EKSISTENSI BAGIA IMAJINER PADA INTEGRAL FORMULA INVERSI FUNGSI KARAKTERISTIK

SKRIPSI

YULIANA PERMATASARI
0810432035

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2012

KATA PENGANTAR

Syukur alhamdulillah, segala puji bagi Allah, Tuhan semesta alam, yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul "*Eksistensi Bagian Imajiner Pada Integral Formula Inversi Fungsi Karakteristik*". Shalawat dan salam semoga senantiasa tercurahkan kepada jujungan kita, Nabi Muhammad SAW, yang telah menebarkan ilmu dan iman dalam cahaya Islam yang beliau bawa. Penulis menyampaikan ungkapan terima kasih dan penghargaan yang tulus kepada yang terhormat :

1. Bapak Dr. Syafrizal Sy, selaku ketua jurusan pada jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas.

2. Bapak Dr. Dodi Devianto dan Dr. Admi Nazra selaku pembimbing yang telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, pengarahan, dan saran kepada penulis sampai selesainya skripsi ini.

3. Ibu Hazmira Yozza, M.Si, Ibu Dr. Lyra Yulianti, dan Bapak Dr. Syafrizal Sy sebagai penguji yang telah memberikan pengarahan dan saran untuk perbaikan penulisan skripsi ini.

4. Bapak Budi Rudianto, M.Si selaku pembimbing akademis yang telah memberikan nasehat dan motivasi kepada penulis.

5. Seluruh staf pengajar jurusan Matematika Universitas Andalas yang telah banyak memberikan ilmu yang bermanfaat bagi penulis dan seluruh staf tata usaha jurusan Matematika yang telah banyak membantu selama penulis melaksanakan studi di jurusan Matematika Universitas Andalas.

6. Seluruh teman-teman yang telah mendukung dan memberikan semangat kepada penulis terutama teman-teman angkatan 2008 (O'Laplace), serta kakak-kakak senior dan adik-adik junior yang tidak bisa disebutkan satu

persatu di Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) jurusan Matematika Universitas Andalas.

7. Semua pihak yang telah membantu penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Selesainya skripsi ini tidak lepas dari do'a yang tulus, motivasi, dorongan semangat, dan bantuan yang senantiasa diberikan oleh kedua orang tua, ayahanda Mukarramah Indra dan ibunda Ns. Ria Ningsih, S.Kep, ayunda Eka Widyaningsih, S.Pd.I, serta adindaku Intan Rosma Indra dan Berliana Nilam Indra, dan seluruh keluarga besar penulis.

Penulis menyadari penulisan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis mengharapkan kritik dan saran agar kedepannya diperoleh hasil yang lebih baik. Penulis berharap agar skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkannya. Amin.

Padang, Agustus 2012

Yuliana Permatasari

ABSTRAK

Formula inversi dari fungsi karakteristik $\varphi_X(t)$ dengan fungsi distribusi F adalah

$$F(x) - F(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{exp(-itx) - 1}{-it} \varphi_X(t)dt$$

untuk setiap $-\infty < x < \infty$.
Syarat perlu dan cukup untuk

$$\lim_{T\to\infty} Im\left(\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{T} \frac{exp(-itx) - 1}{-it} \varphi_X(t)dt\right)$$

ada adalah

$$lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{G(u,x) - (u,0)}{u} du$$

ada, dimana

$$G(u,x) = F(u+x) - F(-u+x)$$

Kata kunci: *fungsi distribusi, fungsi karakteristik, dan formula inversi.*

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Fungsi karakteristik dari suatu peubah acak X dengan fungsi distribusi F dinotasikan sebagai $\varphi_X(t)$ dan didefinisikan sebagai berikut

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}],$$

dimana $e^{itX} = \cos(tX) + i\sin(tX)$. Jelas terlihat bahwa fungsi karakteristik mempunyai kesamaan dengan fungsi pembangkit momen $M_X(t) = E[e^{tX}]$ dengan menambahkan 'i' pada eksponennya dimana i adalah imajiner.

Samahalnya dengan fungsi pembangkit momen, fungsi karakteristik juga digunakan untuk menghitung momen dari suatu peubah acak X, selain itu fungsi karakteristik juga dapat digunakan untuk menentukan fungsi distribusi dari suatu peubah acak. Berbeda dengan fungsi pembangkit lainnya, fungsi karakteristik selalu ada untuk setiap sebaran peluang, karena

$$|\varphi_X(t)| = |E[e^{itX}]| \leq E[|e^{itX}|] = E[1] < \infty.$$

Lukacs (1970) menjelaskan bahwa fungsi karakteristik secara tunggal menentukan sebaran peluang yang bersesuaian dengan peubah acaknya. Jadi setiap sebaran peluang memiliki fungsi karakteristik yang berbeda. Ketunggalan fungsi karakteristik merupakan akibat dari teorema inversi. Kawata (1969) menjelaskan bahwa dengan menggunakan teorema inversi dapat diperoleh fungsi distribusi $F(x)$ dari fungsi karakteristik $\varphi_X(t)$, yaitu

$$F(x) - F(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx} - 1}{-it} \varphi_X(t)dt. \qquad (1.1.1)$$

Formula inversi (1.1.1) dapat dipisahkan menjadi dua bagian, yaitu bagian real dan bagian imajiner. Karena bagian imajiner pada $\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx}-1}{-it} \varphi_X(t)dt$ tidak selalu ada, maka menarik bagi penulis membahas kajian eksistensi integral pada formula inversi (1.1.1) untuk bagian imajiner.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, yang menjadi masalah dalam penelitian ini adalah pengkajian eksistensi bagian imajiner pada integral formula inversi fungsi karakteristik.

1.3 Tujuan

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji eksistensi integral untuk bagian imajiner pada formula inversi fungsi karakteristik.

1.4 Sistematika Penulisan

Dalam tulisan ini, akan dibagi atas 4 Bab, yaitu Bab I Pendahuluan, yang berisi: latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan. Bab II Landasan Teori, berisi: materi dasar dan materi penunjang. Bab III Pembahasan eksistensi integral pada formula inversi fungsi karakteristik. Bab 4 Penutup, berisi: kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diuraikan beberapa definisi, teorema, lema, dan proposisi yang akan digunakan untuk menunjukkan eksistensi integral pada formula inversi fungsi karakteristik.

2.1 Peubah Acak dan Fungsi Distribusi

Berikut ini akan diberikan beberapa definisi dan teorema dari peubah acak dan fungsi distribusi.

Definisi 2.1.1. [1] *Suatu peubah acak, notasikan sebagai X, adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada suatu ruang contoh S, yang menghubungkan setiap titik contoh e dalam S dengan suatu bilangan riil x, atau dapat dituliskan sebagai $X(e) = x$.*

Definisi 2.1.2. [1] *Jika himpunan dari semua nilai yang mungkin bagi peubah acak X adalah himpunan tercacah $x_1, x_2, \cdots, x_n$ atau $x_1, x_2, \cdots$ maka X dinamakan peubah acak diskrit. Fungsi*

$$f(x) = P[X = x],\ x = x_1, x_2, \ldots$$

yang memasangkan setiap nilai x dengan nilai peluang dinamakan sebagai fungsi kepekatan peluang diskrit. Untuk selanjutnya ditulis sebagai fkp diskrit.

Definisi 2.1.3. [1] *Fungsi sebaran kumulatif dari peubah acak X didefinisikan untuk setiap nilai riil x sebagai*

$$F(x) = P[X \leq x].$$

Untuk selanjutnya ditulis sebagai fungsi distribusi.

Definisi 2.1.4. [1] *Suatu peubah acak X dikatakan peubah acak kontinu jika terdapat suatu fungsi $f(x)$ yang dinamakan fkp kontinu sehingga fungsi distribusi dapat dinyatakan sebagai*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad dan \quad f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = F'(x).$$

Teorema 2.1.5. [1] *Suatu fungsi $f(x)$ merupakan fkp diskrit jika untuk suatu himpunan bilangan riil tak hingga yang tercacah $x_1, x_2, \cdots$ terpenuhi kedua sifat berikut*

$$f(x_i) \geq 0,$$

dan

$$\textstyle\sum_{\forall x_i} f(x_i) = 1.$$

Teorema 2.1.6. [1] *Fungsi $f(x)$ adalah fkp kontinu bagi suatu peubah acak yang kontinu jika dan hanya jika memenuhi sifat-sifat berikut*

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

dan

$$\textstyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

2.2 Nilai Harapan

Definisi 2.2.7. [8] *Misal X peubah acak, nilai harapan dari X ditulis $E(X)$ didefinisikan sebagai*

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x).$$

2.3 Integral Riemann

Teorema 2.3.8. [7] *(Teorema Keintegrasian) Jika f terbatas pada $[a,b]$ dan f kontinu disana kecuali pada sejumlah titik yang berhingga, maka f terintegrasikan pada $[a,b]$. Khususnya, jika f kontinu pada seluruh selang $[a,b]$, maka f terintegrasikan pada $[a,b]$.*

Misalkan f suatu fungsi yang didefinisikan pada selang tertutup $[a,b]$. Partisi interval $[a,b]$ atas n bagian (tidak perlu sama lebar) $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ dan misalkan $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$. Pada setiap subinterval $[x_{i-1}, x_i]$, pilih titik $\bar{x}_i, i = 1, 2, ..., n$.

Definisi 2.3.9. [7] *Misalkan f suatu fungsi yang didefinisikan pada selang tertutup $[a,b]$. Jika*

$$\lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

ada, maka f terintegrasi pada $[a,b]$. Lebih lanjut $\int_a^b f(x)dx$, disebut integral tentu (integral Riemann) f dari a ke b, diberikan oleh

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) \Delta x_i.$$

Lema 2.3.10. *(Lema Riemann-Lebesgue) Misal f terintegrasi pada $[a,b]$ maka*

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_a^b f(t)cos(\lambda t)dt = 0.$$

Teorema 2.3.11. [2] *(Teorema Nilai Tengah) Misalkan f kontinu pada $I := [a,b]$ dan misalkan p terintegrasi pada I dan $p(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in I$. Terdapat $c \in I$ sedemikian sehingga*

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = f(c)\int_a^b p(x)dx.$$

Teorema 2.3.12. *(Teorema Nilai Tengah Kedua) Jika $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fungsi naik dan $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ fungsi terintegral, maka terdapat $\xi \in (a,b)$ sedemikian sehingga*

$$\int_a^b g(t)d\beta(t) = g(a)\int_a^\xi \beta(t)dt + g(b)\int_\xi^b \beta(t)dt.$$

2.4 Fungsi Karakteristik

Definisi 2.4.13. [6] *Jika X suatu peubah acak dengan fungsi kepekatan peluang $f(x)$ dan fungsi sebaran kumulatif $F(x)$ maka fungsi karakteristik $\varphi_X(t)$ dari peubah acak X didefinisikan sebagai berikut*

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = \int e^{itx}dF(x),$$

dimana $t \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$ dan $e^{itX} = \cos tX + i\sin tX$.

Proposisi 2.4.14. [6] *Misalkan $F(x)$ fungsi distribusi dengan fungsi karakteristik $\varphi(t)$, maka:*

1. $\varphi_X(0) = 1$

2. $|\varphi_X(t)| \leq 1$

3. $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$.

Proposisi 2.4.15. [6] *Fungsi karakteristik adalah kontinu seragam pada barisan bilangan riil.*

Teorema 2.4.16. [6] *(Formula Inversi) Misalkan* $F(x) = P(X \leq x)$*, dan* $\varphi(t)$ *fungsi karakteristik dari fungsi distribusi* $F(x)$*. Jika* $P(X = a) = P(X = b) = 0$*, maka*

$$F(b) - F(a) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{exp(-ita) - exp(-itb)}{it} \varphi(t) dt.$$

2.5 Simbol Landau

Misalkan f dan g adalah fungi-fungsi yang terdefinisi dalam lingkungan x_0. Fungsi f didefinisikan sebagai $f(x) = O(g(x))$ untuk $x \to x_0$ jika terdapat suatu konstanta M sedemikian sehingga

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \text{ untuk } x \to x_0.$$

Dengan cara yang sama fungsi f didefinisikan sebagai $f(x) = o(g(x))$ untuk $x \to x_0$ sedemikian sehingga

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \to 0 \text{ untuk } x \to x_0.$$

BAB III

EKSISTENSI BAGIAN IMAJINER PADA INTEGRAL FORMULA INVERSI FUNGSI KARAKTERISTIK

Fungsi karakteristik dari suatu peubah acak X dengan sebaran distribusi F didefinisikan sebagai berikut

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}].$$

Lukacs (1970) menjelaskan bahwa fungsi karakteristik secara tunggal menentukan sebaran peluang yang sesuai. Ketunggalan ini merupakan akibat dari formula inversi. Menurut Kawata (1969), fungsi karakteristik $\varphi_X(t)$ dengan fungsi distribusi F memiliki formula inversi sebagai berikut

$$F(x) - F(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{exp(-itx) - 1}{-it} \varphi_X(t)dt \tag{3.0.1}$$

untuk setiap $-\infty < x < \infty$.

Integral pada bagian kanan persamaan (3.0.1) dapat dipisahkan menjadi bagian real dan bagian imajiner, yaitu

$$Re\left(\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{T} \frac{exp(-itx) - 1}{-it} \varphi_X(t)dt\right) = Re\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{0} \frac{exp(-itx) - 1}{-it} \varphi_X(t)dt\right)$$

dan

$$Im\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^T \frac{exp(-itx)-1}{-it}\varphi_X(t)dt\right) = -Im\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^0 \frac{exp(-itx)-1}{-it}\varphi_X(t)dt\right). \tag{3.0.2}$$

Teorema 3.0.1. [5] *Syarat perlu dan cukup untuk*

$$\lim_{T\to\infty} Im\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^T \frac{exp(-itx)-1}{-it}\varphi_X(t)dt\right) \tag{3.0.3}$$

ada adalah

$$lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^\infty \frac{G(u,x)-(u,0)}{u}du \tag{3.0.4}$$

ada, dimana

$$G(u,x) = F(u+x) - F(-u+x) \tag{3.0.5}$$

Bukti. Perhatikan bahwa bentuk integral (3.0.4) ada pada lingkungan tak hingga. Kemudian misalkan

$$G(u,x) - G(u,0) = [F(u+x) - F(u)] - [F(-u+x) - F(-u)] \tag{3.0.6}$$

dan

$$F(x+u) - F(u) \in L(-\infty,\infty).$$

Misalkan

$$I(x,T) = Im\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^T \frac{exp(-itx)-1}{-itx}\varphi_X(t)dt\right).$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^T \frac{exp(-itx)-1}{-it}\varphi_X(t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^T \frac{\cos tx - i\sin tx - 1}{-it}\varphi_X(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^T \frac{\cos tx - i\sin tx - 1}{-it}\cdot\frac{i}{i}\varphi_X(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^T \frac{i\cos tx + \sin tx - i}{t}\varphi_X(t)dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^T \frac{i\cos tx + \sin tx - i}{t}(\cos ut + i\sin ut)dtdF(u)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^T \frac{i\cos xt\cos ut - \cos xt\sin ut + \sin xt\cos ut}{t}\\
&+ \frac{i\sin xt\sin ut - i\cos ut + \sin ut}{t}dF(u)dt.
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh bahwa

$$
\begin{aligned}
I(x,T) &= Im\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^T \frac{exp(-itx)-1}{-it}\varphi(t)dt\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^T \frac{\sin xt\sin ut - \cos ut + \cos xt\cos ut}{t}dtdF(u)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^T \frac{\cos(u-x)t - \cos ut}{t}dtdF(u)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^T -\frac{1}{T}(\cos ut - \cos(u-x)t)dtdF(u)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^T\int_{u-x}^{u} \sin tv\ dvdtdF(u)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{u-x}^{u}\int_0^T \sin vt\ dtdvdF(u)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{u-x}^{u} \frac{1-\cos vT}{v}dvdF(u)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos vT}{v}dv\int_v^{v+x} dF(u)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{1-\cos vT}{v}(F(v+x)-F(v)-(F(-v+x)-F(-v)))dv\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} [G(v,x)-G(v,0)]\frac{1-\cos vT}{v}dv.
\end{aligned}
$$

Kemudian kita partisi batas integral $I(x,T)$ menjadi

$$
\begin{aligned}
I(x,T) &= \tfrac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\varepsilon} \tfrac{[G(v,x)-G(v,0)]}{v}(1-\cos vT)dv + \int_{\varepsilon}^{\infty} \tfrac{[G(v,x)-G(v,0)]}{v}(1-\cos vT)dv\right]\\
&= \tfrac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\varepsilon} \tfrac{[G(v,x)-G(v,0)]}{v}(1-\cos vT)dv + \int_{\varepsilon}^{\infty} \tfrac{[G(v,x)-G(v,0)]}{v} - \int_{\varepsilon}^{\infty} \tfrac{(\cos vT)[G(v,x)-G(v,0)]}{v}\right]
\end{aligned}
$$

Berdasarkan lema *Riemann-Lebesgue* maka

$$\lim_{T\to\infty}\int_{\varepsilon}^{\infty}[G(v,x)-G(v,0)]\frac{\cos vT}{v}dv = 0 \textit{ untuk setiap } \varepsilon > 0.$$

Untuk $\varepsilon > 0$ sebarang dan $T \to 0$ dapat ditulis bahwa

$$I(x,T) = \int_0^{\varepsilon}\frac{[G(v,x)-G(v,0)]}{v}(\cos vT)dv + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{[G(v,x)-G(v,0)]}{v}dv + o(1) \tag{3.0.7}$$

($\Rightarrow$) Misalkan terdapat sebarang $\varepsilon > 0$ dan

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{G(v,x)-G(v,0)}{v}(1-\cos vT)dv$$

$$= \int_0^{1/T}\frac{G(v,x)-G(v,0)}{v}(1-\cos vT)dv + \int_{1/T}^{\varepsilon}\frac{G(v,x)-G(v,0)}{v}(1-\cos vT)dv$$

$$= K_1 + K_2, \tag{3.0.8}$$

untuk $K_1 = \int_0^{1/T}\frac{G(v,x)-G(v,0)}{v}(1-\cos vT)dv$ dan $K_2 = \int_{1/T}^{\varepsilon}\frac{G(v,x)-G(v,0)}{v}(1-\cos vT)dv$

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_0^{1/T} G(v,x)-G(v,0)\frac{1-\cos vT}{v}dv \\ &\leq \int_0^{1/T}|G(v,x)-G(v,0)|\frac{1-\cos vT}{v}dv \\ &\leq CT\int_0^{1/T}|G(v,x)-G(v,0)|dv \end{aligned} \tag{3.0.9}$$

untuk suatu konstanta C.

Karena F fungsi tak turun maka $\lim_{v\to 0}[G(v,x)-G(v,0)] = 0$, sehingga $CT\int_0^{1/T}|G(v,x)-G(v,0)|dv \to 0$ untuk $v \to 0^+$. Jadi dapat diperoleh

$$K_1 = o(1) \quad \textit{untuk} \quad T \to \infty. \tag{3.0.10}$$

Definisikan

$$\chi(v) = G(v,x) - G(v,0). \tag{3.0.11}$$

Pilih $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $|\chi(v)| < \delta$ untuk $|v| \leq \varepsilon$, untuk sebarang δ. Karena $\chi(v)/v$ terbatas pada $[1/T, \varepsilon]$, dengan menggunakan Teorema Nilai Tengah Kedua diperoleh

$$\begin{aligned}
K_2 &= \int_{1/T}^{\varepsilon} G(v,x) - G(v,0)\frac{1-\cos vT}{v}dv \\
&= \int_{1/T}^{\varepsilon} \chi(v)\frac{1-\cos vT}{v}dv = \int_{1/T}^{\varepsilon} \frac{\chi(v)}{v}dv - \int_{1/T}^{\varepsilon} \frac{\chi(v)}{v}\cos vT dv \\
&\leq \int_{1/T}^{\varepsilon} \frac{\chi(v)}{v} - T\chi\left(\frac{1}{T}\right)\int_{1/T}^{\xi} \cos vT dv - \left(\frac{\chi(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\int_{\xi}^{\varepsilon} \cos vT dv
\end{aligned} \tag{3.0.12}$$

untuk $1/T < \xi < \varepsilon$. Maka

$$\left|K_2 - \int_{1/T}^{\varepsilon} \frac{\chi(v)}{v}dv\right| \leq 2\chi\left(\frac{1}{T}\right) + 2\chi(\varepsilon) \leq 4\delta \tag{3.0.13}$$

Oleh karena (3.0.7) dan (3.0.8) diperoleh

$$\left|I(x,T) - \frac{1}{2\pi}\int_{1/T}^{\infty} \frac{\chi(v)}{v}dv\right| \leq \frac{2\delta}{\pi} + o(1). \tag{3.0.14}$$

Ini menunjukkan syarat cukup dan sekaligus menyatakan (3.0.3) ada.

$(\Leftarrow)$ Misalkan $\chi(v)$ didefinisikan seperti (3.0.11) dapat dilihat bahwa $\lim_{v\to 0^+} \chi(v) = c$. Jika $c \neq 0$, maka dengan menggunakan (3.0.7)

$$\begin{aligned}
I(x,T) &= \int_0^{\varepsilon} \frac{[G(v,x) - G(v,0)]}{v}(cosvT)dv + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{[G(v,x) - G(v,0)]}{v}dv + o(1) \\
&= \int_0^{\varepsilon} \frac{\chi(v)}{v}(1 - cosvT)dv + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\chi(v)}{v}dv + o(1)
\end{aligned}$$

diperoleh

$$I(x,T) - c\int_0^{\varepsilon} \frac{1-\cos vT}{v}dv = \int_0^{\varepsilon} \frac{[\chi(v) - c](1-\cos vT)}{v}dv + \int_0^{\infty} \frac{\chi(v)}{v}dv + o(1). \tag{3.0.15}$$

Perhatikan bahwa

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{[\chi(v) - c](1 - \cos vT)}{v} dv = \int_0^{1/T} \frac{[\chi(v) - c](1 - \cos vT)}{v} dv + \int_{1/T}^{\varepsilon} \frac{[\chi(v) - c](1 - \cos vT)}{v} dv$$

$$= L_1 + L_2,$$

untuk $L_1 = \int_0^{1/T} \frac{[\chi(v)-c](1-\cos vT)}{v} dv$ dan $L_2 = \int_{1/T}^{\varepsilon} \frac{[\chi(v)-c](1-\cos vT)}{v} dv$

Diperoleh

$$L_1 = \int_0^{1/T} \frac{[\chi(v) - c](1 - \cos vT)}{v} dv$$

$$|L_1| \leq \int_0^{1/T} |\chi(v) - c| \frac{(1 - \cos vT)}{v} dv$$

$$|L_1| \leq CT \int_0^{1/T} |\chi(v) - c| dv$$

Dari (3.0.15) diperoleh

$$\left| I(x, T) - \frac{c}{2\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{1 - \cos vT}{v} dv - \frac{1}{2\pi} \int_{1/T}^{\varepsilon} \frac{\chi(v)}{v} dv - \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\chi(v)}{v} dv \right| \leq C_1 \delta + o(1), \tag{3.0.16}$$

untuk suatu konstanta C_1 .

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{1 - cos\ vT}{v} dv = 2 \int_0^{\varepsilon T} \frac{sin^2 v/2}{v} dv \geq C_2 \ \log\ \varepsilon T, \tag{3.0.17}$$

untuk suatu konstanta C_2.

Pilih sebarang $\varepsilon > 0$, diberikan $\eta < C_2$ sedemikian sehingga $|\chi(v) - c| < \eta$ untuk $0 < v < \varepsilon$. Maka

$$\left| \int_{1/T}^{\varepsilon} \frac{\chi(v) - c}{v} dv \right| \leq \eta \log \varepsilon T. \tag{3.0.18}$$

Jika limit $I(x, T)$ ada untuk $T \to \infty$, maka karena (3.0.17) dan (3.0.18), implikasi (3.0.16) kontradiksi. Oleh karena itu maka $c = 0$, sehingga

$$\left| I(x, T) - \frac{1}{2\pi} \int_{1/T}^{\infty} \frac{\chi(v)}{v} dv \right| \leq C_1 \delta + o(1). \tag{3.0.19}$$

Syarat perlu terbukti. ■

Contoh. Fungsi karakteristik dari sebaran $U(0,1)$ adalah $\varphi_X(t) = i(1-exp(it))/t$

dengan fungsi distribusi $F(x) = x$.

Maka formula inversi dari sebaran $U(0,1)$ adalah

$$\begin{aligned}
F(x) - F(0) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{exp(-itx)-1}{-it}\varphi_X(t)dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{exp(-itx)-1}{-it}\frac{i(i-exp(it))}{t}dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{(exp(-itx-1))(-1+exp(it))}{t^2}dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{-exp(-itx)+exp(i(t-tx))+1-exp(it)}{t^2}dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{-\cos tx + i\sin tx + \cos(t-tx) + i\sin(t-tx) + 1 - \cos t + i\sin t}{t^2}dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{\cos(t-tx)-\cos tx - \cos t + 1}{t^2}dt \\
&\quad + i\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{\sin tx + \sin(t-tx) + \sin t}{t^2}dt
\end{aligned}$$

Diperoleh

$$I(x,T) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{T} \frac{\sin tx + \sin(t-tx) + \sin t}{t^2}dt$$

Kemudian akan ditunjukkan

$$\lim_{T\to\infty} Im\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^T \frac{exp(-itx)-1}{-it}\varphi_X(t)dt\right) = \int_0^\infty \frac{G(u,x)-G(u,0)}{u}du$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
I(x,T) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{T} \frac{\sin tx + \sin(t-tx) + \sin t}{t^2}dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\frac{-\cos Tx + \cos(-T+Tx) + xT\sin T + 1 - \cos T}{t^3}dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

dan

$$G(u,x) = F(u+x) - F(-u+x)$$

$$= 2u$$

$$G(u,0) = F(u+0) - F(-u+0)$$

$$= 2u$$

Sedemikian sehingga diperoleh

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{G(u,x) - G(u,0)}{u} du = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{2u - 2u}{u} du$$

$$= 0$$

Dalam hal ini dapat dilihat bahwa,

$$\lim_{T \to \infty} Im \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^T \frac{exp(-itx) - 1}{-it} \varphi_X(t) dt \right) = lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{\infty} \frac{G(u,x) - G(u,0)}{u} du$$

BAB IV
KESIMPULAN

Suatu fungsi karakteristik dari peubah acak X dengan sebaran distribusi F didefinisikan sebagai

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}],$$

memiliki formulasi inversi

$$F(x) - F(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{exp(-itx) - 1}{-it} \varphi_X(t) dt.$$

Formulasi inversi dapat dibagi menjadi dua bagian, yaitu bagian real dan bagian imajiner. Bagian imajiner dari formula inversi

$$I(x, T) = \lim_{T\to\infty} Im \left(\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{T} \frac{exp(-itx) - 1}{-it} \varphi_X(t) dt \right)$$

ada jika dan hanya jika

$$lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{G(u, x) - (u, 0)}{u} du$$

ada.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bain, Lee J and Max. E. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics Second Edition* . Duxbury Press, California.

[2] Bartle, R.G. dan Donald R.S. 1927. *Introduction to Real Analysis Second Edition* . John Willey and Sons, Inc, Singapore.

[3] Budhi, W.S. 2001. *Kalkulus Peubah Banyak dan Penggunaannya* . Penerbit ITB, Bandung.

[4] Jain, P.K. dan V.P. Gupta. 1976. *Lebesgue Measure and Integration* . Wiley Eastern Limited, New Delhi.

[5] Kawata, T. 1969. *On The Inversion Formula For The Characteristic Function.* Pasific Journal of Mathematics .

[6] Lukacs, Eugene. 1970. *Characteristic Function. Edisi Ke-2.* Butler dan Tanner. Frome and London.

[7] Purcel, E. J. dan Dale Varberg. 2001. *Kalkulus , alih bahasa I Nyoman Susila. Edisi ke-8.* Interaksa, Batam .

[8] Rao, M.M dan Randall J.Swift. 2006. *Probability with Applications Second Edition* . Springer, Unite States of America.