GRUP ALJABAR C G DAN CG-MODUL REGULAR

SKRIPSI

FITRIA EKA PUSPITA
07934028

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2011

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur penulis sampaikan kehadirat Allah SWT karena berkat ridho dan izin-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul **"Grup Aljabar $\mathbb{C}G$ dan $\mathbb{C}G$-modul Regular"**. Salawat dan salam tidak lupa penulis kirimkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW yang telah membawa umat manusia dari zaman kebodohan ke zaman yang penuh ilmu pengetahuan. Skripsi ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang.

Selanjutnya, penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini, terutama kepada :

1. Ibu Monika Rianti Helmi, M.Si selaku Pembimbing I yang telah dengan sabar membantu mengarahkan penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Serta ilmu, ide, saran, dan nasihat yang diberikan selama proses bimbingan tugas akhir maupun selama penulis menjalani perkuliahan.
2. Ibu Nova Noliza Bakar, M.Si selaku Pembimbing II yang telah membantu penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini. Serta ilmu yang didapat selama penulis menjalani perkuliahan.
3. Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Zulakmal, M.Si., dan Bapak Efendi, M.Si. selaku penguji yang telah membaca, memberi masukan dan saran kepada penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.
4. Ibu Arrival Rince Putri, M.T., Ibu Des Welyyanti, M.Si., Bapak Dr. Admi Nazra selaku Pembimbing Akademik yang telah membantu penulis dalam

urusan akademik terutama dalam merancang studi agar dapat selesai tepat pada waktunya. Serta nasihat dan ilmu yang telah diberikan selama penulis menjalani proses studi.

5. Bapak Dr. Syafrizal Sy selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang.
6. Bapak/Ibu dosen dan karyawan/i Jurusan Matematika FMIPA Unand.

Penulis selalu terbuka terhadap sumbangan pemikiran baik kritik maupun saran, karena tidak ada sesuatu yang sempurna dalam hidup ini, sehingga proses belajar dari kehidupan itu sendiri menjadi sangat penting dalam rangka pendewasaan diri baik pikiran maupun sikap dalam menyikapi kehidupan. Besar harapan, semoga skripsi ini bermanfaat untuk sivitas akademik Universitas Andalas khususnya dan masyarakat umumnya. Amin.

Padang, September 2011

Penulis

ABSTRAK

Misalkan G adalah grup hingga dengan unsur-unsur $g_1, g_2, \dots, g_n$ dan misalkan F adalah lapangan $\mathbb{C}$. Ruang vektor V atas $\mathbb{C}$ dengan $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ sebagai basis dinamakan ruang vektor $\mathbb{C}G$. Elemen-elemen pada ruang vektor $\mathbb{C}G$ berbentuk: $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_n g_n$, untuk setiap $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Ruang vektor $\mathbb{C}G$ dengan perkalian yang didefinisikan sebagai: $(\sum_{g \in G} \lambda_g\, g)(\sum_{h \in G} \mu_h h) = \sum_{g,h \in G} \lambda_g \mu_h (gh)$, untuk setiap $\lambda_g, \mu_h \in \mathbb{C}$, disebut grup aljabar $\mathbb{C}G$. Grup aljabar $\mathbb{C}G$ adalah $\mathbb{C}G$-modul regular jika perkalian gv (untuk setiap $g \in G$ dan $v \in V$) terdefinisi dan memenuhi kondisi-kondisi berikut: $gv \in V$, $(gh)v = g(hv)$, $\vec{1}v = v$, $g(\lambda v) = \lambda(gv)$, $g(u + v) = gu + gv$, untuk setiap $u, v \in V, \lambda \in \mathbb{C}$, dan $g, h \in G$. $\mathbb{C}G$-modul regular adalah *faithful*, yaitu: elemen identitas dari G adalah satu-satunya elemen di G yang memenuhi $gv = v$ untuk setiap $v \in V$.

Kata kunci: *ruang vektor $\mathbb{C}G$, grup aljabar $\mathbb{C}G$, $\mathbb{C}G$-modul regular, faithful.*

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori representasi grup merupakan suatu teori yang berkaitan dengan cara-cara menuliskan suatu grup sebagai suatu grup dari matriks. Misalkan G adalah grup hingga dan $\mathbb{C}$ adalah himpunan bilangan kompleks. Grup yang beranggotakan matriks $n \times n$ yang dapat diinverskan dengan entri-entri di $\mathbb{C}$, dinotasikan sebagai $GL_n(\mathbb{C})$ dan dinamakan grup linier umum (*general linear group*) berderajat n atas $\mathbb{C}$. Suatu representasi dari G adalah homomorfisma grup $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$. [4]

Terdapat beberapa konsep penting yang dapat membantu memahami teori representasi, antara lain: $\mathbb{C}G$-modul, grup aljabar $\mathbb{C}G$, dan $\mathbb{C}G$-modul regular. Dalam tulisan ini akan dibahas tentang grup aljabar $\mathbb{C}G$ dan $\mathbb{C}G$-modul regular.

$\mathbb{C}G$-modul adalah suatu ruang vektor V atas $\mathbb{C}$ dengan suatu perkalian gv untuk setiap $g \in G$ dan $v \in V$ yang memenuhi kondisi-kondisi tertentu. Sedangkan grup aljabar $\mathbb{C}G$ adalah suatu ruang vektor $\mathbb{C}G$ dengan basis $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ yang didalamnya didefinisikan suatu perkalian

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right)\left(\sum_{h \in G} \mu_h h\right) = \sum_{g,h \in G} \lambda_g \mu_h (gh) \qquad \text{(i)}$$

untuk setiap $\lambda_g, \mu_h \in \mathbb{C}$. Grup aljabar $\mathbb{C}G$ dengan suatu perkalian gv untuk setiap $g \in G$ dan $v \in V$ akan menjadi suatu $\mathbb{C}G$-modul yang dikenal dengan nama $\mathbb{C}G$-modul regular.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka perumusan masalah dalam penulisan tugas akhir ini adalah bagaimana sifat dari suatu grup aljabar $\mathbb{C}G$ dan sifat dari suatu $\mathbb{C}G$-modul regular.

1.3 Pembatasan Masalah

Pada tulisan ini hanya dibahas grup aljabar $\mathbb{C}G$ dan $\mathbb{C}G$-modul regular dari suatu grup hingga pada ruang vektor hingga atas lapangan bilangan kompleks.

1.4 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah menjelaskan sifat dari suatu grup aljabar $\mathbb{C}G$ dan sifat dari suatu $\mathbb{C}G$-modul regular.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut: Bab 1 Pendahuluan, berisi: latar belakang masalah, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan. Definisi matriks, definisi grup, dan sifat-sifat dari suatu homomorfisma, definisi dan teorema dari ruang vektor, definisi dan teorema dari pemetaan linier serta definisi dan teorema dari representasi grup dituangkan dalam Bab 2 Landasan Teori. Bab 3 Pembahasan, memuat tentang: definisi dan proposisi dari grup aljabar $\mathbb{C}G$, definisi dan proposisi dari $\mathbb{C}G$-modul regular, aksi $\mathbb{C}G$ pada $\mathbb{C}G$-modul serta contoh yang mendukung masalah. Kesimpulan-kesimpulan dari pembahasan yang telah dijelaskan pada Bab 3 dimuat dalam Bab 4 Kesimpulan.

BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam bab ini akan dijelaskan definisi matriks, definisi grup dan definisi dari suatu homomorfisma grup, definisi dan sifat-sifat dari ruang vektor, definisi dari pemetaan linier serta representasi grup dan $\mathbb{C}G$-modul.

2.1 Matriks

Definisi 2.1.1 [1]

Sebuah matriks adalah susunan segiempat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Definisi 2.1.2 [1]

Jika A adalah matriks kuadrat dan jika terdapat matriks B, sehingga $AB = BA = I$, maka A dikatakan dapat dibalik dan B dinamakan invers dari A.

2.2 Grup

Definisi 2.2.1 [2]

Misalkan G adalah suatu himpunan tak kosong. G dikatakan suatu grup jika pada G dapat didefinisikan suatu operasi biner, ditulis '$*$' sedemikian sehingga:

1. Untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$.
2. Untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$.
3. Terdapat suatu unsur di G yang dilambangkan dengan e, sehingga untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$.

4. Untuk setiap $a \in G$, terdapat suatu unsur b di G sehingga berlaku $a * b = b * a = e$ (setiap unsur di G mempunyai invers). Dengan kata lain $b = a^{-1}$.

Grup G dengan operasi biner '$*$', ditulis $(G,*)$. Misalkan $(G,*)$ suatu grup dan $a, b \in G$, untuk selanjutnya dalam tulisan ini, $a * b$ hanya akan ditulis sebagai ab.

Definisi 2.2.2 [4]

Misalkan G suatu grup. Banyaknya unsur di G disebut orde dari G, yang dinotasikan sebagai $|G|$. Jika banyaknya unsur di G adalah hingga, maka G dinamakan grup hingga.

Definisi 2.2.3 [2]

Misalkan G suatu grup. G disebut grup siklik (grup yang dibangun oleh satu unsur) jika terdapat $a \in G$ sehingga $G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$. Dalam hal ini a disebut generator (pembangun) dari G dan ditulis sebagai $G = \langle a \rangle$.

Contoh 2.2.4 [4]

Bentuk-bentuk bilangan kompleks adalah:

1. Bentuk penjumlahan

   $z = x + iy$, dengan $x, y \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$.

2. Bentuk polar

   $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r \operatorname{cis}\theta$,

   dengan $r = |z|$ dan $\theta = \arg(z)$.

   Range argumen utama: $0 \leq \operatorname{Arg}(z) \leq 2\pi$, sehingga $\arg(z) = \operatorname{Arg}(z) + 2k\pi$.

   Hubungan bentuk polar dengan bentuk penjumlahan adalah:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ dan } \theta = tan^{-1}\frac{y}{x}.$$

3. Bentuk eksponen

$z = re^{i\theta}$.

Menurut rumus *Euler*, $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Misalkan n adalah bilangan bulat positif dan $\mathbb{C}$ adalah himpunan bilangan kompleks. Suatu bilangan w adalah akar pangkat n dari bilangan kompleks z.

Misal $1^{\frac{1}{n}} = w$ dengan $w \in \mathbb{C}$.

Maka $1 = w^n$.

Misal $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Maka berdasarkan rumus *de Moivre*, $w^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

Karena $1 \in \mathbb{C}$ bisa ditulis sebagai $1 = 1(\cos 0 + \sin 0)$,

maka $1(\cos 0 + \sin 0) = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

Sehingga diperoleh:

$$r^n = 1 \text{ atau } r = 1.$$

$$n\theta = 0 + 2k\pi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\theta = \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}.$$

Jadi, $w = 1\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right), k \in \mathbb{Z}$.

Untuk $k = 0$, maka $w = \cos 0 + i\sin 0 = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^0 = 1$.

Untuk $k = 1$, maka $w = \cos\left(\frac{2\pi.1}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi.1}{n}\right) = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^1$.

Untuk $k = 2$, maka $w = \cos\left(\frac{2\pi.2}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi.2}{n}\right) = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^2$.

$\vdots$

Untuk $k = n - 1$, maka $w = \cos\left(\frac{2\pi.(n-1)}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi.(n-1)}{n}\right) = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^{n-1}$.

Jadi,

$$w = 1^{\frac{1}{n}} = \left\{1, \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^1, \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^2, \cdots, \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^{n-1}\right\}.$$

Himpunan dari akar ke-n dari 1 di $\mathbb{C}$ adalah suatu grup berorde n yang ditulis dengan C_n. C_n disebut grup siklik berorde n.

Misal $a = e^{2\pi i/n}$, maka

$$C_n = \langle a \rangle = \{1, a, a^2, \cdots, a^{n-1}\}.$$

Definisi 2.2.5 [2]

Misalkan $(G,*)$ suatu grup, $H \subseteq G$ dan $H \neq \emptyset$. H dikatakan subgrup dari grup G jika H membentuk grup terhadap operasi yang didefinisikan di G.

Definisi 2.2.6 [2]

Pemetaan dari grup G ke grup G', yaitu $\theta : G \to G'$ disebut homomorfisma grup jika untuk setiap unsur a dan b di G berlaku $\theta(ab) = \theta(a)\theta(b)$.

2.3 Ruang Vektor

Pada subbab ini akan dijelaskan tentang definisi lapangan serta definisi dan sifat-sifat dari ruang vektor.

Definisi 2.3.1 [3]

Suatu lapangan adalah suatu himpunan F berikut dengan dua operasi biner, operasi penjumlahan "+" dan operasi perkalian "·", berikut dengan dua elemen $0,1 \in F$ sedemikian sehingga:

1. Untuk setiap $x, y, z \in F$

$x + y \in F$

$x + y = y + x$

$(x + y) + z = x + (y + z)$

$0 + x = 0$

2. Untuk setiap $x, y, z \in F$

   $xy \in F$

   $xy = yx$

   $(xy)z = x(yz)$

   $1x = x$

3. Untuk setiap $x, y, z \in F$

   $x(y + z) = xy + xz$

4. Untuk setiap $x \in F$ terdapat suatu $z \in F$ sedemikian sehingga $x + z = 0$

5. Untuk setiap $x \in F$ dengan $x \neq 0$ terdapat suatu $y \in F$ sedemikian sehingga $xy = 1$.

Contoh 2.3.2 [3]

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ adalah suatu lapangan.

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ adalah suatu lapangan.

Definisi 2.3.3 [3]

Suatu ruang vektor V atas lapangan F adalah suatu himpunan V yang elemen-elemennya dinamakan vektor, termasuk juga sebuah elemen dari V yakni vektor nol $(\vec{0})$, berikut dengan sebuah operator biner " + ", disebut penjumlahan vektor dan sebuah perkalian skalar antara vektor dengan elemen F yang memenuhi kondisi-kondisi berikut:

1. Untuk setiap $u, v, w \in V$

   $u + v \in V,$

   $\vec{0} + v = v,$

   $u + v = v + u,$

   $u + (v + w) = (u + v) + w,$

2. Untuk setiap $u, v \in V$ dan $r, s \in F$

   $rv \in V,$

   $1v = v,$

   $0v = \vec{0},$

   $r(u + v) = ru + rv,$

   $(r + s)v = rv + sv,$

   $(rs)v = r(sv),$

Definisi 2.3.4 [1]

Subhimpunan W dari sebuah ruang vektor V, dinamakan subruang V jika W adalah ruang vektor di bawah penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan di V.

Teorema 2.3.5 [1]

Jika W adalah himpunan dari satu atau lebih vektor dari sebuah ruang vektor V, maka W adalah subruang dari V jika dan hanya jika kondisi-kondisi berikut berlaku:

1. Jika u dan v adalah vektor-vektor pada W, maka $u + v$ terletak di W,

2. Jika k adalah sebarang skalar dan u adalah sebarang vektor pada W, maka ku berada di W.

Bukti.

Lihat [1] halaman 237.

Definisi 2.3.6 [3]

Vektor-vektor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dikatakan bebas linier jika $r_1, r_2, \ldots, r_n$ adalah skalar dan $r_1v_1 + r_2v_2 + \ldots + r_nv_n = \vec{0}$ hanya dipenuhi oleh $r_1 = 0, r_2 = 0, \ldots, r_n = 0$. Jika $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tidak bebas linier maka dikatakan bahwa $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bergantung linier.

Definisi 2.3.7 [3]

Misalkan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ adalah vektor-vektor dan $r_1, r_2, \ldots, r_n$ adalah skalar.

Dikatakan bahwa vektor

$$w = r_1v_1 + r_2v_2 + \ldots + r_n v_n$$

adalah kombinasi linier dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Himpunan semua kombinasi linier dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$ disebut *span* dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dan ditulis $span\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Definisi 2.3.8 [3]

Suatu himpunan dari vektor-vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dalam sebuah ruang vektor V dinamakan sebuah basis untuk V, jika:

1. $v_1, v_2, \ldots, v_n$ adalah bebas linier,
2. $Span\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = V$.

Definisi 2.3.9 [3]

Misalkan V adalah suatu ruang vektor dan mempunyai suatu basis dengan n elemen. Maka dikatakan bahwa V berdimensi n. Jika suatu ruang vektor berdimensi n untuk setiap n, maka dikatakan bahwa V berdimensi hingga. Jika V tidak berdimensi hingga, maka V dikatakan berdimensi takhingga.

Definisi 2.3.10 [3]

Suatu basis terurut $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ dari suatu ruang vektor V adalah suatu basis dari V yang elemen-elemennya terdaftar dalam urutan tertentu. Misalkan $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ adalah basis terurut dari V dan $w \in V$. Dikatakan bahwa $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ adalah vektor koordinat w terhadap basis $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ jika $w = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$. Misalkan $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ adalah suatu basis terurut, maka vektor koordinat dari suatu vektor $w = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ dinotasikan dengan,

$$(w)_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Definisi 2.3.11 [1]

Misalkan V adalah suatu ruang vektor atas lapangan F. Misalkan $T: V \to V$ adalah suatu pemetaan linier dan $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ adalah suatu basis terurut dari V. Maka matriks penyajian T terhadap basis $\mathfrak{B}$ ditulis $[T]_{\mathfrak{B}}$ adalah

$$[T]_{\mathfrak{B}} = [[T(v_1)_{\mathfrak{B}}] | [T(v_2)_{\mathfrak{B}}] | \cdots [T(v_n)_{\mathfrak{B}}]].$$

2.4 Pemetaan Linier

Definisi 2.4.1 [3]

Misalkan V dan W adalah ruang vektor atas lapangan F. Suatu pemetaan linier dari V ke W adalah suatu pemetaan $T: V \to W$ yang memenuhi:

1. Jika $u, v \in V$, maka $T(u + v) = T(u) + T(v)$.

2. Jika $u \in V$ dan $k \in F$, maka $T(ku) = kT(u)$.

Definisi 2.4.2 [5]

Misalkan V adalah suatu ruang vektor. Suatu pemetaan linier $T: V \to V$ dinamakan suatu endomorfisma dari V.

2.5 Representasi Grup dan $\mathbb{C}G$-modul

Suatu representasi grup G merupakan suatu cara menuliskan G sebagai suatu grup dari matriks. Pada subbab ini akan dijelaskan tentang definisi dari representasi grup dan definisi serta sifat-sifat dari suatu $\mathbb{C}G$-modul.

Definisi 2.5.1 [4]

Grup yang beranggotakan matriks berukuran $n \times n$ yang dapat dibalik, dengan entri-entri matriks tersebut berada di $\mathbb{C}$ dinotasikan sebagai $GL_n(\mathbb{C})$ dan dinamakan grup linier umum (*general linear group*) berderajat n atas $\mathbb{C}$.

Definisi 2.5.2 [4]

Suatu representasi dari G adalah homomorfisma grup

$$\rho : G \to GL_n(C)$$

untuk suatu $n \in \mathbb{N}$, n dinamakan derajat dari ρ. Dengan demikian, jika ρ adalah suatu pemetaan dari G ke $GL_n(\mathbb{C})$, maka ρ adalah suatu representasi jika dan hanya jika

$$\rho(gh) = \rho(g)\rho(h) \text{ untuk setiap } g, h \in G.$$

Karena suatu representasi adalah suatu homomorfisma maka untuk setiap representasi $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ berlaku $\rho(1) = I_n$, dimana I_n adalah matriks identitas.

Definisi 2.5.3 [4]

Suatu ruang vektor berdimensi hingga V atas $\mathbb{C}$ adalah suatu $\mathbb{C}G$-modul jika perkalian gv (untuk setiap $g \in G$ dan $v \in V$) terdefinisi dan memenuhi kondisi berikut:

Untuk setiap $u, v \in V, \lambda \in \mathbb{C}$, dan $g, h \in G$,

1. $gv \in V$,
2. $(gh)v = g(hv)$,
3. $\vec{1}v = v$,
4. $g(\lambda v) = \lambda(gv)$,
5. $g(u + v) = gu + gv$.

Definisi 2.5.4 [4]

Misalkan V adalah suatu $\mathbb{C}G$-modul. Suatu himpunan bagian W dari V dikatakan suatu $\mathbb{C}G$-submodul dari V jika W adalah suatu subruang dan $gw \in W$, untuk setiap $w \in W$ dan $g \in G$.

Definisi 2.5.5 [4]

Misalkan V adalah suatu $\mathbb{C}G$-modul dan $\mathfrak{B}$ adalah basis dari V. Matriks penyajian g terhadap basis $\mathfrak{B}$ yang dinotasikan dengan $[g]_{\mathfrak{B}}$ adalah suatu matriks endomorfisma $v \to gv$ dari V terhadap basis $\mathfrak{B}$, untuk setiap $g \in G$.

Teorema 2.5.5 [4]

1. Jika $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ adalah suatu representasi dari G atas lapangan $\mathbb{C}$, dan $V = \mathbb{C}^n$ maka V menjadi suatu $\mathbb{C}G$-modul jika didefinisikan perkalian gv dengan

$$gv = \rho(g)v$$

untuk setiap $g \in G$ dan $v \in V$.

Lebih lanjut, terdapat basis $\mathfrak{B}$ dari V sedemikian sehingga

$$\rho(g) = [g]_{\mathfrak{B}}$$

untuk setiap $g \in G$.

2. Misalkan V adalah suatu $\mathbb{C}G$-modul dan $\mathfrak{B}$ adalah suatu basis dari V. Maka pemetaan

$$g \to [g]_{\mathfrak{B}}$$

untuk setiap $g \in G$ adalah suatu representasi dari G atas $\mathbb{C}$.

Bukti.

Lihat [4] halaman 40.

BAB III

GRUP ALJABAR $\mathbb{C}G$ DAN $\mathbb{C}G$-MODUL REGULAR

Pada bab ini akan dijelaskan tentang grup aljabar $\mathbb{C}G$ dan $\mathbb{C}G$-modul regular yang mempunyai peranan penting dalam teori representasi.

3.1 Grup Aljabar $\mathbb{C}G$

Definisi 3.1.1 [4]

Misalkan G adalah grup hingga dengan elemen-elemen $g_1, g_2, \ldots, g_n$ dan misalkan F(lapangan) adalah $\mathbb{C}$, maka ruang vektor V atas $\mathbb{C}$ dengan $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ sebagai basis dinamakan ruang vektor $\mathbb{C}G$. Basis $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ disebut dengan basis natural dari ruang vektor $\mathbb{C}G$.

Elemen-elemen pada ruang vektor $\mathbb{C}G$ berbentuk

$$\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_n g_n$$

untuk setiap $\lambda_i \in \mathbb{C}$.

Elemen-elemen pada ruang vektor $\mathbb{C}G$ juga bisa ditulis dalam bentuk

$$\sum_{g \in G} \lambda_g g$$

untuk setiap $\lambda_g \in \mathbb{C}$.

Jika $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ dan $v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i g_i$, maka penjumlahan dan perkalian skalar pada ruang vektor $\mathbb{C}G$ didefinisikan dengan:

1. $u + v = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) g_i$,
2. $ku = \sum_{i=1}^{n} (k\lambda_i) g_i$,

Operasi perkalian elemen-elemen pada ruang vektor $\mathbb{C}G$ dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right)\left(\sum_{h\in G} \mu_h h\right) = \left(\sum_{g,h\in G} \lambda_g \mu_h (gh)\right)$$

untuk setiap $\lambda_g, \mu_h \in \mathbb{C}$.

Contoh 3.1.2

Misalkan $G = C_3 = \{e; a; a^2\}$, dengan e adalah elemen identitas di G.

Elemen-elemen pada ruang vektor $\mathbb{C}G$ berbentuk $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_n g_n$, untuk setiap $\lambda_i \in \mathbb{C}$.

Misalkan u, v adalah elemen-elemen dari ruang vektor $\mathbb{C}G$, dengan

$$u = e - ia + 2a^2 \text{ dan } v = e - ia.$$

Maka,

(i) $u + v = (e - ia + 2a^2) + (e - ia) = 2e - 2ia + 2a^2$,

(ii) $uv = (e - ia + 2a^2)(e - ia)$

$$= e - eia - eia + a^2 + 2ea^2 - 2ie = (1 - 2i)e - 2eia + (1 + 2e)a^2.$$

Proposisi 3.1.3 [4]

Misalkan G adalah grup hingga, yaitu: $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ dan $c \in \mathbb{C}G$ dengan $c = \sum_{i=1}^{n} g_i$. Maka $ch = hc = c$, untuk setiap $h \in G$.

Bukti:

Misalkan G adalah grup hingga, yaitu: $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ dan $c \in \mathbb{C}G$ dengan $c = \sum_{i=1}^{n} g_i$, $c \in \mathbb{C}G$. Akan dibuktikan bahwa $ch = hc = c$, untuk setiap $h \in G$.

Perhatikan bahwa

$$ch = \left(\sum_{i=1}^{n} g_i\right)h = (g_1 + g_2 + \cdots + g_n)h = g_1h + g_2h + \cdots + g_nh \qquad \text{(i)}$$

$$hc = h\left(\sum_{i=1}^{n} g_i\right) = h(g_1 + g_2 + \cdots + g_n) = g_1h + g_2h + \cdots + g_nh. \qquad \text{(ii)}$$

Dari (i) dan (ii) diperoleh bahwa $ch = hc$.

Karena $h \in G$, maka $h = g_i$, untuk suatu $i = 1,2,\dots,n$.

Karena $g_ih \in G$ maka $g_ih = g_j$, untuk suatu $j = 1,2,\dots,n$.

Akibatnya,

$$\begin{aligned} ch = hc &= g_1h + g_2h + \cdots + g_nh \\ &= g_1 + g_2 + \cdots + g_n \\ &= c. \end{aligned}$$

■

Definisi 3.1.4 [4]

Ruang vektor $\mathbb{C}G$, dengan perkalian yang didefinisikan sebagai

$$\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right)\left(\sum_{h\in G} \mu_h h\right) = \sum_{g,h\in G} \lambda_g \mu_h (gh)$$

untuk setiap $\lambda_g, \mu_h \in \mathbb{C}$, disebut grup aljabar $\mathbb{C}G$.

Grup aljabar $\mathbb{C}G$ memiliki elemen identitas $1e$ (dimana 1 adalah elemen identitas dari lapangan $\mathbb{C}$ dan e adalah elemen identitas di G).

Untuk selanjutnya, $1e$ juga dapat ditulis sebagai $\vec{1}$.

Lema 3.1.5

Grup aljabar $\mathbb{C}G$ membentuk grup terhadap operasi perkalian.

Bukti:

Ambil r, s, t elemen-elemen dari grup aljabar $\mathbb{C}G$.

Maka, $r = \sum_{g\in G} \lambda_g g$, $s = \sum_{h\in G} \mu_h h$ dan $t = \sum_{k\in G} v_k k$ untuk setiap $\lambda_g, \mu_h, v_k \in \mathbb{C}$ dan $g, h, k \in G$

1) Akan dibuktikan $rs \in \mathbb{C}G$.

   Perhatikan bahwa

$$rs = \left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right)\left(\sum_{h\in G} \mu_h h\right) = \sum_{g,h\in G} \lambda_g \mu_h (gh).$$

   Karena $\lambda_g, \mu_h \in \mathbb{C}$ dan $g, h \in G$ maka $\lambda_g \mu_h \in \mathbb{C}$ dan $gh \in G$.

   Akibatnya,

$$rs = \sum_{g,h\in G} \lambda_g \mu_h (gh) \in \mathbb{C}G.$$

2) Akan dibuktikan $r(st) = (rs)t$.

   Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} r(st) &= \sum_{g\in G} \lambda_g g \left\{\left(\sum_{h\in G} \mu_h h\right)\left(\sum_{k\in G} v_k k\right)\right\} \\ &= \sum_{g\in G} \lambda_g g \left(\sum_{h,k\in G} \mu_h v_k (hk)\right) \\ &= \sum_{g,h,k\in G} \lambda_g \mu_h v_k (ghk) \qquad \text{(i)} \end{aligned}$$

$$(rs)t = \left\{\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right)\left(\sum_{h\in G} \mu_h h\right)\right\} \sum_{k\in G} v_k k$$

$$= \sum_{g,h,k\in G} \lambda_g \mu_h \, \delta_k (gh)k.$$

Menurut Definisi 2.2.1, $(gh)k = g(hk)$ maka

$$(rs)t = \sum_{g,h,k\in G} \lambda_g \mu_h \, \delta_k g(hk)$$

$$= \left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right)\left(\left(\sum_{h\in G} \mu_h h\right)\left(\sum_{k\in G} \delta_k k\right)\right)$$

$$= r(st).$$

3. Akan dibuktikan $r\vec{1} = \vec{1}r = r$.

 Karena r dan $\vec{1}$ adalah elemen-elemen dari grup aljabar $\mathbb{C}G$, maka

$$r\vec{1} = \left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right)(1e) = \left(\sum_{g\in G} \lambda_g 1 ge\right)$$

$$= \left(\sum_{g\in G} 1\lambda_g eg\right) = \left((1e)\sum_{g\in G} \lambda_g g\right) = \vec{1}r$$

$$\vec{1}r = \left((1e)\sum_{g\in G} \lambda_g g\right) = \vec{1}\sum_{g\in G} \lambda_g g = r.$$

4. Akan dibuktikan bahwa $(\lambda r)s = \lambda(rs) = r(\lambda s)$.

 Perhatikan bahwa

$$(\lambda r)s = \left(\lambda \sum_{g\in G} \lambda_g g\right)\left(\sum_{h\in G} \mu_h h\right) = \left(\sum_{g\in G} \lambda\lambda_g g\right)\left(\sum_{h\in G} \mu_h h\right)$$

$$= \left(\sum_{h\in G} \lambda\lambda_g \mu_h (gh)\right)$$

$$= \lambda\left(\sum_{h \in G} \lambda_g \mu_h (gh)\right) = \lambda(rs) \qquad \text{(i)}$$

$$\lambda(rs) = \lambda\left(\sum_{h \in G} \lambda_g \mu_h (gh)\right) = \left(\sum_{h \in G} \lambda \lambda_g \mu_h (gh)\right)$$

$$= \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right)\left(\lambda \sum_{h \in G} \mu_h h\right) = r(\lambda s) \qquad \text{(ii)}$$

Dari (i) dan (ii), maka$(\lambda r)s = \lambda(rs) = r(\lambda s)$.

5. Akan dibuktikan bahwa $(r+s)t = rt + st$.

   Karena r, s, t adalah elemen-elemen dari grup aljabar $\mathbb{C}G$, akibatnya

$$(r+s)t = \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g + \sum_{h \in G} \mu_h h\right)\left(\sum_{k \in G} \delta_k k\right)$$

$$= \left(\sum_{g,h \in G} \lambda_g g + \mu_h h\right)\left(\sum_{k \in G} \delta_k k\right)$$

$$= \left(\sum_{g,h,k \in G} \delta_k (\lambda_g g + \mu_h h) k\right)$$

$$= \left(\sum_{g,h,k \in G} \delta_k (\lambda_g gk + \mu_h hk)\right)$$

$$= \left(\sum_{g,h,k \in G} \delta_k \lambda_g (gk) + \delta_k \mu_h (hk)\right)$$

$$= \left(\sum_{g,h,k \in G} \delta_k \lambda_g (gk) + \sum_{g,h,k \in G} \delta_k \mu_h (hk)\right)$$

$$= \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \sum_{k \in G} \delta_k k + \sum_{h \in G} \mu_h h \sum_{k \in G} \delta_k k \right)$$

$$= rt + st.$$

6. Akan dibuktikan bahwa $r(s+t) = rs + rt$.

Karena r, s, t adalah elemen-elemen dari grup aljabar $\mathbb{C}G$, akibatnya

$$r(s+t) = \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) \left(\sum_{h \in G} \mu_h h + \sum_{k \in G} \delta_k k \right)$$

$$= \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) \left(\sum_{h,k \in G} \mu_h h + \delta_k k \right)$$

$$= \left(\sum_{g,h,k \in G} \lambda_g g (\mu_h h + \delta_k k) \right)$$

$$= \left(\sum_{g,h,k \in G} \lambda_g (\mu_h gh + \delta_k gk) \right)$$

$$= \left(\sum_{g,h,k \in G} \lambda_g \, \mu_h (gh) + \lambda_g \delta_k (gk) \right)$$

$$= \left(\sum_{g,h,k \in G} \lambda_g \mu_h (gh) + \sum_{g,h,k \in G} \lambda_g \delta_k (gk) \right)$$

$$= \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \sum_{h \in G} \mu_h h + \sum_{g \in G} \lambda_g g \sum_{k \in G} \delta_k k \right)$$

$$= rs + rt.$$

7. Akan dibuktikan bahwa $r0 = 0r = \vec{0}$.

Perhatikan bahwa

$$r0 = \left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right)(0) = \left(\sum_{g\in G} \lambda_g 0 g\right)$$

$$= \left(\sum_{g\in G} 0\lambda_g g\right) = (0)\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right) = 0r.$$

Karena $r \in \mathbb{C}G$, maka

$$0r = (0+0)r = (0r) + (0r)$$

$$-(0r) + (0r) = -(0r) + \big((0r) + (0r)\big)$$

$$\vec{0} = \big(-(0r) + (0r)\big) + (0r)$$

$$\vec{0} = \vec{0} + 0r$$

$$\vec{0} = 0r$$

$$0r = \vec{0}.$$

Jadi, $r0 = 0r = \vec{0}$. ■

3.2 $\mathbb{C}G$-modul Regular

Pada subbab ini akan digunakan definisi grup aljabar $\mathbb{C}G$ untuk mendefinisikan suatu $\mathbb{C}G$-modul yang dinamakan $\mathbb{C}G$-modul regular.

Definisi 3.2.1 [4]

Misalkan G adalah grup hingga dan misalkan F(lapangan) adalah $\mathbb{C}$. Misalkan $V = \mathbb{C}G$, maka V merupakan ruang vektor berdimensi n atas $\mathbb{C}$. Suatu grup aljabar $\mathbb{C}G$ adalah $\mathbb{C}G$-modul regular jika perkalian gv (untuk setiap $v \in V$ dan $g \in G$) terdefinisi dan memenuhi kondisi-kondisi berikut:

Untuk setiap $u, v \in V, \lambda \in \mathbb{C}$, dan $g, h \in G$,

1. $gv \in V$,
2. $(gh)v = g(hv)$,
3. $\vec{1}v = v$,
4. $g(\lambda v) = \lambda(gv)$,
5. $g(u+v) = gu + gv$.

Berikut ini adalah sifat-sifat dari $\mathbb{C}G$-modul regular.

Definisi 3.2.3 [4]

Misalkan V adalah $\mathbb{C}G$-modul regular dan misalkan $\mathfrak{B}$ adalah basis natural dari V, maka $\rho: G \to GL_n(\mathbb{C})$ dengan $\rho(g) = [g]_{\mathfrak{B}}$ adalah representasi regular dari G atas $\mathbb{C}$.

Contoh 3.2.4

Misalkan $G = C_3 = \{e, a, a^2\}$, maka elemen-elemen $\mathbb{C}G$ berbentuk

$$\lambda_1 e + \lambda_2 a + \lambda_3 a^2 \ , (\lambda_i \in \mathbb{C})$$

Dari vektor koordinat terhadap basis natural $\{e, a, a^2\}$ dari $\mathbb{C}G$, diperoleh matriks penyajian g terhadap basis natural $\{e, a, a^2\}$ dari $\mathbb{C}G$ sebagai berikut :

Misalkan $\mathfrak{B} = \{e, a, a^2\}$, maka $v_1 = e, v_2 = a$, dan $v_3 = a^2$.

1. $\rho(e) = [e]_{\mathfrak{B}} = [[ev_1]_{\mathfrak{B}} | [ev_2]_{\mathfrak{B}} | [ev_3]_{\mathfrak{B}}]$.

$ev_1 = ee = 1e + 0a + 0a^2$, sehingga diperoleh $[ev_1]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$ev_2 = ea = 0e + 1a + 0a^2$, sehingga diperoleh $[ev_2]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$ev_3 = ea^2 = 0e + 0a + 1a^2$, sehingga diperoleh $[ev_3]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Akibatnya, $\rho(e) = [e]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\rho(a) = [a]_{\mathfrak{B}} = [[av_1]_{\mathfrak{B}} | [av_2]_{\mathfrak{B}} | [av_3]_{\mathfrak{B}}]$.

$av_1 = ae = 0e + 1a + 0a^2$, sehingga diperoleh $[av_1]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$av_2 = aa = 0e + 0a + 1a^2$, sehingga diperoleh $[av_2]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$av_3 = aa^2 = 1e + 0a + 0a^2$, sehingga diperoleh $[av_3]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Akibatnya, $\rho(a) = [a]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $\rho(a^2) = [a^2]_{\mathfrak{B}} = [[a^2v_1]_{\mathfrak{B}} | [a^2v_2]_{\mathfrak{B}} | [a^2v_3]_{\mathfrak{B}}]$.

$a^2v_1 = a^2e = 0e + 0a + 1a^2$, sehingga diperoleh $[a^2v_1]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$a^2v_2 = a^2a = 1e + 0a + 0a^2$, sehingga diperoleh $[a^2v_2]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$a^2v_3 = a^2a^2 = 0e + 1a + 0a^2$, sehingga diperoleh $[a^2v_3]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Akibatnya, $\rho(a^2) = [a^2]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dengan mendefinisikan $\rho\colon G \to GL_n(\mathbb{C})$ dimana $\rho(g) = [g]_{\mathfrak{B}}$ dan

$$\rho(e)\rho(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \rho(ea),$$

$$\rho(e)\rho(a^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \rho(ea^2),$$

$$\rho(a)\rho(a^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho(aa^2),$$

maka ρ merupakan representasi regular dari G.

Definisi 3.2.5 [4]

Misalkan V adalah suatu $\mathbb{C}G$-modul regular dan $v \in V, r \in \mathbb{C}G$, dengan $r = \sum_{g \in G} \lambda_g g$, untuk setiap $\lambda_g \in \mathbb{C}$. Maka definisikan rv sebagai

$$rv = \sum_{g \in G} \lambda_g(gv).$$

Proposisi 3.2.6 [4]

Misalkan V adalah $\mathbb{C}G$-modul regular. Pada $\mathbb{C}G$-modul regular berlaku sifat-sifat perkalian berikut, untuk setiap $u, v \in V, \lambda \in \mathbb{C}$, dan $r, s \in \mathbb{C}G$:

1. $rv \in V$,
2. $(rs)v = r(sv)$,

3. $\vec{1}v = v$,

4. $r(\lambda v) = \lambda(rv) = (\lambda r)v$,

5. $r(u + v) = ru + rv$,

6. $(r + s)v = rv + sv$,

7. $r0 = 0v = \vec{0}$.

Bukti:

Ambil $u, v \in V, \lambda \in \mathbb{C}$, dan r, s elemen-elemen dari grup aljabar $\mathbb{C}G$.

Karena r dan s adalah elemen-elemen dari grup aljabar $\mathbb{C}G$ maka $r \in \mathbb{C}G$,sehingga

$$r = \sum_{g \in G} \lambda_g g \text{ dan } s = \sum_{h \in G} \mu_h h$$

untuk setiap $\lambda_g, \mu_h \in \mathbb{C}$ dan $g, h \in G$.

1. Akan dibuktikan bahwa $rv \in V$.

   Berdasarkan Definisi 3.2.5,

   $$rv = \sum_{g \in G} \lambda_g (gv),$$

   untuk setiap $\lambda_g \in \mathbb{C}$, $g \in G$, dan $v \in V$.

   Karena $g \in G$ dan $v \in V$ maka $gv \in V$.

   Akibatnya

   $$rv = \sum_{g \in G} \lambda_g (gv) \in V.$$

2. Akan dibuktikan bahwa $(rs)v = r(sv)$.

   Karena $v \in V$ dan $r, s \in \mathbb{C}G$, akibatnya

$$(rs)v = \left(\sum_{g,h\in G} (\lambda_g \mu_h (gh)\right) v$$

$$= \sum_{g,h\in G} \lambda_g \mu_h ((gh)v)$$

$$= \sum_{g,h\in G} (\lambda_g \mu_h (g(hv))$$

$$= \left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right)\left(\sum_{h\in G} \mu_h (hv)\right)$$

$$= r(sv).$$

3. Akan dibuktikan bahwa $\vec{1}v = v$.

   Karena $v \in V$ maka $v \in \mathbb{C}G$ sehingga $v = \lambda_1 g_1 + \ldots + \lambda_n g_n$.

   Akibatnya,

$$\vec{1}v = (1e)v = 1(ev)$$

$$= 1\big(e(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n)\big)$$

$$= 1(e\lambda_1 g_1 + e\lambda_2 g_2 + \ldots + e\lambda_n g_n)$$

$$= 1(\lambda_1 e g_1 + \lambda_2 e g_2 + \ldots + \lambda_n e g_n)$$

$$= 1(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n)$$

$$= \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n = v$$

4. Akan dibuktikan bahwa $r(\lambda v) = \lambda(rv) = (\lambda r)v$.

   Karena $v \in V$, $r \in \mathbb{C}G$, dan $\lambda \in \mathbb{C}$, akibatnya

$$r(\lambda v) = \left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right)(\lambda v) = \lambda \sum_{g\in G} \lambda_g (gv) = \lambda(rv)$$

$$= \left(\lambda \sum_{g \in G} \lambda_g g \right) v = (\lambda r) v.$$

5. Akan dibuktikan bahwa $r(u+v) = ru + rv$.

   Karena $u, v \in V$ dan $r \in \mathbb{C}G$, akibatnya

$$r(u+v) = \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) (u+v)$$

$$\sum_{g \in G} \lambda_g g(u+v) = \sum_{g \in G} \lambda_g (gu) + \sum_{g \in G} \lambda_g (gv)$$

$$= ru + rv.$$

6. Akan dibuktikan $(r+s)v = rv + sv$.

   Karena $v \in V$ dan $r, s \in \mathbb{C}G$, akibatnya

$$(r+s)v = \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g + \sum_{h \in G} \mu_h h \right) v$$

$$= \left(\sum_{g,h \in G} \lambda_g g + \mu_h h \right) v$$

$$= \left(\sum_{g,h \in G} (\lambda_g g + \mu_h h) v \right)$$

$$= \left(\sum_{g,h \in G} \lambda_g (gv) + \mu_h (hv) \right)$$

$$= \left(\sum_{g \in G} \lambda_g (gv) + \sum_{h \in G} \mu_h (hv) \right)$$

$$= rv + sv.$$

7. Akan dibuktikan bahwa $r0 = v0 = \vec{0}$.

   Jika u adalah suatu elemen dari suatu ruang vektor dan $u + u = u$, maka $u = \vec{0}$.

   Perhatikan bahwa

$$r0 = r(0 + 0) = r0 + r0,$$

$$0v = (0 + 0)v = 0v + 0v.$$

   Akibatnya, $r0 = 0v = \vec{0}$. ■

Definisi 3.2.7 [4]

Misalkan V adalah suatu $\mathbb{C}G$-modul. V dikatakan *faithful* jika elemen identitas dari G, namakan $e \in G$, adalah satu-satunya elemen di G yang memenuhi persamaan $gv = v$ untuk setiap $v \in V$ dan $g \in G$.

Proposisi 3.2.8 [4]

$\mathbb{C}G$-modul regular adalah *faithful*.

Bukti:

Misalkan V adalah suatu $\mathbb{C}G$-modul regular.

Ambil $v \in V$ dan $g \in G$.

Karena v merupakan elemen dari $\mathbb{C}G$-modul regular ($v \in V$), maka v merupakan elemen dari ruang vektor $\mathbb{C}G (v \in \mathbb{C}G)$, sehingga

$$v = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n.$$

Akan dicari elemen identitas dari G yang memenuhi $gv = v$.

Pilih $g = e$, dengan e elemen identitas dari G.

Akibatnya,

$$
\begin{aligned}
gv &= g(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n) \\
&= \lambda_1 g g_1 + \lambda_2 g g_2 + \cdots + \lambda_n g g_n \\
&= \lambda_1 e g_1 + \lambda_2 e g_2 + \cdots + \lambda_n e g_n \\
&= \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n \\
&= v.
\end{aligned}
$$

Jadi, $\mathbb{C}G$-modul regular adalah *faithful*. ∎

BAB IV

KESIMPULAN

Grup aljabar $\mathbb{C}G$ adalah ruang vektor $\mathbb{C}G$ dengan perkalian yang didefinisikan sebagai

$$\left(\sum_{g\in G}\lambda_g\, g\right)\left(\sum_{h\in G}\mu_h h\right) = \sum_{g,h\in G}\lambda_g\mu_h(gh)$$

untuk setiap $\lambda_g, \mu_h \in \mathbb{C}$.

Pada grup aljabar $\mathbb{C}G$ berlaku sifat perkalian berikut: $rs \in \mathbb{C}G$, $r(st) = (rs)t$, $r\vec{1} = \vec{1}r = r$, $(\lambda r)s = \lambda(rs) = r(\lambda s)$, $(r+s)t = rt + st$, $r(s+t) = rs + rt$, dan $r0 = 0r = \vec{0}$, untuk setiap r, s, t elemen-elemen dari grup aljabar $\mathbb{C}G$ dan $\lambda \in \mathbb{C}$.

Suatu grup aljabar $\mathbb{C}G$ adalah $\mathbb{C}G$-modul regular jika perkalian gv (untuk setiap $v \in V$ dan $g \in G$) terdefinisi dan memenuhi kondisi-kondisi berikut, untuk setiap $u, v \in V, \lambda \in \mathbb{C}$, dan $g, h \in G$: $gv \in V$, $(gh)v = g(hv)$, $\vec{1}v = v$, $g(\lambda v) = \lambda(gv)$, $g(u+v) = gu + gv$.

Misalkan V adalah $\mathbb{C}G$-modul regular. Pada $\mathbb{C}G$-modul regular berlaku sifat-sifat berikut:

1. Untuk setiap $u, v \in V, \lambda \in \mathbb{C}$, dan $r, s \in \mathbb{C}G$: $rv \in V$, $(rs)v = r(sv)$, $\vec{1}v = v$, $r(\lambda v) = \lambda(rv) = (\lambda r)v$, $r(u+v) = ru + rv$, $(r+s)v = rv + sv$, dan $r\vec{0} = \vec{0}v = \vec{0}$.
2. V adalah *faithful* karena elemen identitas dari G adalah satu-satunya elemen di G yang memenuhi $gv = v$ untuk setiap $v \in V$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Howard, Chris Rorres. 2004. *Aljabar Linier Elementer*. Erlangga, Jakarta.

[2] Arifin, Achmad. 2000. *Aljabar*. ITB, Bandung.

[3] Jacob, Bill. 1990. *Linear Algebra.* W.H. Freeman and Company, New York.

[4] James, Gordon, Martin Liebeck. 2001. *Representations and Characters of Groups.* Second Edition. Cambridge University Press.

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis dilahirkan di Muaro Sijunjung pada tanggal 10 Mei 1989. Anak pertama dari pasangan Wagiyono, S.Pd,MM. dan Sri Dwi Hastuti. Penulis memulai pendidikannya di TK Pertiwi Sijunjung pada tahun 1995. Pada tahun 1996, penulis melanjutkan pendidikannya di SD Negeri 20 Muaro. Pada tahun 2001, penulis melanjutkan pendidikannya di SMPN 7 Sijunjung. Pada tahun 2004, penulis melanjutkan pendidikannya di SMAN 1 Sijunjung dan tamat pada tahun 2007. Pada tahun yang sama, penulis di terima menjadi mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Andalas melalui jalur Seleksi Penerimaan Mahasiswa Baru Mandiri (SPMBM). Selama di bangku perkuliahan penulis pernah mengikuti magang di UKS Universitas Andalas tahun 2007, menjadi pengurus FSI FMIPA Universitas Andalas periode 2008/2009, menjadi pengurus HIMATIKA periode 2010/2011 pada divisi kesejahteraan dan pengabdian masyarakat serta aktif di berbagai kegiatan HIMATIKA. Untuk syarat meraih gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika FMIPA UNAND, penulis pernah mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Nagari Sikilir, Kecamatan VII Koto, Kabupaten Padang Pariaman pada bulan Juli s/d Agustus 2010.