MENENTUKAN INTEGRAL FUNGSI KOMPLEKS JIKA PEMBILANGANNYA KONSTANTA DENGAN MENGGUNAKAN TEOREMA RESIDU

SKRIPSI

AMELIA SUFITRI
06134011

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2011

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa:

Nama	: Amelia Sufitri
No. Buku Pokok	: 06 134 011
Jurusan	: Matematika
Bidang	: Analisis
Judul Skripsi	: Menentukan Integral Fungsi Kompleks Jika Pembilangnya Konstanta dengan Menggunakan Teorema Residu

Telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal 8 Agustus 2011 berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing

1.

Efendi, M.Si
NIP. 197807172002121002

2.

Zulakmal, M.Si
NIP. 196711081998021001

Penguji

1.

Dr. Dodi Devianto
NIP. 197712272000121002

2.

Dr. Admi Nazra
NIP. 197103301999031002

Mengetahui, Ketua Jurusan Matematika
FMIPA Universitas Andalas

Dr. Syafrizal Sy
NIP. 196708071993091001

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Alhamdulillahi rabbil 'alamiin, puji syukur senantiasa penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas segenap limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul **"Menentukan Integral Fungsi Kompleks jika Pembilangnya Konstanta dengan Menggunakan Teorema Residu ".** Penulisan skripsi ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di jurusan Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini, terutama sekali kepada:

1. Bapak **Efendi, M.Si** dan Bapak **Zulakmal, M.Si** selaku dosen pembimbing tugas akhir yang dengan sabar telah meluangkan banyak waktu untuk memberikan bimbingan, arahan, masukan, saran, dan motivasi selama penyusunan tugas akhir ini.
2. Bapak **Dr. Dodi Devianto** dan Bapak **Dr. Admi Nazra** selaku dosen penguji tugas akhir yang telah banyak memberikan bimbingan, arahan serta kritik dan saran demi kelengkapan tugas akhir ini.
3. Bapak **Ir. Yudiantri Adi, M.Sc** selaku pembimbing akademik yang telah banyak memberikan masukan dan saran dalam pengambilan mata kuliah.

4. Bapak **Dr. Syafrizal Sy** selaku ketua jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas.
5. Bapak dan Ibu dosen serta staf jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas Padang.
6. Keluarga tersayang yang senantiasa memberikan dukungan dan semangat selama ini.
7. Teman-teman mahasiswa di Jurusan Matematika FMIPA UNAND, khususnya angkatan 2006, serta semua pihak yang telah banyak membantu penulis baik dalam sumbangan tenaga, inspirasi, dan motivasi selama penulis mengikuti studi.

Semoga Allah SWT senantiasa melimpahkan rahmat-Nya kepada mereka sebagai balasan atas semua kebaikan yang telah diberikan.

Penulis menyadari bahwa tulisan ini jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu penulis senantiasa mengharapkan masukan, kritikan, dan saran untuk kesempurnaan skripsi ini di masa mendatang. Akhir kata penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi perkembangan dan kemajuan ilmu pengetahuan. Amin.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Padang, Agustus 2011

Penulis

بسم الله الرحمن الرحيم

1. Bacalah dengan (menyebut) nama Tuhanmu yang Menciptakan.
2. Dia Telah menciptakan manusia dari segumpal darah.
3. Bacalah, dan Tuhanmulah yang Maha pemurah.
4. Yang mengajar (manusia) dengan perantaraan kalam.
5. Dia mengajar kepada manusia apa yang tidak diketahuinya.

(QS. Al 'Alaq : 1-5)

"Bukankah telah Kami lapangkan dadamu untukmu? Dan kami lepaskan beban darimu, yang memberatkan punggungmu. Dan kami tinggikan bagimu sebutan (namamu). Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"

(QS. Al-Insyirah : 1-6)

Skripsi ini ku persembahkan untuk orang - orang yang sangat aku cintai, yang selalu memberiku semangat, dan tak pernah ada kata lelah di hati nya, Ayahanda Supriadin dan Ibunda Murniati. *Terimakasih mama , hatur nuhun* papa, maaf me baru bisa memberikan ini. Me janji suatu saat nanti papa n mama bangga melihat kesuksesan me. Amin...

Untuk adik ku eka yang selalu mendengar keluh kesah ku, terimakasih ya . U are the best sister ☺
semangat buat TA nya. Segera cepat menyusul aku ya..

Buat keluarga ku di tasik, mak nini, pak aki, mang dedi, bi nung, rendi, rega, dan neng terimakasih atas semangat dan doanya.. Mudah2an amel bisa ke sana lagi dengan nama yang baru.. :p

Special Thanks to

Pak Efendi dan pak Zulakmal selaku pembimbing dalam penyusunan skripsi amel (terimakasih banyak Pak ☺) . Pak Dodi dan Pak Admi (terimakasih Pak, atas saran2nya), serta dosen2 Math Pak Syafrizal, Pak Syafruddin, Pak Yudi, Pak Ginting, Pak Budi, Pak Made, Pak Narwen, Pak Jenizon, Pak Muhafzan, Pak Werman, Pak Ikbal, Bu Yas, Bu Yoza, Bu Izza, Bu Rince, Bu Welly, Bu Nova, Bu Ayu, Bu Monic, Bu Lyra . Terimakasih banyak atas ilmu yang telah amel terima selama berada di kampus ini. Terimakasih juga untuk Bapak /Ibu staf jurusan Math, Mama Chun, Pak Syamsir, Bu Elly , Bu Onang dan Ni Opi atas bantuan dan kemudahan urusan yang amel dapatkan selama berinteraksi dengan jurusan.'

buat fiqri terimakasih ya.. ☺
Terimakasih atas semuanya..
#tetaplah menjadi shinichi di hati aku..
Semangat ya bikin TA nya,,
'anggaplah sesuatu yang kamu kerjakan itu mudah,,
Jika mengalami kesulitan tinggalkan lah sejenak ☺'
Mudah2an pulang nanti kamu udah bawa gelar,,
Amin..
'ill be right here waiting for u ^-^

Temen – temen "perfesibukan" , buat ona (makasih ya beb slalu kasih aku semangat, selalu denger curhat aku ☺ *kangen chating lagi.. mudah2an ntar kamu ke padang kita ketemu ya :))..Buat reni (makasih ya buat semangat ama doa nya.. mudah2an aku bisa ke jogja buat ketemu langsung ama kamu ren ☺ * doakan ya :P).. buat fiqra (segera nyusul aku yow, ato gak kamu gak boleh ke padang :D)

Pooh – family.. titi,,egi,,idus,,ee.. Alhamdulillah akhirnyo me salasai juo ☺ bilo wak kumpua2 lai..? ndak taragak samo me..?
Cito2 wak liak yo.. :D

ATM'S GENK :D
Yanti (bu peri terimakasih ya ☺,, selalu mendengar keluh kesah amel.. selalu ngasih amel semangat.. *bu peri kapan ke padang @_@?)

Rice (makasih ya lee,, selalu "nyinyir" kasih semangat ke aku.. "ayo dad kamu bisa,, u can do it" kata2 yang akan slalu aku ingat,, heee :p.. mudah2an aku bisa menuhin janji aku ke kamu lee.. Insya ALLAH ☺)
*Mira (terimakasih ya dek,, bela2in baru balik dari kampung langsung ke markas demi siding amel.. ☺ *terharu >_<)*
Winda (terimakasih ya win,, buat semangat nya ☺)

Temen-temen math '06, isna n nia "for i to n" (jadi ingat waktu mam di kafe fisika :P), vathna (akhirnya kita bisa wisuda bareng yaa ☺), opi (semangat ya pi buat TA nya, semoga di mudahkan.. amin…), titin (kapan lagi ya amel ke kos titin :P, from east to west sebaran t is the best :D), lusi (thanks ya si, kamu bela2in datang ke markas sampe tersesat demi aku :P), nilam (semangat bikin TA nya, ya), ika, Imelda, imel, ica, rina, yogi, didi, irfan, ijon, akhir, meki (thanks buat bukunya ki), yayank, shelvi, cici, ade, herlin, ira, rahma (kangen :"))

Bp'011 family,, ni ef (makasih buat semangatnya ni.. akhirnya amel bisa juga), meri (samo wak wisuda yo dik bp), haris (capek tamat ya..), ni tesa, ni inah, da olsen, da yose, da afri, beti (semangat kuliah nya ya dek), ni weni (kangen sama uni ^^), ni dora (ni dora endut :P), kiki,rani, nyuma (makasih buat semangat nya ya dek ☺)

Buat uni leli makasih ya un,, ☺ buat yulian (makasih ya yulian akhirnya uni bisa menyusul yulian ^^), tia (thanks buat catatan nya), revi (adik bp, bilo wak pai main lai vi :P), winda, ayu, legi, desma, resti (film korea uni masih banyak stok nya ti :D), icut, angga, ferdi (makasih ferdi dah nolongin uni waktu uni mau sidang ☺), lina, rian,jessi, ita, iyenk, utie, egi, eza (semangat bikin TA nya ya.. *mudah2an wisuda bareng eka ^^)

Semua yang mungkin tak tersebutkan namanya di sini. Makasih banyak atas bantuan serta doanya. Hanya sepotong ucapan terima kasih yang dapat amel sampaikan. Semoga Allah membalas semua kebaikan ang telah diberikan dengan sebaik-baik balasan dan mudah2an Allah senantiasa melapangkan segala urusan kita. Amiin…

☺☺☺

♥♥Amelia Sufitri, S.Si ♥♥

ABSTRAK

Diberikan persamaan $Res[f, z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z - z_0)^m f(z)]$ yang merupakan residu dari fungsi $f(z)$ yang memiliki kutub z_0 dengan orde m. Misalkan fungsi $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ yang bersifat analitik, dimana $p(z)$ adalah bilangan konstan. Dengan menggunakan persamaan residu tersebut dapat ditentukan integral pada kurva tertutup dari fungsi $f(z)$. Hasil yang diperoleh adalah integral dari fungsi $f(z)$ dengan pembilang nya konstan bernilai nol.

Kata Kunci : *analitik, kutub, orde, residu*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Nama Gambar **No. Halaman**

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu topik yang populer dalam matematika adalah analisis kompleks. Analisis Kompleks digunakan untuk mempelajari fungsi-fungsi yang berada dalam ruang kompleks, diantaranya bilangan kompleks, integrasi kompleks, barisan dan deret kompleks, deret pangkat, deret Taylor, deret MacLaurin, deret Laurent dan teorema residu.

Teorema residu memiliki aplikasi penting dalam menghitung integral kompleks pada kurva tertutup C. Teorema ini sangat efisien sehingga hampir tidak ada integral kurva tertutup yang tidak dapat diselesaikan.

Residu dari fungsi $f(z)$ adalah koefisien $\frac{1}{z-z_0}$ dari deret Laurent yang dalam hal ini dilambangkan dengan b_1 dimana

$$\underset{z=z_0}{Res}\, f(z) = b_1 = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\, f(z).$$

Persamaan tersebut merupakan residu dari fungsi yang memiliki kutub dengan orde sederhana $(m = 1)$.

Misalkan $f(z)$ memiliki kutub dengan orde m, maka residu dari fungsi $f(z)$ adalah

$$Res[f, z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)].$$

Dengan memanfaatkan persamaan di atas, dapat ditentukan residu dari fungsi $f(z)$ tanpa harus menurunkan seluruh deret dan mengambil koefisien $\frac{1}{z-z_0}$ sebagai residunya.

1.2 Perumusan Masalah

Misalkan fungsi $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ yang bersifat analitik, dimana $p(z)$ adalah bilangan konstan. Pada tugas akhir ini, akan ditentukan integral pada kurva tertutup sederhana dari fungsi $f(z)$ dengan menggunakan residu.

1.3 Pembatasan Masalah

Dalam tulisan ini, penulis membatasi permasalahan pada penghitungan residu untuk menentukan integral pada kurva tertutup dari suatu fungsi kompleks berkutub hingga dan tak hingga untuk orde $m \leq 3$, m bilangan integer.

1.4 Tujuan Penulisan

Penulisan ini bertujuan untuk menentukan integral pada kurva tertutup dengan cara menghitung residu dari fungsi $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, dimana $p(z)$ adalah bilangan konstan.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan dalam tugas akhir ini terdiri dari empat bab yang diawali dengan Bab I, yang menguraikan tentang latar belakang, permasalahan, pembatasan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan. Fungsi Analitik, deret Taylor, deret Laurent, Cauchy principal value, residu dan konjugat kompleks serta lemma pendukung yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan disajikan pada Bab II sebagai landasan teori. Kemudian, pembahasan dari permasalahan tersebut akan diuraikan pada Bab III yaitu pembuktian teorema – teorema yang berkaitan dengan residu dan penggunaan teorema untuk beberapa kasus yang relevan. Penulisan tugas akhir ini diakhiri dengan bagian kesimpulan dan saran yang disajikan pada Bab IV.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada Bab ini akan dibahas beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan permasalahan yang telah dikemukakan di Bab I. Konsep dasar ini diawali dengan fungsi analitik, deret Taylor, deret Laurent, Cauchy principal value, residu, dan konjugat kompleks.

2.1 Fungsi Analitik

Definisi 2.1.1 [2]

Suatu lingkungan dari sebuah titik $x \in \mathbb{R}$ adalah suatu himpunan V yang memuat sebuah lingkungan ε, $V_\varepsilon(x) := (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ pada x untuk beberapa $\varepsilon > 0$.

Definisi 2.1.2 [3]

Misal f fungsi yang mempunyai daerah asal yang memuat lingkungan dari sebuah titik z_0. Turunan dari f di z_0, ditulis $f'(z_0)$ yang didefinisikan oleh persamaan

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \qquad \text{.....(2.1.1)}$$

dan limitnya ada.

Definisi 2.1.3 [5]

Suatu fungsi $f(z)$ dikatakan analitik di titik z_0 jika $f(z)$ dapat diturunkan di semua titik pada suatu lingkungan z_0.

Contoh 2.1.4

Fungsi $f(z) = z^4$ merupakan fungsi analitik karena $f(z)$ dapat diturunkan di setiap titik z.

2.2 Deret Taylor

Teorema 2.2.1 [3]

Misalkan fungsi f analitik di seluruh cakram terbuka $|z - z_0| < R_0$ yang berpusat di z_0 dan dengan radius R_0. Maka, di setiap titik z di dalamnya, $f(z)$ mempunyai deret

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{.....(2.2.1)}$$

dengan

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, n = 0,1,2,\ldots \qquad \text{.....(2.2.2)}$$

2.3 Deret Laurent

Teorema 2.3.1 [3]

Misal f analitik dalam domain $R_1 < |z - z_0| < R_2$ dan misal C menunjukkan kontur tertutup sederhana berorientasi positif sekitar z_0, maka setiap titik z di dalam domain, $f(z)$ mempunyai deret

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \qquad \text{.....(2.3.1)}$$

dengan

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\,, n = 0,1,2,\dots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}\,dz\,, n = 1,2,\dots$$

2.4 *Cauchy Principal Value*

Integral tak wajar dari sebuah fungsi kontinu $f(z)$ pada interval semi-terbatas $z \geq 0$ didefinisikan oleh persamaan

$$\int_0^{\infty} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_0^{R} f(z)dz \qquad \dots..(2.4.1)$$

Jika $f(z)$ kontinu untuk setiap z, integral tak wajar pada interval tak terbatas $-\infty < z < \infty$ didefinisikan sebagai berikut :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \lim_{R_1\to\infty}\int_{-R_1}^{0} f(z)dz + \lim_{R_2}\int_0^{R_2} f(z)dz \qquad \dots..(2.4.2)$$

Persamaan (2.4.2) dapat ditunjukkan dengan menggunakan *Cauchy principal value*, yaitu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(z)dz \qquad \dots..(2.4.3)$$

2.5 Residu

Definisi 2.5.1 [3]

Jika fungsi f tidak analitik di titik z_0 tetapi analitik di beberapa titik dalam setiap lingkungan pada z_0 maka z_0 disebut titik singular.

Contoh 2.5.2

Fungsi $f(z) = \frac{1}{z}$ tidak analitik di titik $z = 0$ sehingga titik $z = 0$ merupakan titik singular dari fungsi $f(z)$.

Definisi 2.5.3 [3]

Sebuah titik singular z_0 dikatakan terisolasi jika terdapat lingkungan terhapus $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ dari z_0 dimana f analitik.

Teorema 2.5.4 [3]

Sebuah titik singular terisolasi z_0 dari sebuah fungsi f adalah kutub pada orde m jika dan hanya jika $f(z)$ dapat ditulis dalam bentuk

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m},$$

dimana $\phi(z)$ analitik dan tak nol di z_0.

Teorema 2.5.5 [4]

Misal $f(z)$ analitik di $z = z_0$ dan bernilai nol pada orde ke n di $z = z_0$, maka $\frac{1}{f(z)}$ mempunyai sebuah kutub pada orde ke n di $z = z_0$.

Teorema 2.5.6 [3]

Misal C kontur tertutup sederhana yang berorientasi positif. Jika f analitik di dalam dan pada C kecuali untuk bilangan hingga dari titik singular $z_k (k = 1,2, \dots, n)$ di dalam C, maka

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{Res} f(z) \qquad \dots\dots(2.5.1)$$

Lemma 2.5.7 [1]

Misal z_0 adalah kutub pada orde m dari sebuah fungsi $f(z)$ maka residu dari fungsi $f(z)$ diberikan oleh bentuk

$$Res[f, z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \qquad \ldots\ldots (2.5.2)$$

2.6 Konjugat Kompleks

Konjugat kompleks dari bilangan kompleks $z = x + iy$ didefinisikan sebagai bilangan kompleks $x - iy$ dan dilambangkan oleh $\bar{z}$, yaitu

$$\bar{z} = x - iy \qquad \ldots\ldots (2.6.1)$$

BAB III

MENENTUKAN INTEGRAL FUNGSI KOMPLEKS JIKA PEMBILANGNYA KONSTANTA DENGAN MENGGUNAKAN TEOREMA RESIDU

Pada bagian ini, akan dibahas tentang pembuktian teorema – teorema yang berkaitan dengan residu dan contoh – contoh soal.

3.1 Pembuktian Teorema-Teorema yang Berkaitan dengan Residu

Teorema 3.1.1 [1]

Jika $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ analitik pada C dan di dalam C, kecuali di $z = \pm z_0$ dengan $p(z)$ konstan, dan f mempunyai kutub pada orde m (untuk suatu bilangan integer m) maka

$$Res[f, -z_0] = \overline{Res[f, z_0]}$$

Bukti :

Teorema ini akan diselidiki untuk $m = 1,2,3$.

Kasus 1

(i) Misal z_0 adalah kutub pada orde $m = 1$, maka berdasarkan persamaan (2.5.2) pada Lemma 2.5.7 diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$Res[f, z_0] = \frac{1}{(1-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}} [(z - z_0)^1 f(z)] \qquad \ldots\ldots (3.1.1)$$

karena $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, maka

$$Res[f, z_0] = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) \frac{p(z)}{q(z)}\right]$$

$$= \lim_{z\to z_0} \left[\frac{A}{B}\right] \qquad \ldots..(3.1.2)$$

Misalkan,

$A = (z - z_0)p(z)$

$B = q(z)$

Deret Taylor untuk $q(z)$ di sekitar titik $z = z_0$ adalah

$q(z) = q(z_0) + (z - z_0)q'(z_0) + \frac{(z-z_0)^2}{2!} q''(z_0) + \cdots$

Berdasarkan teorema 2.5.5 maka

$q(z) = (z - z_0)q'(z_0) + \frac{(z-z_0)^2}{2!} q''(z_0) + \cdots$

sehingga

$B = (z - z_0)q'(z_0) + \frac{(z-z_0)^2}{2!} q''(z_0) + \cdots$

dari persamaan (3.1.2) $Res[f, z_0]$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$Res[f, z_0] = \lim_{z\to z_0} \left[\frac{(z-z_0)p(z)}{(z-z_0)q'(z_0)+\frac{(z-z_0)^2}{2!}q''(z_0)+\cdots}\right]$$

$$= \lim_{z\to z_0} \left[\frac{(z-z_0)p(z)}{(z-z_0)\left(q'(z_0)+\frac{(z-z_0)}{2!}q''(z_0)+\cdots\right)}\right]$$

$$= \lim_{z\to z_0} \left[\frac{p(z)}{q'(z_0)+\frac{(z-z_0)}{2!}q''(z_0)+\cdots}\right]$$

$$= \frac{p(z_0)}{q'(z_0)+\frac{(z_0-z_0)}{2!}q''(z_0)+\cdots}$$

$$= \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \qquad \ldots..(3.1.3)$$

karena $p(z)$ konstan maka dari persamaan (3.1.3) $Res[f, z_0]$ dapat ditulis,

$$Res[f, z_0] = \frac{p(z)}{q'(z_0)}$$

Sehingga residu di kutub z_0 pada orde $m = 1$ adalah

$$Res[f, z_0] = \frac{p(z)}{q'(z_0)} \qquad \text{.....}(3.1.4)$$

(ii) Misal $-z_0$ adalah kutub pada orde $m = 1$, maka berdasarkan persamaan (2.5.2) pada Lemma 2.5.7 diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$Res[f, -z_0] = \frac{1}{(1-1)!} \lim_{z \to -z_0} \frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}} \left[\left(z - (-z_0)\right)^1 f(z) \right] \qquad \text{.....}(3.1.5)$$

karena $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, maka

$$Res[f, -z_0] = \lim_{z \to -z_0} \left[(z + z_0) \frac{p(z)}{q(z)} \right]$$

$$= \lim_{z \to -z_0} \left[\frac{A}{B} \right] \qquad \text{.....}(3.1.6)$$

Misalkan,

$A = (z + z_0)p(z)$

$B = q(z)$

Deret Taylor untuk $q(z)$ di sekitar titik $z = -z_0$ adalah

$$q(z) = q(-z_0) + (z + z_0)q'(-z_0) + \frac{(z+z_0)^2}{2!} q''(-z_0) + \cdots$$

Berdasarkan teorema 2.5.5 maka

$$q(z) = (z + z_0)q'(-z_0) + \frac{(z+z_0)^2}{2!} q''(-z_0) + \cdots$$

sehingga

$$B = (z + z_0)q'(-z_0) + \frac{(z+z_0)^2}{2!} q''(-z_0) + \cdots$$

dari persamaan (3.1.6) $Res[f,-z_0]$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$Res[f,-z_0] = \lim_{z\to -z_0}\left[\frac{(z+z_0)p(z)}{(z+z_0)q'(-z_0)+\frac{(z+z_0)^2}{2!}q''(-z_0)+\cdots}\right]$$

$$= \lim_{z\to -z_0}\left[\frac{(z+z_0)p(z)}{(z+z_0)\left(q'(-z_0)+\frac{(z+z_0)}{2!}q''(-z_0)+\cdots\right)}\right]$$

$$= \lim_{z\to -z_0}\left[\frac{p(z)}{q'(-z_0)+\frac{(z+z_0)}{2!}q''(-z_0)+\cdots}\right]$$

$$= \frac{p(-z_0)}{q'(-z_0)+\frac{(-z_0+z_0)}{2!}q''(-z_0)+\cdots}$$

$$= \frac{p(-z_0)}{q'(-z_0)} \qquad \ldots\ldots(3.1.7)$$

karena $p(z)$ konstan maka dari persamaan (3.1.7) $Res[f,-z_0]$ dapat ditulis,

$$Res[f,-z_0] = \frac{p(z)}{q'(-z_0)}$$

Karena $q'(-z_0) = -q'(z_0)$ maka residu di kutub $-z_0$ pada orde $m = 1$ adalah

$$Res[f,-z_0] = \frac{p(z)}{-q'(z_0)} = \frac{-p(z)}{q'(z_0)} \qquad \ldots.(3.1.8)$$

Dari persamaan (3.1.4) dan (3.1.8) dapat ditunjukkan bahwa,

$$Res[f,z_0] = \frac{p(z)}{q'(z_0)} = -\left(\frac{-p(z)}{q'(z_0)}\right) = -Res[f,-z_0]$$

Dengan demikian,

$$Res[f,-z_0] = \overline{Res[f,z_0]}$$

Kasus 2

(i) Misalkan z_0 adalah kutub pada orde $m = 2$, maka berdasarkan persamaan (2.5.2) pada Lemma 2.5.7 diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$Res[f, z_0] = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} [(z - z_0)^2 f(z)] \qquad \ldots\ldots (3.1.9)$$

karena $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, maka

$$Res[f, z_0] = \frac{1}{1!} \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz} \left[(z - z_0)^2 \frac{p(z)}{q(z)} \right]$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz} \left[(z - z_0)^2 \frac{p(z)}{q(z)} \right]$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz} \left[\frac{A}{B} \right] \qquad \ldots\ldots (3.1.10)$$

Misalkan,

$A = (z - z_0)^2 p(z)$

$B = q(z)$

Deret Taylor untuk $q(z)$ di sekitar titik $z = z_0$ adalah

$$q(z) = q(z_0) + (z - z_0) q'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} q''(z_0) + \cdots$$

Berdasarkan teorema 2.5.5 maka

$$q(z) = \frac{(z - z_0)^2}{2!} q''(z_0) + \frac{(z - z_0)^3}{3!} q^{(3)}(z_0) + \cdots$$

sehingga

$$B = \frac{(z - z_0)^2}{2!} q''(z_0) + \frac{(z - z_0)^3}{3!} q^{(3)}(z_0) + \cdots$$

dengan demikian dari persamaan (3.1.10) $Res[f, z_0]$ dapat ditulis,

$$Res[f, z_0] = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z-z_0)^2 p(z)}{\frac{(z-z_0)^2}{2!} q''(z_0) + \frac{(z-z_0)^3}{3!} q^{(3)}(z_0) + \cdots} \right]$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z-z_0)^2 p(z)}{((z-z_0)^2)\left(\frac{q''(z_0)}{2!} + \frac{(z-z_0)}{3!} q^{(3)}(z_0)\right)} \right]$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz} \left[\frac{p(z)}{\frac{q''(z_0)}{2!} + \frac{(z-z_0)}{3!} q^{(3)}(z_0) + \cdots} \right]$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz} \left[\frac{p(z)}{\frac{q''(z_0)}{2\times 1} + \frac{(z-z_0)}{3\times 2\times 1} q^{(3)}(z_0) + \cdots} \right]$$

$$= 2 \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz} \left[\frac{p(z)}{q''(z_0) + \frac{(z-z_0)}{3} q^{(3)}(z_0) + \cdots} \right] \qquad \ldots\ldots (3.1.11)$$

Misalkan,

$$u(z) = q''(z_0) + \frac{(z-z_0)}{3} q^{(3)}(z_0) + \cdots$$

dan

$$u'(z) = \frac{1}{3} q^{(3)}(z_0) + \frac{1}{6}(z - z_0) q^{(4)}(z_0) + \cdots$$

dari persamaan (3.1.11) $Res[f, z_0]$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$Res[f, z_0] = 2 \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz} \left[\frac{p(z)}{u(z)} \right]$$

$$= 2 \lim_{z \to z_0} \left[\frac{p'(z)u(z) - u'(z)p(z)}{u^2(z)} \right]$$

$$= 2 \lim_{z \to z_0} \left[\frac{p'(z)}{u(z)} - \frac{u'(z)p(z)}{u^2(z)} \right]$$

$$= 2 \left[\frac{\lim_{z \to z_0} p'(z)}{\lim_{z \to z_0} u(z)} - \frac{\lim_{z \to z_0} u'(z) \cdot \lim_{z \to z_0} p(z)}{\lim_{z \to z_0} u^2(z)} \right] \qquad \ldots\ldots (3.1.12)$$

Perhatikan bahwa,

$$\lim_{z\to z_0} p'(z) = p'(z_0)$$

$$\lim_{z\to z_0} u(z) = \lim_{z\to z_0}\left(q''(z_0) + \frac{(z-z_0)}{3} q^{(3)}(z_0) + \cdots\right)$$

$$= q''(z_0)$$

$$\lim_{z\to z_0} u'(z) = \lim_{z\to z_0}\left(\frac{1}{3} q^{(3)}(z_0) + \frac{1}{6}(z-z_0) q^{(4)}(z_0) + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{3} q^{(3)}(z_0)$$

$$\lim_{z\to z_0} p(z) = p(z_0)$$

$$\lim_{z\to z_0} u^2(z) = \left(\lim_{z\to z_0} u(z)\right)^2$$

$$= \left(q''(z_0)\right)^2$$

dari persamaan (3.1.12) $Res[f, z_0]$ dapat ditulis,

$$Res[f, z_0] = 2\left[\frac{p'(z_0)}{q''(z_0)} - \frac{\frac{1}{3} q^{(3)}(z_0) p(z_0)}{\left(q''(z_0)\right)^2}\right]$$

$$= 2\left[\frac{p'(z_0)}{q''(z_0)} - \frac{q^{(3)}(z_0) p(z_0)}{3\left(q''(z_0)\right)^2}\right]$$

karena $p(z)$ fungsi konstan maka $p'(z) = 0$ dan $p(z_0) = p(z)$ sedemikian sehingga

$$Res[f, z_0] = 2\left[-\frac{q^{(3)}(z_0) p(z)}{3\left(q''(z_0)\right)^2}\right]$$

$$= 2 \times \left[-\frac{1}{3} \times \frac{q^{(3)}(z_0) p(z)}{\left(q''(z_0)\right)^2}\right]$$

Dengan demikian residu di kutub z_0 pada orde $m = 2$ adalah

$$Res[f, z_0] = -\frac{2}{3} \times \left[\frac{q^{(3)}(z_0)p(z)}{\left(q''(z_0)\right)^2}\right] \qquad \text{.....(3.1.13)}$$

(ii) Misalkan $-z_0$ adalah kutub pada orde $m = 2$, maka berdasarkan persamaan (2.5.2) pada Lemma 2.5.7 diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$Res[f, -z_0] = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to -z_0} \frac{d}{dz}\left[\left(z - (-z_0)\right)^2 f(z)\right] \qquad \text{.....(3.1.14)}$$

karena $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, maka

$$= \frac{1}{1!} \lim_{z \to -z_0} \frac{d}{dz}\left[(z + z_0)^2 \frac{p(z)}{q(z)}\right]$$

$$= \lim_{z \to -z_0} \frac{d}{dz}\left[(z + z_0)^2 \frac{p(z)}{q(z)}\right]$$

$$= \lim_{z \to -z_0} \frac{d}{dz}\left[\frac{A}{B}\right] \qquad \text{.....(3.1.15)}$$

Misalkan,

$A = (z + z_0)^2 p(z)$

$B = q(z)$

Deret Taylor untuk $q(z)$ di sekitar titik $z = -z_0$ adalah

$q(z) = q(-z_0) + (z + z_0)q'(-z_0) + \frac{(z+z_0)^2}{2!} q''(-z_0) + \cdots$

Berdasarkan teorema 2.5.5 maka

$q(z) = \frac{(z+z_0)^2}{2!} q''(-z_0) + \frac{(z+z_0)^3}{3!} q^{(3)}(-z_0) + \cdots$

sehingga

$B = \frac{(z+z_0)^2}{2!} q''(-z_0) + \frac{(z+z_0)^3}{3} q^{(3)}(-z_0) + \cdots$

dengan demikian dari persamaan (3.1.15) $Res[f, -z_0]$ dapat ditulis,

$$Res[f, -z_0] = \lim_{z \to -z_0} \frac{d}{dz}\left[\frac{(z+z_0)^2 p(z)}{\frac{(z+z_0)^2}{2!}q''(-z_0)+\frac{(z+z_0)^3}{3!}q^{(3)}(-z_0)+\cdots}\right]$$

$$= \lim_{z \to -z_0} \frac{d}{dz}\left[\frac{(z+z_0)^2 p(z)}{((z+z_0)^2)\left(\frac{q''(-z_0)}{2!}+\frac{(z+z_0)}{3!}q^{(3)}(-z_0)+\cdots\right)}\right]$$

$$= \lim_{z \to -z_0} \frac{d}{dz}\left[\frac{p(z)}{\left(\frac{q''(-z_0)}{2!}+\frac{(z+z_0)}{3!}q^{(3)}(-z_0)+\cdots\right)}\right]$$

$$= \lim_{z \to -z_0} \frac{d}{dz}\left[\frac{p(z)}{\frac{q''(-z_0)}{2\times 1}+\frac{(z+z_0)}{3\times 2\times 1}q^{(3)}(-z_0)+\cdots}\right]$$

$$= 2\lim_{z \to -z_0} \frac{d}{dz}\left[\frac{p(z)}{q''(-z_0)+\frac{(z+z_0)}{3}q^{(3)}(-z_0)+\cdots}\right] \qquad \ldots..(3.1.16)$$

Misalkan,

$$u(z) = q''(-z_0) + \frac{(z+z_0)}{3}q^{(3)}(-z_0) + \cdots$$

dan

$$u'(z) = \frac{1}{3}q^{(3)}(-z_0) + \frac{1}{6}(z+z_0)q^{(4)}(-z_0) + \cdots$$

Maka dari persamaan (3.1.16) $Res[f, -z_0]$ dapat ditulis,

$$Res[f, -z_0] = 2\lim_{z \to -z_0} \frac{d}{dz}\left[\frac{p(z)}{u(z)}\right]$$

$$= 2\lim_{z \to -z_0}\left[\frac{p'(z)u(z)-u'(z)p(z)}{u^2(z)}\right]$$

$$= 2\lim_{z \to -z_0}\left[\frac{p'(z)}{u(z)} - \frac{u'(z)p(z)}{u^2(z)}\right]$$

$$= 2\left[\frac{\lim_{z \to -z_0} p'(z)}{\lim_{z \to -z_0} u(z)} - \frac{\lim_{z \to -z_0} u'(z) \cdot \lim_{z \to -z_0} p(z)}{\lim_{z \to -z_0} u^2(z)}\right] \qquad \ldots..(3.1.17)$$

Perhatikan bahwa,

$$\lim_{z \to -z_0} p'(z) = p'(-z_0)$$

$$\lim_{z \to -z_0} u(z) = \lim_{z \to -z_0} \left(q''(-z_0) + \frac{(z+z_0)}{3} q^{(3)}(-z_0) + \cdots \right)$$

$$= q''(-z_0)$$

$$\lim_{z \to -z_0} u'(z) = \lim_{z \to -z_0} \left(\frac{1}{3} q^{(3)}(-z_0) + \frac{(z+z_0)}{6} q^{(4)}(-z_0) + \cdots \right)$$

$$= \frac{1}{3} q^{(3)}(-z_0)$$

$$\lim_{z \to -z_0} p(z) = p(-z_0)$$

$$\lim_{z \to -z_0} u^2(z) = \left(\lim_{z \to -z_0} u(z) \right)^2$$

$$= \left(q''(-z_0) \right)^2$$

maka persamaan dari (3.1.17) $Res[f, -z_0]$ dapat ditulis,

$$Res[f, -z_0] = 2 \left[\frac{p'(-z_0)}{q''(-z_0)} - \frac{\frac{1}{3} q^{(3)}(-z_0) p(-z_0)}{\left(q''(-z_0) \right)^2} \right]$$

$$= 2 \left[\frac{p'(-z_0)}{q''(-z_0)} - \frac{q^{(3)}(-z_0) p(-z_0)}{3 \left(q''(-z_0) \right)^2} \right]$$

karena $p(z)$ fungsi konstan maka $p'(z) = 0$ dan $p(-z_0) = p(z)$ sedemikian sehingga

$$Res[f, -z_0] = 2 \left[- \frac{q^{(3)}(-z_0) p(z)}{3 \left(q''(-z_0) \right)^2} \right]$$

karena $q^{(3)}(-z_0) = -q^{(3)}(z_0)$ sehingga

$$= 2 \left[- \frac{-\left(q^{(3)}(z_0) \right) p(z)}{3 \left(-q''(z_0) \right)^2} \right]$$

$$= 2 \left[\frac{q^{(3)}(z_0) p(z)}{3 \left(q''(z_0) \right)^2} \right]$$

$$= \frac{2}{3} \times \left[\frac{q^{(3)}(z_0)p(z)}{\left(q''(z_0)\right)^2}\right]$$

Dengan demikian residu di kutub $-z_0$ pada orde $m = 2$ adalah

$$Res[f, -z_0] = \frac{2}{3} \times \left[\frac{q^{(3)}(z_0)p(z)}{\left(q''(z_0)\right)^2}\right] \qquad \text{.....(3.1.18)}$$

Dari persamaan (3.1.13) dan (3.1.18) dapat ditunjukkan bahwa,

$$Res[f, z_0] = -\frac{2}{3} \times \left[\frac{q^{(3)}(z_0)p(z)}{\left(q''(z_0)\right)^2}\right] = -\left(\frac{2}{3} \times \left[\frac{q^{(3)}(z_0)p(z)}{\left(q''(z_0)\right)^2}\right]\right) = -Res[f, -z_0]$$

Dengan demikian,

$$Res[f, -z_0] = \overline{Res[f, z_0]}$$

Kasus 3

(i) Misalkan z_0 adalah kutub pada orde $m = 3$, maka berdasarkan persamaan (2.5.2) pada Lemma 2.5.7 diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$Res[f, z_0] = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}} [(z - z_0)^3 f(z)] \qquad \text{.....(3.1.19)}$$

karena $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, maka

$$= \frac{1}{2!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z - z_0)^3 \frac{p(z)}{q(z)}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to z_0} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z - z_0)^3 \frac{p(z)}{q(z)}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to z_0} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{A}{B}\right] \qquad \text{.....(3.1.20)}$$

Misalkan,

$A = (z - z_0)^3 p(z)$

$B = q(z)$

Deret Taylor untuk $q(z)$ di sekitar titik $z = -z_0$ adalah

$$q(z) = q(z_0) + (z - z_0)q'(z_0) + \frac{(z-z_0)^2}{2!}q''(z_0) + \cdots$$

Berdasarkan teorema 2.5.5 maka

$$q(z) = \frac{(z-z_0)^3}{3!}q^{(3)}(z_0) + \frac{(z-z_0)^4}{4!}q^{(4)}(z_0) + \cdots$$

sehingga

$$B = \frac{(z-z_0)^3}{3!}q^{(3)}(z_0) + \frac{(z-z_0)^4}{4!}q^{(4)}(z_0) + \cdots$$

dengan demikian dari persamaan (3.1.20) $Res[f, z_0]$ dapat ditulis,

$$Res[f, z_0] = \frac{1}{2}\lim_{z\to z_0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z-z_0)^3 p(z)}{\frac{(z-z_0)^3}{3!}q^{(3)}(z_0)+\frac{(z-z_0)^4}{4!}q^{(4)}(z_0)+\cdots}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to z_0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z-z_0)^3 p(z)}{((z-z_0)^3)\left(\frac{q^{(3)}(z_0)}{3!}+\frac{(z-z_0)}{4!}q^{(4)}(z_0)+\cdots\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to z_0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{p(z)}{\frac{q^{(3)}(z_0)}{3!}+\frac{(z-z_0)}{4!}q^{(4)}(z_0)+\cdots}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to z_0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{p(z)}{\frac{q^{(3)}(z_0)}{3\times2\times1}+\frac{(z-z_0)}{4\times3\times2\times1}q^{(4)}(z_0)+\cdots}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\times 3\times 2\lim_{z\to z_0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{p(z)}{q^{(3)}(z_0)+\frac{(z-z_0)}{4}q^{(4)}(z_0)+\cdots}\right]$$

$$= 3\lim_{z\to z_0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{p(z)}{q^{(3)}(z_0)+\frac{(z-z_0)}{4}q^{(4)}(z_0)+\cdots}\right] \quad \ldots..(3.1.21)$$

Misalkan,

$$u(z) = q^{(3)}(z_0) + \frac{(z-z_0)}{4}q^{(4)}(z_0) + \cdots$$

maka

$u'(z) = \frac{1}{4}q^{(4)}(z_0) + \frac{2}{20}(z - z_0)q^{(5)}(z_0) + \cdots$

dan

$u''(z) = \frac{2}{20}q^{(5)}(z_0) + \frac{6}{120}(z - z_0)q^{(6)}(z_0) + \cdots$

Sehingga dari persamaan (3.1.21) $Res[f, z_0]$ dapat ditulis,

$$
\begin{aligned}
Res[f, z_0] &= 3\lim_{z\to z_0} \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{p(z)}{u(z)}\right] \\
&= 3\lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz}\left(\frac{d}{dz}\left[\frac{p(z)}{u(z)}\right]\right) \\
&= 3\lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz}\left(\frac{p'(z)u(z)-u'(z)p(z)}{u^2(z)}\right) \\
&= 3\lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz}\left(\frac{p'(z)}{u(z)} - \frac{u'(z)p(z)}{u^2(z)}\right) \\
&= 3\lim_{z\to z_0} \left[\frac{d}{dz}\left(\frac{p'(z)}{u(z)}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{u'(z)p(z)}{u^2(z)}\right)\right] \\
&= 3\lim_{z\to z_0} \left[\left(\frac{p''(z)u(z)-p'(z)u'(z)}{\left(u(z)\right)^2}\right) - \right. \\
&\qquad \left.\left(\frac{\left(u'(z)p'(z)+u''(z)p(z)\right)\left(u^2(z)\right)-\left(u'(z)p(z)\right)\left(2u(z)u'(z)\right)}{\left(u(z)\right)^4}\right)\right] \\
&= 3\lim_{z\to z_0} \left[\left(\frac{p''(z)u(z)-p'(z)u'(z)}{\left(u(z)\right)^2}\right) - \right. \\
&\qquad \left.\left(\frac{u''(z)p(z)+u'(z)p'(z)}{\left(u(z)\right)^2} - \frac{2\left(u'(z)\right)^2 p(z)}{\left(u(z)\right)^3}\right)\right] \\
&= 3\left[\lim_{z\to z_0} \left(\frac{p''(z)u(z)-p'(z)u'(z)}{\left(u(z)\right)^2}\right) - \right. \\
&\qquad \left.\lim_{z\to z_0}\left(\frac{u''(z)p(z)+u'(z)p'(z)}{\left(u(z)\right)^2}\right) + \lim_{z\to z_0}\left(\frac{2\left(u'(z)\right)^2 p(z)}{\left(u(z)\right)^3}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$= 3\left[\left(\frac{\lim_{z\to z_0} p''(z)\cdot\lim_{z\to z_0} u(z)-\lim_{z\to z_0} p'(z)\cdot\lim_{z\to z_0} u'(z)}{\lim_{z\to z_0}\left(u(z)\right)^2}\right)-\right.$$

$$\left(\frac{\lim_{z\to z_0} u''(z)\cdot\lim_{z\to z_0} p(z)+\lim_{z\to z_0} u'(z)\cdot\lim_{z\to z_0} p'(z)}{\lim_{z\to z_0}\left(u(z)\right)^2}\right)+$$

$$\left.\frac{2\cdot\lim_{z\to z_0}\left(u'(z)\right)^2.\lim_{z\to z_0} p(z)}{\lim_{z\to z_0}\left(u(z)\right)^3}\right] \qquad \ldots..(3.1.22)$$

Perhatikan bahwa,

$\lim_{z\to z_0} p(z) = p(z_0)$

$\lim_{z\to z_0} p'(z) = p'(z_0)$

karena $p(z)$ fungsi konstan maka $p'(z_0) = 0$

$\lim_{z\to z_0} p''(z) = p''(z_0)$

karena $p(z)$ fungsi konstan maka $p''(z_0) = 0$

$$\lim_{z\to z_0} u(z) = \lim_{z\to z_0}\left(q^{(3)}(z_0) + \frac{(z-z_0)}{4}q^{(4)}(z_0) + \cdots\right)$$

$$= q^{(3)}(z_0)$$

$$\lim_{z\to z_0} u'(z) = \lim_{z\to z_0}\left(\frac{1}{4}q^{(4)}(z_0) + \frac{2}{20}(z-z_0)q^{(5)}(z_0) + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{4}q^{(4)}(z_0)$$

$$\lim_{z\to z_0} u''(z) = \lim_{z\to z_0}\left(\frac{2}{20}q^{(5)}(z_0) + \frac{6}{120}(z-z_0)q^{(6)}(z_0) + \cdots\right)$$

$$= \frac{2}{20}q^{(5)}(z_0)$$

Maka dari persamaan (3.1.22) $Res[f, z_0]$ dapat di tulis,

$$Res[f, z_0] = 3\left[\left(\frac{0 \cdot q^{(3)}(z_0) - 0 \cdot \frac{1}{4}q^{(4)}(z_0)}{\left(q^{(3)}(z_0)\right)^2}\right) - \left(\frac{\frac{2}{20}q^{(5)}(z_0) \cdot p(z_0) + \frac{1}{4}q^{(4)}(z_0) \cdot 0}{\left(q^{(3)}(z_0)\right)^2}\right) + \right.$$

$$\left.\left(\frac{2 \cdot \left(\frac{1}{4}q^{(4)}(z_0)\right)^2 \cdot p(z_0)}{\left(q^{(3)}(z_0)\right)^3}\right)\right]$$

$$= 3\left[-\frac{\frac{1}{10}q^{(5)}(z_0)p(z_0)}{\left(q^{(3)}(z_0)\right)^2} + \frac{2 \cdot \frac{1}{16}\left(q^{(4)}(z_0)\right)^2 p(z_0)}{\left(q^{(3)}(z_0)\right)^3}\right]$$

karena $p(z)$ fungsi konstan maka $p(z_0) = p(z)$ sehingga

$$Res[f, z_0] = 3\left[-\frac{1}{10} \times \frac{p(z)q^{(5)}(z_0)}{\left(q^{(3)}(z_0)\right)^2} + \frac{1}{8} \times \frac{\left(q^{(4)}(z_0)\right)^2 p(z)}{\left(q^{(3)}(z_0)\right)^3}\right]$$

Maka residu di kutub z_0 pada orde $m = 3$ adalah

$$Res[f, z_0] = 3\left[-\frac{1}{10} \times \frac{p(z)q^{(5)}(z_0)}{\left(q^{(3)}(z_0)\right)^2} + \frac{1}{8} \times \frac{\left(q^{(4)}(z_0)\right)^2 p(z)}{\left(q^{(3)}(z_0)\right)^3}\right] \quad \ldots\ldots (3.1.23)$$

(ii) Misalkan $-z_0$ adalah kutub pada orde $m = 3$, maka berdasarkan persamaan (2.5.2) pada Lemma 2.5.7 diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$Res[f, -z_0] = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \to -z_0} \frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}}\left[\left(z - (-z_0)\right)^3 f(z)\right] \quad \ldots\ldots (3.1.24)$$

karena $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, maka

$$Res[f, -z_0] = \frac{1}{2!} \lim_{z \to -z_0} \frac{d^2}{dz^2}\left[(z + z_0)^3 \frac{p(z)}{q(z)}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to -z_0} \frac{d^2}{dz^2}\left[(z + z_0)^3 \frac{p(z)}{q(z)}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to -z_0} \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{A}{B}\right] \quad \ldots\ldots (3.1.25)$$

Misalkan,

$A = (z + z_0)^3 p(z)$

$B = q(z)$

Deret Taylor untuk $q(z)$ di sekitar titik $z = -z_0$ adalah

$$q(z) = q(-z_0) + (z + z_0)q'(-z_0) + \frac{(z+z_0)^2}{2!}q''(-z_0) + \cdots$$

Berdasarkan teorema 2.5.5 maka

$$q(z) = \frac{(z+z_0)^3}{3!}q^{(3)}(-z_0) + \frac{(z+z_0)^4}{4!}q^{(4)}(-z_0) + \cdots$$

sehingga

$$B = \frac{(z+z_0)^3}{3!}q^{(3)}(-z_0) + \frac{(z+z_0)^4}{4!}q^{(4)}(-z_0) + \cdots$$

dengan demikian dari persamaan (3.1.25) $Res[f, -z_0]$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$Res[f, -z_0] = \frac{1}{2}\lim_{z\to -z_0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z+z_0)^3 p(z)}{\frac{(z+z_0)^3}{3!}q^{(3)}(-z_0) + \frac{(z+z_0)^4}{4!}q^{(4)}(-z_0) + \cdots}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to -z_0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z+z_0)^3 p(z)}{((z+z_0)^3)\left(\frac{q^{(3)}(-z_0)}{3!} + \frac{(z+z_0)}{4!}q^{(4)}(-z_0) + \cdots\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to -z_0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{p(z)}{\frac{q^{(3)}(-z_0)}{3!} + \frac{(z+z_0)}{4!}q^{(4)}(-z_0) + \cdots}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to -z_0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{p(z)}{\frac{q^{(3)}(-z_0)}{3\times2\times1} + \frac{(z+z_0)}{4\times3\times2\times1}q^{(4)}(-z_0) + \cdots}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\times 3\times 2\lim_{z\to -z_0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{p(z)}{q^{(3)}(-z_0) + \frac{(z+z_0)}{4}q^{(4)}(-z_0) + \cdots}\right]$$

$$= 3\lim_{z\to -z_0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{p(z)}{q^{(3)}(-z_0) + \frac{(z+z_0)}{4}q^{(4)}(-z_0) + \cdots}\right] \qquad \ldots\ldots(3.1.26)$$

Misalkan,

$$u(z) = q^{(3)}(-z_0) + \frac{(z+z_0)}{4}q^{(4)}(-z_0) + \cdots$$

maka

$$u'(z) = \frac{1}{4}q^{(4)}(-z_0) + \frac{2}{20}(z+z_0)q^{(5)}(-z_0) + \cdots$$

dan

$$u''(z) = \frac{2}{20}q^{(5)}(-z_0) + \frac{6}{120}(z+z_0)q^{(6)}(-z_0) + \cdots$$

sehingga dari persamaan (3.1.26) $Res[f,-z_0]$ dapat ditulis,

$$Res[f,-z_0] = 3\lim_{z\to -z_0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{p(z)}{u(z)}\right]$$

$$= 3\lim_{z\to -z_0}\frac{d}{dz}\left(\frac{d}{dz}\left[\frac{p(z)}{u(z)}\right]\right)$$

$$= 3\lim_{z\to -z_0}\frac{d}{dz}\left(\frac{p'(z)u(z)-u'(z)p(z)}{\left(u(z)\right)^2}\right)$$

$$= 3\lim_{z\to -z_0}\frac{d}{dz}\left(\frac{p'(z)}{u(z)} - \frac{u'(z)p(z)}{\left(u(z)\right)^2}\right)$$

$$= 3\lim_{z\to -z_0}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{p'(z)}{u(z)}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{u'(z)p(z)}{\left(u(z)\right)^2}\right)\right]$$

$$= 3\lim_{z\to -z_0}\left[\left(\frac{p''(z)u(z)-p'(z)u'(z)}{\left(u(z)\right)^2}\right) - \right.$$

$$\left.\left(\frac{\left(u''(z)p(z)+u'(z)p'(z)\right)\left(\left(u(z)\right)^2\right)-\left(2u(z)u'(z)\right)\left(u'(z)p(z)\right)}{\left(u(z)\right)^4}\right)\right]$$

$$= 3\lim_{z\to -z_0}\left[\left(\frac{p''(z)u(z)-p'(z)u'(z)}{\left(u(z)\right)^2}\right) - \right.$$

$$\left.\left(\frac{u''(z)p(z)+u'(z)p'(z)}{\left(u(z)\right)^2} - \frac{2\left(u'(z)\right)^2p(z)}{\left(u(z)\right)^3}\right)\right]$$

$$= 3\left[\lim_{z\to -z_0}\left(\frac{p''(z)u(z)-p'(z)u'(z)}{\left(u(z)\right)^2}\right) - \right.$$

$$\lim_{z\to -z_0}\left(\frac{u''(z)p(z)+u'(z)p'(z)}{(u(z))^2}\right)+\lim_{z\to -z_0}\left(\frac{2(u'(z))^2 p(z)}{(u(z))^3}\right)\Bigg]$$

$$= 3\left[\left(\frac{\lim_{z\to -z_0} p''(z)\cdot\lim_{z\to -z_0} u(z)-\lim_{z\to -z_0} p'(z)\cdot\lim_{z\to -z_0} u'(z)}{\lim_{z\to -z_0}(u(z))^2}\right)\right.$$

$$-\left(\frac{\lim_{z\to -z_0} u''(z)\cdot\lim_{z\to -z_0} p(z)+\lim_{z\to -z_0} u'(z)\cdot\lim_{z\to -z_0} p'(z)}{\lim_{z\to -z_0}(u(z))^2}\right)$$

$$\left.+\left(\frac{2\cdot\lim_{z\to -z_0}(u'(z))^2 .\lim_{z\to -z_0} p(z)}{\lim_{z\to -z_0}(u(z))^3}\right)\right] \quad \ldots..(3.1.27)$$

Perhatikan bahwa,

$\lim_{z\to -z_0} p(z) = p(-z_0)$

$\lim_{z\to -z_0} p'(z) = p'(-z_0) = 0$

$\lim_{z\to -z_0} p''(z) = p''(-z_0) = 0$

$$\lim_{z\to -z_0} u(z) = \lim_{z\to -z_0}\left(q^{(3)}(-z_0)+\frac{(z+z_0)}{4}q^{(4)}(-z_0)+\cdots\right)$$

$$= q^{(3)}(-z_0)$$

$$\lim_{z\to -z_0} u'(z) = \lim_{z\to -z_0}\left(\frac{1}{4}q^{(4)}(-z_0)+\frac{2}{20}(z+z_0)q^{(5)}(-z_0)+\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{4}q^{(4)}(-z_0)$$

$$\lim_{z\to -z_0} u''(z) = \lim_{z\to -z_0}\left(\frac{2}{20}q^{(5)}(-z_0)+\frac{6}{120}(z+z_0)q^{(6)}(-z_0)+\cdots\right)$$

$$= \frac{2}{20}q^{(5)}(-z_0)$$

Maka dari persamaan (3.1.27) $Res[f,-z_0]$ dapat di tulis,

$$Res[f,-z_0] = 3\left[\left(\frac{0\cdot q^{(3)}(-z_0) - 0\cdot\frac{1}{4}q^{(4)}(-z_0)}{\left(q^{(3)}(z_0)\right)^2}\right) - \left(\frac{\frac{2}{20}q^{(5)}(-z_0)\cdot p(-z_0) + \frac{1}{4}q^{(4)}(-z_0)\cdot 0}{\left(q^{(3)}(-z_0)\right)^2}\right) + \right.$$

$$\left.\left(\frac{2\cdot\left(\frac{1}{4}q^{(4)}(-z_0)\right)^2\cdot p(-z_0)}{\left(q^{(3)}(-z_0)\right)^3}\right)\right]$$

$$= 3\left[-\frac{\frac{1}{10}q^{(5)}(-z_0)p(z_0)}{\left(q^{(3)}(-z_0)\right)^2} + \frac{2\cdot\frac{1}{16}\left(q^{(4)}(-z_0)\right)^2 p(-z_0)}{\left(q^{(3)}(-z_0)\right)^3}\right]$$

karena $q^{(5)}(-z_0) = -q^{(5)}(z_0)$ dan $q^{(3)}(-z_0) = -q^{(3)}(z_0)$ sehingga

$$Res[f,-z_0] = 3\left[-\frac{1}{10}\times\frac{-q^{(5)}(z_0)p(z_0)}{\left(-q^{(3)}(z_0)\right)^2} + \frac{1}{8}\times\frac{\left(q^{(4)}(z_0)\right)^2 p(-z_0)}{\left(-q^{(3)}(z_0)\right)^3}\right]$$

karena $p(z)$ fungsi konstan maka $p(-z_0) = p(z)$ dan $p(z_0) = p(z)$ sehingga

$$Res[f,-z_0] = 3\left[-\frac{1}{10}\times -\frac{q^{(5)}(z_0)p(z)}{\left(q^{(3)}(z_0)\right)^2} + \frac{1}{8}\times -\frac{\left(q^{(4)}(z_0)\right)^2 p(z)}{\left(q^{(3)}(z_0)\right)^3}\right]$$

$$= -3\left[-\frac{1}{10}\times\frac{q^{(5)}(z_0)p(z)}{\left(q^{(3)}(z_0)\right)^2} + \frac{1}{8}\times\frac{\left(q^{(4)}(z_0)\right)^2 p(z)}{\left(q^{(3)}(z_0)\right)^3}\right]$$

Maka residu di kutub $-z_0$ pada orde $m = 3$ adalah

$$Res[f,-z_0] = -3\left[-\frac{1}{10}\times\frac{q^{(5)}(z_0)p(z)}{\left(q^{(3)}(z_0)\right)^2} + \frac{1}{8}\times\frac{\left(q^{(4)}(z_0)\right)^2 p(z)}{\left(q^{(3)}(z_0)\right)^3}\right] \quad \ldots\ldots (3.1.28)$$

Dari persamaan (3.1.23) dan (3.1.28) dapat ditunjukkan bahwa,

$$Res[f,z_0] = 3\left[-\frac{1}{10}\times\frac{p(z)q^{(5)}(z_0)}{\left(q^{(3)}(z_0)\right)^2} + \frac{1}{8}\times\frac{\left(q^{(4)}(z_0)\right)^2 p(z)}{\left(q^{(3)}(z_0)\right)^3}\right]$$

$$= -\left(-3\left[-\frac{1}{10}\times\frac{q^{(5)}(z_0)p(z)}{\left(q^{(3)}(z_0)\right)^2} + \frac{1}{8}\times\frac{\left(q^{(4)}(z_0)\right)^2 p(z)}{\left(q^{(3)}(z_0)\right)^3}\right]\right)$$

$= -Res[f, -z_0]$

Dengan demikian,

$$Res[f, -z_0] = \overline{Res[f, z_0]}$$

Berdasarkan kasus 1, kasus 2 dan kasus 3 maka dapat disimpulkan bahwa,

$$Res[f, -z_0] = \overline{Res[f, z_0]}$$

■

Teorema 3.1.2 [1]

Misal $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ analitik di dalam dan pada kurva tertutup sederhana C kecuali di $(z = \pm z_i, i = 1,2,3, \dots)$, jika f mempunyai kutub pada orde $(m > 0)$ dimana $p(z)$ konstan maka,

$$\sum_{i=1}^{\infty} Res[f, -z_i] = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{Res[f, z_i]}.$$

Bukti :

Berdasarkan teorema 3.1.1, jika $(z = \pm z_i)$ adalah sebuah kutub pada orde sederhana $(m = 1)$ maka,

$$\left.\begin{array}{c} Res[f, -z_1] = \overline{Res[f, z_1]} \\ Res[f, -z_2] = \overline{Res[f, z_2]} \\ Res[f, -z_3] = \overline{Res[f, z_3]} \\ \vdots \\ Res[f, -z_n] = \overline{Res[f, z_n]} \\ \vdots \end{array}\right\} \quad \dots\dots (3.1.29)$$

Dengan menjumlahkan persamaan (3.1.29) diperoleh,

$Res[f,-z_1] + Res[f,-z_2] + Res[f,-z_3] + \cdots + Res[f,-z_n] + \cdots = \overline{Res[f,z_1]} + \overline{Res[f,z_2]} + \overline{Res[f,z_3]} + \cdots + \overline{Res[f,z_n]} + \cdots$

sehingga,

$$\sum_{i=1}^{\infty} Res[f,-z_i] = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{Res[f,z_i]}$$

■

Teorema 3.1.3 [1]

Misal $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ adalah fungsi analitik dalam dan pada kurva tertutup sederhana C kecuali pada $(z = \pm z_i\ ; i = 1,2,3, \ldots)$, jika f mempunyai kutub pada orde $(m > 0)$ dimana $p(z)$ konstan, maka

$$\oint_c \frac{p(z)}{q(z)} dz = 0\,.$$

Bukti :

Perhatikan bahwa,

$$\sum_{i=1}^{\infty} Res[f,\pm z_i] = \sum_{i=1}^{\infty} Res[f,-z_i] + \sum_{i=1}^{\infty} Res[f,z_i]$$

dari teorema 3.1.2 diperoleh,

$$\sum_{i=1}^{\infty} Res[f,-z_i] = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{Res[f,z_i]} = -\sum_{i=1}^{\infty} Res[f,z_i]$$

Sehingga,

$$\sum_{i=1}^{\infty} Res[f, \pm z_i] = -\sum_{i=1}^{\infty} Res[f, z_i] + \sum_{i=1}^{\infty} Res[f, z_i]$$

$$= 0$$

Berdasarkan teorema 2.5.6, untuk setiap $m > 0$,

$$\oint_c \frac{p(z)}{q(z)} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{\infty} Res[f, \pm z_i]$$

Karena

$$\sum_{i=1}^{\infty} Res[f, \pm z_i] = 0$$

Maka diperoleh :

$$\oint_c \frac{p(z)}{q(z)} dz = 2\pi i(0)$$

$$\oint_c \frac{p(z)}{q(z)} dz = 0$$

■

3.2 Penggunaan Teorema – teorema untuk Beberapa Kasus yang Relevan

Contoh 3.2.1

Tentukanlah

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{(z^2-4)^2(z^2-1)^3} dz$$

dimana k konstan.

Solusi :

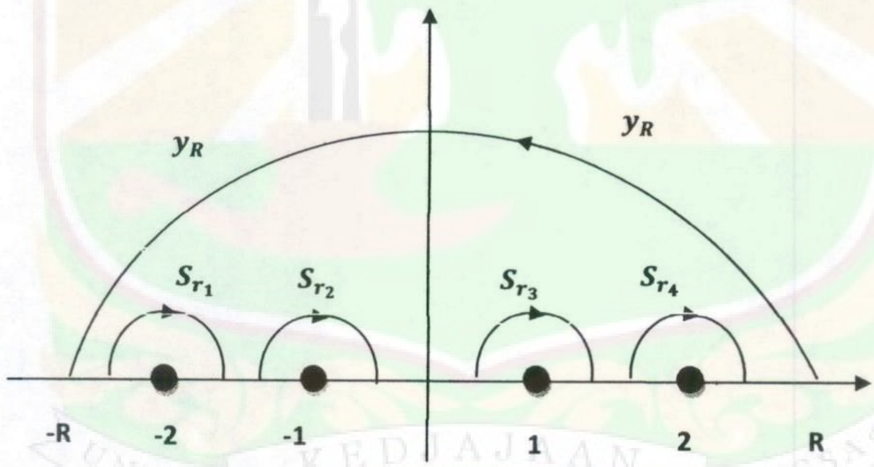
Akan ditentukan integral di atas,

dengan menggunakan *Cauchy principal Value* maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{(z^2-4)^2(z^2-1)^3}\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{k}{(z^2-4)^2(z^2-1)^3}\,dz$$

Misal $f(z) = \frac{k}{(z^2-4)^2(z^2-1)^3}$, dan $f(z)$ mempunyai 4 kutub yaitu $z = \pm 1$ adalah kutub pada orde $m = 3$ dan $z = \pm 2$ adalah kutub pada orde $m = 2$.

Selanjutnya perhatikan ilustrasi berikut,



Gambar 3.2.1 Kutub-Kutub Berbeda dengan Setengah Lingkaran yang Berbeda dan Radius yang Berbeda untuk $z = \pm 1$ dan $z = \pm 2$

Keterangan gambar :

$\gamma_R =$ adalah batas setengah lingkaran dari radius R dalam interval $(-R, R)$

$S_{r1} =$ adalah batas setengah lingkaran dari radius r_1 dalam interval $(-2 - r_1, -2 + r_1)$

$S_{r2} =$ adalah batas setengah lingkaran dari radius r_2 dalam interval $(-1 - r_2, -1 + r_2)$

$S_{r3} =$ adalah batas setengah lingkaran dari radius r_3 dalam interval $(1 - r_3, 1 + r_3)$

$S_{r4} =$ adalah batas setengah lingkaran dari radius r_4 dalam interval $(2 - r_4, 2 + r_4)$

dimana $R \to \infty$ dan $r_i \to 0, I = 1,2,3,4$.

Pada gambar 3.2.1,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(z)\, dz = \lim_{r_i\to 0} \left(\int_{S_{r_1}} f(z)dz + \int_{S_{r_2}} f(z)\, dz + \int_{S_{r_3}} f(z)\, dz + \int_{S_{r_4}} f(z)\, dz + \int_{\gamma_R} f(z)\, dz \right) ; i = 1,2,3,4$$

dimana :

$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$ karena $R \to \infty$

$\int_{S_{r_1}} f(z)\, dz = \pi i Res[f, -2]$

$\int_{S_{r_2}} f(z)\, dz = \pi i Res[f, -1]$

$\int_{S_{r_3}} f(z)\, dz = \pi i Res[f, 1]$

$\int_{S_{r_4}} f(z)dz = \pi i Res[f, 2]$

Misalkan fungsi $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ dengan $p(z) = k$ dan

$q(z) = (z^2 - 4)^2(z^2 - 1)^3$ maka diperoleh,

$q^{(2)}(2) = 864$

$q^{(3)}(2) = 11664$

Berdasarkan persamaan (3.1.13) maka residu dari fungsi $f(z)$ di kutub $z = 2$ pada orde $m = 2$ adalah

$$Res[f, 2] = -\frac{2}{3} \times \left[\frac{q^{(3)}(2)p(2)}{(q''(2))^2}\right]$$

$$= -\frac{2}{3} \times \left[\frac{11664k}{(864)^2}\right]$$

$$= -\frac{2}{3} \times \left[\frac{11664k}{746496}\right]$$

$$= -\frac{1}{96}k$$

Karena $Res[f, -2] = \overline{Res[f, 2]}$ maka residu dari fungsi $f(z)$ di kutub $z = -2$ pada orde $m = 2$ adalah

$$Res[f, -2] = \frac{1}{96}k$$

Misalkan fungsi $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ dengan $p(z) = k$ dan

$q(z) = (z^2 - 4)^2(z^2 - 1)^3$ maka diperoleh,

$q^{(3)}(1) = 432$

$q^{(4)}(1) = 288$

$q^{(5)}(1) = -12720$

Berdasarkan persamaan (3.1.23) maka residu dari fungsi $f(z)$ di kutub $z = 1$ pada orde $m = 3$ adalah

$$Res[f,1] = 3\left[-\frac{1}{10} \times \frac{p(1)q^{(5)}(1)}{\left(q^{(3)}(1)\right)^2} + \frac{1}{8} \times \frac{\left(q^{(4)}(1)\right)^2 p(1)}{\left(q^{(3)}(1)\right)^3}\right]$$

$$= 3\left[-\frac{1}{10} \times \frac{k\cdot(-12720)}{(432)^2} + \frac{1}{8} \times \frac{(288)^2\cdot k}{(432)^3}\right]$$

$$= 3\left[-\frac{1}{10} \times \frac{(-12720k)}{186624} + \frac{1}{8} \times \frac{82944}{80621568}\right]$$

$$= 3\left[-1 \times (-146{,}72k) + \frac{1}{8} \times \frac{1}{972}\right]$$

$$= 3[146{,}72k + 0{,}0001286]$$

$$= 440{,}16k + 0{,}0003858$$

Karena $Res[f,-1] = \overline{Res[f,1]}$ maka residu dari fungsi $f(z)$ di kutub $z = -1$ pada orde $m = 3$ adalah

$$Res[f,-1] = -440{,}16k - 0{,}0003858$$

Dengan demikian,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(z)\,dz = \lim_{r_i\to 0}\left(\int_{S_{r_1}} f(z)\,dz + \int_{S_{r_2}} f(z)dz + \int_{S_{r_3}} f(z)dz + \int_{S_{r_4}} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right);\ i = 1,2,3,4$$

$$= \lim_{r_i\to 0}(\pi i Res[f,-2] + \pi i Res[f,-1] + \pi i Res[f,1] + \pi i Res[f,2] + 0)$$

$$= \lim_{r_i\to 0}(Res[f,-2] + Res[f,-1] + Res[f,1] + Res[f,2])\,\pi i$$

$$= \lim_{r_i \to 0} \left(\frac{1}{96} k + (-440{,}16k - 0{,}0003858) + \right.$$

$$\left. 440{,}16k + 0{,}0003858 + \left(-\frac{1}{96} k \right) \right) \pi i$$

$$= \lim_{r_i \to 0} (0)\, \pi i$$

$$= 0$$

Sehingga diperoleh,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{(z^2-4)^2(z^2-1)^3} dz = 0$$

Contoh 2

Tentukanlah

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{\left(\cos \frac{\pi}{2} z\right)^3} dz$$

dimana k konstan.

Solusi :

Akan ditentukan integral di atas,

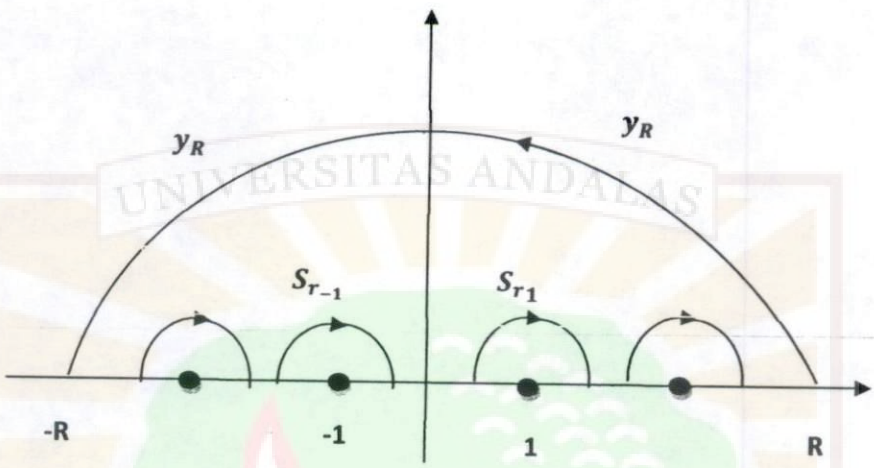
dengan menggunakan *Cauchy principal value* maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{\left(\cos \frac{\pi}{2} z\right)^3} dz = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{k}{\left(\cos \frac{\pi}{2} z\right)^3} dz$$

Misal $f(z) = \frac{k}{\left(\cos \frac{\pi}{2} z\right)}$, dan $f(z)$ mempunyai kutub tak hingga yaitu

$z = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$ pada orde $m = 3$.

Selanjutnya perhatikan ilustrasi berikut,



Gambar 3.2.2 Kutub-Kutub Berbeda dengan Setengah Lingkaran yang Berbeda dan Radius yang Berbeda untuk Himpunan $(z = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots)$

Keterangan Gambar :

$\gamma_R =$ adalah batas setengah lingkaran dari radius R dalam interval $(-R, R)$

$S_{r_1} =$ adalah batas setengah lingkaran dari radius r_1 dalam interval $(1 - r_1, 1 + r_1)$

$S_{r_{-1}} =$ adalah batas setengah lingkaran dari radius r_{-1} dalam interval $(-1 - r_{-1}, -1 + r_{-1})$

.

.

.

$S_{r_n} =$ adalah batas setengah lingkaran dari radius r_n dalam interval $(\pm n - r_1, \pm n + r_1)$ dimana n bilangan ganjil, $R \to \infty$

Pada gambar 3.2.2,

$$\int_{-R}^{R} f(z)dz = \int_{S_{r_1}} f(z)\,dz + \int_{S_{r_{-1}}} f(z)dz + \cdots + \int_{S_{r_n}} f(z)dz + \cdots$$

dimana :

$$\int_{S_{r_1}} f(z)\,dz = \pi i Res[f, 1]$$

$$\int_{S_{r_{-1}}} f(z)\,dz = \pi i Res[f, -1]$$

$$\int_{S_{r_3}} f(z)dz = \pi i Res[f, 3]$$

$$\int_{S_{r_{-3}}} f(z)dz = \pi i Res[f, -3]$$

.

.

.

$$\int_{S_{r_{\pm n}}} f(z)dz = \pi i Res[f, \pm n]\,; n = 5, 7$$

Misalkan fungsi $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, dengan $p(z) = k$ dan

$q(z) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right)^3$ maka diperoleh,

$$q^{(3)}(1) = -\frac{3}{4}\pi^3$$

$$q^{(4)}(1) = 0$$

$$q^{(5)}(1) = \frac{15}{8}\pi^5$$

Berdasarkan persamaan (3.1.23) maka residu dari fungsi $f(z)$ di kutub $z = 1$ pada orde $m = 3$ adalah

$$Res[f, 1] = 3\left[-\frac{1}{10} \times \frac{p(z)q^{(5)}(1)}{\left(q^{(3)}(1)\right)^2} + \frac{1}{8} \times \frac{\left(q^{(4)}(1)\right)^2 p(z)}{\left(q^{(3)}(1)\right)^3}\right]$$

$$= 3\left[-\frac{1}{10}\times\frac{k\times\left(\frac{15}{8}\pi^5\right)}{\left(-\frac{3}{4}\pi^3\right)^2}+\frac{1}{8}\times\frac{(0)^2\cdot k}{\left(\frac{3}{4}\pi^3\right)^3}\right]$$

$$= 3\left[-\frac{1}{10}\times\frac{k\times\left(\frac{15}{8}\pi^5\right)}{\left(\frac{9}{16}\pi^6\right)}\right]$$

$$= 3\left[-\frac{1}{10}\times\frac{10k}{3\pi}\right]$$

$$= 3\left[-\frac{1k}{3\pi}\right]$$

$$= -\frac{k}{\pi}$$

Karena $Res[f,-1] = \overline{Res[f,1]}$ maka residu dari fungsi $f(z)$ di kutub $z = -1$ pada orde $m = 3$ adalah

$Res[f,-1] = \frac{k}{\pi}$

Misalkan fungsi $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, dengan $p(z) = k$ dan

$q(z) = \left(cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right)^3$ maka

$q^{(3)}(3) = \frac{3}{4}\pi^3$

$q^{(4)}(3) = 0$

$q^{(5)}(3) = -\frac{15}{8}\pi^5$

Berdasarkan persamaan (3.1.23) maka residu dari fungsi $f(z)$ di kutub $z = 3$ pada orde $m = 3$ adalah

$$Res[f,3] = 3\left[-\frac{1}{10}\times\frac{p(z)q^{(5)}(3)}{\left(q^{(3)}(3)\right)^2}+\frac{1}{8}\times\frac{\left(q^{(4)}(3)\right)^2 p(z)}{\left(q^{(3)}(3)\right)^3}\right]$$

$$= 3\left[-\frac{1}{10}\times\frac{k\cdot\left(-\frac{15}{8}\right)}{\left(\frac{3}{4}\pi^3\right)^2}+\frac{1}{8}\times\frac{(0)^2\cdot k}{\left(\frac{3}{4}\pi^3\right)^3}\right]$$

$$= 3\left[-\frac{1}{10} \times \frac{-\frac{15}{8}k}{\frac{9}{16}\pi^6}\right]$$

$$= 3\left[-\frac{1}{10} \times \left(-\frac{10k}{3\pi}\right)\right]$$

$$= 3\left[\frac{k}{3\pi}\right]$$

$$= \frac{k}{\pi}$$

Karena $Res[f,-3] = \overline{Res[f,3]}$ maka residu dari fungsi $f(z)$ di kutub $z = -3$ pada orde $m = 3$ adalah

$Res[f,-3] = -\frac{k}{\pi}$

.

.

.

Maka secara umum di peroleh,

$$Res[f,n] = (-1)^i \times \frac{k}{\pi}$$

dimana, $n = 1,3,5,\ldots$ (n adalah kutub pada orde $m = 3$) dan $i = 1,2,3,\ldots$

Berdasarkan Teorema 3.1.1 maka

$$Res[f,-n] = \overline{Res[f,n]} = (-1)^{i+1} \times \frac{k}{\pi}$$

Dengan demikian,

$$\int_{-R}^{R} \frac{k}{\left(cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right)^3} dz = \sum_{n=2i-1}^{\infty} (Res[f,n] + Res[f,-n]) \quad , i = 1,2,3,\ldots$$

BAB IV

KESIMPULAN

4.1 Kesimpulan

Dari hasil pembahasan, dapat diperoleh bagaimana cara menentukan integral dari sebuah fungsi kompleks pada kurva tertutup dimana pembilang fungsi adalah sebuah konstanta. Penghitungan integral dilakukan dengan menggunakan teorema – teorema residu. Dengan menggunakan teorema – teorema tersebut, dapat di peroleh bahwa integral dari sebuah fungsi kompleks pada kurva tertutup dengan pembilang nya sebuah konstanta, bernilai nol.

4.2 Saran

Dalam penulisan ini, penulis hanya membahas untuk fungsi yang memiliki orde $m \leq 3$. Oleh karena itu, pada penulisan selanjutnya penulis menyarankan untuk mendapatkan rumus yang lebih umum dalam menentukan residu untuk fungsi yang memiliki orde $m > 3$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Al-Bayati, Abbas Y and Sasan A. Al-Shwani. 2009. Residues of Complex Functions with Definite and Infinite Poles on *X*-axis. *Journal of Mathematics and Statistics*. **5**. (3):152-158

[2] Bartle, Robert G and Donald R. Sherbert. 1994. *Introduction to Real Analysis Second Edition*. Singapore.

[3] Churchil, Ruel V and James Ward Brown. 1996. *Complex Variables and Applications Fifth Edition*. Singapore.

[4] Kreyszig, Erwin. 1993. Advanced Engineering Mathematics Seventh Edition. Ohio State University. Columbus.

[5] Paliouras, John D. 1975. *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*. Erlangga. Jakarta.

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis bernama Amelia Sufitri, dilahirkan di Padang pada tanggal 19 Mei 1988, anak pertama dari dua bersaudara, buah hati dari pasangan Supriadin dan Murniati. Penulis menamatkan pendidikan dasar di SDN 05 Padang Pasir pada tahun 2000 kemudian melanjutkan ke SLTPN 1 Padang dan menamatkannya pada tahun 2003. Penulis melanjutkan pendidikan ke SMAN 10 Padang dan selesai pada tahun 2006. Di tahun yang sama penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur SPMB.

Selama menjadi mahasiswa di jurusan Matematika FMIPA UNAND, penulis pernah menjadi pengurus Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) periode 2008/2009 selain itu penulis aktif dalam berbagai kegiatan yang diadakan oleh Forum Study Islam.