# RUANG NULL DIPERUMUM

**SKRIPSI**

**AGUSTIA WIJAYANTI**
**07134007**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS ANDALAS**
**PADANG 2011**

# ABSTRAK

Misal $V,\ W$ ruang vektor dan $T: V \to W$ adalah transformasi linier, maka ruang null dari $T$ adalah $ker\,(T) = \{\vec{v} \in V | T(\vec{v}) = \vec{0}\}$ dan jika $T: V \to V$ adalah transformasi linier, maka ruang null yang diperumum dari $T$ adalah $V_0(T) = \{\vec{v} \in V | T^e(\vec{v}) = \vec{0}$ untuk suatu bilangan bulat positif $e$ (tergantung $\vec{v}$)$\}$.

Pada ruang null berlaku $ker(T) \oplus im(T) = V$ dan bila $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ adalah akar karakteristik yang berbeda dari transformasi linier $T$ yang memetakan $V$ ke dirinya sendiri, maka $V = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$ untuk suatu $E_{\lambda_i}$ ruang karakteristik.

Pada skripsi ini, ditunjukkan kedua sifat diatas analog dengan sifat yang berlaku pada ruang null diperumum, yaitu $W = W_0(T) \oplus W_*(T)$ dan bila $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ adalah akar karakteristik yang berbeda, maka $V = V_{\lambda_1}(T) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_p}(T)$ dengan $V_{\lambda_i}$ ruang karakteristik yang diperumum.

Kata kunci : *ruang vektor, ruang null, transformasi linier, jumlah langsung, ruang karakteristik.*

**DAFTAR ISI**

**Halaman**

# BAB 1

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Misalkan $A$ matriks $m \times n$ dan $F^n$ adalah ruang vektor atas lapangan $F$ berdimensi $n$. Subruang dari $F^n$ untuk semua solusi $A\vec{x} = \vec{0}$ adalah ruang null dari $A$, biasa ditulis $Ker\ (A)$ dan subruang dari $F^m$ yang dibangun oleh kolom-kolom dari $A$ disebut ruang kolom dari $A$ atau ruang peta. Pada transformasi linier juga dikenal istilah ruang null dan ruang peta. Misal $V$, $W$ ruang vektor dan $T: V \to W$ adalah transformasi linier, maka ruang null atau $Ker(T)$ didefinisikan sebagai

$$Ker\ (T) = \{\vec{v} \in V | T(\vec{v}) = \vec{0}\}.$$

Sedangkan ruang peta atau biasa disebut $Im(T)$ didefinisikan sebagai

$$Im(T) = \{T(\vec{v}) | \vec{v} \in V\}.$$

Jika $V$ ruang vektor berdimensi hingga dan $T: V \to V$ adalah transformasi linier serta $T = T \circ T$, maka berlaku

$$Ker(T) \oplus Im(T) = V \quad \text{.................................(1.1.1)}$$

Misal $\lambda_i$ adalah akar karakteristik yang berbeda dari transformasi linier $T$ yang memetakan $V$ ke dirinya sendiri, dengan $i = 1,2, \dots, k$, maka subruang dari $V$ dari semua vektor karakteristik yang berhubungan dengan akar karakteristik $\lambda_i$ dan vektor nol disebut ruang karakteristik yang berhubungan dengan akar karakteristik $\lambda_i$ ditulis $E_{\lambda_i}$ dan didefinisikan sebagai

$$E_{\lambda_i} = \{\vec{v} \in V \big| (T - \lambda_i I)(\vec{v}) = \vec{0}\}$$

dan berlaku

$$V = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k} \text{..............................(1.1.2)}$$

Misalkan $L(V)$ adalah himpunan semua transformasi linier pada $V$ atas $F$. Bila $T \in L(V)$ maka subruang $V_0(T) = \{\vec{v} \in V | T^e(\vec{v}) = \vec{0}$ untuk suatu bilangan bulat positif $e$ (tergantung $\vec{v}$)$\}$ disebut ruang null yang diperumum, dalam hal ini

$T^2 = T \circ T$ , $T^3 = T \circ T \circ T$ , ... , $T^e = T \circ T \circ \dots \circ T$.[4]

Misalkan $T \in L(V)$, $\lambda \in F$ adalah akar karakteristik, maka ruang karakteristik yang diperumum dari $T$ di $V$ pada $\lambda$ adalah

$V_\lambda(T) = \{\vec{w} \in V | (T - \lambda I)^e(\vec{w}) = \vec{0}$ untuk suatu bilangan bulat positif $e$ (tergantung $\vec{w}$)$\}$. [4]

Konsep ruang null yang diperumum banyak digunakan dalam matematika, diantaranya pada Bentuk Kanonik Jordan, Polinomial Minimal, dan Bentuk Kanonik Rasional.

## 1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka permasalahan yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah bagaimana sifat jumlah langsung pada ruang null diperumum dan ruang karakteristik diperumum.

## 1.3 Pembatasan Masalah

Pada latar belakang, bila $V$ ruang vektor atas lapangan $F$ dan $T \in L(V)$ serta terdapat $\lambda$ yaitu akar karakteristik dari $T \in L(V)$, maka ruang null diperumum dari $V$ adalah $V_0(T)$ dan ruang karakteristik diperumum nya adalah $V_\lambda(T)$. Selanjutnya bila $W$ subruang dari $V$ dan $W$ dipetakan ke dirinya sendiri oleh $T$ maka ruang null diperumum dari $W$ adalah $W_0(T)$ dan subruang karakteristik yang diperumum dari $W$ adalah $W_\lambda(T)$. Pada tugas akhir ini sifat jumlah langsung dari ruang null diperumum dan ruang karakteristik diperumum dibatasi untuk subruang $W$ yang berdimensi hingga.

### 1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penulisan tugas akhir ini adalah untuk menjelaskan sifat jumlah langsung dari ruang null diperumum dan ruang karakteristik diperumum.

### 1.5 Sistematika Penulisan

Tugas Akhir ini terdiri dari 4 bab dengan perincian sebagai berikut: Bab I Pendahuluan, yang berisi: latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan serta sistematika penulisan. Bab II Landasan Teori, memuat materi atau teori yang menunjang pembahasan materi yaitu : pemetaan, matriks, ruang vektor, transformasi linier, dan komposisi transformasi linier terhadap diri sendiri. Bab III Pembahasan, menjelaskan ruang null diperumum yang meliputi definisi dan teorema yang berkaitan dengan ruang null diperumum. Kesimpulan dari hasil yang diperoleh pada pembahasan dapat dilihat pada Bab IV.

# BAB II

# LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diuraikan beberapa teori-teori pendukung yang akan digunakan pada Bab III Ruang Null Diperumum, yaitu pemetaan, matriks dan sistem persamaan linier, ruang vektor, transformasi linier, akar dan vektor karakteristik serta komposisi transformasi linier terhadap diri sendiri.

## 2.1 Pemetaan

**Definisi 2.1.1[7]**

Suatu pemetaan $\tau$ adalah suatu aturan korespondensi (padanan) yang menghubungkan setiap obyek $x$ dalam satu himpunan, yang disebut daerah asal, dengan sebuah nilai tunggal $\tau(x)$ dari suatu himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil pemetaan.

**Definisi 2.1.2[5]**

Pemetaan $\tau$ dari $S$ ke $T$ dikatakan pemetaan pada jika diberikan $t \in T$, maka terdapat $s \in S$ sehingga $\tau(s) = t$.

**Definisi 2.1.3[5]**

Pemetaan $\tau$ dari $S$ ke $T$ dikatakan pemetaan satu-satu jika $s_1, s_2 \in S$ dengan $s_1 \neq s_2$ maka $\tau(s_1) \neq \tau(s_2)$, atau pemetaan $\tau$ dari $S$ ke $T$ dikatakan pemetaan satu-satu jika $s_1, s_2 \in S$ dengan $\tau(s_1) = \tau(s_2)$ maka $s_1 = s_2$.

**Lema 2.1.4[5]**

Misal $\sigma: S \to T$ dan $\tau: T \to U$, maka :

1) $\tau \circ \sigma$ adalah pemetaan pada jika $\tau$ dan $\sigma$ adalah pemetaan pada.

2) $\tau \circ \sigma$ adalah pemetaan satu-satu jika $\tau$ dan $\sigma$ adalah pemetaan satu-satu.

Bukti :

1) Misal $\tau$ dan $\sigma$ adalah pemetaan pada, akan ditunjukkan $\tau \circ \sigma$ adalah pemetaan pada.

   Karena $\sigma: S \rightarrow T$ dan $\tau: T \rightarrow U$, maka $\tau \circ \sigma : S \rightarrow U$.

   Ambil $u \in U$, akan dicari $s \in S$ sehingga $(\tau \circ \sigma)(s) = u$.

   Karena $\tau: T \rightarrow U$ adalah pemetaan pada, maka untuk setiap $u \in U$, terdapat $t \in T$ sehingga $u = \tau(t)$. Karena $\sigma: S \rightarrow T$ adalah juga pemetaan pada, maka untuk setiap $t \in T$, terdapat $s \in S$ sehingga $t = \sigma(s)$.

   Jadi terdapat $s \in S$ sehingga $(\tau \circ \sigma)(s) = \tau(\sigma(s)) = \tau(t) = u$.

2) Misalkan $\tau$ dan $\sigma$ adalah pemetaan satu-satu, akan ditunjukkan $\tau \circ \sigma$ adalah pemetaan satu-satu.

   Ambil $s_1 s_2 \in S$ dengan $(\tau \circ \sigma)(s_1) = (\tau \circ \sigma)(s_2)$, akan ditunjukkan $s_1 = s_2$.

   Perhatikan bahwa

$$(\tau \circ \sigma)(s_1) = (\tau \circ \sigma)(s_2),$$

$$\tau(\sigma(s_1)) = \tau(\sigma(s_2)) \quad \text{(karena } \tau \text{ pemetaan satu-satu)}$$

$$\sigma(s_1) = \sigma(s_2) \quad \text{(karena } \sigma \text{ pemetaan satu-satu)}$$

$$s_1 = s_2.$$

   Jadi $\tau \circ \sigma$ adalah satu-satu.

Pada sub bab berikutnya akan di jelaskan mengenai definisi matriks dan matriks segitiga, sistem persamaan linier dan operasi baris elementer serta determinan dari suatu matriks.

## 2.2 Matriks dan Sistem Persamaan Linier

**Definisi 2.2.1[2]**

Matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-

bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks.

**Definisi 2.2.2[6]**

Misal $A$ adalah matriks bujur sangkar. Matriks $A$ dikatakan segitiga atas jika $a_{ij} = 0$ dengan $i > j$. Matriks $A$ dikatakan segitiga bawah jika $a_{ij} = 0$ dengan $i < j$. Matriks $A$ dikatakan diagonal jika $a_{ij} = 0$ dengan $i \neq j$, yaitu ketika matriks $A$ berbentuk segitiga atas dan segitiga bawah.

**Definisi 2.2.3[6]**

Diberikan suatu matriks sebarang, sebuah operasi baris elementer yang berlaku pada matriks tersebut adalah sebagai berikut:

- Mengalikan satu baris tunggal dengan sebuah skalar tak nol.
- Menambahkan kelipatan satu baris kepada baris lainnya.
- Mempertukarkan dua baris.

**Definisi 2.2.4[6]**

Sebuah matriks dikatakan matriks eselon baris jika memenuhi (1), (2), dan (3) berikut. Sebuah matriks eselon baris disebut matriks eselon baris tereduksi jika memenuhi tambahan (4) berikut:

1. Semua baris nol berada dibawah semua baris tak nol.
2. Entri tak nol pertama pada setiap baris tak nol adalah 1. Entri ini disebut entri utama (*leading entry*) dari baris.
3. Entri utama pada setiap baris tak nol yang lebih rendah, berada di kanan entri utama setiap baris diatasnya (jika ada).
4. Entri utama pada setiap baris adalah satu-satunya entri tak nol kolom tersebut.

Metode Eliminasi Gauss Jordan adalah prosedur menyelesaikan sistem persamaan linier dengan mereduksi matriks diperbesar menjadi bentuk eselon baris tereduksi.[2]

**Definisi 2.2.5[2]**

Suatu hasilkali elementer dari suatu matriks $A$ berdimensi $n \times n$ adalah hasilkali dari $n$ entri dari $A$, yang tidak satu pun berasal dari baris atau kolom yang sama.

Suatu hasilkali elementer bertanda dari $A$ adalah hasilkali elementer $a_{1j_1}a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ dikalikan dengan $+1$ atau $-1$. Tanda $+$ digunakan jika $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ adalah permutasi genap dan tanda $-$ digunakan jika $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ adalah permutasi ganjil.

**Definisi 2.2.6[2]**

Misalkan $A$ adalah suatu matriks bujursangkar. Fungsi determinan dinotasikan dengan $det$. $det(A)$ didefinisikan sebagai jumlah dari semua hasilkali elementer bertanda dari $A$. Angka $det(A)$ disebut determinan dari $A$.

**Teorema 2.2.7[2]**

Jika $A$ adalah matriks segitiga $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal) maka $det(A)$ adalah hasilkali dari entri-entri pada diagonal utama matriks tersebut; yaitu $det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$.

Bukti : Lihat [2] hal 98.

Selanjutnya untuk sub bab 2.3, akan dijelaskan mengenai ruang vektor, subruang, kombinasi linier, basis dan dimensi serta jumlah langsung dari suatu ruang vektor.

## 2.3 Ruang Vektor

**Definisi 2.3.1[4]**

Suatu himpunan $V$ disebut ruang vektor atas lapangan $F$ jika pada $V$ berlaku dua operasi, yaitu penjumlahan dan perkalian dengan skalar (bilangan) seperti berikut:

(A) Aturan penjumlahan

1) Jika $\vec{v}, \vec{w} \in V$, maka $\vec{v} + \vec{w} \in V$.

2) $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$ untuk semua $\vec{v}, \vec{w} \in V$ .

3) $\vec{v} + (\vec{w} + \vec{z}) = (\vec{v} + \vec{w}) + \vec{z}$ untuk semua $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ pada $V$.

4) Terdapat sebuah vektor $\vec{0}$ di $V$ sehingga $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ untuk semua $\vec{v} \in V$.

5) Untuk setiap vektor $\vec{v} \in V$ terdapat sebuah vektor $-\vec{v}$ di $V$ sehingga $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$.

(B) Aturan perkalian dengan suatu skalar

6) Jika $k \in F$ dan $\vec{v} \in V$, maka $k\vec{v} \in V$.

7) $k(\vec{v} + \vec{w}) = k\vec{v} + k\vec{w}$ untuk semua $k \in F$ dan $\vec{v}, \vec{w} \in V$ .

8) $(k + l)\vec{v} = k\vec{v} + l\vec{v}$ untuk semua $k, l \in F$ dan $\vec{v} \in V$.

9) $k(l\vec{v}) = (kl)\vec{v}$ untuk semua $k, l \in F$ dan $\vec{v} \in V$.

10) $1\vec{v} = \vec{v}$ untuk semua $\vec{v} \in V$, dimana 1 adalah elemen satuan dari $F$.

**Definisi** 2.3.2[6]

Misal $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ adalah vektor–vektor dan $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ adalah skalar-skalar, maka dikatakan bahwa $\vec{w} = r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + \cdots + r_n\vec{v}_n$ adalah kombinasi linier dari $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$. Himpunan semua kombinasi linier dari $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ disebut *span* dari $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ ditulis $span\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$.

**Definisi 2.3.3[6]**

Suatu subruang $W$ dari ruang vektor $V$ adalah suatu subhimpunan $W \subseteq V$ dengan $\vec{0} \in V$ sehingga :

1) Jika $\vec{v} \in W$ dan $a \in F$ maka $a\vec{v} \in W$.

2) Jika $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in W$ maka $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \in W$.

**Definisi 2.3.4[6]**

Misalkan $W_1$ dan $W_2$ adalah subruang dari ruang vektor $V$, maka $V = W_1 \oplus W_2$ jika

a) $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$,

b) $V = W_1 + W_2$, sehingga untuk setiap $\vec{v} \in V$ dapat ditulis sebagai $\vec{v} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ dimana $\vec{w}_1 \in W_1$ dan $\vec{w}_2 \in W_2$.

$W$ dikatakan sebagai jumlah langsung *(direct sum)* dari $W_1$ dan $W_2$ .

**Definisi 2.3.5[1]**

Ruang vektor $V$ dikatakan jumlah langsung dari subruang $V_1, \dots, V_m$, jika

1. $V = \sum_{i=1}^{m} V_i$,
2. $V_j \cap \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} V_i \right) = \{\vec{0}\}$, untuk semua $j = 1, \dots, m$.

**Definisi 2.3.6[6]**

Suatu kumpulan dari vektor vektor $v_1, v_2, \dots, v_n$ dikatakan bebas linier jika terdapat skalar-skalar $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ dan $r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + \cdots + r_n\vec{v}_n = \vec{0}$ hanya dipenuhi oleh $r_1 = 0, r_2 = 0, \dots, r_n = 0$. Jika $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ tidak bebas linier, maka $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ bergantung linier.

**Definisi 2.3.7[6]**

Himpunan vektor $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ di ruang vektor $V$ dikatakan basis untuk $V$ jika :

1) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ bebas linier.

2) $Span\ \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} = V$.

**Definisi 2.3.9[4]**

Dimensi dari suatu ruang vektor adalah banyaknya unsur-unsur dari sebuah basis untuk ruang vektor tersebut.

**Teorema 2.3.10[2]**

Jika $W$ adalah suatu subruang dari suatu ruang vektor $V$ yang berdimensi hingga, maka $dim(W) \leq dim(V)$. Lebih lanjut, jika $dim(W) = dim(V)$, maka $W = V$.

Bukti: Lihat [2] hal 273.

Misalkan $F^n$ adalah ruang vektor atas lapangan $F$ berdimensi $n$. Pada definisi berikutnya ruang vektor yang digunakan adalah ruang vektor $F^n$.

**Definisi 2.3.11[6]**

Misalkan $A$ matriks $m \times n$, subruang dari $F^n$ yang dibangun oleh baris-baris dari $A$ disebut ruang baris dari $A$. Subruang dari $F^m$ yang dibangun oleh kolom-kolom dari $A$ disebut ruang kolom dari $A$. Subruang dari $F^n$ dari semua solusi $A\vec{x} = \vec{0}$ adalah ruang null dari $A$. Ruang baris dan ruang kolom dari $A$ biasa ditulis $row(A)$ dan $col(A)$, sedangkan ruang null dinotasikan dengan $Ker\ (A)$.

## 2.4 Transformasi linier

**Definisi 2.4.1[6]**

Misalkan $V$ dan $W$ adalah ruang vektor atas lapangan $F$. Transformasi linier yang memetakan $V$ ke $W$ adalah sebuah fungsi $T: V \rightarrow W$ yang memenuhi :

1) Jika $\vec{u}, \vec{v} \in V$, maka $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$.
2) Jika $\vec{v} \in V$ dan $k \in F$, maka $T(k\vec{v}) = kT(\vec{v})$.

**Lema 2.4.2[6]**

Misal $T: V \rightarrow W$ adalah transformasi linier, maka berlaku:

1) $T(\vec{0}) = \vec{0}$.
2) Misal $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$, maka untuk semua skalar $a_1, a_2, \dots, a_n$ berlaku

$$T(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n) = a_1T(\vec{v}_1) + a_2T(\vec{v}_2) + \cdots + a_nT(\vec{v}_n).$$

Bukti : Lihat [6] hal 173.

**Teorema 2.4.3[6]**

Misal $G : F^n \to F^m$ adalah transformasi linier, maka terdapat tunggal matriks $A$ berorde $m \times n$ sehingga $G = T_A$.

Bukti:

Misalkan $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ basis standar untuk $F^n$ dan misalkan $C = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_m\}$ basis standar untuk $F^m$.

Misalkan $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in F^n$ maka $\vec{u} = u_1e_1 + u_2e_2 + \cdots + u_ne_n$ ,

akibatnya $G(\vec{u}) = G(u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + \cdots + u_n\vec{e}_n)$

$$= u_1G(\vec{e}_1) + u_2G(\vec{e}_2) + \cdots + u_nG(\vec{e}_n)$$

$$= \begin{pmatrix} G(\vec{e}_1) & G(\vec{e}_2) & \ldots & G(\vec{e}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4.1)$$

Karena $G(\vec{e}_i) \in F^m$ dan $C$ basis standar untuk $F^m$ maka

$G(\vec{e}_i) = a_{1i}\vec{\varepsilon}_1 + a_{2i}\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + a_{mi}\vec{\varepsilon}_m$ dengan $i = 1,2, \ldots, n$.

Untuk $i = 1$,

$G(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{\varepsilon}_1 + a_{21}\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + a_{m1}\vec{\varepsilon}_m$

$$= a_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{m1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{21} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Untuk $i = 2$,

$$G(\vec{e}_2) = a_{12}\vec{\varepsilon}_1 + a_{22}\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + a_{m2}\vec{\varepsilon}_m$$

$$= \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}.$$

$\vdots$

Untuk $i = n$,

$$G(\vec{e}_n) = a_{1n}\vec{\varepsilon}_1 + a_{2n}\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + a_{mn}\vec{\varepsilon}_m$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Substitusikan setiap persamaan $G(\vec{e}_i)$ dimana $i = 1,2,\dots,n$ kedalam persamaan (2.4.1) sehingga diperoleh

$$G(\vec{u}) = \begin{pmatrix} G(\vec{e}_1) & G(\vec{e}_2) & \dots & G(\vec{e}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \text{.......................................(2.4.2)}$$

Misalkan $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ dan $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, maka (2.4.2) menjadi

$$G(\vec{u}) = A\vec{u}$$
$$= T_A(\vec{u}).$$

$A$ disebut matriks standar dari $G$. Matriks $A$ dapat ditulis menjadi $A = [G]$.

**Teorema 2.4.4[6]**

Misalkan $H : U \to V$ dan $G : V \to W$ adalah transformasi linier.

1) Maka $G \circ H : U \to W$ adalah transformasi linier.
2) Jika $H = T_A : F^m \to F^n$ dan $G = T_B : F^n \to F^s$ dengan $A$ matriks $n \times m$ dan $B$ matriks $s \times n$, maka $G \circ H = T_{BA}$. Oleh karena itu, $[G \circ H] = [G][H]$ dan $T_{BA} = T_B \circ T_A$.

Bukti:

1) Ambil $\vec{u}, \vec{v} \in U$ dan $r \in F$, maka :

   a) $(G \circ H)(\vec{u} + \vec{v}) = G(H(\vec{u} + \vec{v}))$.

   Karena $H, G$ transformasi linier, akibatnya

   $$G(H(\vec{u} + \vec{v})) = G(H(\vec{u}) + H(\vec{v}))$$
   $$= G(H(\vec{u})) + G(H(\vec{v}))$$
   $$= (G \circ H)(\vec{u}) + (G \circ H)(\vec{v}).$$

   b) $(G \circ H)(r\vec{u}) = G(H(r\vec{u})) = G(rH(\vec{u})) = rG(H(\vec{u})) = r\,(G \circ H)(\vec{u})$.

   Dari a) dan b) diperoleh kesimpulan $G \circ H : U \to W$ adalah transformasi linier.

2) Misalkan $H = T_A : F^m \to F^n$. Jika $\vec{u} \in F^m$ maka $H(\vec{u}) = T_A(\vec{u}) = A\vec{u}$ atau $[H] = A$.

   Misalkan $G = T_B : F^n \to F^s$. Jika $\vec{v} \in F^n$ maka $G(\vec{v}) = T_B(\vec{v}) = B\vec{v}$ atau $[G] = B$.

   Untuk $G \circ H : F^m \to F^s$, jika $\vec{u} \in F^m$ maka

   $$(G \circ H)(\vec{u}) = G(H(\vec{u})) = G(A\vec{u}) = B(A\vec{u}) = (BA)(\vec{u}) = T_{BA}(\vec{u}).$$

Jadi untuk setiap $\vec{u} \in F^m$ berlaku $G \circ H = T_{BA}$.

Karena $G \circ H = T_{BA}$, maka $[G \circ H] = BA = [G][H]$.

Karena $G(H(\vec{u})) = T_B(T_A(\vec{u})) = (T_B \circ T_A)(\vec{u})$, maka untuk setiap $\vec{u} \in F^m$ berlaku $T_{BA} = (T_B \circ T_A)$.

**Definisi 2.4.5[6]**

Misalkan $T : V \to W$ transformasi linier, maka

a. *Kernel* dari $T$, ditulis $ker(T)$, didefinisikan sebagai

$$ker(T) = \{\vec{v} \in V | T(\vec{v}) = \vec{0}\}.$$

b. *Image* dari $T$, ditulis $im(T)$, didefinisikan sebagai

$$im(T) = \{T(\vec{v}) | \vec{v} \in V\}.$$

**Definisi 2.4.6[6]**

Misalkan $T = T_A : F^n \to F^m$ adalah transformasi linier dengan $A$ matriks $m \times n$, maka

1) $Ker(T)$ adalah himpunan solusi dari $A\vec{x} = \vec{0}$.

2) $Im(T)$ adalah ruang kolom dari $A$.

**Lema 2.4.7[6]**

Jika $T : V \to W$ transformasi linier, maka $Ker(T)$ adalah subruang dari $V$ dan $Im(T)$ adalah subruang dari $W$.

Bukti: Lihat [6] hal 181.

**Lema 2.4.8[6]**

Misal $V$ ruang vektor berdimensi hingga. Bila $T : V \to V$ adalah transformasi linier dan $T = T \circ T$, maka berlaku

$$Ker(T) \oplus Im(T) = V.$$

Bukti:

Misalkan $V$ ruang vektor dan $T : V \rightarrow V$ adalah transformasi linier, serta berlaku $T = T \circ T$, maka akan ditunjukkan bahwa $Ker(T) \oplus Im(T) = V$.

1. Akan ditunjukkan $Ker(T) + Im(T) = V$.

   a. Akan ditunjukkan $Ker(T) + Im(T) \subset V$.

   Jelas $Ker(T) + Im(T) \subset V$, karena $Ker(T)$ dan $Im(T)$ subruang dari $V$.

   b. Akan ditunjukkan $V \subset Ker(T) + Im(T)$.

   Ambil $\vec{v} \in V$. Karena $T = T \circ T$, maka berlaku

$$T(V) = (T \circ T)(V) = T\big(T(V)\big) = T^2(V).$$

   Karena $T(V) = T^2(V)$, maka $T(\vec{v}) = T^2(\vec{w})$ untuk suatu $\vec{w} \in V$.

   $T(\vec{v}) - T^2(\vec{w}) = \vec{0}$ ( karena $T$ transformasi linier)

   $T(\vec{v} - T(\vec{w})) = \vec{0}$

   sehingga $\vec{v} - T(\vec{w}) \in Ker(T)$.

   Karena $\vec{v} = (\vec{v} - T(\vec{w})) + T(\vec{w})$, maka diperoleh $\vec{v} \in Ker(T) + Im(T)$.

   Jadi $V \subset Ker(T) + Im(T)$.

   Dari a dan b diperoleh kesimpulan bahwa $Ker(T) + Im(T) = V$.

2. Akan ditunjukkan $Ker(T) \cap Im(T) = \{\vec{0}\}$.

   a. Akan ditunjukkan $Ker(T) \cap Im(T) \subset \{\vec{0}\}$.

   Misalkan $\vec{w} \in Ker(T) \cap Im(T)$. Berarti $\vec{w} \in Ker(T)$ dan $\vec{w} \in Im(T)$.

   Karena $\vec{w} \in Ker(T)$ maka $T(\vec{w}) = \vec{0}$. Selanjutnya karena $\vec{w} \in Im(T)$ maka diperoleh $\vec{w} = T(\vec{w}_1)$ untuk suatu $\vec{w}_1 \in V$. Karena $T(\vec{w}) = \vec{0}$ dan $\vec{w} = T(\vec{w}_1)$ maka

   $\vec{0} = T(\vec{w})$

   $\quad = T\big(T(\vec{w}_1)\big)$

$= (T \circ T)(\vec{w}_1)$ (karena $T = T \circ T$ )

$= T\ (\vec{w}_1)$

$= \vec{w}$

sehingga $\vec{w} \in \{\vec{0}\}$.

Akibatnya diperoleh $Ker(T) \cap Im(T) \subset \{\vec{0}\}$.

b. Akan ditunjukkan $\{\vec{0}\} \subset Ker(T) \cap Im(T)$.

Karena $Ker(T)$ dan $Im(T)$ subruang dari $V$ maka terdapat $\vec{0} \in Ker(T)$ dan $\vec{0} \in Im(T)$ sehingga $\vec{0} \in Ker(T) \cap Im(T)$.

Jadi $\{\vec{0}\} \subset Ker(T) \cap Im(T)$.

Dari a dan b diperoleh kesimpulan $Ker(T) \cap Im(T) = \{\vec{0}\}$.

Jadi berdasarkan 1 dan 2 maka diperoleh kesimpulan $Ker(T) \oplus Im(T) = V$.

**Definisi 2.4.9[4]**

Jika $V$ adalah ruang vektor atas $F$, maka $L(V)$ adalah himpunan semua transformasi linier pada $V$ atas $F$.

**Definisi 2.4.10[4]**

Jika $S \in L(V)$ dan $S \circ T = T \circ S = I$, maka $S$ disebut invers dari $T$, dan ditulis dengan $T^{-1}$ dengan $I$ adalah transformasi identitas.

**Lema 2.4.11[4]**

Jika $S, T, Q \in L(V)$ maka :

1. $S \circ (T + Q) = S \circ T + S \circ Q$,

2. $(T + Q) \circ S = T \circ S + Q \circ S$.

Bukti :

1. Ambil $\vec{v} \in V$ maka

$$(S \circ (T+Q))(\vec{v}) = S(T(\vec{v}) + Q(\vec{v}))$$

$$= S(T(\vec{v})) + S(Q(\vec{v}))$$

$$= (S \circ T)(\vec{v}) + (S \circ Q)(\vec{v}).$$

Jadi untuk setiap $\vec{v} \in V$ berlaku

$$S \circ (T+Q) = S \circ T + S \circ Q.$$

2. Ambil $\vec{v} \in V$ maka

$$((T+Q) \circ S)(\vec{v}) = (T+Q)(S(\vec{v}))$$

$$= T(S(\vec{v})) + Q(S(\vec{v}))$$

$$= (T \circ S)(\vec{v}) + (Q \circ S)(\vec{v}).$$

Jadi untuk setiap $\vec{v} \in V$ berlaku

$$(T+Q) \circ S = T \circ S + Q \circ S.$$

**Definisi 2.4.12[6]**

Suatu transformasi linier $T : V \to W$ dikatakan satu-satu jika untuk $\vec{u}, \vec{v} \in V$ dengan $T(\vec{u}) = T(\vec{v})$, maka $\vec{u} = \vec{v}$. Selain itu, $T$ dikatakan pada jika $Image(T) = W$.

Untuk selanjutnya bila $T : V \to V$ adalah transformasi linier satu-satu, ditulis $T$ transformasi linier satu-satu terhadap $V$ dan bila $T : V \to V$ adalah transformasi linier pada, ditulis $T$ transformasi linier pada terhadap $V$.

**Teorema 2.4.13[6]**

Misalkan $V$ dan $W$ adalah ruang vektor berdimensi hingga dan $T : V \to W$ adalah transformasi linier, maka

a) $T$ adalah transformasi linier satu-satu jika dan hanya jika $Ker(T) = \{\vec{0}\}$.

b) $T$ adalah transformasi linier pada jika dan hanya jika $rk(T) = \dim(W)$.

Bukti: Lihat[6] hal 188.

**Akibat 2.4.14[4]**

Jika $T \in L(V)$, maka pernyataan dibawah ini ekivalen:

1. Solusi untuk $T(\vec{x}) = \vec{0}$ hanya $\vec{x} = \vec{0}$.
2. $T$ adalah satu-satu.
3. $T$ adalah pada.
4. $T$ dapat dibalik.

Bukti: Lihat [4] hal 344.

**2.5 Akar dan Vektor karakteristik**

**Definisi 2.5.1[6]**

Misalkan $T : V \to V$ adalah suatu operator linier. Jika $\vec{v} \in V$ adalah vektor taknol dan terdapat suatu skalar $a$ sehingga $T(\vec{v}) = a\vec{v}$, maka $\vec{v}$ dikatakan vektor karakteristik dari $T$. Skalar $a$ dikatakan akar karakteristik dari $T$ yang berkaitan dengan vektor karakteristik $\vec{v}$. Jika $A$ matriks $n \times n$ dan merupakan matriks standar, maka akar karakteristik dari $A$ diartikan sebagai akar karakteristik dari $T_A$.

**Akibat 2.5.2[6]**

Jika $V$ ruang vektor berdimensi $n$, maka $T : V \to V$ mempunyai paling banyak $n$ akar karakteristik yang berbeda.

Bukti: Lihat [6] hal 213.

**Teorema 2.5.3[2]**

Misalkan $A$ adalah sebuah matriks $n \times n$, maka pernyataan-pernyataan berikut ekivalen satu sama lain:

a) $a$ adalah akar karakteristik dari $A$.

b) Sistem persamaan $(aI - A)\vec{x} = \vec{0}$ mempunyai pemecahan-pemecahan yang tak trivial.

c) Ada sebuah vektor tak nol $\vec{x}$ didalam $R^n$ sehingga $A\vec{x} = a\vec{x}$.

d) $a$ adalah pemecahan riil dari persamaan karakteristik $det(aI - A) = \vec{0}$.

**Definisi 2.5.4[6]**

Misalkan $a$ adalah akar karakteristik dari $T : V \to V$. Subruang dari $V$ dari semua vektor karakteristik yang berhubungan dengan akar karakteristik $a$ dan vektor nol disebut ruang karakteristik yang berhubungan dengan akar karakteristik $a$. Ruang karakteristik yang berhubungan dengan akar karakteristik $a$ ditulis $E_a$.

## 2.6 Prinsip Induksi Matematika

### 2.6.1 Prinsip Induksi yang Dirampatkan.

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan hal tersebut hanya perlu ditunjukkan bahwa :

1. $P(n_0)$ benar.
2. Jika $P(n)$ benar maka $P(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq n_0$.

sehingga $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$.

### 2.6.2 Menginduksi dimensi dari suatu ruang vektor

Pembuktian suatu teorema ataupun pernyataan dengan cara menginduksi dimensi dari suatu ruang vektor misalkan $V$ dapat dilakukan dengan menunjukkan kedua hal berikut:

1. Teorema tersebut benar untuk $\dim(V) = 1$.
2. Kebenaran dari teorema untuk semua subruang $W$ dari $V$ dengan $\dim(W)$ kurang dari $\dim(V)$ mengakibatkan kebenaran teorema untuk $V$.[4]

## 2.7 Komposisi Transformasi Linier terhadap diri sendiri .

**Lema 2.7.1[3]**

Untuk sebarang transformasi $T: V \to V$, ruang peta berpangkat membentuk rantai turun

$$V \supseteq T(V) \supseteq T^2(V) \supseteq \cdots$$

dan ruang null membentuk rantai naik

$$\{\vec{0}\} \subseteq Ker(T) \subseteq Ker(T^2) \subseteq \ldots$$

selanjutnya, terdapat $k$ sehingga untuk pangkat kurang dari $k$, berlaku

jika $j < k$ maka $T^j(V) \supseteq T^{j+1}(V)$ ,

sedangkan untuk pangkat lebih besar dari $k$, berlaku

jika $j \geq k$ maka $T^j(V) = T^{j+1}(V)$.

Bukti:

Misalkan $\vec{w} \in T^{j+1}(V)$ maka berlaku

$\vec{w} = T^{j+1}(\vec{v}_1)$ untuk suatu $\vec{v}_1 \in V$

$= T^j\big(T(\vec{v}_1)\big)$

$= T^j(\vec{v}_2)$ untuk suatu $\vec{v}_2 \in V$

sehingga $\vec{w} \in T^j(V)$. Jadi $T^j(V) \supseteq T^{j+1}(V)$.

Selanjutnya, misalkan $T^k(V) = T^{k+1}(V)$, maka

$$T: T^{k+1}(V) \to T^{k+2}(V)$$

menjadi pemetaan $T$ dengan domain $T^k(V)$.

Akan ditunjukkan $T^k(V) = T^{k+2}(V)$.

1. Akan ditunjukkan $T^k(V) \subset T^{k+2}(V)$.

Ambil $\vec{x} \in T^k(V)$. Berarti $\vec{x} = T^k(v_1)$ untuk suatu $v_1 \in V$.

Karena $T$ memetakan $T^k(V)$ ke $T^{k+2}(V)$ maka $\vec{x} \in T^{k+2}(V)$.

Jadi $T^k(V) \subset T^{k+2}(V)$.

2. Akan ditunjukkan $T^k(V) \supset T^{k+2}(V)$.

Ambil $\vec{x} \in T^{k+2}(V)$. Berarti $\vec{x} = T^{k+2}(v_1)$ untuk suatu $v_1 \in V$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= T^{k+2}(v_1) && \text{untuk suatu } v_1 \in V \\
&= T^{k+1}(T(v_1)) && \text{untuk suatu } v_1 \in V \\
&= T^{k+1}(v_2) && \text{untuk suatu } v_2 = T(v_1) \in V \\
&= T^k(v_2) && \text{untuk suatu } v_2 = T(v_1) \in V
\end{aligned}$$

sehingga $\vec{x} \in T^k(V)$. Jadi $T^k(V) \supset T^{k+2}(V)$.

Jadi berlaku $T^{k+2}(V) = T^{k+1}(V) = T^k(V)$.

**Lema 2.7.2[4]**

Untuk sebarang transformasi $T: W \to W$, misalkan $\dim(W) = n$, maka

$$T^n(W) = T^{n+1}(W) = \cdots = T^{n+e}(W) \quad \text{untuk semua } e \geq 1.$$

Bukti:

Pembuktian dilakukan dengan menggunakan Prinsip Induksi Matematika.

Misalkan $P_n: T^n(W) = T^{n+1}(W) = \cdots = T^{n+e}(W)$ untuk semua $e \geq 1$.

1. Untuk $e = 1$, berdasarkan Lema 2.7.1 maka $T^n(W) = T^{n+1}(W)$.

   Jadi $P_1$ benar.

2. Misalkan $P_k$ benar berarti untuk $e = k$, maka berlaku

$$T^n(W) = T^{n+1}(W) = \cdots = T^{n+k}(W).$$

   Akan ditunjukkan $P_{k+1}$ benar.

$$T^{n+k+1}(W) = T\left(T^{n+k}(W)\right) = T(T^n(W)) = T^{n+1}(W) = T^n(W)$$

Jadi $P_{k+1}$ benar.

Dari 1 dan 2 disimpulkan $T^n(W) = T^{n+1}(W) = \cdots = T^{n+e}(W)$ untuk semua $e \geq 1$.

**Lema 2.7.3[4]**

Untuk sebarang transformasi $T: W \to W$, misal $\dim(W) = n$, maka

$$T^n(W) \subseteq T^{n-1}(W) \subseteq \cdots \subseteq T(W) \text{ untuk semua } n > 1$$

Bukti:

Pembuktian dilakukan dengan menggunakan Prinsip Induksi Matematika.

Misalkan $P_n: T^n(W) \subseteq T^{n-1}(W) \subseteq \cdots \subseteq T(W)$ untuk semua $n > 1$.

1. Untuk $n = 2$, akan ditunjukkan $T^2(W) \subseteq T(W)$

   Misalkan $\vec{w} \in T^2(W)$ maka berlaku

   $$\begin{aligned} \vec{w} &= T^2(\vec{w}_1) \text{ untuk suatu } \vec{w}_1 \in W \\ &= T\big(T(\vec{w}_1)\big) \text{ untuk suatu } \vec{w}_1 \in W \\ &= T(\vec{w}_2) \text{ untuk suatu } \vec{w}_2 \in W \end{aligned}$$

   sehingga $\vec{w} \in T(W)$. Jadi $T^2(W) \subseteq T(W)$.

2. Misalkan $P_k$ benar berarti untuk $n = k$, maka berlaku

   $$T^k(W) \subseteq T^{k-1}(W) \subseteq \cdots \subseteq T(W).$$

   Akan ditunjukkan $P_{k+1}$ benar.

   Berdasarkan Lema 2.7.1, maka berlaku $T^{k+1}(W) \subseteq T^k(W)$.

   Jadi $P_{k+1}$ benar.

Dari 1 dan 2 disimpulkan $T^n(W) \subseteq T^{n-1}(W) \subseteq \cdots \subseteq T(W)$ untuk semua $n > 1$.

# BAB III

## RUANG NULL DIPERUMUM

Pada bab ini akan dibahas tentang ruang null yang diperumum dan subruang karakteristik yang diperumum.

**Definisi 3.1[4]**

Ruang null yang diperumum dari $T \in L(V)$ adalah subruang

$V_0(T) = \{\vec{v} \in V | T^e(\vec{v}) = \vec{0}$ untuk suatu bilangan bulat positif $e$ (tergantung $\vec{v}$)$\}$.

Dengan cara yang sama, jika $W$ adalah subruang dari $V$ dipetakan ke dirinya sendiri oleh $T$, maka ruang null yang diperumum dari $T$ pada $W$ adalah subruang

$W_0(T) = \{\vec{v} \in W | T^e(\vec{v}) = \vec{0}$ untuk suatu bilangan bulat positif $e$ (tergantung $\vec{v}$)$\}$

sehingga subruang $W_0(T) = W \cap V_0(T)$.

**Contoh 3.1**

Misalkan $T: F^3 \to F^3$ didefinisikan sebagai

$$T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 + v_3 \\ v_2 \\ 2v_3 \end{pmatrix}$$

dan $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ basis standar untuk $F^3$.

Akibatnya,

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \text{dan}\ T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan Teorema 2.4.3 maka diperoleh $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Selanjutnya akan ditentukan ruang null diperumum dari $T$ yaitu $W_0(T)$, adalah sebagai berikut

$W_0(T) = \{\vec{v} \in W | T^e(\vec{v}) = \vec{0}$ untuk suatu bilangan bulat positif $e$ (tergantung $\vec{v}$)$\}$.

Misal $\vec{v} \in W$ dengan $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$, maka pilih $e = 3$ sehingga $[T]^3(\vec{v}) = \vec{0}$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1)$$

Dengan melakukan Operasi Baris Elementer pada matriks diperbesar $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ sehingga diperoleh matriks eselon baris tereduksi sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Akibatnya persamaan (3.1) ekivalen dengan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh $v_1 = 0,\ v_2 = 0,$ dan $v_3 = 0$

Jadi $W_0(T) = \{\vec{0}\}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $W_0(T)$ adalah subruang dari $W$, yaitu:

1. Akan ditunjukkan $W_0(T) \subset W$.

   Berdasarkan Definisi 3.1, maka untuk setiap $\vec{x} \in W_0(T)$ berlaku $\vec{x} \in W$ sehingga $W_0(T) \subset W$.

2. Akan ditunjukkan $W_0(T) \neq \emptyset$.

   Karena $W$ subruang dari $V$ maka terdapat $\vec{0} \in W$, dan karena $T$ transformasi linier maka berdasarkan Lema 2.4.2 diperoleh

$$T^e(\vec{0}) = T^{e-1}\left(T(\vec{0})\right) = T^{e-1}(\vec{0}) = \cdots = \vec{0}.$$

Jadi terdapat $\vec{0} \in W_0(T)$, sehingga $W_0(T) \neq \emptyset$.

3. Akan ditunjukkan untuk setiap $\vec{x},\ \vec{y} \in W_0(T)$ dan $r \in F$ berlaku

   $\vec{x} + \vec{y} \in W_0(T)$ dan $r\vec{x} \in W_0(T)$.

   Misal $\vec{x},\ \vec{y} \in W_0(T)$ dan $r \in F$.

   Akibatnya $\vec{x}, \vec{y} \in W$ dan

   $T^e(\vec{x}) = \vec{0}$ untuk suatu bilangan bulat positif $e$ (tergantung $\vec{x}$)

   serta

   $T^e(\vec{y}) = \vec{0}$ untuk suatu bilangan bulat positif $e$ (tergantung $\vec{y}$).

   Karena $W$ subruang dari $V$, akibatnya

   a. $\vec{x} + \vec{y} \in W$ dan $T^e(\vec{x} + \vec{y}) = T^e(\vec{x}) + T^e(\vec{y}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$

      sehingga $\vec{x} + \vec{y} \in W_0(T)$.

   b. $r\vec{x} \in W$ dan $T^e(r\vec{x}) = r\,T^e(\vec{x}) = r\,\vec{0} = \vec{0}$

      sehingga $r\vec{x} \in W_0(T)$.

Dari 1, 2 dan 3 disimpulkan $W_0(T)$ adalah subruang dari $W$.

Untuk pembahasan selanjutnya digunakan bentuk $T^n(\vec{v})$ dengan $n = \dim(V)$. Oleh karena itu akan ditunjukkan: jika $T^e(\vec{v}) = \vec{0}$ maka $T^n(\vec{v}) = \vec{0}$ dengan $n = \dim(V)$.

Misal $T^e(\vec{v}) = \vec{0}$ dan $n = \dim(V)$.

Akan ditunjukkan $T^n(\vec{v}) = \vec{0}$, berarti akan ditunjukkan $e = n$.

Karena $V_0(T) = \{\vec{v} \in V | T^e(\vec{v}) = \vec{0}$ untuk suatu bilangan bulat positif $e$ (tergantung $\vec{v}$)$\}$, $n = \dim(V)$, $\vec{v} \in V$ dan nilai $e$ bergantung pada $\vec{v}$, maka diperoleh $e = n$ sehingga jika $T^e(\vec{v}) = \vec{0}$ maka $T^n(\vec{v}) = \vec{0}$.

Selanjutnya *sifat dari ruang null* diperumum untuk subruang $W$ akan dijelaskan pada teorema berikut ini.

**Teorema 3.2[4]**

Diberikan $T \in L(V)$ dan $W$ subruang dari $V$ yang dipetakan ke dirinya sendiri oleh $T$, maka $W = W_0(T) \oplus W_*(T)$, dengan $W_*(T) = \cap_{e=1}^{\infty} T^e(W)$, yaitu $W_*(T)$ adalah irisan $T^e(W)$ untuk semua bilangan bulat positif $e$.

Bukti :

Misal $T \in L(V)$, $W$ subruang dari $V$ dan $T: W \to W$ suatu pemetaan dengan $T(W) = \{T(\vec{w}) | \vec{w} \in W\}$.

Akan ditunjukkan $W = W_0(T) \oplus W_*(T)$ yaitu :

1. Akan ditunjukkan $W = W_0(T) + W_*(T)$,

   Misalkan $T: W \to W$ dengan $n = \dim(W)$.

   Berdasarkan Lema 2.7.3, berlaku $T^n(W) \subseteq T^{n-1}(W) \subseteq \cdots \subseteq T(W)$ untuk $n \geq 1$, maka

$$W_*(T) = \bigcap_{e=1}^{n} T^e(W)$$

$$= T(W) \cap T^2(W) \cap \ldots \cap T^n(W)$$

$$= T^n(W) \quad \ldots\ldots (3.2)$$

   Selanjutnya akan ditunjukkan $W_*(T)$ adalah subruang dari $W$, yaitu:

   a. Akan ditunjukkan $W_*(T) \subset W$.

      Ambil $\vec{x} \in W_*(T)$. Berdasarkan (3.2) berlaku $\vec{x} \in T^n(W)$. Karena $T$ transformasi linier dan $T: W \to W$, maka $T^n(W) \subset W$. Karena $\vec{x} \in T^n(W)$ dan $T^n(W) \subset W$ maka $\vec{x} \in W$. Jadi $W_*(T) \subset W$.

b. Akan ditunjukkan $W_*(T) \neq \emptyset$.

Karena $W$ subruang dari $V$ maka terdapat $\vec{0} \in W$, dan karena $T$ transformasi linier maka berdasarkan Lema 2.4.2 diperoleh

$$T^n(\vec{0}) = T^{n-1}\left(T(\vec{0})\right) = T^{n-1}(\vec{0}) = \cdots = \vec{0}.$$

Jadi terdapat $\vec{0} \in W_*(T)$, sehingga $W_*(T) \neq \emptyset$.

c. Akan ditunjukkan untuk setiap $\vec{x},\ \vec{y} \in W_*(T)$ dan $r \in F$ berlaku $\vec{x} + \vec{y} \in W_*(T)$ dan $r\vec{x} \in W_*(T)$.

Misal $\vec{x},\ \vec{y} \in W_*(T)$ dan $r \in F$,

maka berdasarkan (3.2) berlaku $\vec{x},\ \vec{y} \in T^n(W)$.

Misalkan $\vec{x} = T^n(\vec{w}_1)$ untuk suatu $\vec{w}_1 \in W$, dan

$\vec{y} = T^n(\vec{w}_2)$ untuk suatu $\vec{w}_2 \in W$,

akibatnya

i. $\vec{x} + \vec{y} = T^n(\vec{w}_1) + T^n(\vec{w}_2)$

$= T^n(\vec{w}_1 + \vec{w}_2)$ ( karena $T$ transformasi linier)

$= T^n(\vec{w}_3)$ untuk suatu $\vec{w}_3 = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W$

sehingga $\vec{x} + \vec{y} \in T^n(W)$ atau $\vec{x} + \vec{y} \in W_*(T)$.

ii. $r\vec{x} = rT^n(\vec{w}_1)$

$= T^n(r\,\vec{w}_1)$ ( karena $T$ transformasi linier)

$= T^n(\vec{w}_4)$ untuk suatu $\vec{w}_4 = r\,\vec{w}_1 \in W$

sehingga $r\vec{x} \in T^n(W)$ atau $r\vec{x} \in W_*(T)$.

Dari a, b dan c disimpulkan $W_*(T)$ adalah subruang dari $W$.

Untuk membuktikan $W = W_0(T) + W_*(T)$, langkah selanjutnya yaitu :

A. Akan ditunjukkan $W \subset W_0(T) + W_*(T)$.

Ambil $\vec{v} \in W$. Berdasarkan Lema 2.7.2, berlaku $T^n(W) = T^{2n}(W)$.

Karena $T^n(W) = T^{2n}(W)$, maka $T^n(\vec{v}) = T^{2n}(\vec{w})$ untuk suatu $\vec{w} \in W$.

$T^n(\vec{v}) - T^{2n}(\vec{w}) = \vec{0}$ ( karena $T$ transformasi linier)

$T^n(\vec{v} - T^n(\vec{w})) = \vec{0}$

sehingga $\vec{v} - T^n(\vec{w}) \in W_0(T)$.

Karena $\vec{v} = (\vec{v} - T^n(\vec{w})) + T^n(\vec{w})$, maka diperoleh $\vec{v} \in W_0(T) + W_*(T)$.

Jadi $W \subset W_0(T) + W_*(T)$.

B. Akan ditunjukkan $W_0(T) + W_*(T) \subset W$.

Jelas $W_0(T) + W_*(T) \subset W$, karena $W_0(T)$ dan $W_*(T)$ subruang dari $W$.

Dari A dan B diperoleh kesimpulan $W = W_0(T) + W_*(T)$.

2. Akan ditunjukkan $W_0(T) \cap W_*(T) = \{\vec{0}\}$.

A. Akan ditunjukkan $W_0(T) \cap W_*(T) \subset \{\vec{0}\}$

Misalkan $\vec{w} \in W_0(T) \cap W_*(T)$. Berarti $\vec{w} \in W_0(T)$ dan $\vec{w} \in W_*(T)$.

Karena $\vec{w} \in W_0(T)$ maka $T^n(\vec{w}) = \vec{0}$. Selanjutnya karena $W_*(T) = T^n(W)$, maka dari $\vec{w} \in T^n(W)$ diperoleh $\vec{w} = T^n(\vec{w}_1)$ untuk suatu $\vec{w}_1 \in W$. Karena $T^n(\vec{w}) = \vec{0}$ dan $\vec{w} = T^n(\vec{w}_1)$ maka

$\vec{0} = T^n(\vec{w})$

$= T^n(T^n(\vec{w}_1))$

$= T^{n+n}(\vec{w}_1)$ (berdasarkan Lema 2.7.2 )

$= T^n(\vec{w}_1)$

$= \vec{w}$

sehingga $\vec{w} \in \{\vec{0}\}$.

Akibatnya diperoleh $W_0(T) \cap W_*(T) \subset \{\vec{0}\}$.

B. Akan ditunjukkan $W_0(T) \cap W_*(T) \supset \{\vec{0}\}$.

Karena $W_0(T)$ dan $W_*(T)$ subruang dari $W$ maka terdapat $\vec{0} \in W_0(T)$ dan $\vec{0} \in W_*(T)$ sehingga $\vec{0} \in W_0(T) \cap W_*(T)$.

Jadi $\{\vec{0}\} \subset W_0(T) \cap W_*(T)$.

Dari A dan B diperoleh kesimpulan $W_0(T) \cap W_*(T) = \{\vec{0}\}$.

Jadi berdasarkan 1 dan 2 maka diperoleh kesimpulan $W = W_0(T) \oplus W_*(T)$.

Selanjutnya akan didefinisikan suatu subruang dari $W$ yaitu subruang karakteristik yang diperumum.

**Definisi** 3.3[4]

Misalkan $T \in L(V)$, $\lambda \in F$ dan suatu subruang $W$ dari $V$ dipetakan ke dirinya sendiri oleh $T$, maka $W_\lambda(T)$ didefinisikan

$W_\lambda(T) = \{\vec{w} \in W \mid (T - \lambda I)^e(\vec{w}) = \vec{0}$ untuk suatu bilangan bulat positif $e$ (tergantung $\vec{w}$)$\}$,

maka $W_\lambda(T)$ adalah subruang dari $W$ yang disebut subruang karakteristik yang diperumum dari $T$ di $W$ pada $\lambda$.

**Contoh** 3.2 :

Berdasarkan Contoh 3.1 diperoleh $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Selanjutnya akan ditentukan subruang karakteristik yang diperumum dari $T$ di $W$.

Langkah pertama adalah menentukan nilai $\lambda$, yaitu:

$det[T - \lambda I] = 0$

$$[T - \lambda I] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

Karena matriks $[T - \lambda I]$ adalah matriks segitiga atas maka berdasarkan Teorema 2.2.7, *det* $[T - \lambda I] = (1-\lambda)\ (1-\lambda)\ (2-\lambda)$ dan karena $det[T - \lambda I] = 0$ maka diperoleh $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$.

Langkah selanjutnya adalah menentukan $W_1(T)$ dan $W_2(T)$.

$a)$ $W_1(T) = \{\vec{w} \in W | (T - 1I)^e(\vec{w}) = \vec{0}$ untuk suatu bilangan bulat positif $e$ (tergantung $\vec{w}$)$\}$.

Misal $\vec{w} \in W$ dengan $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$. Pilih $e = 3$ sehingga $[T - 1I]^3(\vec{w}) = \vec{0}$.

Perhatikan bahwa

$$[T - 1I] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya

$$[T - 1I]^3(\vec{w}) = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3.3)$$

Dengan menggunakan Eliminasi Gauss Jordan, diperoleh

$w_1 = r,\ w_2 = s,\ w_3 = 0$, dengan $r, s \in \mathbb{R}$

sehingga $\vec{w} = \begin{bmatrix} r \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, untuk $r, s \in \mathbb{R}$.

Jadi $W_1(T)$ memiliki basis $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

b) $W_2(T) = \{\vec{w} \in W | (T-2I)^e(\vec{w}) = \vec{0}$ untuk suatu bilangan bulat positif $e$ (tergantung $\vec{w}$)$\}$.

Misal $\vec{w} \in W$ dengan $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$. Pilih $e = 3$ sehingga $[T-2I]^3(\vec{w}) = \vec{0}$

Perhatikan bahwa

$$[T-2I] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya

$$[T-2I]^3(\vec{w}) = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{......................} (3.4)$$

Dengan menggunakan Eliminasi Gauss Jordan, diperoleh

$w_1 = w_3$ dan $w_2 = 0$ . Misalkan $w_1 = s$, dengan $s \in \mathbb{R}$

sehingga $\vec{w} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Jadi $W_2(T)$ memiliki basis $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Dengan demikian subruang karakteristik yang diperumum dari $T$ di $W$ adalah $W_1(T)$ dengan basis $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ dan $W_2(T)$ dengan basis $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Pada lema berikutnya akan dijelaskan bahwa $(T - \lambda_i I)$ adalah transformasi linier yang memetakan $W$ subruang dari ruang vektor $V$ ke dirinya sendiri, dengan $\lambda_i$ adalah akar karakteristik.

**Lema 3.4**

Diberikan $T \in L(V)$ dan $W$ subruang dari $V$ yang dipetakan ke dirinya sendiri oleh $T$. Misalkan $I$ adalah transformasi identitas dan $\lambda_i$ adalah akar karakteristik dari $T$ dengan $i = 1,2, \dots, n$, maka $(T - \lambda_i I)$ adalah transformasi linier yang memetakan $W$ ke dirinya sendiri.

Bukti:

Karena $T \in L(V)$ dan $\lambda_i$ adalah akar karakteristik dari $T$, maka berdasarkan Definisi 2.5.1, berlaku $T(\vec{x}) = \lambda_i \vec{x}$, dengan $\vec{x} \in V$ dan $i = 1,2, \dots, n$.

$$T(\vec{x}) = \lambda_i \vec{x}$$

$$T(\vec{x}) = \lambda_i \mathrm{I}(\vec{x})$$

$$(T - \lambda_i I)(\vec{x}) = \vec{0}\,.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan $(T - \lambda_i I) \in L(V)$.

Ambil $\vec{u}, \ \vec{v} \in V$ dan $r \in F$, dengan $(T - \lambda_i I)(\vec{x}) = \vec{0}$, untuk $\vec{x} \in V$

i. Karena $\vec{u}, \ \vec{v} \in V$, maka

$$(T - \lambda_i I)(\vec{u}) = \vec{0}$$

dan

$$(T - \lambda_i I)(\vec{v}) = \vec{0}$$

Karena $\vec{u} + \vec{v} \in V$, maka $(T - \lambda_i I)(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{0}$.

Akibatnya

$$(T - \lambda_i I)(\vec{u} + \vec{v}) = (T - \lambda_i I)(\vec{u}) + (T - \lambda_i I)(\vec{v}).$$

ii. Karena $\vec{u} \in V$ dan $r \in F$ maka $r\vec{u} \in V$ sehingga $(T - \lambda_i I)(r\vec{u}) = \vec{0}$ dan $r(T - \lambda_i I)(\vec{u}) = r\vec{0} = \vec{0}$.

Akibatnya $(T - \lambda_i I)(r\vec{u}) = r(T - \lambda_i I)(\vec{u})$.

Jadi karena $(T - \lambda_i I)(\vec{x}) = \vec{0}$ dan $T \in L(V)$ maka $(T - \lambda_i I)$ transformasi nol ditulis O, dan $(T - \lambda_i I)$ merupakan transformasi linier dari $V$ ke $V$ sehingga $(T - \lambda_i I) \in L(V)$.

Sekarang akan ditunjukkan $(T - \lambda_i I)$ adalah tranformasi linier dari $W$ ke $W$. Ambil $\vec{w} \in W$. Karena $T$ transformasi linier dan $T : W \to W$, maka untuk setiap $\vec{w} \in W$, $T(\vec{w}) \in W$. Karena $(T - \lambda_i I)(\vec{w}) = T(\vec{w}) - \lambda_i I(\vec{w})$, akibatnya $(T - \lambda_i I)(\vec{w}) \in W$.

Jadi subruang $W$ dari $V$ dipetakan kedirinya sendiri oleh $(T - \lambda_i I)$ . ∎

Pada lema-lema berikutnya akan dijelaskan bahwa subruang $W$ dari $V$ memiliki subruang-subruang yaitu $W_*(T - \lambda_i I)$ dan $W_0(T - \lambda_i I)$.

**Lema 3.5**

Diberikan $T \in L(V)$ dan $W$ subruang dari $V$ yang dipetakan ke dirinya sendiri oleh $T$. Misalkan $I$ adalah transformasi identitas, $\lambda_i$ adalah akar karakteristik dari $T$ dengan $i = 1,2,\ldots,n$ dan $(T - \lambda_i I): W \to W$ adalah transformasi linier, maka $W_*(T - \lambda_i I)$ yang didefinisikan sebagai

$$W_*(T - \lambda_i I) = (T - \lambda_i I)^n(W)$$

adalah subruang dari $W$.

Bukti:

1. Akan ditunjukkan $W_*(T - \lambda_i I) \subset W$.

   Karena $W_*(T - \lambda_i I) = (T - \lambda_i I)^n(W)$, maka untuk setiap $\vec{x} \in W_*(T - \lambda_i I)$ berlaku $\vec{x} \in (T - \lambda_i I)^n(W)$. Oleh karena itu diperoleh $\vec{x} = (T - \lambda_i I)^n(\vec{w}_1)$ untuk suatu $\vec{w}_1 \in W$.

   Karena $(T - \lambda_i I)$ transformasi linier dari $W$ ke $W$, maka $(T - \lambda_i I)^n(\vec{w}_1) \in W$. Diperoleh $\vec{x} \in W$. Jadi $W_*(T - \lambda_i I) \subset W$.

2. Akan ditunjukkan $W_*(T - \lambda_i I) \neq \emptyset$.

Karena $W$ subruang dari $V$ maka terdapat $\vec{0} \in W$, dan $(T - \lambda_i I)$ transformasi linier dari $W$ ke $W$, maka

$$\begin{aligned}(T - \lambda_i I)(\vec{0}) &= T(\vec{0}) - \lambda_i I(\vec{0})\\ &= \vec{0} - \vec{0} \qquad \text{( berdasarkan Lema 2.4.2)}\\ &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Akibatnya

$$(T - \lambda_i I)^n(\vec{0}) = (\vec{0}).$$

Jadi terdapat $\vec{0} \in W_*(T - \lambda_i I)$, sehingga $W_*(T - \lambda_i I) \neq \emptyset$.

3. Akan ditunjukkan untuk setiap $\vec{x}$, $\vec{y} \in W_*(T - \lambda_i I)$ dan $r \in F$ berlaku $\vec{x} + \vec{y} \in W_*(T - \lambda_i I)$ dan $r\vec{x} \in W_*(T - \lambda_i I)$.

Misal $\vec{x}$, $\vec{y} \in W_*(T - \lambda_i I)$ dan $r \in F$, maka $\vec{x}$, $\vec{y} \in (T - \lambda_i I)^n(W)$.

Misalkan $\vec{x} = (T - \lambda_i I)^n(\vec{w}_1)$ dan $\vec{y} = (T - \lambda_i I)^n(\vec{w}_2)$ untuk suatu $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$.

Akibatnya

a. $\vec{x} + \vec{y} = (T - \lambda_i I)^n(\vec{w}_1) + (T - \lambda_i I)^n(\vec{w}_2)$ untuk suatu $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$

$= (T - \lambda_i I)^n(\vec{w}_1 + \vec{w}_2)$ ( karena $(T - a_i I) \in L(V)$)

$= (T - \lambda_i I)^n(\vec{w}_3)$ untuk suatu $\vec{w}_3 = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W$

sehingga $\vec{x} + \vec{y} \in (T - \lambda_i I)^n(W)$ atau $\vec{x} + \vec{y} \in W_*(T - \lambda_i I)$ .

b. $r\vec{x} = r(T - \lambda_i I)^n(\vec{w}_1)$ untuk suatu $\vec{w}_1 \in W$

$= (T - \lambda_i I)^n(r\vec{w}_1)$ ( karena$(T - \lambda_i I) \in L(V)$)

$= (T - \lambda_i I)^n(\vec{w}_4)$ untuk suatu $\vec{w}_4 = r\,\vec{w}_1 \in W$

sehingga $r\vec{x} \in (T - \lambda_i I)^n(W)$ atau $r\vec{x} \in W_*(T - \lambda_i I)$.

Dari 1, 2 dan 3 disimpulkan bahwa $W_*(T - a_i I)$ adalah subruang dari $W$. ■

**Lema 3.6**

Diberikan $T \in L(V)$ dan $W$ subruang dari $V$ yang dipetakan ke dirinya sendiri oleh $T$. Misalkan $I$ adalah transformasi identitas, $\lambda_i$ adalah akar karakteristik yang berbeda dari $T$ dengan $i = 1,2, \dots, n$ dan $(T - \lambda_i I): W \to W$ adalah transformasi linier, maka $W_0(T - \lambda_i I)$ yang didefinisikan sebagai

$W_0(T - \lambda_i I) = \{\vec{w} \in W \big| (T - \lambda_i I)^e(\vec{w}) = \vec{0}$ untuk suatu bilangan bulat $e$ (tergantung $\vec{w}$)$\}$.

adalah subruang dari $W$.

Bukti:

1. Akan ditunjukkan $W_0(T - \lambda_i I) \subset W$.

   Berdasarkan definisi $W_0(T - \lambda_i I)$, maka untuk setiap $\vec{x} \in W_0(T - \lambda_i I)$ berlaku $\vec{x} \in W$ sehingga $W_0(T - \lambda_i I) \subset W$.

2. Akan ditunjukkan $W_0(T - \lambda_i I) \neq \emptyset$.

   Karena $W$ subruang dari $V$ maka terdapat $\vec{0} \in W$, dan karena $T$ transformasi linier maka $(T - \lambda_i I)(\vec{0}) = T(\vec{0}) - \lambda_i I(\vec{0}) = \vec{0}$, sehingga $(T - \lambda_i I)^n\left(\vec{0}\right) = \left(\vec{0}\right)$.

   Jadi terdapat $\vec{0} \in W_0(T - \lambda_i I)$, sehingga $W_0(T - \lambda_i I) \neq \emptyset$.

3. Akan ditunjukkan untuk setiap $\vec{x}$, $\vec{y} \in W_0(T - \lambda_i I)$ dan $r \in F$ berlaku

   $\vec{x} + \vec{y} \in W_0(T - \lambda_i I)$ dan $r\vec{x} \in W_0(T - \lambda_i I)$.

   Misal $\vec{x}$, $\vec{y} \in W_0(T - \lambda_i I)$ dan $r \in F$.

   Karena $\vec{x} \in W_0(T - \lambda_i I)$ maka $\vec{x} \in W$ dan

   $$(T - \lambda_i I)^e(\vec{x}) = \vec{0} \text{ untuk suatu bilangan bulat positif } e.$$

   Karena $\vec{y} \in W_0(T - \lambda_i I)$ maka $\vec{y} \in W$ dan

$(T-\lambda_i I)^e(\vec{y}) = \vec{0}$ untuk suatu bilangan bulat positif $e$.

Karena $W$ subruang dari $V$, akibatnya

a. $\vec{x}+\vec{y} \in W$ dan $(T-\lambda_i I)^e(\vec{x}+\vec{y}) = (T-\lambda_i I)^e(\vec{x}) + (T-\lambda_i I)^e(\vec{y})$

$$= \vec{0} + \vec{0}$$

$$= \vec{0}$$

sehingga $\vec{x}+\vec{y} \in W_0(T-\lambda_i I)$.

b. $r\vec{x} \in W$ dan $(T-\lambda_i I)^e(r\vec{x}) = r\,(T-\lambda_i I)^e(\vec{x}) = r\,\vec{0} = \vec{0}$

sehingga $r\vec{x} \in W_0(T-\lambda_i I)$.

Dari 1, 2 dan 3 disimpulkan bahwa $W_0(T-\lambda_i I)$ adalah subruang dari $W$. ∎

Pada lema berikutnya, akan dijelaskan bahwa subruang $W_*(T-\lambda_1 I)$ adalah jumlah langsung dari subruang-subruang karakteristik yang diperumum dari $T$ di $W_*(T-\lambda_1 I)$ pada $\lambda_r$ ditulis $W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_r}(T)$, $r = 1,2,\dots,n$ dengan $\lambda_r$ adalah akar karakteristik.

**Lema 3.7**

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ adalah akar karakteristik yang berbeda dari $T \in L(V)$, dan $W_*(T-\lambda_1 I)$ subruang dari $W$ yang dipetakan ke dirinya sendiri oleh $T$, serta $(T-\lambda_1 I): W \to W$ adalah tranformasi nol, maka

$$W_*(T-\lambda_1 I) = W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_1}(T) \oplus \dots \oplus W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_p}(T)$$

dengan $W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_r}(T) = \{\vec{w} \in W_*(T-\lambda_1 I) \mid (T-\lambda_r I)^e(\vec{w}) = \vec{0}$ untuk suatu bilangan bulat positif $e\}$.

bukti:

1. Akan ditunjukkan

$$W_*(T-\lambda_1 I) = W_*(T-\lambda_1 I)_{a_1}(T) + \dots + W_*(T-\lambda_1 I)_{a_p}(T).$$

Ambil $\vec{w} \in W_*(T-\lambda_1 I)$. Berarti $\vec{w} = (T-\lambda_1 I)^n(\vec{w}_1)$ untuk suatu $\vec{w}_1 \in W$.

Karena $(T-\lambda_1 I)^n(\vec{w}_1) = \vec{0}$, maka $\vec{w} = \vec{0}$.

Ambil $\vec{w} \in W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_r}(T)$. Berarti $\vec{w} \in W_*(T-\lambda_1 I)$ dan

$(T-\lambda_r I)^n(\vec{w}) = \vec{0}$. Karena $\vec{w} = \vec{0}$, maka $\vec{0} \in W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_r}(T)$,

untuk setiap $r = 1,2,\ldots,p$.

Jadi $W_*(T-\lambda_1 I) = W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_1}(T) + \cdots + W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_p}(T)$.

2. Akan ditunjukkan

$$W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_j}(T) \cap \left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_i}(T)\right) = \{\vec{0}\}.$$

a) Akan ditunjukkan

$$\{\vec{0}\} \subset W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_j}(T) \cap \left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_i}(T)\right).$$

Ambil $\vec{y} \in \{\vec{0}\}$ maka $y = \vec{0}$.

Karena $\vec{0} \in W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_r}(T)$, untuk setiap $r = 1,2,\ldots,p$, maka

$$\vec{0} \in W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_j}(T) \text{ dan } \vec{0} \in \left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_i}(T)\right),$$

sehingga

$$\vec{0} \in W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_j}(T) \cap \left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_i}(T)\right).$$

Jadi $\{\vec{0}\} \subset W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_j}(T) \cap \left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_i}(T)\right)$.

b) Akan ditunjukkan

$$W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_j}(T) \cap \left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_i}(T)\right) \subset \{\vec{0}\}.$$

Ambil $\vec{y} \in W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_j}(T) \cap \left(\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_i}(T)\right)$, maka

$$\vec{y} \in W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_j}(T) \text{ dan } \vec{y} \in \left(\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_i}(T)\right).$$

Karena $\vec{y} \in W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_j}(T)$, maka

$$\vec{y} \in W_*(T-\lambda_1 I) \text{ dan } (T-\lambda_j I)^n(\vec{y}) = \vec{0}.$$

Karena$W_*(T-\lambda_1 I) = \{\vec{0}\}$ maka $\vec{y} = \vec{0}$.

Karena

$$\vec{y} \in \left(\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_i}(T)\right), \text{ dan } \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_i}(T) = \{\vec{0}\}$$

maka $\vec{y} = \vec{0}$.

Jadi $W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_j}(T) \cap \left(\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_i}(T)\right) \subset \{\vec{0}\}$.

Dari 2.a) dan 2.b) dapat disimpulkan

$$W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_j}(T) \cap \left(\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_i}(T)\right) = \{\vec{0}\}.$$

Jadi berdasarkan 1 dan 2 maka diperoleh kesimpulan

$$W_*(T-\lambda_1 I) = W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_1}(T) \oplus \ldots \oplus W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_p}(T) \quad \blacksquare$$

Pada teorema berikutnya, akan dijelaskan bahwa subruang $W$ adalah jumlah langsung dari subruang-subruang karakteristik yang diperumum dari $T$ di $W$ pada $\lambda_r$ ditulis $W_{\lambda_r}(T)$, $r = 1,2,\ldots,n$ dengan $\lambda_r$ adalah akar karakteristik.

**Teorema 3.8[4]**

Jika$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$adalah akar karakteristik yang berbeda dari $T \in L(V)$, maka

$$W = W_{\lambda_1}(T) \oplus \ldots \oplus W_{\lambda_p}(T)$$

untuk setiap subruang $W$ dari $V$ dipetakan ke dirinya sendiri oleh $T$.

Bukti :

Misalkan $\dim(W) = m$.

Untuk $m = 0$, maka $W = \{\vec{0}\}$ sehingga bukti trivial.

Untuk $m \geq 1$ , bukti dilanjutkan dengan menginduksi $m$.

1) Untuk $m = 1$, maka terdapat $A = \{\vec{w}\}$ basis dari $W$.

   Karena $\dim(W) = 1$ maka berdasarkan Akibat 2.5.2, $T$ mempunyai satu akar karakteristik, misalkan $\lambda_1$, maka akan ditunjukkan $W = W_{\lambda_1}(T)$, yaitu

   a) Akan ditunjukkan $W \subset W_{\lambda_1}(T)$.

      Ambil $\vec{x} \in W$. Karena $T : W \rightarrow W$ dan $\lambda_1$ akar karakteristik dari $T$, maka berdasarkan Definisi 2.5.1 berlaku

$$T(\vec{x}) = \lambda_1\vec{x}$$

$$T(\vec{x}) = \lambda_1 \mathrm{I}(\vec{x})$$

$$(T - \lambda_1 I)(\vec{x}) = \vec{0}$$

      sehingga $\vec{x} \in W_{\lambda_1}(T)$. Jadi $W \subset W_{\lambda_1}(T)$.

   b) Akan ditunjukkan $W_{\lambda_1}(T) \subset W$.

      Jelas $W_{\lambda_1}(T) \subset W$ dari definisi $W_{\lambda_1}(T)$.

2) Untuk $m > 1$, maka terdapat $B = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\}$ basis dari $W$ dengan $n \leq m$. Karena $\dim(W) = n$, maka berdasarkan Akibat 2.5.2, $T$ mempunyai paling banyak $n$ akar karakteristik yang berbeda, yaitu $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$. Berdasarkan Definisi 2.5.1, berlaku $T(\vec{x}) = \lambda_i\vec{x}$, dengan $i = 1,2, \dots, n$.

   Pilih $i = 1$, sehingga berlaku $T(\vec{x}) = \lambda_1\vec{x}$

$$T(\vec{x}) = \lambda_1 \mathrm{I}(\vec{x})$$

$$(T-\lambda_1 I)(\vec{x})=\vec{0}\,.$$

Berdasarkan Lema 3.4, $(T-\lambda_1 I)$ adalah transformasi linier yang memetakan $W$ ke dirinya sendiri. Oleh karena itu berdasarkan Lema 2.7.3, maka berlaku

$$(T-\lambda_1 I)^n(W)\subseteq(T-\lambda_1 I)^{n-1}(W)\subseteq\cdots\subseteq(T-\lambda_1 I)(W)\ \text{ untuk }\ n>1.$$

Akibatnya

$$W_*(T-\lambda_1 I)=\bigcap_{e=1}^{n}(T-\lambda_1 I)^e\,(W)$$

$$=(T-\lambda_1 I)(W)\cap(T-\lambda_1 I)^2(W)\cap\ldots\cap(T-\lambda_1 I)(W)$$

$$=(T-\lambda_1 I)^n(W)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.5)$$

Selain itu berdasarkan Lema 2.7.2 , maka berlaku

$$(T-\lambda_1 I)^n(W)=(T-\lambda_1 I)^{n+1}(W)=\cdots=(T-\lambda_1 I)^{n+e}(W)$$

dengan $n>1,\ e\geq 1$..............................................................................(3.6)

Karena $(T-\lambda_1 I)\in L(V)$ dan $W$ dipetakan ke dirinya sendiri oleh $(T-\lambda_1 I)$ serta berdasarkan Lema 3.5 dan Lema 3.6 bahwa $W_0(T-\lambda_1 I)$ dan $W_*(T-\lambda_1 I)$ adalah subruang dari $W$, maka berdasarkan Teorema 3.2, $W$ dapat diuraikan sebagai :

$$W=W_0(T-\lambda_1 I)\oplus W_*(T-\lambda_1 I)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.7)$$

Karena $(T-\lambda_1 I)$ memiliki satu akar karakteristik maka $W_0(T-\lambda_1 I)$ memuat paling tidak satu vektor karakteristik sehingga dimensi dari $W_*(T-\lambda_1 I)$ kurang dari $\dim(W)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $W_*(T-\lambda_1 I)$ dipetakan ke dirinya sendiri oleh $T$.

Ambil $\vec{w}\in W_*(T-\lambda_1 I)$. Karena $W_*(T-\lambda_1 I)=(T-\lambda_1 I)^n(W)$, maka $\vec{w}=(T-\lambda_1 I)^n(\vec{w}_1)$ untuk suatu $\vec{w}_1\in W$. Namun $(T-\lambda_1 I)^n(\vec{w}_1)=\vec{0}$, sehingga $\vec{w} = \vec{0}$. Akibatnya $T(\vec{w}) = T(\vec{0}) = \vec{0}$, sehingga

$$W_*(T - \lambda_1 I) = \{\vec{0}\}.$$

Jadi $W_*(T - \lambda_1 I)$ dipetakan ke dirinya sendiri oleh $T$.

Selanjutnya karena $W_*(T - \lambda_1 I)$ adalah subruang dari $W$ dan berdimensi lebih kecil dari dim $(W)$ maka akan ditunjukkan bahwa berlaku

$$W_*(T - \lambda_1 I) = W_*(T - \lambda_1 I)_{\lambda_1}(T) \oplus \dots \oplus W_*(T - \lambda_1 I)_{\lambda_p}(T) \quad \text{.........(3.8)}$$

dengan $W_*(T - \lambda_1 I)_{\lambda_r}(T) = \{\vec{w} \in W_*(T - \lambda_1 I) | (T - \lambda_r I)^e(\vec{w}) = \vec{0}$ untuk suatu bilangan bulat positif $e\}$.

Berdasarkan Lema 3.7 maka berlaku

$$W_*(T - \lambda_1 I) = W_*(T - \lambda_1 I)_{\lambda_1}(T) \oplus \dots \oplus W_*(T - \lambda_1 I)_{\lambda_p}(T).$$

Langkah selanjutnya adalah menunjukkan $(T - \lambda_1 I)$ yang memetakan $W_*(T - \lambda_1 I)$ ke $W_*(T - \lambda_1 I)$ bersifat pada.

$$\begin{aligned}(T - \lambda_1 I)(W_*(T - \lambda_1 I)) &= (T - \lambda_1 I)((T - \lambda_1 I)^n(W)) \\ &= (T - \lambda_1 I)^{n+1}(W) \\ &= (T - \lambda_1 I)^n(W) \qquad \text{(dari persamaan (3.6))} \\ &= W_*(T - \lambda_1 I).\end{aligned}$$

Jadi $(T - \lambda_1 I)$ bersifat pada terhadap $W_*(T - \lambda_1 I)$. Karena $(T - \lambda_1 I) \in L(V)$ dan $(T - \lambda_1 I)$ bersifat pada terhadap $W_*(T - \lambda_1 I)$, maka berdasarkan Akibat 2.4.14, $(T - \lambda_1 I)$ adalah satu-satu terhadap $W_*(T - \lambda_1 I)$. Akibatnya $(T - \lambda_1 I)^n$ juga satu-satu terhadap $W_*(T - \lambda_1 I)$.

Selanjutnya dari

$W_*(T - \lambda_1 I)_{\lambda_r}(T) = \{\vec{w} \in W_*(T - \lambda_1 I) | (T - \lambda_r I)^e(\vec{w}) = \vec{0}$ untuk suatu bilangan bulat positif $e\}$, maka ditinjau untuk $r = 1$ dan $r \neq 1$.

a. Untuk $r = 1$,

$W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_1}(T) = \{\vec{w} \in W_*(T-\lambda_1 I) | (T-\lambda_1 I)^e(\vec{w}) = \vec{0}$ untuk suatu bilangan bulat positif $e$ (tergantung $\vec{w}$) $\}$.

Karena $(T-\lambda_1 I)^n$ satu-satu terhadap $W_*(T-\lambda_1 I)$ maka berdasarkan Akibat 2.4.14, solusi untuk $(T-\lambda_1 I)^n(\vec{w}) = \vec{0}$ hanyalah $\vec{w} = \vec{0}$, sehingga

$$W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_1}(T) = \{\vec{0}\}.$$

Jadi persamaan (3.8) menjadi

$$W_*(T-\lambda_1 I) = W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_2}(T) \oplus \dots \oplus W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_p}(T) \quad \text{........(3.9)}$$

Karena $W_{\lambda_1}(T) = \{\vec{w} \in W | (T-\lambda_1 I)^e(\vec{w}) = \vec{0}$ untuk suatu bilangan bulat positif $e$ (tergantung $\vec{w}$) $\}$.

dan $W_0(T-\lambda_1 I) = \{\vec{w} \in W | (T-\lambda_1 I)^e(\vec{w}) = \vec{0}$ untuk suatu bilangan bulat positif $e$ (tergantung $\vec{w}$) $\}$.

maka $W_{\lambda_1}(T) = W_0(T-\lambda_1 I)$, sehingga dari (3.7) dan (3.9) diperoleh

$$\begin{aligned} W &= W_0(T-\lambda_1 I) \oplus W_*(T-\lambda_1 I) \\ &= W_0(T-\lambda_1 I) \oplus W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_2}(T) \oplus \dots \oplus W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_p}(T) \\ &= W_{\lambda_1}(T) \oplus W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_2}(T) \oplus \dots \oplus W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_p}(T) \quad \text{......(3.10)} \end{aligned}$$

b. Untuk $r \neq 1$

Berdasarkan Definisi 3.1, $W_0(T) = W \cap V_0(T)$ sehingga akan ditunjukkan

$$W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_r}(T) = (T-\lambda_1 I)^n(W) \cap (T-\lambda_1 I)^n(W_{\lambda_r}(T)) \quad \text{.......(3.11)}$$

Sebelumnya, akan ditunjukkan terlebih dahulu $(T-\lambda_1 I)$ memetakan $W_{\lambda_r}(T)$ ke dirinya sendiri.

Ambil $\vec{x} \in W_{\lambda_r}(T)$, maka $\vec{x} \in W$ dan $(T-\lambda_r I)^n(\vec{x}) = \vec{0}$.

Karena $(T-\lambda_1 I): W \to W$, maka $(T-\lambda_1 I)(\vec{x}) \in W$.

$$(T-\lambda_1 I)(T-\lambda_r I)^n(\vec{x}) = (T-\lambda_1 I)(\vec{0}) = \vec{0}$$

sehingga $(T-\lambda_1 I)(\vec{x}) \in W_{\lambda_r}(T)$.

Jadi $(T-\lambda_1 I)$ memetakan $W_{\lambda_r}(T)$ ke dirinya sendiri.

Untuk tahap berikutnya akan ditunjukkan $(T-\lambda_1 I)$ yang memetakan $W_{\lambda_r}(T)$ ke dirinya sendiri dapat dibalik, sehingga berdasarkan Akibat 2.4.14 akan berlaku $(T-\lambda_1 I)(W_{\lambda_r}(T)) = W_{\lambda_r}(T)$.

Misalkan $(T-\lambda_1 I)$ tidak dapat dibalik maka terdapat vektor taknol $\vec{x} \in W_{\lambda_r}(T)$ sehingga $(T-\lambda_1 I)\vec{x} = \vec{0}$. Tetapi jika $\vec{x} \in W_{\lambda_r}(T)$ maka $(T-\lambda_r I)^n(\vec{x}) = \vec{0}$ untuk suatu $n \geq 1$.

Selanjutnya

$(T-\lambda_r I)(\vec{x}) = T(\vec{x}) - \lambda_r(\vec{x}) = \lambda_1(\vec{x}) - \lambda_r(\vec{x}) = (\lambda_1 - \lambda_r)(\vec{x})$,

$(T-\lambda_r I)^2(\vec{x}) = T(\lambda_1 - \lambda_r)(\vec{x}) - \lambda_r(\lambda_1 - \lambda_r)(\vec{x}) = (\lambda_1 - \lambda_r)^2(\vec{x})$,

$\vdots$

$(T-\lambda_r I)^n(\vec{x}) = \cdots = (\lambda_1 - \lambda_r)^n(\vec{x}), \quad (\lambda_1 - \lambda_r)^n(\vec{x}) \neq \vec{0}$.

Hal ini kontradiksi dengan pernyataan sebelumnya sehingga haruslah $(T-\lambda_1 I)$ dapat dibalik. Berdasarkan Akibat 2.4.14 maka berlaku

$$(T-\lambda_1 I)\left(W_{\lambda_r}(T)\right) = W_{\lambda_r}(T).$$

Akibatnya $(T-\lambda_1 I)^n$ juga bersifat pada.

Karena $(T-\lambda_r I)^n(W_{\lambda_r}(T)) = W_{\lambda_r}(T)$, maka persamaan (3.11) menjadi

$$W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_r}(T) = (T-\lambda_1 I)^n(W) \cap (W_{\lambda_r}(T)) \text{...............} (3.12)$$

Selanjutnya akan dibuktikan persamaan (3.11) tersebut.

1. Akan ditunjukkan $W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_r}(T) \subset (T-\lambda_1 I)^n(W) \cap (W_{\lambda_r}(T))$.

   Ambil $\vec{x} \in W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_r}(T)$. Berarti $\vec{x} \in W_*(T-\lambda_1 I)$ dan

$(T-\lambda_r I)^n(\vec{x})=\vec{0}$. Karena $(T-\lambda_r I)^n(\vec{x})=\vec{0}$ maka $\vec{x}\in W_{\lambda_r}(T)$ sehingga

$$\vec{x}\in (T-\lambda_1 I)^n(W)\cap W_{\lambda_r}(T))$$

Jadi $W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_r}(T)\subset (T-\lambda_1 I)^n(W)\cap (W_{\lambda_r}(T))$.

2. Akan ditunjukkan $W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_r}(T)\supset (T-\lambda_1 I)^n(W)\cap (W_{\lambda_r}(T))$

   Ambil $\vec{x}\in (T-\lambda_1 I)^n(W)\cap (W_{\lambda_r}(T))$Berarti $\vec{x}\in (T-\lambda_1 I)^n(W)$ dan $\vec{x}\in W_{\lambda_r}(T)$. Karena $\vec{x}\in (T-\lambda_1 I)^n(W)$ diperoleh

   $$\vec{x}=(T-\lambda_1 I)^n(\vec{w}_1) \text{ untuk suatu } \vec{w}_1\in W.$$

   Karena $\vec{x}\in W_{\lambda_r}(T)$ berarti$(T-\lambda_r I)^n(\vec{x})=\vec{0}$, sehingga

   $$(T-\lambda_r I)^n(\vec{x})=\vec{0}$$

   $$(T-\lambda_r I)^n(T-\lambda_1 I)^n(\vec{w}_1)=\vec{0},$$

   akibatnya $\vec{x}\in W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_r}(T)$.

   Jadi $W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_r}(T)\supset (T-\lambda_1 I)^n(W)\cap (W_{\lambda_r}(T)$

Dari 1 dan 2 diperoleh

$$W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_r}(T)=(T-\lambda_1 I)^n(W)\cap (T-\lambda_1 I)^n(W_{\lambda_r}(T)$$

Selanjutnya karena $W$ dan $W_{\lambda_r}(T)$ dipetakan ke dirinya sendiri oleh $(T-\lambda_1 I)$, maka $(T-\lambda_1 I)^n(W)\subset W$ dan $(T-\lambda_1 I)^n\left(W_{\lambda_r}(T)\right)=W_{\lambda_r}(T)$.

Klaim $(T-\lambda_1 I)^n\left(W_{\lambda_r}(T)\right)\subset (T-\lambda_1 I)^n(W)$,

akibatnya (3.11) menjadi $W_*(T-\lambda_1 I)_{\lambda_r}(T)=(T-\lambda_1 I)^n\left(W_{\lambda_r}(T)\right)$.

Bukti klaim:

Ambil $\vec{x}\in (T-\lambda_1 I)^n\left(W_{\lambda_r}(T)\right)$, maka $\vec{x}=(T-\lambda_1 I)^n(\vec{w}_1)$ untuk suatu $w_1\in W_{\lambda_r}(T)$. Karena $W_{\lambda_r}(T)$ subruang dari $W$, maka $\vec{w}_1\in W$.

Jadi $\vec{x} \in (T - \lambda_1 I)^n(W)$.

Akibatnya

$$(T - \lambda_1 I)^n(W) \supset (T - \lambda_1 I)^n \left(W_{\lambda_r}(T)\right) = W_{\lambda_r}(T),$$

sehingga

$$W_*(T - \lambda_1 I)_{\lambda_r}(T) = ((T - \lambda_1 I)^n(W)) \cap (W_{\lambda_r}(T))$$

$$= W_{\lambda_r}(T), \quad \text{untuk setiap } r > 1 \ldots\ldots\ldots (3.13)$$

Akibatnya (3.10) menjadi

$$W = W_{\lambda_1}(T) \oplus W_{\lambda_2}(T) \oplus \ldots \oplus W_{\lambda_p}(T) \qquad \blacksquare$$

# BAB IV

# KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab III, maka diperoleh beberapa kesimpulan yaitu:

1) Ruang null yang diperumum dari $T \in L(V)$ adalah subruang

   $V_0(T) = \{\vec{v} \in V | T^e(\vec{v}) = \vec{0}$ untuk suatu bilangan bulat positif $e$ (tergantung $\vec{v}$)$\}$.

   Dengan cara serupa jika $W$ adalah subruang dari $V$ dipetakan ke dirinya sendiri oleh $T$, maka ruang null yang diperumum dari $T$ pada $W$ adalah subruang

   $W_0(T) = \{\vec{v} \in W | T^e(\vec{v}) = \vec{0}$ untuk suatu bilangan bulat positif $e$ (tergantung $\vec{v}$)$\}$.

2) Misalkan $W_0(T)$ ruang null diperumum untuk subruang $W$ dan $W_*(T)$ adalah irisan $T^e(W)$ untuk semua bilangan bulat positif $e$. Maka

$$W = W_0(T) \oplus W_*(T).$$

3) Subruang karakteristik yang diperumum dari $T$ di $W$ pada $\lambda$ ditulis $W_\lambda(T)$ didefinisikan

   $W_\lambda(T) = \{\vec{w} \in W | (T - \lambda I)^e(\vec{w}) = \vec{0}$ untuk suatu bilangan bulat positif $e$ (tergantung $\vec{w}$)$\}$.

4) Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ adalah akar karakteristik yang berbeda dari $T \in L(V)$. Subruang $W$ adalah jumlah langsung dari subruang-subruang karakteristik yang diperumum dari $T$ di $W$ pada $\lambda_i$ ditulis $W_{\lambda_i}(T)$, $i = 1,2, \ldots, p$. Ditulis

$$W = W_{\lambda_1}(T) \oplus \ldots \oplus W_{\lambda_p}(T).$$

## DAFTAR PUSTAKA


[1] Arifin, Achmad. 2001. *Aljabar Linier* Edisi Kedua. ITB, Bandung.

[2] Anton, Howard and Chris, Rorres. 2004. *Aljabar Linier Elementer* Versi Aplikasi Edisi Kedelapan. Erlangga , Jakarta.

[3] Hefferon, Jim. 2000. *Linear Algebra.* Vermont , USA.

[4] Herstein, I.N and Winter, David J. 1988. *Matrix Theory and Linear Algebra.* Macmillan Publishing Company, New York.

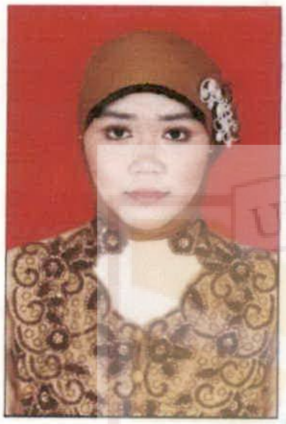
[5] Herstein, I.N. 1999-2000. *Topics in Algebra.* Replika Press Pvt Ltd, India.

[6] Jacob, Bill. 1990. *Linear Algebra.* W.H.Freeman and Company , New York.

[7] Purcell, Edwin J, D. Varberg, and S.E.Rigdon. 2003. *Kalkulus* Edisi Kedelapan. Erlangga, Jakarta.

[8] Steven, Roman. 1992. *Graduate Texts in Mathematics: Advanced Linear Algebra.* Sringer-Verlag, New York.

## RIWAYAT HIDUP PENULIS



Penulis bernama Agustia Wijayanti, dilahirkan di Arga Makmur pada tanggal 02 Agustus 1989, anak keempat dari empat bersaudara dari pasangan Amsyar Fuddin, SH (Alm) dan Yauna. Penulis menamatkan pendidikan Taman Kanak-kanak pada tahun 1995, Sekolah Dasar di SDN 17 Curup pada tahun 2001, SMPN 1 Curup pada tahun 2004, dan SMAN 1 Curup pada tahun 2007. Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur jalur PMDK.

Selama menjadi mahasiswa di jurusan Matematika FMIPA UNAND, penulis pernah memperoleh peringkat pertama pada lomba ONMIPA 2010 bidang Matematika tingkat Universitas Andalas dan mengikuti lomba ONMIPA 2010 bidang Matematika tingkat Regional yang dilaksanakan di Universitas Riau, Pekan Baru. Penulis merupakan anggota Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) Universitas Andalas dan pernah menjadi panitia Pekan Seni Bermatematika, dan Himatika Goes To School. Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN-PPM) pada tahun 2010 di Korong Kampung Tangah Kenagarian Parit Malintang Kecamatan Enam Lingkung Kabupaten Padang Pariaman.