup dalam bentuk matriks disebut dengan Teori Representasi. Representasi dari grup G mempunyai hubungan erat dengan $\mathbb{C}G$-modul.

2.5 $\mathbb{C}$G–modul

Definisi 2.5.1 [4]

Misalkan V suatu ruang vektor berdimensi hingga atas $\mathbb{C}$. Maka V adalah suatu $\mathbb{C}G$-modul jika perkalian gv (untuk suatu $g \in G$ dan $v \in V$), terdefinisi dan memenuhi kondisi berikut, untuk semua $u, v \in V, \lambda \in \mathbb{C}$ dan $g, h \in G$:

1. $gv \in V$.
2. $(gh)v = g(hv)$.
3. $1v = v$.
4. $g(\lambda v) = \lambda(gv)$.
5. $g(u + v) = gu + gv$.

Definisi 2.5.2 [4]

Misalkan V suatu $\mathbb{C}G$-modul dikatakan tak tereduksi jika $\mathbb{C}G$-submodul dari V hanyalah $\{0\}$ dan V, dan tereduksi jika berlaku sebaliknya.

Definisi 2.5.3 [4]

Suatu $\mathbb{C}G$-modul V dikatakan *faithful* jika unsur identitas dari G adalah satu-satunya unsur di G yang memenuhi

$$gv = v \text{ untuk setiap } v \in V.$$

2.6 Grup Aljabar $\mathbb{C}G$

Definisi 2.6.1 [4]

Misalkan G adalah grup hingga dengan unsur-unsur $g_1, g_2, \dots, g_n$ dan misalkan F adalah lapangan $\mathbb{C}$, maka ruang vektor atas $\mathbb{C}$ dengan $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ sebagai basis dinamakan ruang vektor $\mathbb{C}G$. Unsur-unsur $\mathbb{C}G$ berbentuk :

$$\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_n g_n \text{ dengan } \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

Jika $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ dan $v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i g_i$, maka penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{C}G$ didefinisikan dengan :

$$u + v = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) g_i \text{ dan } ku = \sum_{i=1}^{n} (k\lambda_i) g_i.$$

Dengan demikian, $\mathbb{C}G$ merupakan suatu ruang vektor atas $\mathbb{C}$ berdimensi $n = |G|$ dengan basis $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$.

Definisi 2.6.2 [4]

Misalkan $\mathbb{C}G$ suatu ruang vektor, dengan perkalian yang didefinisikan oleh

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right)\left(\sum_{h \in G} \mu_h h\right) = \left(\sum_{g,h \in G} \lambda_g \mu_h (gh)\right)$$

untuk suatu $\lambda_g, \mu_h \in \mathbb{C}$ dan setiap $g, h \in G$, maka $\mathbb{C}G$ dinamakan grup aljabar dari G atas lapangan $\mathbb{C}$.

Proposisi 2.6.3 [4]

Perkalian pada $\mathbb{C}G$ memenuhi kondisi berikut, untuk semua $r, s, t \in \mathbb{C}G$ dan $\lambda \in \mathbb{C}$:

1. $rs \in \mathbb{C}G$.
2. $r(st) = (rs)t$.

3. $r1 = 1r = r$.

4. $(\lambda r)s = \lambda(rs) = r(\lambda s)$.

5. $(r + s)t = rt + st$.

6. $r(s + t) = rs + rt$.

7. $r0 = 0r = 0$.

Bukti untuk Proposisi diatas dapat dilihat di [4] hal.55.

Definisi 2.6.4 [4]

Misalkan G grup hingga dan lapangan $\mathbb{C}$. Grup aljabar $\mathbb{C}G$ dengan perkalian gv untuk setiap $v \in \mathbb{C}G, g \in G$ dinamakan $\mathbb{C}G$-modul *regular*. $\mathbb{C}G$-modul *regular* berdimensi $|G|$.

2.7 $\mathbb{C}G$-homomorfisma

Definisi 2.7.1 [4]

Misalkan V dan W adalah suatu $\mathbb{C}G$-modul. Suatu pemetaan linier $\theta: V \to W$ yang memenuhi $\theta(gv) = g\theta(v)$ untuk setiap $g \in G$ dan $v \in V$ dinamakan $\mathbb{C}G$-homomorfisma.

2.8 Lema *Schur* [4]

Misalkan W dan V suatu $\mathbb{C}G$-modul yang tak tereduksi.

1. Jika $\theta: V \to W$ adalah $\mathbb{C}G$-homomorfisma, maka salah satu dari yang berikut berlaku, yaitu θ juga adalah $\mathbb{C}G$-isomorfisma, atau $\theta(v) = 0$ untuk semua $v \in V$.
2. Jika $\theta: V \to V$ adalah $\mathbb{C}G$-isomorfisma, maka θ adalah perkalian skalar dari identitas endomorfisma 1_v.

Bukti untuk Lema diatas dapat dlihat di [4] hal.78.

BAB III

CENTRE DARI GRUP ALJABAR $\mathbb{C}G$

3.1 *Centre* dari Grup Aljabar $\mathbb{C}G$

Definisi 3.1.1

Misalkan G grup hingga. *Centre* dari grup aljabar $\mathbb{C}G$, ditulis $Z(\mathbb{C}G)$, didefinisikan sebagai berikut:

$$Z(\mathbb{C}G) = \{z \in \mathbb{C}G : zr = rz \; \forall \, r \in \mathbb{C}G\}.$$

Selanjutnya dengan menggunakan Definisi 2.2.2 akan diperlihatkan bahwa $Z(\mathbb{C}G)$ adalah subruang dari $\mathbb{C}G$.

Lema 3.1.2

Misalkan $\mathbb{C}G$ ruang vektor atas lapangan $\mathbb{C}$ dan $Z(\mathbb{C}G) \subseteq \mathbb{C}G$, maka $Z(\mathbb{C}G)$ merupakan subruang dari $\mathbb{C}G$.

Bukti.

Akan dibuktikan $Z(\mathbb{C}G)$ merupakan subruang dari $\mathbb{C}G$, yaitu jika $Z(\mathbb{C}G)$ membentuk ruang vektor terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada ruang vektor $\mathbb{C}G$, sebagai berikut : i.$Z(\mathbb{C}G) \neq \emptyset$, ii.Untuk setiap $u, v \in Z(\mathbb{C}G)$ berlaku $u + v \in Z(\mathbb{C}G)$, dan iii.Untuk setiap $\lambda \in \mathbb{C}$ berlaku $\lambda u \in Z(\mathbb{C}G)$.

i. Akan ditunjukkan $Z(\mathbb{C}G) \neq \emptyset$.

   Karena $\mathbb{C}G$ merupakan ruang vektor maka terdapat $\mathbf{0} \in \mathbb{C}G$ sehingga $\mathbf{0}r = r\mathbf{0}$ untuk setiap $r \in \mathbb{C}G$. Ini berarti bahwa $\mathbf{0} \in Z(\mathbb{C}G)$, akibatnya $Z(\mathbb{C}G) \neq \emptyset$.

ii. Akan ditunjukkan $u + v \in Z(\mathbb{C}G)$.

Ambil $u, v \in Z(\mathbb{C}G)$, akibatnya untuk setiap $r \in \mathbb{C}G$, berlaku $ur = ru$ dan $vr = rv$. Sehingga

$$\begin{aligned}(u+v)r &= ur + vr \\ &= ru + rv \\ &= r(u+v).\end{aligned}$$

Ini berarti bahwa $(u + v) \in Z(\mathbb{C}G)$.

iii. Akan ditunjukkan $\lambda u \in Z(\mathbb{C}G)$, yaitu akan ditunjukkan $(\lambda u)r = r(\lambda u)$ untuk setiap $r, u \in \mathbb{C}G$ dan $\lambda \in \mathbb{C}$. Ambil $u \in Z(\mathbb{C}G)$ dan $\lambda \in \mathbb{C}$. Akan ditunjukkan $(\lambda u)r = r(\lambda u)$ untuk setiap $r \in \mathbb{C}G$. Karena $u \in Z(\mathbb{C}G)$ maka

$$\lambda ur = \lambda ru$$

berdasarkan Proposisi 2.6.3 berlaku

$$\lambda ur = \lambda ru = r\lambda u.$$

Akibatnya $\lambda u \in Z(\mathbb{C}G)$.

Dari ketiga kondisi diatas maka terbukti bahwa $Z(\mathbb{C}G)$ subruang dari $\mathbb{C}G$.■

Berikut ini adalah karakteristik dari $Z(\mathbb{C}G)$.

Lema 3.1.3

Jika G grup komutatif dan $\mathbb{C}G$ grup aljabar maka $Z(\mathbb{C}G)$ adalah keseluruhan dari grup aljabar $\mathbb{C}G$.

Bukti.

Akan ditunjukkan $Z(\mathbb{C}G) = \mathbb{C}G$. Ambil $z \in \mathbb{C}G$, akan ditunjukkan $z \in Z(\mathbb{C}G)$. Berdasarkan Definisi 3.1.1 karena $z \in \mathbb{C}G$ maka terdapat $r \in \mathbb{C}G$ demikian sehingga berlaku $zr = rz$. Karena $z, r \in \mathbb{C}G$, maka dapat ditulis

$$z = \sum_{g \in G} \lambda_g g \text{ dan } r = \sum_{h \in G} \mu_h h.$$

Akan ditunjukkan $zr = rz$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} zr &= \sum_{g \in G} \lambda_g g \sum_{h \in G} \mu_h h \\ &= \sum_{g,h \in G} \lambda_g \mu_h (gh) \\ &= \sum_{g,h \in G} \mu_h \lambda_g (hg) \\ &= \sum_{h \in G} \mu_h h \sum_{g \in G} \lambda_g g \\ &= rz. \end{aligned}$$

Terbukti bahwa berlaku $zr = rz$ untuk setiap $r \in \mathbb{C}G$, maka $z \in Z(\mathbb{C}G)$. Ini berarti bahwa $Z(\mathbb{C}G) = \mathbb{C}G$.■

Lema 3.1.4

Unsur 1 dan $\sum_{g \in G} g$ ada pada $Z(\mathbb{C}G)$.

Bukti.

Pertama akan ditunjukkan $1 \in Z(\mathbb{C}G)$. Untuk setiap grup aljabar $\mathbb{C}G$ terdapat $1e \in \mathbb{C}G$, biasa ditulis $1 \in \mathbb{C}$ dan $e \in G$, maka menurut Proposisi 2.6.3 berlaku $1r = r1$ untuk setiap $r \in \mathbb{C}G$. Akibatnya $1 \in Z(\mathbb{C}G)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $\sum_{g \in G} g \in Z(\mathbb{C}G)$. Ambil $\sum_{g \in G} g \in \mathbb{C}G$, yaitu

$$\sum_{g \in G} g = g_1 + g_2 + \cdots + g_n$$

maka untuk semua $r \in \mathbb{C}G$ dengan

$$r = \mu_1 h_1 + \mu_2 h_2 + \cdots + \mu_h h_h = \sum_{h \in G} \mu_h h$$

berlaku

$$\left(\sum_{g \in G} g\right) r = \sum_{g \in G} g \sum_{h \in G} \mu_h h = \sum_{g,h \in G} \mu_h g h$$

Karena g bergerak sepanjang G, begitu juga dengan gh dan hg maka

$$\sum_{h \in G} \mu_h g h = \sum_{h \in G} \mu_h h g = r \sum_{g \in G} g.$$

Ini berarti bahwa $\sum_{g \in G} g \in Z(\mathbb{C}G)$. ■

Proposisi 3.1.5

Jika H adalah sebarang subgrup normal dari G, maka

$$\sum_{h \in H} h \in Z(\mathbb{C}G).$$

Bukti.

Misalkan $z = \sum_{h \in H} h$ subgrup normal dari G. Akan dibuktikan

$$\sum_{h \in H} h \in Z(\mathbb{C}G).$$

Karena $z = \sum_{h \in H} h$ subgrup normal dari G, maka berdasarkan Lema 2.1.11 untuk setiap $g \in G$, berlaku

$$g^{-1} z g = \sum_{h \in H} g^{-1} h g = \sum_{h \in H} h = z,$$

Ini berarti bahwa $zg = gz$. Akibatnya

$$\sum_{h \in H} h \in Z(\mathbb{C}G). \blacksquare$$

Dengan menggunakan Lema *Schur* akan dibuktikan salah-satu karakteristik dari $Z(\mathbb{C}G)$ sebagai berikut.

Proposisi 3.1.6

Misalkan V suatu $\mathbb{C}G$-modul regular yang tak tereduksi, dan $z \in Z(\mathbb{C}G)$. Maka terdapat $\lambda \in \mathbb{C}$ sedemikian sehingga

$$zv = \lambda v \text{ untuk semua } v \in V.$$

Bukti.

Untuk semua $z \in Z(\mathbb{C}G), r \in \mathbb{C}G$, dan $v \in V$, terdapat $zrv = rzv$.

Misalkan $\theta: V \to V$ yang didefinisikan dengan $\theta(v) = zv$. Akan ditunjukkan θ adalah suatu $\mathbb{C}G$-homomofisma dari V ke V, yaitu $\theta: V \to V$ suatu pemetaan linier yang memenuhi $\theta(gv) = g\theta(v)$ untuk setiap $g \in G$ dan $v \in V$. Sebelumnya akan ditunjukkan: θ terdefinisi dengan baik dan θ suatu pemetaan linier.

Pertama akan ditunjukkan θ terdefinisi dengan baik. Yaitu setiap $v_1, v_2 \in V$, dengan $v_1 = v_2$ berlaku $\theta(v_1) = \theta(v_2)$. Ambil $v_1, v_2 \in V$, dengan $v_1 = v_2$ demikian sehingga

$$\theta(v_1) = zv_1 = zv_2 = \theta(v_2).$$

Ini berarti bahwa θ terdefinisi dengan baik.

Selanjutnya akan ditunjukkan θ suatu pemetaan linier. Yaitu setiap $v_1, v_2 \in V, k \in \mathbb{C}$, dan V suatu $\mathbb{C}G$-modul berlaku: i.$\theta(v_1 + v_2) = \theta(v_1) + \theta(v_2)$ dan ii.$\theta(kv) = k\theta(v)$.

i. Akan ditunjukkan $\theta(v_1 + v_2) = \theta(v_1) + \theta(v_2)$. Ambil $v_1, v_2 \in V$ dan karena V suatu ruang vektor $\mathbb{C}G$ maka dapat ditulis

$$v_1 = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_g g_g = \sum_{g\in G} \lambda_g g,$$

$$v_2 = \mu_1 h_1 + \mu_2 h_2 + \cdots + \mu_h h_h = \sum_{h\in G} \mu_h h,$$

dan $z \in Z(\mathbb{C}G)$ dapat ditulis

$$z = \xi_1 r_1 + \xi_2 r_2 + \cdots + \xi_r r_r = \sum_{r\in G} \xi_r r.$$

Perhatikan bahwa

$$v_1 + v_2 = \sum_{g\in G} \lambda_g g + \sum_{h\in G} \mu_h h$$

$$\begin{aligned}
\theta(v_1 + v_2) &= z(v_1 + v_2) \\
&= \sum_{r\in G} \xi_r r \left(\sum_{g\in G} \lambda_g g + \sum_{h\in G} \mu_h h \right) \\
&= \left(\sum_{r\in G} \xi_r r \sum_{g\in G} \lambda_g g \right) + \left(\sum_{r\in G} \xi_r r \sum_{h\in G} \mu_h h \right) \\
&= \sum_{r,g\in G} \xi_r \lambda_g (rg) + \sum_{r,h\in G} \xi_r \mu_h (rh) \\
&= zv_1 + zv_2
\end{aligned}$$

$$= \theta(v_1) + \theta(v_2).$$

Jadi, $\theta(v_1 + v_2) = \theta(v_1) + \theta(v_2)$.

ii. Akan ditunjukkan $\theta(kv) = k\theta(v)$. Ambil $v \in V$ dan $k \in \mathbb{C}$, karena V suatu ruang vektor $\mathbb{C}G$ maka dapat ditulis

$$v = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_g g_g = \sum_{g \in G} \lambda_g g$$

dan $z \in Z(\mathbb{C}G)$ dapat ditulis

$$z = \xi_1 r_1 + \xi_2 r_2 + \cdots + \xi_r r_r = \sum_{r \in G} \xi_r r.$$

Perhatikan bahwa

$$\theta(kv) = zkv = \sum_{r \in G} \xi_r r \left(k \sum_{g \in G} \lambda_g g \right)$$

$$= \sum_{r \in G} \xi_r r \left(\sum_{g \in G} k\lambda_g g \right)$$

$$= \sum_{r,g \in G} \xi_r k \lambda_g (rg)$$

$$= k \sum_{r,g \in G} \xi_r \lambda_g (rg)$$

$$= kzv$$

$$= k\theta(v).$$

Jadi, $\theta(kv) = k\theta(v)$.

Karena i dan ii terpenuhi, maka θ adalah suatu pemetaan linier. Selanjutnya akan ditunjukkan θ adalah $\mathbb{C}G$-homomorfisma, yaitu berlaku $\theta(gv) = g\theta(v)$ untuk setiap

$g \in G$ dan $v \in V$. Ambil $g \in G$ dan $v \in V$ dan karena θ adalah pemetaan linier yang didefinisikan $\theta(v) = zv$ maka berlaku

$$\theta(gv) = zgv = gzv = g\theta(v).$$

Ini berarti θ adalah $\mathbb{C}G$-homomorfisma.

Karena fungsi $\theta(v) = zv$ adalah suatu $\mathbb{C}G$-homomorfisma dari $V \to V$. Maka berdasarkan Lema *Schur*, θ $\mathbb{C}G$-homomorfisma sama dengan $\lambda 1_v$, tulis $\theta = \lambda 1_v$ untuk setiap $\lambda \in \mathbb{C}$, dan menurut Definisi 2.4.1, terdapat $\lambda \in \mathbb{C}$ yang merupakan suatu nilai eigen dari θ.

Perhatikan bahwa

$$\theta: V \to V$$

$$\theta(v) = zv \text{ dan } \theta(v) = \lambda 1_v v.$$

Akibatnya

$$zv = \lambda v \text{ untuk setiap } v \in V,\ V \neq 0. \blacksquare$$

Akibat 3.1.7

Jika V adalah $\mathbb{C}G$-modul tak tereduksi, maka terdapat $\lambda \in \mathbb{C}$ sehingga

$$\left(\sum_{g \in G} g\right) v = \lambda v \text{ untuk semua } v \in V.$$

Bukti.

Misalkan $z = \sum_{g \in G} g \in \mathbb{C}G$, berdasarkan Lema 3.1.4, maka $z \in Z(\mathbb{C}G)$. Karena V adalah $\mathbb{C}G$-modul tak tereduksi dan $z \in Z(\mathbb{C}G)$ maka berdasarkan Proposisi 3.1.6, terdapat $\lambda \in \mathbb{C}$ sedemikian sehingga berlaku

$$\left(\sum_{g \in G} g\right) v = \lambda v \text{ untuk semua } v \in V. \blacksquare$$

3.2 Hubungan $Z(\mathbb{C}G)$ dengan *Centre* dari Grup G

Centre dari grup aljabar $\mathbb{C}G$ mempunyai hubungan dengan *centre* dari grup G. Berdasarkan Definisi 2.1.6 bahwa beberapa anggota dari $Z(\mathbb{C}G)$ memuat *centre* dari grup G, dan karena untuk setiap $g \in G$ dapat dituliskan dalam bentuk ruang vektor $\mathbb{C}G$, maka ini berarti bahwa $Z(G) \subseteq Z(\mathbb{C}G)$.

Contoh 3.2.1

Misalkan $G = \mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$

$+_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Tabel.1 Cayley

Berdasarkan table Cayley untuk opersi penjumlahan modulo 3 di atas akan dicari $Z(G)$ dan $Z(\mathbb{C}G)$.

Pertama akan dicari $Z(G) = \{z \in G : zg = gz \; \forall \, g \in G\}$.

Perhatikan bahwa

$z = 0 : 0 + 0 = 0 + 0$ $z = 1 : 1 + 0 = 0 + 1$ $z = 2 : 2 + 0 = 0 + 2$

$0 + 1 = 1 + 0$ $1 + 1 = 1 + 1$ $2 + 1 = 1 + 2$

$0 + 2 = 2 + 0$ $1 + 2 = 2 + 1$ $2 + 2 = 2 + 2$

Akibatnya $Z(G) = \{0,1,2\}$.

Selanjutnya akan dicari $Z(\mathbb{C}G) = \{z \in \mathbb{C}G: zr = rz \ \forall\, r \in \mathbb{C}G\}$.

$$\mathbb{C}G = \{\lambda_1 0 + \lambda_2 1 + \lambda_3 2 \, : \, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}\}$$

Ambil $z \in \mathbb{C}G$ sebarang. Akan ditunjukkan $z \in Z(\mathbb{C}G)$. Karena $z \in \mathbb{C}G$, maka dapat ditulis

$$z = \lambda_1 0 + \lambda_2 1 + \lambda_3 2 \text{ untuk suatu } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}.$$

Akan ditunjukkan berlaku $zr = rz$ untuk setiap $r \in \mathbb{C}G$ sebarang. Karena $r \in \mathbb{C}G$, maka dapat ditulis

$$r = \mu_1 0 + \mu_2 1 + \mu_3 2 \text{ untuk suatu } \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{C}.$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} zr &= (\lambda_1 0 + \lambda_2 1 + \lambda_3 2) + (\mu_1 0 + \mu_2 1 + \mu_3 2) \\ &= (\lambda_1 + \mu_1)0 + (\lambda_2 + \mu_2)1 + (\lambda_3 + \mu_3)2 \end{aligned}$$

karena $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C}, i = 1,2,3$, maka $\lambda_1 + \mu_1 = \mu_1 + \lambda_1 \in \mathbb{C}$, $\lambda_2 + \mu_2 = \mu_2 + \lambda_2 \in \mathbb{C}$, dan $\lambda_3 + \mu_3 = \mu_3 + \lambda_3 \in \mathbb{C}$. Sehingga

$$\begin{aligned} zr &= (\mu_1 + \lambda_1)0 + (\mu_2 + \lambda_2)1 + (\mu_3 + \lambda_3)2 \\ &= (\mu_1 0 + \mu_2 1 + \mu_3 2) + (\lambda_1 0 + \lambda_2 1 + \lambda_3 2) \\ &= rz \end{aligned}$$

Akibatnya $z \in Z(\mathbb{C}G)$, sehingga $Z(\mathbb{C}G) = \{\lambda_1 0 + \lambda_2 1 + \lambda_3 2 \, : \, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}\}$.

Karena z adalah sebarang unsur di $\mathbb{C}G$, maka seluruh unsur di $\mathbb{C}G$ adalah unsur di $Z(\mathbb{C}G)$, sehingga $Z(\mathbb{C}G) = \mathbb{C}G$, dan karena sebarang unsur di G adalah unsur di $\mathbb{C}G$, akibatnya $Z(G) \subseteq Z(\mathbb{C}G)$.

Proposisi 3.2.2

Jika terdapat suatu $\mathbb{C}G$-modul *faithful* tak tereduksi, maka $Z(G)$ adalah siklik.

Bukti.

Sebelumnya akan ditunjukkan $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ adalah grup multiplikatif. Berdasarkan Lema 2.1.3 terbukti bahwa $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ adalah grup multiplikatif.

Misalkan V adalah $\mathbb{C}G$-modul *faithful* tak tereduksi. Ambil $z \in Z(G)$ maka $z \in Z(\mathbb{C}G)$ dan karenanya menurut Proposisi 3.1.6, terdapat $\lambda_z \in \mathbb{C}$ sehingga

$$zv = \lambda_z v \quad \text{untuk setiap } v \in V.$$

Definisikan pemetaan

$$\theta : Z(G) \to \mathbb{C}^*$$

dengan $\theta(z) = \lambda_z$ untuk setiap $z \in Z(G)$ dan $\lambda_z \in \mathbb{C}^*$. Akan ditunjukkan θ isomorfisma, yaitu: θ homomorfisma, dan θ satu-satu dan pada.

i. Akan ditunjukkan θ homomorfisma. Ambil $z_1, z_2 \in Z(G)$. Akan ditunjukkan jika untuk semua $z_1, z_2 \in Z(G)$ berlaku $\theta(z_1 z_2) = \theta(z_1)\theta(z_2)$.

   Perhatikan bahwa

   $$\theta(z_1 z_2) = \lambda_{z_1 z_2} = \lambda_{z_1}\lambda_{z_2} = \theta(z_1)\theta(z_2).$$

   Akibatnya θ homomorfisma.

ii. Akan ditunjukkan θ satu-satu dan pada. Pertama akan ditunjukkan θ satu-satu. Diketahui bahwa V adalah $\mathbb{C}G$-modul *faithful* dan menurut Definisi 2.5.3 untuk setiap $gv = v$, $v \in V$ hanya dipenuhi oleh $g = e$.

   Perhatikan bahwa

   $$zv = \lambda_z v$$

karena V adalah $\mathbb{C}G$-modul *faithful* maka $zv = v$ dengan $\lambda_z = 1$ hanya dipenuhi oleh $z = e$. Akibatnya

$$\theta(e) = \lambda_e = 1$$

Ini berarti bahwa θ satu-satu.

Selanjutnya akan ditunjukkan θ pada. Pandang pemetaan

$$\theta' : Z(G) \to \{\lambda_z : z \in Z(G)\}$$

dengan $\theta'(z) = \theta(z) = \lambda_z$. Akibatnya $\theta' : Z(G) \to \{\lambda_z : z \in Z(G)\}$ pada.

Jadi, karena i dan ii terpenuhi maka θ isomorfisma grup, yaitu

$$Z(G) \cong \{\lambda_z : z \in Z(G)\}.$$

Misalkan $\{\lambda_z : z \in Z(G)\}$ adalah subgrup dari C^*. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap subgrup hingga dari C^* adalah siklik. Misalkan G suatu grup dari himpunan bilangan kompleks tak nol, maka $G = C^*$. Misalkan H subgrup hingga dari G yang berorde n, dan misalkan $h \in H$, karena H grup hingga dengan orde n maka berdasarkan Akibat 2.1.14, $o(h)$ membagi $|H|$ dan $h^n = 1$ untuk setiap $h \in H$. Misalkan $G' = \{ g \in G \mid g^n = 1 \}$, karena $g \in \mathbb{C}^*$, akibatnya

$$\{ g \in G \mid g^n = 1 \} = \langle e^{2\pi i/n} \rangle$$

Sehingga H merupakan subgrup dari $\{ g \in G \mid g^n = 1 \} = \langle e^{2\pi i/n} \rangle$.

Karena $|H|$ dan $\langle e^{2\pi i/n} \rangle$ berorde n, akibatnya

$$|H| = n = |\langle e^{2\pi i/n} \rangle|$$

$$H = \langle e^{2\pi i/n} \rangle.$$

Sehingga H adalah grup siklik. Ini menunjukkan bahwa subgrup hingga dari C^* adalah siklik. Karena $\{\lambda_z : z \in Z(G)\}$ subgrup hingga dari C^*, maka $\{\lambda_z : z \in Z(G)\}$

adalah grup siklik, dan karena $Z(G)$ isomorfik dengan $\{\lambda_z : z \in Z(G)\}$ yang siklik, maka $Z(G)$ juga grup siklik. Jadi, $Z(G) \cong \{\lambda_z : z \in Z(G)\}$ yang merupakan subgrup hingga dari $\mathbb{C}^*$, adalah siklik. ■

BAB IV

KESIMPULAN

Kesimpulan yang dapat diambil dari tulisan ini adalah sebagai berikut:

1. Misalkan $Z(\mathbb{C}G) = \{z \in \mathbb{C}G : zr = rz \; \forall \, r \in \mathbb{C}G\}$, dengan kata lain $Z(\mathbb{C}G)$ memuat unsur-unsur yang komutatif dengan semua unsur di grup aljabar $\mathbb{C}G$. Karakteristik $Z(\mathbb{C}G)$ adalah sebagai berikut:
   a. $Z(\mathbb{C}G) \subseteq \mathbb{C}G$ dan $Z(\mathbb{C}G)$ merupakan subruang dari $\mathbb{C}G$.
   b. $Z(\mathbb{C}G)$ adalah keseluruhan dari grup aljabar $\mathbb{C}G$ jika G grup komutatif dan $\mathbb{C}G$ grup aljabar.
   c. Unsur 1 dan $\sum_{g\in G} g$ ada pada $Z(\mathbb{C}G)$.
   d. Aksi dari unsur $Z(\mathbb{C}G)$ dengan unsur dari $\mathbb{C}G$-modul tak tereduksi merupakan perkalian skalar dengan unsur $\mathbb{C}G$-modul tersebut.
2. Berikut adalah hubungan $Z(\mathbb{C}G)$ dengan $Z(G) = \{z \in G: zg = gz \;\; \forall \, g \in G\}$.
   a. $Z(G) \subseteq Z(\mathbb{C}G)$.
   b. Jika terdapat suatu $\mathbb{C}G$-modul *faithful* tak tereduksi, maka $Z(G) \cong \{\lambda_z : z \in Z(G)\}$ yang merupakan subgrup hingga dari $\mathbb{C}^*$, adalah siklik.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Howard, Chris Rorres. 2004. **Aljabar Linier Elementer.** Penerbit Erlangga, Jakarta.

[2] Isaacs, I. Martin. 1994. **Algebra a Graduate Course.** Arcata Graphics, California.

[3] Jacob, Bill. 1990. **Linier Algebra.** W.H. Freeman and Company, New York.

[4] James, Gordon, Martin Liebeck. 2001. **Representations and Characters of Groups.** Cambridge University Press.

[5] Wiley, John, Sons. 2000. **Topics In Algebra 2nd ed.** Replika Press, New Delhi.

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis dilahirkan di Bukittinggi pada tanggal 17 Nopember 1989. Anak pertama dari pasangan Erman. S dan Yusda. Penulis memulai pendidikannya di TK Arta Kencana Rengat pada tahun 1995. Pada tahun 1996, penulis melanjutkan pendidikannya di SD Negeri 18 IV Angkat. Pada tahun 2001, penulis melanjutkan pendidikannya di Madrasah Tsanawiyah Swasta Ma'had Al-Zaytun. Pada tahun 2004, penulis melanjutkan pendidikannya di Madrasah Aliah Swasta Ma'had Al-Zaytun dan tamat pada tahun 2007. Pada tahun yang sama, penulis di terima menjadi mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Andalas melalui jalur Seleksi Penerimaan Mahasiswa Baru Mandiri (SPMBM). Selama di bangku perkuliahan penulis pernah mengikuti magang di UKM Korps Suka Rela (KSR) PMI Unit Universitas Andalas tahun 2007, dan menjadi pengurus HIMATIKA periode 2010/2011 pada divisi kesejahteraan dan pengabdian masyarakat serta aktif di berbagai kegiatan HIMATIKA. Untuk syarat meraih gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika FMIPA UNAND, penulis pernah mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Nagari Mungo, Kabupaten Lima Puluh Kota pada bulan Juli s/d Agustus 2010.