



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar Unand.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Unand.

MENENTUKAN NILAI EIGEN DOMINAN TERBESAR DAN TERKECIL SUATU MATRIKS

SKRIPSI



**MDESVENTRI ETMI
06934020**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2011**

Surat Al-Falaq

Hidup Adalah kegelapan jika tanpa hasrat dan keinginan. Dan semua hasrat dan keinginan adalah buta, jika tidak disertai pengetahuan, dan pengetahuan adalah hampa jika tidak diikuti pelajaran. Dan setiap pelajaran akan sia-sia jika tidak disertai cinta.

Dan mohonlah pertolongan (kepada Allah) dengan sabar dan sholat. Dan (salat) itu sungguh berat, kecuali bagi orang-orang yang khusuk (albaqarah : 45)

Alhamdulillah..alhamdulillah.. tak henti-hentinya hamba-Mu mengucapkan syukur pada-Mu pemilik alam Semesta yang telah memberikan kebahagiaan ini setelah hamba melalui perjalanan yang cukup melelahkan yang sempat membuat hamba merasa sangat jatuh.. terima kasih ya Allah berkat rahmat-Mu hamba bisa melalui ini semua dan mendapatkan S.Si ..

MW family's

Untuk Ayahnda Drs.Mardan Waib,M.Pd dan ibunda Etta Septareta

Ayah la orang terhebat yang ayuk miliki..Ayah tak pernah sedikitpun memperlihatkan betapa lelahnya ayah berjuang untuk kehidupan kami. Ayah selalu memberikan yang terbaik untuk kami anak-anakmu..di saat ayuk sedih ayah selalu ada dengan canda khas ayah, saat ayuk jatuh ayah selalu memberikan ayuk semangat, saat ayuk gagal , tanpa ada sedikit amarah yang ayah berikan dan sebaliknya senyuman yang ayah berikan..

Ibu, engkau la cahaya yang selalu menerangi kehidupan ayuk..terima kasih atas cinta dan kasih yang tiada putus yang ibu berikan untuk ayuk.. walaupun ayuk sering membuat ibu bersedih, tapi ibu tak pernah kesal atau marah pada anakmu ini.. I Love U MOM..

AYah, ibu akhirnya ayuk dapat memberikan gelar sarjana untuk kalian.. semoga ayuk masih bisa memberikan kebahagiaan-kebahagiaan yang lain.dan doakan anakmu agar bisa terus berjuang untuk menuju cita-citamu. semangat ayah ku tercinta untuk S3 nya, semoga ayuk cepat menyusul..Terima kasih selalu ada untuk ayuk, yang selalu memberikan dukungan dan semangat tiada henti untuk anakmu ini..

Untuk Kakaknda dan Adinda Tercinta

Untuk Kakak ku Marsevuan Marta Wijaya , ayuk ipar Efrin Febrianti, dan keponakan Okta Ramdhan Putra Wijaya . kak, makasih atas nasehat nya ya..doain adikmu bisa menjadi lebih baek lagi.. Kakak ku Farhan Alpas dan ayuk ipar Rabiah El Adawiyah.. makasih kakak aq sayang atas nasehat dan cerewet kakak untuk adik tersayang mu..

Untuk Adik-adikku... Septi Martasari, Ema Wara Mardotila dan Wahyu Abdul Wahab. Mbil, jatlalan adik ayuk yang bisa dibanggakan keluarga. terus la kau gali potensi yang ada dalam diri kau, dan jangan suka merajuk nian yo.. Emut, jadi adik dake boleh ngiri nian samo ayuk n adik, segalonyo la di atur ma ayah dan ibu sesuai kebutuhan masing-masing. jangan keras kepala nian.. Dek yo, adik bungsu ayukre... ayuk doakan cita-cita dake yo tercapat kuliahan di azhar. Atau ITB. tetap rajin belajar yo, supaya terus rangking I..

Untuk orang terkasih, Irsal Melai. Terima kasih atas semua yang uda berikan, dukungannya, semangatnya saat des jatuh.. semoga impian kita terwujud..

Warga Matematika FMIPA UNAND

Dika (jangan nu lupakan kenangan pahit dan terindah untuk kita y), vani (semangat S2 nia dan semoga langgeng ma pua ny), tanti (semangat cari kerjanya y..) mega dan cipta (semangat ngerjain TA nia), Rahma (semangat S2 nia dake), era (selamat punya oom baru), nia (jangan panalang bara ma TA nia ntar), neker (jangan cerwet2 bgt y), mei (moga dapat suami orang irian y, hehe), angga (mokrasi sering amb reportin kwn satu kampoung), jeki n ade (jangan ditungguin kali semauanya tmt y), ling, tar, ivat, isua n anggun (semangat binbimbing ma pak narwen y).. dedi, art, heru, ika, icit, sari, oce, suci, rido, dewi, ares, dina, riri, winda, didi, ketua neha, opt, ayu, lion, dan teman2 tuansixma yang laenya.. tetap semangat semauanya.. Buat tike, smgt y.. cari terus bu montic nya.. buat yang lagi binbimbing jangan mudah putus asa mencari penbimbing dan binbimbingnya..

Untuk dosen-dosen matematika, pak narwen makasih telah membimbing defti selama ini, ibu nova makasih telah banyak memberikan masukan, pak efendi, pak syaf, bu izza, bu yozab, bu may, bu ayu, bu riri, bu yozab, bu well, pak werman, pak dodol, pak syaf, nudi, pak ginting, manna cun, bu ely, ni opt, pak syamsir..

Hi matematika FMIPA UNAND

Untuk pengurus himatika, majukan terus himatika, winda, icat, apj, anakku rian n imel, yuni, ciap, mezi, tiku, tika n yang laen-laennya. jangan biarakan sekere terlinta tidak berpehuni..

Untuk uda Ep, da andri cari la lagi pak syaf n pak narwen. jgn mlsc lg.. hehehe untuk saudara Ep aq, mira tetap semangat y, biar kita bisa bareng wisudanya. untuk adik-adik bp aq, sobri, anggibira n bp oto maaf ya uni blm tw sma kalian..

Buat anak-anak kos sweat house.. alini, iki semoga langgeng ma uda n kombo y.. lina jgn ol aj terus.. ami, via, sari n tiara ..

Zone 020

UNIVERSITAS ANDALAS

DIJAJAN BANGSA

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis haturkan ke hadirat ALLAH SWT, karena berkat rahmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini dengan judul *"Menentukan Nilai Eigen Dominan Terbesar dan Terkecil Suatu Matriks"*, yang merupakan salah satu syarat untuk menempuh ujian Sarjana Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang.

Pada kesempatan ini, perkenankanlah penulis menyampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang tulus kepada yang terhormat:

1. Bapak Narwen, M.Si sebagai dosen pembimbing yang telah memberikan bimbingan, waktu dan pikiran kepada penulis hingga akhirnya penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
2. Bapak Efendi, M.Si dan Ibu Nova Noliza Bakar, M.Si sebagai dosen penguji yang telah membaca, menelaah, mengoreksi, mengedit serta memberi kritikan yang konstruktif untuk penyempurnaan tugas akhir ini.
3. Bapak Dr.Safrizal Sy sebagai Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas.
4. Bapak Zulakmal, M.Si sebagai Penasehat Akademik.
5. Staf Pengajar dan Staf Tata Usaha Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas.
6. Orang Tua, Drs. Mardan Waib, M.Pd dan Etta Saptareta S.Pd terima kasih atas dukungan dan kasih sayang ayah dan ibu yang selalu

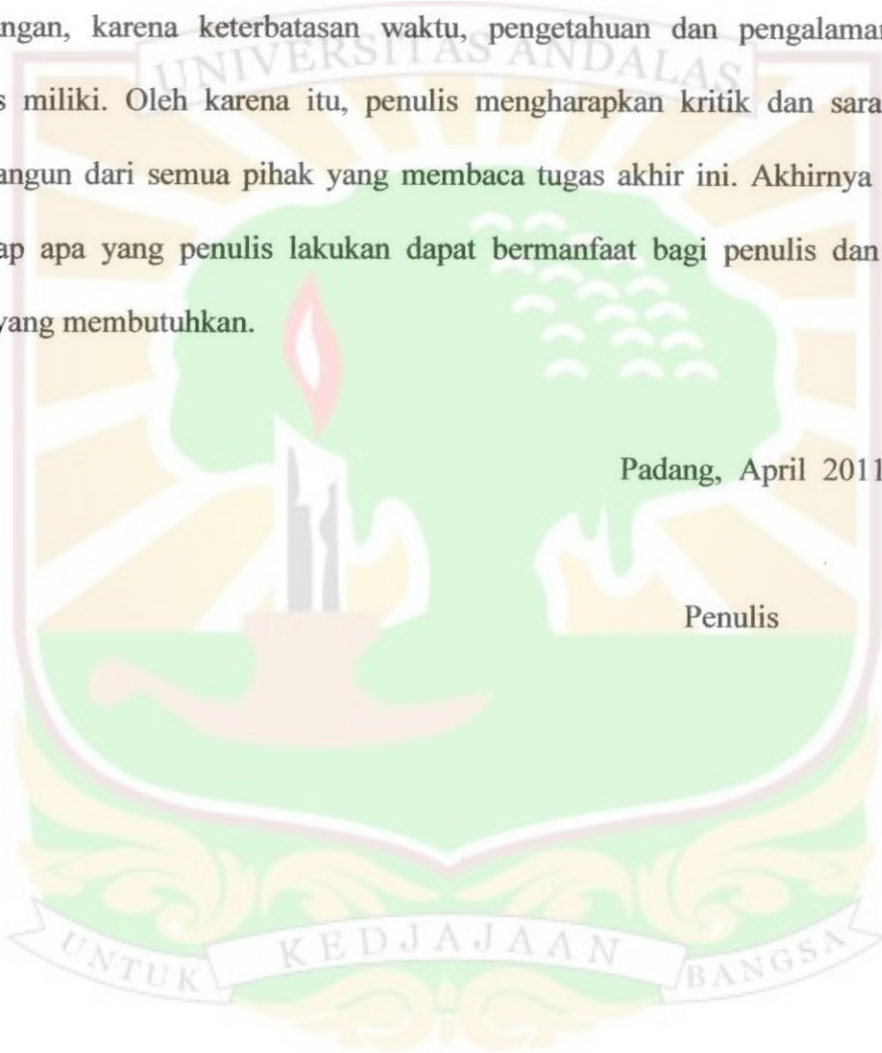
diberikan tiada henti pada ananda serta kakakanda-kakanda dan adinda-adinda tercinta yang selalu memberikan semangat.

7. Teman-teman tercinta yang tak bisa disebutkan satu-satu terutama the Big Family dan Matematika Angkatan 06.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini masih banyak terdapat kekurangan, karena keterbatasan waktu, pengetahuan dan pengalaman yang penulis miliki. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari semua pihak yang membaca tugas akhir ini. Akhirnya penulis berharap apa yang penulis lakukan dapat bermanfaat bagi penulis dan semua pihak yang membutuhkan.

Padang, April 2011

Penulis



ABSTRAK

Misalkan A adalah matriks bujursangkar yang berukuran $n \times n$, yang mempunyai n nilai eigen riil yang berbeda dan memenuhi $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. Bila metode pangkat (*power method*) diaplikasikan pada matriks A maka dapat ditentukan hampiran nilai eigen dominan terbesar dari matriks A yaitu λ_1 . Sedangkan bila metode pangkat inversi (*inverse power method*) diaplikasikan pada matriks A maka akan diperoleh hampiran nilai eigen dominan terkecil dari matriks A yaitu λ_n .

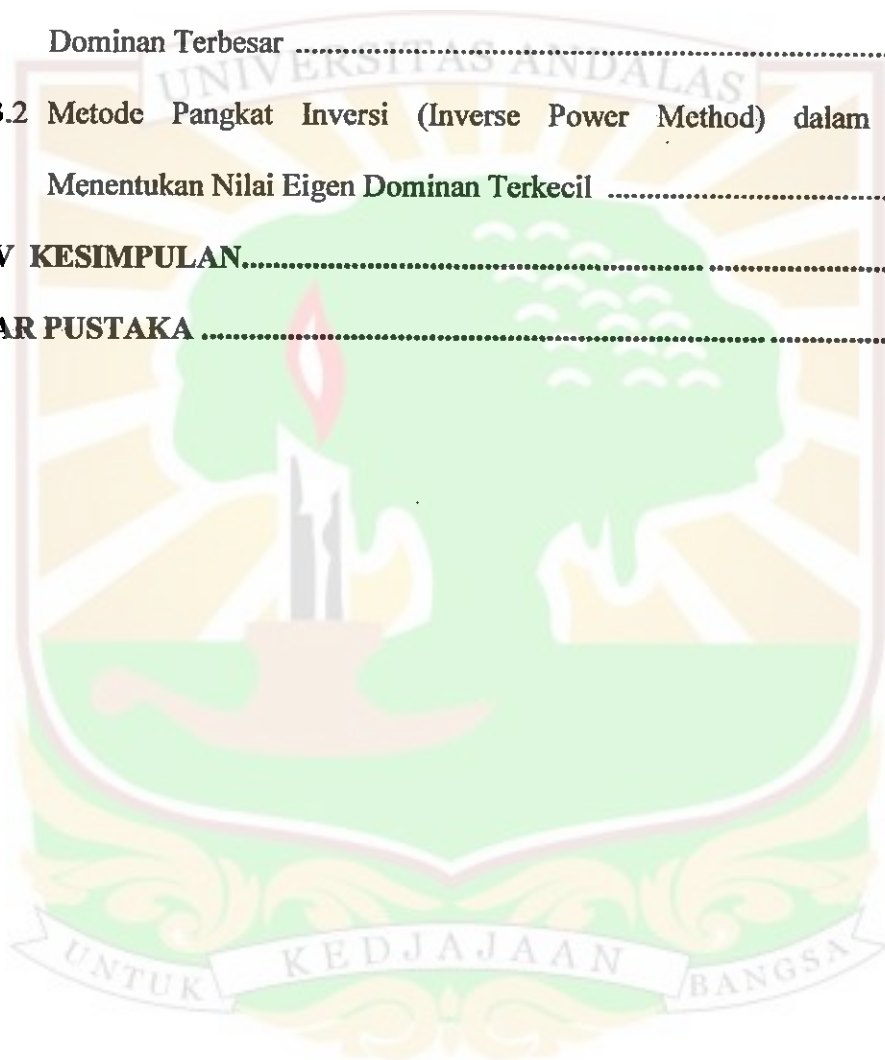
Kata kunci : matriks bujursangkar, nilai eigen dominan, metode pangkat, dan metode pangkat inversi



DAFTAR ISI

	Halaman
KATA PENGANTAR	ii
ABSTRAK	iv
DAFTAR ISI	v
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah.....	2
1.3 Pembatasan Masalah	2
1.4 Tujuan Penulisan	2
1.5 Sistematika Penulisan.....	2
BAB II LANDASAN TEORI	4
2.1 Matriks	4
2.1.1 Bentuk Matriks dari Suatu Sistem Linier	5
2.2 Ruang- ruang Vektor	9
2.2.1 Ruang- n Euclidis	9
2.2.2 Kebebasan Linier	11
2.3. Hasilkali Dalam.....	12
2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	13
2.5 Barisan dan Kekonvergenan Barisan	15
2.5.1 Barisan	15
2.5.2 Kekonvergenan Barisan	16

2.6 Ortogonal pada Vektor	16
BAB III Menentukan Nilai Eigen Terbesar dan Nilai Eigen Terkecil	
Suatu Matriks.....	18
3.1 Metode Pangkat (Power Method) dalam Menentukan Nilai Eigen	
Dominan Terbesar	18
3.2 Metode Pangkat Inversi (Inverse Power Method) dalam	
Menentukan Nilai Eigen Dominan Terkecil	33
BAB IV KESIMPULAN.....	50
DAFTAR PUSTAKA	51



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada umumnya nilai eigen dan vektor eigen memberikan kemudahan dalam menentukan solusi dari suatu persamaan diferensial. Salah satu metode dalam metode numerik untuk menentukan nilai eigen dominan dan vektor eigen adalah metode pangkat (*power method*) dan metode pangkat inversi (*inverse power method*). Metode pangkat adalah suatu langkah iteratif untuk menentukan nilai eigen dominan terbesar. Ide dasar metode ini adalah mendapatkan hubungan $\lambda.V = A.V$, di mana A matriks bujursangkar, λ nilai eigen dari A dan V adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ . Proses iterasi akan terus berlangsung sampai proses perhitungan yang dilakukan konvergen menuju solusi numeris sesuai batasan yang diinginkan. Metode pangkat inversi (*inverse power method*) melengkapi metode pangkat (*power method*) untuk menentukan nilai eigen dominan terkecil. Jika $B = A^{-1}$, maka nilai eigen dari B adalah kebalikan dari nilai eigen A . [9]

Dengan metode pangkat (*power method*) dan metode pangkat inversi (*inverse power method*), nilai eigen yang berupa bilangan riil dan vektor eigennya dapat ditentukan secara bersamaan menggunakan proses yang sama sehingga apabila nilai eigen dari suatu matriks dapat ditentukan maka vektor eigen juga dapat ditentukan. Dalam mencari nilai eigen dominan dan vektor eigen menggunakan metode pangkat (*power method*) dan metode pangkat inversi (*inverse power*

method), semakin kecil ε (error atau galat) yang diberikan menyebabkan semakin banyak iterasi yang terjadi sehingga semakin baik hasil yang diperoleh.

Nilai eigen dominan terbesar dapat digunakan dalam identifikasi iris mata sedangkan nilai eigen dominan terkecil dapat diaplikasikan pada rantai markov.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, masalah yang akan dikaji pada skripsi ini adalah menentukan nilai eigen dominan terbesar dengan menggunakan metode pangkat (*power method*) dan nilai eigen dominan terkecil dengan menggunakan metode pangkat inversi (*inverse power method*). Selanjutnya akan dibuat algoritma untuk kedua metode tersebut dan diaplikasikan ke dalam contoh soal.

1.3 Pembatasan Masalah

Pada skripsi ini, Penulis membatasi masalah pada matriks yang mengandung nilai eigen yang berupa bilangan riil dalam menentukan nilai eigen dominan terbesar dan nilai eigen dominan terkecil dengan menggunakan metode pangkat (*power method*) dan metode pangkat inversi (*inverse power method*).

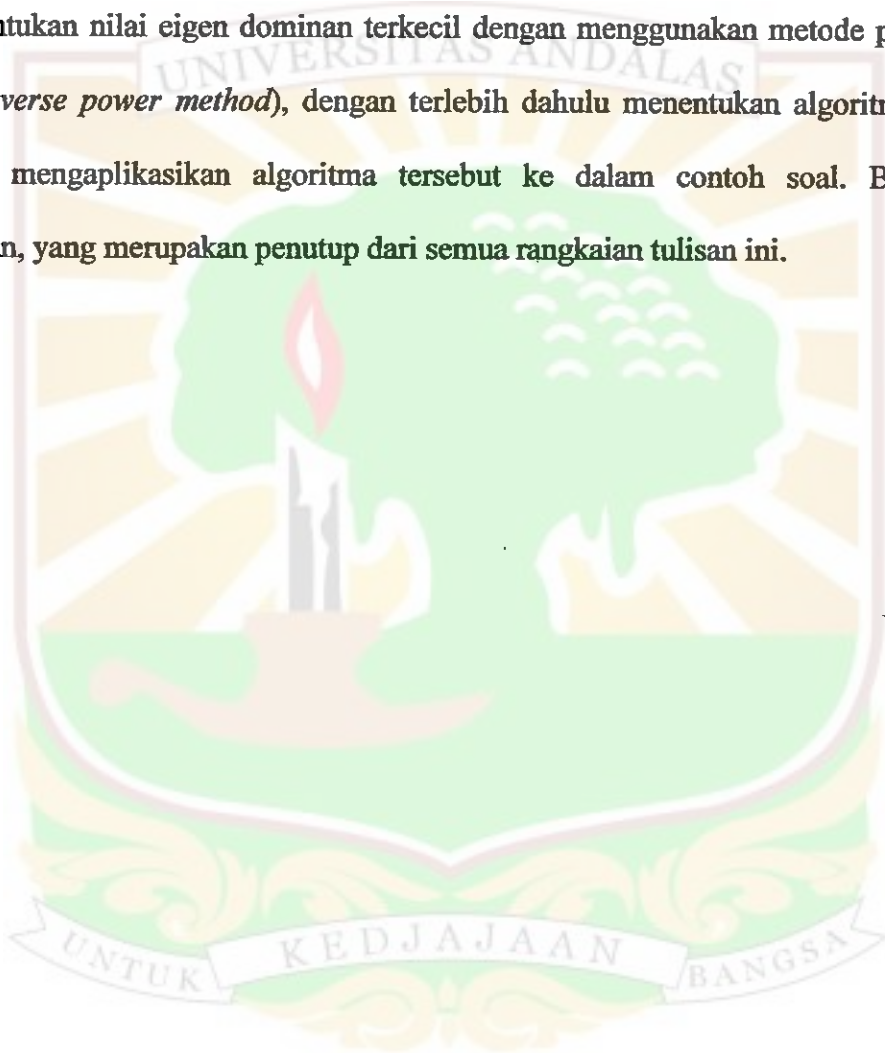
1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi adalah menentukan nilai eigen dominan terbesar dengan menggunakan metode pangkat (*power method*) dan nilai eigen dominan terkecil dengan menggunakan metode pangkat inversi (*inverse power method*).

1.5 Sistematika Penulisan

Skripsi ini dibagi menjadi empat bab. Bab I Pendahuluan, menguraikan tentang latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan,

dan sistematika penulisan. Sedangkan Bab II Landasan Teori, yang mendukung permasalahan yang terdiri atas matriks dan aplikasinya, hasil kali dalam, ruang-ruang vektor (ruang- n Euclides dan kebebasan linier), nilai eigen dan vektor eigen, barisan dan kekonvergenan barisan. Bab III Pembahasan, mengenai bagaimana menentukan nilai eigen dominan terbesar dengan menggunakan metode pangkat (*power method*) dan menentukan nilai eigen dominan terkecil dengan menggunakan metode pangkat inversi (*inverse power method*), dengan terlebih dahulu menentukan algoritma dan kemudian mengaplikasikan algoritma tersebut ke dalam contoh soal. Bab IV Kesimpulan, yang merupakan penutup dari semua rangkaian tulisan ini.



BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diuraikan tentang matriks dan aplikasinya, hasil kali dalam, ruang-ruang vektor, nilai eigen dan vektor eigen, barisan dan kekonvergenan barisan yang akan digunakan pada kajian permasalahan skripsi ini.

2.1 Matriks

Definisi dari matriks dapat dilihat pada definisi berikut :

Definisi 2.1.1 [2]

Sebuah matriks adalah sebuah susunan segiempat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan di dalam susunan tersebut dinamakan entri dari matriks tersebut.

Ukuran suatu matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horizontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat di dalam suatu matriks. Notasi dari matriks biasanya digunakan huruf kapital dan entri-entri dari matriks digunakan huruf kecil. Misalkan matriks A yang mempunyai n baris dan m kolom, maka matriks A tersebut dapat ditulis sebagai $A = [a_{ij}]$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, m$ dengan entri-entri-nya adalah a_{ij} .

Jika matriks A mempunyai jumlah baris sama dengan jumlah kolomnya, maka matriks A dinamakan dengan matriks bujursangkar.

Beberapa operasi pada matriks adalah operasi perkalian antara matriks dengan skalar dan perkalian antara matriks dengan matriks.

Definisi 2.1.2 [2]

Jika A adalah suatu matriks dan c adalah suatu skalar, maka hasil kali cA adalah matriks yang didapatkan dengan mengalikan setiap entri dari A oleh c .

Definisi 2.1.3 [2]

Jika A adalah sebuah matriks $m \times r$ dan B adalah sebuah matriks $r \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri di dalam baris i dan kolom j dari AB , maka pilihlah baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B . Kalikanlah entri-entri yang bersangkutan dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian tambahkanlah hasil perkalian yang dihasilkan.

Perlu diperhatikan bahwa $A \times B$ tidak selalu sama dengan $B \times A$.

2.1.1 Bentuk Matriks dari Suatu Sistem Linear

Suatu persamaan linear dalam n peubah (*variable*) adalah persamaan dengan bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \dots\dots\dots(2.1.1.1)$$

di mana $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ dan b adalah bilangan-bilangan riil dan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ adalah peubah. Dengan demikian, sistem linier dari m persamaan dalam n peubah adalah suatu sistem berbentuk :

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 \vdots & \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
 \end{aligned}
 \tag{2.1.1.2}$$

Karena dua matriks adalah setara jika dan hanya jika entri-entri yang bersesuaian adalah setara, maka dapat ditukar m persamaan dalam sistem ini dengan persamaan matriks tunggal.

$$\begin{pmatrix}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\
 \vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 b_1 \\
 b_2 \\
 \vdots \\
 b_m
 \end{pmatrix}
 \tag{2.1.1.3}$$

Matriks $m \times 1$ pada ruas kiri persamaan (2.1.1.3) dapat ditulis sebagai hasil kali, sehingga diperoleh

$$\begin{pmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 \vdots \\
 x_n
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 b_1 \\
 b_2 \\
 \vdots \\
 b_m
 \end{pmatrix}
 \tag{2.1.1.4}$$

Apabila dimisalkan matriks-matriks di atas masing-masing adalah matriks A , x , dan matriks b , maka sistem semula yang terdiri dari m persamaan dengan n yang tidak diketahui telah digantikan dengan persamaan matriks berikut ini, yaitu

$$Ax = b \tag{2.1.1.5}$$

Matriks A pada persamaan di atas disebut matriks koefisien dari sistem persamaan linier yang diberikan. [1]

Apabila diberikan sistem persamaan linier, maka penyelesaian dari sistem persamaan linier dinyatakan oleh teorema berikut :

Teorema 2.1.1.1 [2]

Setiap sistem persamaan linier tidak mempunyai penyelesaian, tepat mempunyai satu penyelesaian atau tak terhingga banyaknya penyelesaian.

Definisi 2.1.1.2 [1]

Jika A adalah matriks bujursangkar, dan terdapat matriks B yang berukuran sama dengan matriks A sedemikian sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut dapat dibalik (*invertible*) dan B dinamakan invers (*inverse*) dari A . Jika matriks B tidak dapat ditentukan, maka A disebut sebagai matriks singular.

Definisi 2.1.1.3 [1]

Misalkan A adalah suatu matriks bujursangkar. Fungsi determinan (*determinant function*) dinyatakan oleh \det dan didefinisikan $\det(A)$ sebagai jumlah semua hasil perkalian elementer bertanda dari A .

Definisi 2.1.1.4 [1]

Jika A adalah suatu matriks bujursangkar, maka minor dari entri a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks A setelah baris ke- i dan kolom ke- j dihilangkan dari A . Sedangkan bilangan $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ dinamakan kofaktor dari entri a_{ij} .

Definisi 2.1.1.5 [2]

Jika A adalah matriks $n \times n$ sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor a_{ij} , maka matriks

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2.1.1.6)$$

dinamakan matriks kofaktor dari A . Transpose matriks ini dinamakan adjoin dari A dan dinyatakan dengan $adj(A)$.

Teorema 2.1.1.6 [2]

Misalkan matriks A berukuran $n \times n$, determinan dari A dapat dihitung dengan menjumlahkan semua hasil perkalian entri-entri di dalam suatu baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya. Jadi untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$, maka

$$det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + a_{3j}C_{3j} + \dots + a_{nj}C_{nj} \dots (2.1.1.7)$$

disebut ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke- j ,

dan

$$det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3} + \dots + a_{in}C_{in} \dots\dots(2.1.1.8)$$

disebut ekspansi kofaktor sepanjang baris ke- i .

Teorema 2.1.1.7 [2]

Jika A adalah sebuah matriks yang mempunyai invers yaitu A^{-1} adalah invers dari A , maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \dots\dots\dots(2.1.1.9)$$

Teorema 2.1.1.8 [2]

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$ yang mempunyai invers, maka untuk setiap matriks B yang berukuran $n \times 1$, sistem persamaan $AX = B$ mempunyai persis satu penyelesaian yakni, $X = A^{-1}B$.

2.2 Ruang-ruang Vektor

2.2.1 Ruang- n Euclidis

Definisi 2.2.1.1 [2]

Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, maka sebuah tupel- n -terorde (*ordered- n -tuple*) adalah sebuah urutan dari n bilangan riil $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$. Himpunan dari semua tupel- n -terorde dinamakan ruang- n dan dinyatakan dengan R^n .

Definisi 2.2.1.2 [2]

Jika $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ adalah sebarang vektor di dalam R^n , maka hasilkali dalam Euclidis (*Euclidies inner product*) $u \cdot v$ didefinisikan oleh

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + \dots + u_nv_n \dots\dots\dots (2.2.1.1)$$

Norm dari sebuah vektor $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ di dalam R^n adalah

$$\|u\| = (u \cdot u)^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2} \dots\dots\dots (2.2.1.2)$$

Definisi 2.2.1.3 [2]

Misalkan U adalah sebarang himpunan benda pada mana didefinisikan dua operasi, yakni penambahan dan perkalian dengan skalar (bilangan riil). Yang diartikan dengan penambahan adalah sebuah kaidah untuk mengasosiasikan dengan setiap pasang benda u dan v di dalam U sebuah elemen $u + v$, yang dinamakan jumlah (*sum*) dari u dan v ; dan yang diartikan dengan perkalian skalar adalah sebuah kaidah untuk mengasosiasikan dengan setiap skalar k dan setiap benda u di dalam U sebuah elemen ku , yang dinamakan kelipatan skalar (*scalar multiple*) dari u oleh k . Jika aksioma-aksioma berikut dipenuhi oleh semua benda u, v, w di dalam U dan oleh semua skalar k dan l , maka U dinamakan ruang vektor (*vector space*) dan benda-benda di dalam U dinamakan vektor :

- (1) Jika u dan v adalah benda-benda di dalam U , maka $u + v$ berada di dalam U .
- (2) $u + v = v + u$.
- (3) $u + (v + w) = (u + v) + w$.
- (4) Ada sebuah benda $\vec{0}$ di dalam U sehingga $u + \vec{0} = \vec{0} + u = u$ untuk semua u di dalam U .
- (5) Untuk setiap u di dalam U , ada sebuah benda $-u$ di dalam U yang dinamakan negatif dari u sehingga $u + (-u) = (-u) + u = \vec{0}$.
- (6) Jika k adalah sebarang bilangan riil dan u adalah sebarang benda di dalam U , maka ku berada di dalam U .
- (7) $k(u + v) = ku + kv$
- (8) $(k + l)u = ku + lu$

$$(9) k(lu) = (kl)(u)$$

$$(10) 1u = u$$

Vektor 0 di dalam aksioma 4 dinamakan vektor nol (*zero vector*) untuk U .

2.2.2 Kebebasan Linier

Definisi 2.2.2.1 [1]

Jika $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ adalah himpunan tak kosong dari vektor-vektor, maka persamaan vektor

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_rv_r = \vec{0} \dots\dots\dots(2.2.2.1)$$

Memiliki paling tidak satu solusi yaitu

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_r = 0 \dots\dots\dots(2.2.2.2)$$

Jika ini satu-satunya solusi, maka S disebut sebagai himpunan bebas linier (*linierly independent*). Jika terdapat solusi-solusi lain, maka S disebut sebagai himpunan tidak bebas linier (*linierly dependent*).

Teorema 2.2.2.2 [2]

- (a) Jika $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah sebuah himpunan dari n vektor yang bebas linier di dalam sebuah ruang U yang berdimensi n , maka S adalah sebuah basis untuk U .

2.3 Hasilkali Dalam

Definisi 2.3.1 [1]

Hasilkali dalam (*inner product*) pada sebuah ruang vektor U adalah sebuah fungsi yang mengasosiasikan sebuah bilangan riil $\langle u, v \rangle$ dengan sepasang vektor u dan v di dalam U sedemikian rupa sehingga aksioma-aksioma berikut ini terpenuhi bagi semua vektor u, v , dan w di dalam U dan semua bilangan skalar k .

- (1) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ (aksioma kesimetrian)
- (2) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ (aksioma penjumlahan)
- (3) $\langle ku, v \rangle = k \langle u, v \rangle$ (aksioma homogenitas)
- (4) $\langle v, v \rangle \geq 0$ dan $\langle v, v \rangle = 0$, jika dan hanya jika $v = 0$
(aksioma positività)

Sebuah ruang vektor riil yang dilengkapi dengan sebuah hasilkali dalam disebut ruang hasilkali dalam riil (*riil inner product space*).

Definisi 2.3.2 [1]

Jika U adalah sebuah ruang hasilkali dalam, maka norm atau panjang (*length*) sebuah vektor u di dalam U dinotasikan dengan $\|u\|$ dan didefinisikan sebagai :

$$\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2} \dots\dots\dots(2.3.1)$$

Jarak (*distance*) antara dua buah titik (vektor) u dan v dinotasikan dengan $d(u, v)$ dan didefinisikan sebagai :

$$d(u, v) = \|u - v\| \dots\dots\dots(2.3.2)$$

2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.4.1 [2]

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor yang tak nol V di dalam R^n dinamakan sebuah vektor eigen (*eigenvector*) dari matriks A jika AV adalah kelipatan skalar dari V , yakni

$$AV = \lambda V \dots\dots\dots(2.4.1)$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ dinamakan nilai eigen (*eigenvalue*) dari matriks A dan V dikatakan sebuah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

Untuk mencari nilai eigen dari sebuah matriks A yang berukuran $n \times n$ maka dapat dituliskan kembali $AV = \lambda V$ sebagai

$$AV = \lambda IV \dots\dots\dots(2.4.2)$$

atau secara ekuivalen

$$(\lambda I - A)V = 0 \dots\dots\dots(2.4.3)$$

Agar λ adalah nilai eigen, maka harus ada penyelesaian tak nol dari persamaan (2.4.3). Persamaan (2.4.3) akan mempunyai penyelesaian tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0 \dots\dots\dots(2.4.4)$$

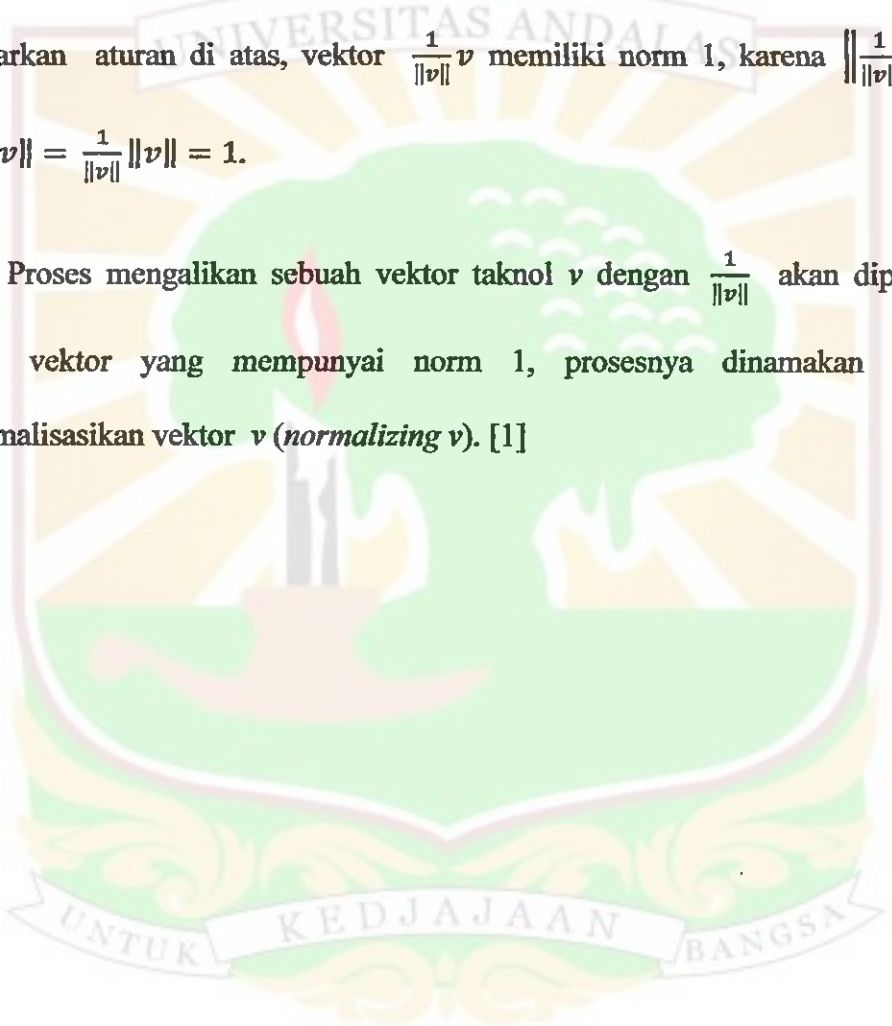
Persamaan (2.4.4) dinamakan persamaan karakteristik dari A , skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A . Bila diekspansikan, maka

- a) $\|u\| \geq 0$
- b) $\|u\| = 0$ jika dan hanya jika $u = \vec{0}$
- c) $\|ku\| = |k|\|u\|$
- d) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (ketidaksamaan segitiga)

Jika v adalah sebuah vektor tak nol pada sebuah ruang hasilkali dalam, maka

berdasarkan aturan di atas, vektor $\frac{1}{\|v\|}v$ memiliki norm 1, karena $\left\| \frac{1}{\|v\|}v \right\| = \left| \frac{1}{\|v\|} \right| \|v\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1$.

Proses mengalikan sebuah vektor tak nol v dengan $\frac{1}{\|v\|}$ akan diperoleh sebuah vektor yang mempunyai norm 1, prosesnya dinamakan proses menormalisasikan vektor v (*normalizing v*). [1]



$\det(\lambda I - A) = 0$ adalah sebuah polinomial di dalam λ yang dinamakan polinomial karakteristik dari A .

Teorema 2.4.2 [2]

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka pernyataan-pernyataan yang berikut ekuivalen satu sama lain

- a) λ adalah nilai eigen dari A .
- b) Sistem persamaan $(\lambda I - A)V = 0$ mempunyai pemecahan yang tak trivial.
- c) Ada sebuah vektor tak nol x di dalam R^n sehingga $AV = \lambda V$
- d) λ adalah pemecahan riil dari persamaan karakteristik $\det(\lambda I - A) = 0$

Vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan sebuah nilai eigen λ adalah vektor tak nol yang memenuhi $AV = \lambda V$. Secara ekuivalen maka vektor eigen yang bersesuaian dengan λ adalah vektor tak nol di dalam ruang solusi dari $(\lambda I - A)V = 0$. Ruang solusi ini dinamakan sebagai ruang eigen (*eigenspace*) dari A yang bersesuaian dengan λ .

Teorema 2.4.3 [1]

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka pernyataan-pernyataan yang berikut ekuivalen satu sama lain

- (a) A dapat didiagonalisir.
- (b) A mempunyai n vektor eigen yang bebas linier.

2.5 Barisan dan Kekonvergenan Barisan

2.5.1 Barisan

Mengenai barisan dapat dilihat definisi berikut :

Definisi 2.5.1.1 [4]

Suatu barisan bilangan riil adalah suatu fungsi dari himpunan bilangan asli \mathbb{N} yang rangenya termuat dalam himpunan bilangan riil \mathbb{R} .

Dengan kata lain, suatu barisan dalam R mengaitkan setiap bilangan asli $n = 1, 2, 3, \dots$, dengan suatu bilangan riil secara tunggal. Bilangan riil yang diperoleh dari pengaitan ini disebut elemen-elemen barisan atau suku-suku dari barisan. Secara umum, elemen-elemen riil ini ditulis sebagai x_n atau a_n atau z_n untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Sehingga, jika $X: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ adalah suatu barisan, maka dapat di tulis X pada n sebagai x_n dan bukan $X(n)$.

Barisan ini dinyatakan dengan notasi X , (x_n) , $(x_n : n \in \mathbb{N})$. Notasi $X = x_n : n \in \mathbb{N}$ di mana suku-sukunya berurutan, dan notasi himpunan $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ di mana suku-sukunya tidak perlu berurutan.

Secara umum penulisan rumus atau aturan barisan ada dua macam :

- a) Nilai fungsi (suku) berdasarkan letak barisan berdasarkan sukunya.

Misalkan $X = 2n$

- b) Barisan yang nilainya tidak bergantung pada suku ke- n nya, tetapi ditentukan pada suku sebelumnya.

Misalkan, barisan rekursif yaitu $X_1 = 3, X_{n+1} = X_n + 2$

2.5.2 Kekonvergenan Barisan

Kekonvergenan barisan bilangan riil dirancang seperti limit di tak hingga, didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.5.2.1 [6]

Barisan bilangan riil $\{a_n\}$ dikatakan konvergen ke $a \in R$ jika $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Barisan bilangan $\{a_n\}$ yang tidak mempunyai limit dikatakan divergen. Kemungkinan yang dapat terjadi adalah limit barisannya ∞ atau $-\infty$, atau berskilasi.

Seperti konsep limit di tak hingga,

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, berarti bahwa $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, berarti bahwa $\forall M > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0 \Rightarrow a_n > M$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, berarti bahwa $\forall N > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0 \Rightarrow a_n < N$

Kecepatan konvergensi suatu proses iterasi adalah kecepatan suatu proses iterasi untuk mencapai hasil akhir.

2.6 Ortogonal pada Vektor

Definisi 2.6.1 [1]

Dua vektor u dan v di dalam sebuah ruang hasilkali dalam dikatakan ortogonal jika $\langle u, v \rangle = 0$.

Teorema 2.6.2 [1]

Jika u dan v adalah vektor-vektor di dalam sebuah ruang hasilkali dalam V dan k adalah skalar sebarang, maka :

BAB III

MENENTUKAN NILAI EIGEN DOMINAN TERBESAR DAN NILAI EIGEN DOMINAN TERKECIL SUATU MATRIKS

3.1 Metode Pangkat (*Power Method*) dalam Menentukan Nilai Eigen Dominan Terbesar

Definisi 3.1.1 [2]

Nilai eigen dari sebuah matriks A dinamakan nilai eigen dominan (*dominant eigenvalue*) dari A , jika nilai mutlak dari nilai eigen tersebut lebih besar daripada semua nilai mutlak dari nilai-nilai eigen lainnya. Sebuah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dominan tersebut dinamakan dengan vektor eigen dominan (*dominant eigen vector*) dari A .

Definisi 3.1.2 [7]

Sebuah vektor eigen V dikatakan ternormalisasi jika nilai mutlak terbesar dari koordinatnya adalah 1.

Untuk menormalisasikan vektor eigen $(v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots \ v_n)^t$ dengan membentuk vektor baru, yaitu $V = \frac{1}{c_n}(v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots \ v_n)^t$, $c_n = 1, 2, 3, \dots$ di mana $c_n \approx v_j$ dan $|v_j| = \max_{1 \leq i \leq n} \{|v_i|\}$.

Misalkan matriks A mempunyai nilai eigen dominan λ dan terdapat satu vektor V yang ternormalisasi yang bersesuaian dengan λ . Pasangan nilai eigen λ dan vektor eigen V dapat dicari dengan mengikuti prosedur iterasi. Proses untuk

mencari nilai eigen λ dan vektor eigen V disebut metode pangkat. Iterasi ini dimulai dengan membentuk vektor $X_0 = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^t$ dan akan dihasilkan barisan $\{X_k\}$ secara rekursif dengan menggunakan

$$Y_k = AX_k \dots\dots\dots (3.1.1)$$

dan

$$X_{k+1} = \frac{1}{c_{k+1}} Y_k \dots\dots\dots (3.1.2)$$

di mana c_{k+1} adalah koordinat nilai mutlak terbesar dari Y_k . Barisan $\{X_k\}$ dan $\{c_k\}$ akan konvergen ke V dan λ , masing – masing sebagai berikut :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = V \text{ dan } \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \lambda \dots\dots\dots (3.1.3)$$

Teorema 3.1.3 [7]

Misalkan matriks A yang berukuran $n \times n$, mempunyai nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ dan nilai mutlak dari masing-masing nilai eigen tersebut diurutkan dari terbesar sampai terkecil , sehingga diperoleh

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n| \dots\dots\dots (3.1.4)$$

Jika X_0 dipilih sebarang, maka barisan $\{X_k = (x_1^{(k)} \ x_2^{(k)} \ x_3^{(k)} \ \dots \ x_n^{(k)})^t\}$ dan $\{c_k\}$ secara rekursif diperoleh dari

$$Y_k = AX_k \dots\dots\dots (3.1.5)$$

dan

$$X_{k+1} = \frac{1}{c_{k+1}} Y_k \dots\dots\dots (3.1.6)$$

di mana $c_{k+1} = x_j^{(k)}$ dan $x_j^{(k)} = \max_{1 \leq i \leq n} \{ |x_i^{(k)}| \}$

akan konvergen ke vektor eigen dominan V_1 dan nilai eigen λ_1 yaitu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = V_1 \text{ dan } \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \lambda_1 \dots\dots\dots (3.1.7)$$

Bukti :

Misalkan matriks A mempunyai n nilai eigen yaitu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ dan mempunyai n vektor eigen $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_k untuk $k = 1, 2, 3, \dots, n$ dan misalkan juga $\{V_1, V_2, V_3, \dots, V_n\}$ adalah bebas linier. Karena $\{V_1, V_2, V_3, \dots, V_n\}$ adalah himpunan vektor yang bebas linier dan mempunyai n nilai eigen yang berbeda maka berdasarkan teorema 2.4.3, $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ ternormalisasi dan berdasarkan teorema 2.2.2.2, maka $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ membentuk basis untuk ruang berdimensi n yaitu R^n . Misalkan vektor awal X_0 di R^n , sehingga X_0 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier

$$X_0 = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n \dots\dots\dots (3.1.8)$$

Misalkan $X_0 = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^t$ dipilih sedemikian rupa sehingga $\alpha_1 \neq 0$.

Misalkan juga koordinat X_0 dibuat sedemikian rupa sehingga $\max_{1 \leq j \leq n} \{ |x_j| \} = 1$.

Karena $\{V_k\}_{k=1}^n$ adalah vektor-vektor eigen dari A . Perkalian AX_0 , dengan mengikuti normalisasi akan menghasilkan

Iterasi ke-1 :

$$\begin{aligned}
 Y_0 &= AX_0 = A(\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n) \\
 &= \alpha_1 AV_1 + \alpha_2 AV_2 + \dots + \alpha_n AV_n \\
 &= \alpha_1 \lambda_1 V_1 + \alpha_2 \lambda_2 V_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n V_n
 \end{aligned}$$

$$= \lambda_1 \left(\alpha_1 V_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) V_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right) V_n \right)$$

Misalkan bila c_1 diambil dari $\max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \lambda_1 \left(\alpha_1 V_{1i} + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) V_{2i} + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right) V_{ni} \right) \right\}$

maka diperoleh

$$X_1 = \frac{\lambda_1}{c_1} \left(\alpha_1 V_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) V_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right) V_n \right)$$

Iterasi ke-2 :

$$Y_1 = AX_1 = A \frac{\lambda_1}{c_1} \left(\alpha_1 V_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) V_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right) V_n \right)$$

$$= \frac{\lambda_1}{c_1} \left(A\alpha_1 V_1 + A\alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) V_2 + \dots + A\alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right) V_n \right)$$

$$= \frac{\lambda_1}{c_1} \left(\alpha_1 AV_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) AV_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right) AV_n \right)$$

$$= \frac{\lambda_1}{c_1} \left(\alpha_1 \lambda_1 V_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \lambda_2 V_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right) \lambda_n V_n \right)$$

$$= \frac{\lambda_1}{c_1} \left(\alpha_1 \lambda_1 V_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} \right) V_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n^2}{\lambda_1} \right) V_n \right)$$

$$= \frac{\lambda_1}{c_1} \lambda_1 \left(\alpha_1 V_1 + \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1 \lambda_1} \right) \alpha_2 V_2 + \dots + \left(\frac{\lambda_n^2}{\lambda_1 \lambda_1} \right) \alpha_n V_n \right)$$

$$= \frac{\lambda_1^2}{c_1} \left(\alpha_1 V_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \alpha_2 V_2 + \dots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^2 \alpha_n V_n \right)$$

Misalkan bila c_2 diambil dari $\max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| \frac{\lambda_1^2}{c_1} \left(\alpha_1 V_{1i} + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 V_{2i} + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^2 V_{ni} \right) \right| \right\}$ maka diperoleh

$$X_2 = \frac{\lambda_1^2}{c_1 c_2} \left(\alpha_1 V_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \alpha_2 V_2 + \dots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^2 \alpha_n V_n \right)$$

Iterasi ke-3 :

$$Y_2 = AX_2 = A \frac{\lambda_1^2}{c_1 c_2} \left(\alpha_1 V_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \alpha_2 V_2 + \dots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^2 \alpha_n V_n \right)$$

$$= \frac{\lambda_1^2}{c_1 c_2} \left(A \alpha_1 V_1 + A \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 V_2 + \dots + A \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^2 V_n \right)$$

$$= \frac{\lambda_1^2}{c_1 c_2} \left(\alpha_1 A V_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 A V_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^2 A V_n \right)$$

$$= \frac{\lambda_1^2}{c_1 c_2} \left(\alpha_1 \lambda_1 V_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \lambda_2 V_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^2 \lambda_n V_n \right)$$

$$= \frac{\lambda_1^2}{c_1 c_2} \left(\alpha_1 \lambda_1 V_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2^3}{\lambda_1^2} \right) V_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n^3}{\lambda_1^2} \right) V_n \right)$$

$$= \frac{\lambda_1^2}{c_1 c_2} \lambda_1 \left(\alpha_1 V_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2^3}{\lambda_1^2 \lambda_1} \right) V_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n^3}{\lambda_1^2 \lambda_1} \right) V_n \right)$$

$$= \frac{\lambda_1^3}{c_1 c_2} \left(\alpha_1 V_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^3 \alpha_2 V_2 + \dots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^3 \alpha_n V_n \right)$$

Misalkan bila c_3 diambil dari $\max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| \frac{\lambda_1^3}{c_1 c_2} \left(\alpha_1 V_{1i} + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^3 V_{2i} + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^3 V_{ni} \right) \right| \right\}$ maka diperoleh

$$X_3 = \frac{\lambda_1^3}{c_1 c_2 c_3} \left(\alpha_1 V_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^3 \alpha_2 V_2 + \dots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^3 \alpha_n V_n \right)$$

Iterasi akan berlanjut terus-menerus, sehingga

Setelah iterasi ke- k diperoleh

$$\begin{aligned} Y_{k-1} &= AX_{k-1} \\ &= A \frac{\lambda_1^{k-1}}{c_1 c_2 \dots c_{k-1}} \left(\alpha_1 V_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{k-1} V_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^{k-1} V_n \right) \\ &= \frac{\lambda_1^{k-1}}{c_1 c_2 \dots c_{k-1}} \left(\alpha_1 AV_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{k-1} AV_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^{k-1} AV_n \right) \\ &= \frac{\lambda_1^{k-1}}{c_1 c_2 \dots c_{k-1}} \left(\alpha_1 \lambda_1 V_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{k-1} \lambda_2 V_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^{k-1} \lambda_n V_n \right) \\ &= \frac{\lambda_1^k}{c_1 c_2 \dots c_{k-1}} \left(\alpha_1 V_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k V_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k V_n \right) \end{aligned}$$

Misalkan bila c_k diambil dari $\max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| \frac{\lambda_i^k}{c_1 c_2 \dots c_{k-1}} \left(\alpha_1 V_{1i} + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k V_{2i} + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k V_{ni} \right) \right| \right\}$ maka diperoleh

$$X_k = \frac{\lambda_1^k}{c_1 c_2 \dots c_k} \left(\alpha_1 V_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{k-1} V_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^{k-1} V_n \right)$$

Karena diasumsikan bahwa $\frac{|\lambda_j|}{|\lambda_1|} < 1$ untuk setiap $j = 2, 3, 4, \dots, n$, maka diperoleh

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^k V_j = 0 \text{ setiap } j = 2, 3, 4, \dots, n \dots \dots \dots (3.1.9)$$

berarti bahwa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1 \lambda_1^k}{c_1 c_2 \dots c_k} V_1 \dots \dots \dots (3.1.10)$$

Selanjutnya, diinginkan bahwa nilai X_k dan V_1 dinormalisasi dan komponen terbesarnya menjadi 1. Oleh karena itu, limit vektor pada sisi kiri dari persamaan (3.1.10) dinormalkan sehingga komponen terbesarnya 1. Akibatnya limit kelipatan skalar dari V_1 pada sisi kanan pada persamaan (3.1.10) dan nilainya harus 1, sehingga

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1 \lambda_1^k}{c_1 c_2 \dots c_k} = 1 \dots \dots \dots (3.1.11)$$

Oleh karena itu, barisan $\{X_k\}$ konvergen ke vektor eigen dominan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = V_1 \dots \dots \dots (3.1.12)$$

Ganti k dengan $k - 1$ dalam bentuk barisan pada persamaan (3.1.11), menghasilkan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1 \lambda_1^{k-1}}{c_1 c_2 \dots c_{k-1}} = 1 \dots \dots \dots (3.1.13)$$

Berdasarkan persamaan (3.1.11) dengan persamaan (3.1.13), diperoleh hasil

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1}{c_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1 \lambda_1^k / c_1 c_2 \dots c_k}{\alpha_1 \lambda_1^{k-1} / c_1 c_2 \dots c_{k-1}} = \frac{1}{1} = 1 \dots \dots \dots (3.1.14)$$

Oleh karena itu, barisan $\{c_k\}$ konvergen ke nilai eigen dominan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \lambda_1 \blacksquare$$

Secara umum, Metode Pangkat ini menggunakan dua barisan $\{X_k\}$ dan $\{c_k\}$ yang didefinisikan secara rekursif. Prosesnya dimulai dari vektor tak nol sebarang dalam R^n misalkan X_0 . Setelah X_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, ditentukan, maka vektor-vektor Y_k dan X_{k+1} dapat dihitung sebagai berikut :

1. Hitung nilai Y_k dari perkalian A dengan X_k .
2. Cari koordinat c_{k+1} dari $x_j^{(k)}$ yang mempunyai nilai mutlak maksimum.
3. Hitung nilai dari hasil perkalian $X_{k+1} = \left(\frac{1}{c_{k+1}}\right)$ dengan Y_k .

Dalam metode pangkat, jika $\tilde{\lambda}_k$ menyatakan aproksimasi kepada nilai eigen dominan λ_1 pada langkah ke k , maka perhitungan harus dihentikan sekali kondisi

$$\left| \frac{\lambda_1 - \tilde{\lambda}_k}{\lambda_1} \right| < \varepsilon,$$

telah dipenuhi. Untuk mengatasi nilai eksak yang tidak diketahui, maka perkirakan λ_1 dengan $\tilde{\lambda}_k$ dan menghentikan perhitungan pada langkah ke k jika

$$\left| \frac{\tilde{\lambda}_k - \tilde{\lambda}_{k-1}}{\tilde{\lambda}_k} \right| < \varepsilon.$$

Algoritma untuk mencari nilai eigen dominan terbesar dengan menggunakan metode pangkat (*power method*) lebih rincinya adalah sebagai berikut :

(A) Masukan (*input*) :

- Matriks bujursangkar $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

n = banyak baris atau kolom dari matriks A .

- Nilai awal : $X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, k = 0, \text{ iterasi} \rightarrow 1$
- Galat / eror : $\varepsilon = 10^{-3}$ dan $\lambda_0 = 1$

(B) Langkah-langkah Algoritma :

(1) Hitung $Y_k \leftarrow A \cdot X_k$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(2) Hitung $c_{k+1} \leftarrow \max_{1 \leq k \leq n} |\{\text{komponen}(Y_k)\}|$.

(3) Hitung $X_{k+1} \leftarrow \frac{1}{c_{k+1}} \cdot Y_k$.

(4) $\lambda_{k+1} \leftarrow c_{k+1}$

(5) Jika $\left| \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\lambda_{k+1}} \right| < \varepsilon$ maka nilai eigen dominan terbesar λ_{k+1} dan selesai

Jika tidak maka $\text{iterasi} \leftarrow \text{iterasi} + 1$

$$k \leftarrow k + 1$$

Ulangi langkah 1.

Aplikasi pada contoh :

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} 21 & 7 & -1 \\ 5 & 7 & 7 \\ 4 & -4 & 20 \end{pmatrix}$, maka dengan menggunakan cara biasa

(ekspansi kofaktor) didapatkan nilai eigen dari matriks A tersebut adalah :

$$\lambda_1 = 24, \quad \lambda_2 = 8, \quad \text{dan } \lambda_3 = 16$$

Dalam kasus ini, nilai eigen terbesar dari matriks A tersebut adalah 24. Selanjutnya dengan cara lain yaitu dengan menggunakan metode power (*power method*) akan ditentukan nilai eigen dominan terbesar tersebut.

Sebagai masukan (*input*) adalah matriks $A := \begin{pmatrix} 21 & 7 & -1 \\ 5 & 7 & 7 \\ 4 & -4 & 20 \end{pmatrix}$; $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$$\varepsilon = 10^{-3} \text{ dan } \lambda_0 = 1$$

Dalam masalah ini berarti $n = 3$.

$$k = 0$$

Keluaran (*output*) : nilai eigen dominan terbesar.

Iterasi 1

Langkah 1 : $Y_0 \leftarrow A \cdot X_0$

$$\begin{pmatrix} 27 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 7 & -1 \\ 5 & 7 & 7 \\ 4 & -4 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Langkah 2 : $c_1 \leftarrow \max_{1 \leq i \leq 3} \{|(27,19,20)|\} = 27.$

Langkah 3 : $X_1 \leftarrow \frac{1}{c_1} \cdot Y_0$

$$X_1 \leftarrow \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 27 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.7037 \\ 0.7407 \end{pmatrix}.$$

Langkah 4 : $\lambda_1 \leftarrow c_1 = 27.$

Langkah 5 : $\left| \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_1} \right| = \left| \frac{27.0000 - 1.0000}{27.0000} \right| = 0.9630$

Karena $0.9630 > 10^{-3}$ maka ulangi proses di atas dengan $k = 1$.

Iterasi 2

Langkah 1 : $X_1 = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.7037 \\ 0.7407 \end{pmatrix}$

$$Y_1 \leftarrow A \cdot X_1$$

$$\begin{pmatrix} 25.1852 \\ 15.1111 \\ 16.0000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 7 & -1 \\ 5 & 7 & 7 \\ 4 & -4 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.7037 \\ 0.7407 \end{pmatrix}$$

Langkah 2 : $c_2 \leftarrow \max_{1 \leq i \leq 3} \{|(25.1852, 15.1111, 16.0000)|\} = 25.1852$.

Langkah 3 : $X_2 \leftarrow \frac{1}{c_2} \cdot Y_1$

$$X_2 \leftarrow \frac{1}{25.1852} \cdot \begin{pmatrix} 25.1852 \\ 15.1111 \\ 16.0000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.6000 \\ 0.6353 \end{pmatrix}$$

Langkah 4 : $\lambda_2 \leftarrow c_2 = 25.1852$.

Langkah 5 : $\left| \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2} \right| = \left| \frac{25.1852 - 27.0000}{25.1852} \right| = 0.0720$.

Karena $0.0720 > 10^{-3}$ maka ulangi proses di atas dengan $k = 2$.

Iterasi 3

Langkah 1 : $X_2 = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.6000 \\ 0.6353 \end{pmatrix}$

$$Y_2 \leftarrow A \cdot X_2$$

$$\begin{pmatrix} 24.5647 \\ 13.6471 \\ 14.3059 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 7 & -1 \\ 5 & 7 & 7 \\ 4 & -4 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.6000 \\ 0.6353 \end{pmatrix}$$

Langkah 2 : $c_3 \leftarrow \max_{1 \leq i \leq 3} \{|(24.5647, 13.6471, 14.3059)|\} = 24.5647.$

Langkah 3 : $X_3 \leftarrow \frac{1}{c_3} \cdot Y_2$

$$X_3 \leftarrow \frac{1}{24.5647} \cdot \begin{pmatrix} 24.5647 \\ 13.6471 \\ 14.3059 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.5556 \\ 0.5824 \end{pmatrix}.$$

Langkah 4 : $\lambda_3 \leftarrow c_3 = 24.5647.$

Langkah 5 : maka $\left| \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_3} \right| = \left| \frac{24.5647 - 25.1852}{24.5647} \right| = 0.0253.$

Karena $0.0253 > 10^{-3}$ maka ulangi proses di atas dengan $k = 3.$

Iterasi 4

Langkah 1 : $X_3 = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.5556 \\ 0.5824 \end{pmatrix}$

$$Y_3 \leftarrow A \cdot X_3$$

$$\begin{pmatrix} 24.3065 \\ 12.9655 \\ 13.4253 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 7 & -1 \\ 5 & 7 & 7 \\ 4 & -4 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.5556 \\ 0.5824 \end{pmatrix}.$$

Langkah 2 : $c_4 \leftarrow \max_{1 \leq i \leq 3} \{|(24.3065, 12.9655, 13.4253)|\} = 24.3065.$

Langkah 3 : $X_4 \leftarrow \frac{1}{c_4} \cdot Y_3$

$$X_4 \leftarrow \frac{1}{24.3065} \cdot \begin{pmatrix} 24.3065 \\ 12.9655 \\ 13.4253 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.5334 \\ 0.5523 \end{pmatrix}.$$

Langkah 4 : $\lambda_4 \leftarrow c_4 = 24.3065.$

Langkah 5 : $\left| \frac{\lambda_4 - \lambda_3}{\lambda_4} \right| = \left| \frac{24.3065 - 24.5647}{24.3065} \right| = 0.0106.$

Karena $0.0106 > 10^{-3}$ maka ulangi proses di atas dengan $k = 4.$

Iterasi 5

$$\text{Langkah 1 : } X_4 = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.5334 \\ 0.5523 \end{pmatrix}$$

$$Y_4 \leftarrow A \cdot X_4$$

$$\begin{pmatrix} 24.1816 \\ 12.6003 \\ 12.9130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 7 & -1 \\ 5 & 7 & 7 \\ 4 & -4 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.5334 \\ 0.5523 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Langkah 2 : } c_5 \leftarrow \max_{1 \leq i \leq 3} \{ (24.1816, 12.6003, 12.9130) \} = 24.1816.$$

$$\text{Langkah 3 : } X_5 \leftarrow \frac{1}{c_5} \cdot Y_4$$

$$X_5 \leftarrow \frac{1}{24.1816} \cdot \begin{pmatrix} 24.1816 \\ 12.6003 \\ 12.9130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.5211 \\ 0.5340 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Langkah 4 : } \lambda_5 \leftarrow c_5 = 24.1816.$$

$$\text{Langkah 5 : } \left| \frac{\lambda_5 - \lambda_4}{\lambda_5} \right| = \left| \frac{24.1816 - 24.3065}{24.1816} \right| = 0.0052.$$

Karena $0.0052 > 10^{-3}$ maka ulangi proses di atas dengan $k = 5$.

Iterasi 6

$$\text{langkah 1 : } X_5 = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.5211 \\ 0.5340 \end{pmatrix}$$

$$Y_5 \leftarrow A \cdot X_5$$

$$\begin{pmatrix} 24.1135 \\ 12.3855 \\ 12.5957 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 7 & -1 \\ 5 & 7 & 7 \\ 4 & -4 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.5211 \\ 0.5340 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Langkah 2 : } c_6 \leftarrow \max_{1 \leq i \leq 3} \{ (24.1135, 12.3855, 12.5957) \} = 24.1135.$$

$$\text{Langkah 3 : } X_6 \leftarrow \frac{1}{c_6} \cdot Y_5$$

$$X_6 \leftarrow \frac{1}{24.1135} \begin{pmatrix} 24.1135 \\ 12.3855 \\ 12.5957 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.5136 \\ 0.5224 \end{pmatrix}.$$

Langkah 4 : $\lambda_6 \leftarrow c_6 = 24.1135$.

$$\text{Langkah 5 : } \left| \frac{\lambda_6 - \lambda_5}{\lambda_6} \right| = \left| \frac{24.1135 - 24.1816}{24.1135} \right| = 0.0028.$$

Karena $0.0028 > 10^{-3}$ maka ulangi proses di atas dengan $k = 6$.

Iterasi 7

$$\text{langkah 1 : } X_6 = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.5136 \\ 0.5224 \end{pmatrix}$$

$$Y_6 \leftarrow A \cdot X_6$$

$$\begin{pmatrix} 24.0730 \\ 12.2519 \\ 12.3925 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 7 & -1 \\ 5 & 7 & 7 \\ 4 & -4 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.5136 \\ 0.5224 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Langkah 2 : } c_7 \leftarrow \max_{1 \leq i \leq 3} \{ (24.0730, 12.2519, 12.3925) \} = 24.0730.$$

$$\text{Langkah 3 : } X_7 \leftarrow \frac{1}{c_7} \cdot Y_6$$

$$X_7 \leftarrow \frac{1}{24.0730} \begin{pmatrix} 24.0730 \\ 12.2519 \\ 12.3925 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.5089 \\ 0.5148 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Langkah 4 : } \lambda_7 \leftarrow c_7 = 24.0730.$$

$$\text{Langkah 5 : } \left| \frac{\lambda_7 - \lambda_6}{\lambda_7} \right| = \left| \frac{24.0730 - 24.1135}{24.0730} \right| = 0.0017.$$

Karena $0.0017 > 10^{-3}$ maka ulangi proses di atas dengan $k = 7$.

Iterasi 8

$$\text{Langkah 1 : } X_7 = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.5089 \\ 0.5148 \end{pmatrix}$$

$$Y_7 \leftarrow A \cdot X_7$$

$$\begin{pmatrix} 24.0479 \\ 12.1662 \\ 12.2600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 7 & -1 \\ 5 & 7 & 7 \\ 4 & -4 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.5089 \\ 0.5148 \end{pmatrix}.$$

Langkah 2 : $c_8 \leftarrow \max_{1 \leq i \leq 3} \{|(24.0479, 12.1662, 12.2600)|\} = 24.0479.$

Langkah 3 : $X_8 \leftarrow \frac{1}{c_8} \cdot Y_7$

$$X_8 \leftarrow \frac{1}{24.0479} \cdot \begin{pmatrix} 24.0479 \\ 12.1662 \\ 12.2600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.5059 \\ 0.5098 \end{pmatrix}.$$

Langkah 4 : $\lambda_8 \leftarrow c_8 = 24.0479.$

Langkah 5 : $\left| \frac{\lambda_8 - \lambda_7}{\lambda_8} \right| = \left| \frac{24.0479 - 24.0730}{24.0479} \right| = 0.00104.$

Karena $0.00104 > 10^{-3}$ maka ulangi langkah di atas dengan $k = 8$.

Iterasi 9

Langkah 1 : $X_8 = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.5059 \\ 0.5098 \end{pmatrix}$

$$Y_8 \leftarrow A \cdot X_8$$

$$\begin{pmatrix} 24.0316 \\ 12.1101 \\ 12.1727 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 7 & -1 \\ 5 & 7 & 7 \\ 4 & -4 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.5059 \\ 0.5098 \end{pmatrix}.$$

Langkah 2 : $c_9 \leftarrow \max_{1 \leq i \leq 3} \{|(24.0316, 12.1101, 12.1727)|\} = 24.0316.$

Langkah 3 : $X_9 \leftarrow \frac{1}{c_9} \cdot Y_8$

$$X_9 \leftarrow \frac{1}{24.0316} \cdot \begin{pmatrix} 24.0316 \\ 12.1101 \\ 12.1727 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.5039 \\ 0.5065 \end{pmatrix}.$$

Langkah 4 : $\lambda_9 \leftarrow c_9 = 24.0316$.

Langkah 5 : $\left| \frac{\lambda_9 - \lambda_8}{\lambda_9} \right| = \left| \frac{24.0316 - 24.0479}{24.0316} \right| = 0.0006$.

Karena $0.0006 < 10^{-3}$ maka proses berhenti sehingga nilai eigen dari matriks A adalah $c_9 = \lambda_9$ yaitu 24.0316.

Jadi, diperoleh nilai eigen dominan terbesar dari matriks A adalah 24.0316.

3.2 Metode Pangkat Inversi (*inverse power method*) dalam Menentukan Nilai Eigen Dominan Terkecil

Metode pangkat inversi (*inverse power method*) melengkapi metode power untuk menentukan nilai eigen dominan terkecil dari suatu matriks. Jika $B = A^{-1}$, maka nilai eigen dari B adalah kebalikan dari nilai eigen dari A . Oleh karena itu, gunakan metode power untuk menentukan nilai eigen dominan terbesar dari B , misalkan λ . Kebalikan dari λ akan merupakan nilai eigen dominan terkecil dari A . Notasikan nilai eigen dominan terkecil dari A dengan μ .

Dua barisan $\{V_k\}$ dan $\{c_k\}$ didefinisikan secara rekursif. Prosesnya dimulai dari vektor tak nol sebarang dalam R^n misalkan X_0 . Setelah X_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, ditentukan, maka vektor-vektor Y_k dan X_{k+1} dapat dihitung sebagai berikut :

1. Hitung nilai Y_k dari perkalian A^{-1} dengan X_k .
2. Cari koordinat C_{k+1} dari $x_j^{(k)}$ yang mempunyai nilai mutlak maksimum.
3. Hitung nilai dari hasil perkalian $X_{k+1} = \left(\frac{1}{c_{k+1}} \right)$ dengan Y_k .

Algoritma untuk mencari nilai eigen dominan terkecil dengan menggunakan metode pangkat inversi (*inverse power method*) lebih rincinya adalah sebagai berikut :

(A) Masukan (*input*) :

- Matriks bujursangkar $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

n = banyak baris atau kolom dari matriks A .

Tentukan invers dari matriks A , misalkan A^{-1}

- Nilai awal : $X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, k = 0, \text{ iterasi} \rightarrow 1$

- Galat / eror : $\varepsilon = 10^{-3}$ dan $\lambda_0 = 1$.

(B) Langkah-langkah Algoritma :

(1) Hitung $Y_k \leftarrow A^{-1} \cdot X_k$.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' & \dots & a_{1n}' \\ a_{21}' & a_{22}' & \dots & a_{2n}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}' & a_{n2}' & \vdots & a_{nn}' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(2) Hitung $c_{k+1} \leftarrow \max_{1 \leq k \leq n} \{|komponen(Y_k)|\}$.

(3) Hitung $X_{k+1} \leftarrow \frac{1}{c_{k+1}} \cdot Y_k$.

(4) $\lambda_{k+1} \leftarrow c_{k+1}$.

(5) Jika $\left| \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\lambda_{k+1}} \right| < \varepsilon$ maka nilai eigen dominan terkecil $\mu = \frac{1}{\lambda_{k+1}}$ dan selesai

Jika tidak maka $iterasi \leftarrow iterasi + 1$

$k \leftarrow k + 1$
Ulangi langkah 1.

Aplikasi pada contoh :

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} 21 & 7 & -1 \\ 5 & 7 & 7 \\ 4 & -4 & 20 \end{pmatrix}$, maka dengan menggunakan cara biasa

(ekspansi kofaktor) didapatkan nilai eigen dari matriks A tersebut adalah :

$$\lambda_1 = 24, \quad \lambda_2 = 8, \quad \text{dan } \lambda_3 = 16$$

Dalam kasus ini, nilai eigen terkecil dari matriks A tersebut adalah 8. Selanjutnya dengan cara lain yaitu dengan menggunakan metode pangkat inversi (*inverse power method*) akan ditentukan nilai eigen tersebut.

Sebagai masukan (*input*) adalah matriks $A = \begin{pmatrix} 21 & 7 & -1 \\ 5 & 7 & 7 \\ 4 & -4 & 20 \end{pmatrix}$;

Sehingga diperoleh invers dari matriks A yaitu

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A).$$

Di mana $\det(A) = 2940 + 20 + 28 + 588 - 700$

$$= 3072.$$

Kofaktor dari A adalah

$$c_{11} = 168 \qquad c_{12} = -72 \qquad c_{13} = -48$$

$$c_{21} = -136 \qquad c_{22} = 424 \qquad c_{23} = 112$$

$$c_{31} = 56 \qquad c_{32} = -152 \qquad c_{33} = 112$$

Sehingga matriks kofaktor adalah

$$\begin{bmatrix} 168 & -72 & -48 \\ -144 & 424 & 112 \\ 56 & -152 & 112 \end{bmatrix}$$

Dan adj dari A adalah

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 168 & -144 & 56 \\ -72 & 424 & -152 \\ -48 & 112 & 112 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

$$= \frac{1}{3072} \begin{bmatrix} 168 & -144 & 56 \\ -72 & 424 & -152 \\ -48 & 112 & 112 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.0547 & -0.0443 & 0.0182 \\ -0.0234 & 0.1380 & -0.0495 \\ -0.0156 & 0.0365 & 0.0365 \end{pmatrix};$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \varepsilon = 10^{-3} \text{ dan } \lambda_0 = 1$$

Dalam masalah ini berarti $n = 3$.

$$k = 0$$

Keluaran (*output*) : nilai eigen dominan terkecil.

Iterasi 1

Langkah 1 : $Y_0 \leftarrow A^{-1} \cdot X_0$

$$\begin{pmatrix} 0.0286 \\ 0.0651 \\ 0.0574 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0547 & -0.0443 & 0.0182 \\ -0.0234 & 0.1380 & -0.0495 \\ -0.0156 & 0.0365 & 0.0365 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Langkah 2 : $c_1 \leftarrow \max_{1 \leq i \leq 3} \{|(0.0286, 0.0651, 0.0574)|\} = 0.0651.$

Langkah 3 : $X_1 \leftarrow \frac{1}{c_1} \cdot Y_0$

$$X_1 \leftarrow \frac{1}{0.0651} \cdot \begin{pmatrix} 0.0286 \\ 0.0651 \\ 0.0573 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4400 \\ 1.0010 \\ 0.8801 \end{pmatrix}.$$

Langkah 4 : $\lambda_1 \leftarrow c_1 = 0.0651.$

Langkah 5 : $\left| \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_1} \right| = \left| \frac{0.0651 - 1.0000}{0.0651} \right| = 14.3609.$

Karena $14.3609 > 10^{-3}$ maka ulangi proses di atas dengan $k = 1.$

Iterasi 2

Langkah 1 : $X_1 = \begin{pmatrix} 0.4400 \\ 1.0010 \\ 0.8801 \end{pmatrix}$

$Y_1 \leftarrow A^{-1} \cdot X_1$

$$\begin{pmatrix} -0.0042 \\ 0.0842 \\ 0.0617 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0547 & -0.0443 & 0.0182 \\ -0.0234 & 0.1380 & -0.0495 \\ -0.0156 & 0.0365 & 0.0365 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4400 \\ 1.0010 \\ 0.8801 \end{pmatrix}.$$

Langkah 2 : $c_2 \leftarrow \max_{1 \leq i \leq 3} \{|(-0.0042, 0.0842, 0.0617)|\} = 0.0842.$

Langkah 3 : $X_2 \leftarrow \frac{1}{c_2} \cdot Y_1$

$$X_2 \leftarrow \frac{1}{0.0842} \cdot \begin{pmatrix} -0.0042 \\ 0.0842 \\ 0.0617 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0495 \\ 0.9997 \\ 0.7324 \end{pmatrix}.$$

Langkah 4 : $\lambda_2 \leftarrow c_2 = 0.0842.$

Langkah 5 : $\left| \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2} \right| = \left| \frac{0.0842 - 0.0651}{0.0842} \right| = 0.2268.$

Karena $0.2268 > 10^{-3}$ maka ulangi proses di atas dengan $k = 2.$

Iterasi 3

Langkah 1 : $X_2 = \begin{pmatrix} -0.0495 \\ 0.9997 \\ 0.7324 \end{pmatrix}$

$$Y_2 \leftarrow A^{-1} \cdot X_2$$

$$\begin{pmatrix} -0.0336 \\ 0.1029 \\ 0.0639 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0547 & -0.0443 & 0.0182 \\ -0.0234 & 0.1380 & -0.0495 \\ -0.0156 & 0.0365 & 0.0365 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.0495 \\ 0.9997 \\ 0.7324 \end{pmatrix}.$$

Langkah 2 : $c_3 \leftarrow \max_{1 \leq i \leq 3} \{|(-0.0336, 0.1029, 0.0639)|\} = 0.1029.$

Langkah 3 : $X_3 \leftarrow \frac{1}{c_3} \cdot Y_2$

$$X_3 \leftarrow \frac{1}{0.1029} \cdot \begin{pmatrix} -0.0336 \\ 0.1029 \\ 0.0639 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3266 \\ 1.0000 \\ 0.6212 \end{pmatrix}.$$

Langkah 4 : $\lambda_3 \leftarrow c_3 = 0.1029.$

Langkah 5 : $\left| \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_3} \right| = \left| \frac{0.1029 - 0.0842}{0.1029} \right| = 0.1817.$

Karena $0.1817 > 10^{-3}$ maka ulangi proses di atas dengan $k = 3.$

Iterasi 4

$$\text{Langkah 1 : } X_3 = \begin{pmatrix} -0.3266 \\ 1.0000 \\ 0.6212 \end{pmatrix}$$

$$Y \leftarrow_3 A^{-1} \cdot X_3$$

$$\begin{pmatrix} -0.0508 \\ 0.1149 \\ 0.0642 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0547 & -0.0443 & 0.0182 \\ -0.0234 & 0.1380 & -0.0495 \\ -0.0156 & 0.0365 & 0.0365 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.3266 \\ 1.0000 \\ 0.6212 \end{pmatrix}$$

$$\text{Langkah 2 : } c_4 \leftarrow \max_{1 \leq i \leq 3} | \{ (-0.0508, 0.1149, 0.0642) \} | = 0.1149.$$

$$\text{Langkah 3 : } X_4 \leftarrow \frac{1}{c_4} \cdot Y_3$$

$$X_4 \leftarrow \frac{1}{0.1149} \cdot \begin{pmatrix} -0.0508 \\ 0.1149 \\ 0.0642 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4422 \\ 1.0003 \\ 0.5588 \end{pmatrix}$$

$$\text{Langkah 4 : } \lambda_4 \leftarrow c_4 = 0.1149.$$

$$\text{Langkah 5 : } \left| \frac{\lambda_4 - \lambda_3}{\lambda_4} \right| = \left| \frac{0.1149 - 0.1029}{0.1149} \right| = 0.1044.$$

Karena $0.1044 > 10^{-3}$ maka ulangi proses di atas dengan $k = 4$.

Iterasi 5

$$\text{Langkah 1 : } X_4 = \begin{pmatrix} -0.4422 \\ 1.0003 \\ 0.5588 \end{pmatrix}$$

$$Y_4 \leftarrow A^{-1} \cdot X_4$$

$$\begin{pmatrix} -0.0583 \\ 0.1208 \\ 0.0638 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0547 & -0.0443 & 0.0182 \\ -0.0234 & 0.1380 & -0.0495 \\ -0.0156 & 0.0365 & 0.0365 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.4422 \\ 1.0003 \\ 0.5588 \end{pmatrix}$$

$$\text{Langkah 2 : } c_5 \leftarrow \max_{1 \leq i \leq 3} | \{ (-0.0583, 0.1208, 0.0638) \} | = 0.1208.$$

$$\text{Langkah 3 : } X_5 \leftarrow \frac{1}{c_5} \cdot Y_4$$

$$X_5 \leftarrow \frac{1}{0.1208} \cdot \begin{pmatrix} -0.0583 \\ 0.1208 \\ 0.0638 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4824 \\ 0.9998 \\ 0.5277 \end{pmatrix}.$$

Langkah 4 : $\lambda_5 \leftarrow c_5 = 0.1208$.

$$\text{Langkah 5 : } \left| \frac{\lambda_5 - \lambda_4}{\lambda_5} \right| = \left| \frac{0.1208 - 0.1149}{0.1208} \right| = 0.0488.$$

Karena $0.0488 > 10^{-3}$ maka ulangi proses di atas dengan $k = 5$.

Iterasi 6

$$\text{langkah 1 : } X_5 = \begin{pmatrix} -0.4824 \\ 0.9998 \\ 0.5277 \end{pmatrix}$$

$$Y_5 \leftarrow A^{-1} \cdot X_5$$

$$\begin{pmatrix} -0.0610 \\ 0.1232 \\ 0.0632 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0547 & -0.0443 & 0.0182 \\ -0.0234 & 0.1380 & -0.0495 \\ -0.0156 & 0.0365 & 0.0365 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.4822 \\ 0.9998 \\ 0.5277 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Langkah 2 : } c_6 \leftarrow \max_{1 \leq i \leq 3} \{|(-0.0610, 0.1232, 0.0632)|\} = 0.1232.$$

$$\text{Langkah 3 : } X_6 \leftarrow \frac{1}{c_6} \cdot Y_5$$

$$X_6 \leftarrow \frac{1}{0.1232} \cdot \begin{pmatrix} -0.0610 \\ 0.1232 \\ 0.0632 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4953 \\ 0.9999 \\ 0.5132 \end{pmatrix}.$$

Langkah 4 : $\lambda_6 \leftarrow c_6 = 0.1232$.

$$\text{Langkah 5 : } \left| \frac{\lambda_6 - \lambda_5}{\lambda_6} \right| = \left| \frac{0.1232 - 0.1208}{0.1232} \right| = 0.0195.$$

Karena $0.0195 > 10^{-3}$ maka ulangi proses di atas dengan $k = 6$.

Iterasi 7

$$\text{langkah 1 : } X_6 = \begin{pmatrix} -0.4953 \\ 0.9999 \\ 0.5132 \end{pmatrix}$$

$$Y_6 \leftarrow A^{-1} \cdot X_6$$

$$\begin{pmatrix} -0.0620 \\ 0.1242 \\ 0.0629 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0547 & -0.0443 & 0.0182 \\ -0.0234 & 0.1380 & -0.0495 \\ -0.0156 & 0.0365 & 0.0365 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.4953 \\ 0.9999 \\ 0.5132 \end{pmatrix}.$$

Langkah 2 : $c_7 \leftarrow \max_{1 \leq i \leq 3} \{|(-0.0620, 0.1242, 0.0629)|\} = 0.1242.$

Langkah 3 : $X_7 \leftarrow \frac{1}{c_7} \cdot Y_6$

$$X_7 \leftarrow \frac{1}{0.1242} \cdot \begin{pmatrix} -0.0620 \\ 0.1242 \\ 0.0629 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4992 \\ 1.0002 \\ 0.5065 \end{pmatrix}.$$

Langkah 4 : $\lambda_7 \leftarrow c_7 = 0.1242.$

Langkah 5 : $\left| \frac{\lambda_7 - \lambda_6}{\lambda_7} \right| = \left| \frac{0.1242 - 0.1232}{0.1242} \right| = 0.0081.$

Karena $0.0081 > 10^{-3}$ maka ulangi proses di atas dengan $k = 7$.

Iterasi 8

Langkah 1 : $X_7 = \begin{pmatrix} -0.4992 \\ 1.0002 \\ 0.5065 \end{pmatrix}$

$$Y_7 \leftarrow A^{-1} \cdot X_7$$

$$\begin{pmatrix} -0.0623 \\ 0.1247 \\ 0.0627 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0547 & -0.0443 & 0.0182 \\ -0.0234 & 0.1380 & -0.0495 \\ -0.0156 & 0.0365 & 0.0365 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.4992 \\ 1.0002 \\ 0.5065 \end{pmatrix}.$$

Langkah 2 : $c_8 \leftarrow \max_{1 \leq i \leq 3} \{|(-0.0623, 0.1247, 0.0627)|\} = 0.1247.$

Langkah 3 : $X_8 \leftarrow \frac{1}{c_8} \cdot Y_7$

$$X_8 \leftarrow \frac{1}{0.1247} \cdot \begin{pmatrix} -0.0623 \\ 0.1247 \\ 0.0627 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5000 \\ 0.9999 \\ 0.5030 \end{pmatrix}.$$

Langkah 4 : $\lambda_8 \leftarrow c_8 = 0.1247$.

Langkah 5 : $\left| \frac{\lambda_8 - \lambda_7}{\lambda_8} \right| = \left| \frac{0.1247 - 0.1242}{0.1247} \right| = 0.0040$.

Karena $0.0040 > 10^{-3}$ maka ulangi proses di atas dengan $k = 8$.

Iterasi 9

Langkah 1 : $X_8 = \begin{pmatrix} -0.5000 \\ 0.9999 \\ 0.5030 \end{pmatrix}$

$Y_8 \leftarrow A^{-1} \cdot X_8$

$$\begin{pmatrix} -0.0624 \\ 0.1248 \\ 0.0626 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0547 & -0.0443 & 0.0182 \\ -0.0234 & 0.1380 & -0.0495 \\ -0.0156 & 0.0365 & 0.0365 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5000 \\ 0.9999 \\ 0.5030 \end{pmatrix}$$

Langkah 2 : $c_9 \leftarrow \max_{1 \leq i \leq 3} | \{ (-0.0624, 0.1248, 0.0626) \} | = 0.1248$.

Langkah 3 : $X_9 \leftarrow \frac{1}{c_9} \cdot Y_8$

$$X_9 \leftarrow \frac{1}{0.1248} \cdot \begin{pmatrix} -0.0624 \\ 0.1248 \\ 0.0626 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5003 \\ 1.0002 \\ 0.5016 \end{pmatrix}$$

Langkah 4 : $\lambda_9 \leftarrow c_9 = 0.1248$.

Langkah 5 : $\left| \frac{\lambda_9 - \lambda_8}{\lambda_9} \right| = \left| \frac{0.1248 - 0.1247}{0.1248} \right| = 0.0008$.

Karena $0.0008 < 10^{-3}$ maka proses berhenti sehingga nilai eigen

terkecil adalah $\mu = \frac{1}{\lambda_9} = \frac{1}{0.1248} = 8.0128$.

Jadi, diperoleh nilai eigen dominan terkecil dari matriks A adalah 8.0128.

BAB IV

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh pada Bab III, dapat disimpulkan bahwa :

1. Metode pangkat (*Metode Power*) dan Metode pangkat inversi (*Inverse Power Method*) adalah suatu langkah iteratif untuk mendapatkan hampiran nilai eigen dominan terbesar dan hampiran nilai eigen dominan terkecil. Semakin kecil ε (eror atau galat) yang diberikan, semakin banyak iterasi yang terjadi dan akibatnya semakin baik hasil yang akan diperoleh.
2. Dalam menentukan nilai eigen dominan terbesar yang terpenting adalah hubungan $\lambda.V = A.V$ sehingga didapatkan langkah-langkah atau algoritma dalam menentukan nilai eigen dominan terbesar menggunakan metode pangkat (*power method*).
3. Dalam menentukan nilai eigen dominan terkecil adalah kebalikan dari nilai eigen dominan terbesar yaitu invers dari matriks A , misalkan $B = A^{-1}$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anton, Howard dan Chris Rorres. 2005. *Aljabar Linier Elementer*. Versi Aplikasi Jilid 1 Edisi Delapan. Erlangga, Jakarta
- [2] Anton, Howard. 1991. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi Tiga. Erlangga, Jakarta
- [3] Anonim,metnum-2 , <http://blogs.phys.Unpad.ac.id/labkom/files/2010/01/Metnum-2.pdf>, 15 juni 2010.
- [4] Bartle, Robert G dan Donald R. 1994. *Introduction to Real Analysis*. Second Edition. Sherbert, Singapore
- [5] Leon, Steven J. 1998. *Aljabar Linier dan Aplikasinya*. edisi lima. Erlangga, Jakarta
- [6] Martono, Koko. 1999. *Kalkulus*. Erlangga, Jakarta
- [7] Mathews, John H. 1999. *Numerical Methods Using Matlab*. Third Edition. Prentice Hall, California
- [8] R, Muhammad jatra, Rizal Isnanto dan Imam Santoso. Identifikasi Iris Mata Menggunakan Metode Analisis Komponen Utama dan Perhitungan Jarak Euclidiean, <http://eprints.undif.ac.id/25516/1/ml2f001620.pdf>, 1 Maret 2011.
- [9] Yeri. 2005. *Metode Numerik Berbasis Mathcad*. Andi, Yogyakarta
- [10] Yu-kai Hong, An introduction to the power method and (shifted/inverse) power method, http://www.Math.nuk.edu.tw/jinnliu/Software_Engineering/IS_PowerMethod.pdf, 6 Maret 2011.

RIWAYAT HIDUP PENULIS



Penulis bernama Desventri Etmy, dilahirkan di Bengkulu pada tanggal 8 Desember 1987 dari pasangan Drs.Mardan Waib, M.Pd dan Eta Saptareta, S.Pd. Penulis adalah anak ketiga dari enam bersaudara. Penulis menamatkan pendidikan Taman Kanak-kanak Kampung Bali pada tahun 1999, Sekolah Dasar di SDN 03 Bengkulu pada tahun 2000, SMPN 1 Bengkulu pada tahun 2003, dan SMAN 5 Bengkulu pada tahun 2006.

Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur Seleksi Penerimaan Mahasiswa Baru Reguler Mandiri.

Selama menjadi mahasiswa di Jurusan Matematika FMIPA UNAND, penulis pernah menjadi Anggota Bidang III (Bidang Kesejahteraan Masyarakat) HIMATIKA UNAND tahun kepengurusan 2008/2009, Seketaris Bidang I (Pembinaan Aparat dan Anggota) HIMATIKA UNAND tahun kepengurusan 2009/2010. Penulis pernah menjadi panitia Pekan Seni Bermatematika, Himatika Goes To School, dan Musywarah Nasional IHMSI (Ikatan Himpunan Mahasiswa Statistik Indonesia).

