HUBANGAN ANTARA KETERCAPAIAN DAN KETERKONTROLAN SISTEM LINIER KONTINU BERGANTUNG TERHADAP WAKTU

SKRIPSI

VIRZA GAVINDA NZ
0810431004

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2012

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa:

Nama	:	VIRZA GAVINDA NZ
No. Buku Pokok	:	0810431004
Jurusan	:	Matematika
Bidang	:	Matematika Terapan
Judul Skripsi	:	**Hubungan Antara Ketercapaian dan Keterkontrolan Sistem Linier Kontinu Bergantung Terhadap Waktu**

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal **6 Januari 2012** berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing,

1.

Dr. Muhafzan
NIP. 19670602 199302 1 001

2.

Efendi, M.Si
NIP. 19780717 200212 1 002

Penguji,

1.

Dr. Syafrizal Sy
NIP. 19670807 199309 1 001

2.

Dr. Susila Bahri
NIP. 19680303 199302 2 001

3.

Zulakmal, M.Si
NIP. 19671108 199802 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand

Dr. Syafrizal Sy
NIP. 19670807 199309 1 001

بسم الله الرحمن الرحيم

Alhamdulillah, Hamba bersyukur kepada-Mu, Ya Allah „

Selawat dan Salam senantiasa dilanturkan kepada Rasulullah, Muhammad SAW „

Ku Persembahkan untuk Kedua Orang Tuaku....

Ayahanda Nazaruddin dan Ibunda Emmas,,

Terima Kasih , untuk selalu memberiku semangat...

Kakak Eva Lovita Nz, S.E yang terbaik,,

Dan buat adik-adikku:

Sinta Masliza Nz. dan Rahul Devnanzar Nz. yang tersayang,,

Pesan dan kesan serta rasa Terima Kasih kepada Semuanya:

Terbuat Temen-temen BBB,,

Sampe sekarang ku Gak tau Kepanjangan BBB Apa ???

Ranof (Eko'08), WaHyu (TelKom-PoLi'08), MadriL (AgrO'08), RoZi (THP'08), antoN (AgrI'08), DaNi (CiviL-PoLi'08), eTRis (AgrO'08), Erik (MnjmEn-PoLi'08), DiaNa (Eko'08), DiaNa WaNg (mY Bule from AuStraLia), AndO (MeSin-PoLi'08), CecEp (CiviL-PoLi'08), iYudh (AgrI'08) , RoNi (X-PoLi'08), YuDha (MnjmEn-PoLi'08), DenI (AgrI'08)...

berawAL dari AsrAma UnanD, KiTa seMua dikuMpuLkan....

Kalian teMen Pertama dan SelamaNya Saat ku TerlaHir di Padang Ini,, Thanks Friend for All,,

Aku Yakin Pasti Rindu Kalian Semua,,

Terbuat Temen-temen Math'08 (O'LapLace)

O'LAPLACE : kOsong deLAPan Leader mAth CommunitiEs (aGak Maksa Ya.. Hahaha..)

Maaf Jika Selama Ini... MungKin aKu bukaN Komting MatH'08 terBaik untUk Kalian,,

AutizeR (Elza "Ngat thn1: slaLu **berdUa** ^_^ haha..", Bie "dimana Aj, **TidUuur** Mulu", IcHa **"Ratu Autis Kita SejaGad ne"**, IcheL "**Miss KaLeemm**") I'm happy with You, **Haha-Hihi.Com** kalian temen belajarku yang penuh inspirasi (Ana "dasaR rempOng", miMi "buku kalkulus aku mi??", Fitri "kok dipanggil Cinta ya??", TreSa-Rozie-MezI "punya Cerita cinTa masing2 neh"), IvOn (ingat waktu daftar **PMDK**), Liza (Se-KKN ne), Oliv, NurMa, Iin (Jgn marah tak menentu ya), TiKa-Y (Pak Admi PA mu ya?? hehe), Eed (thanks udah sering menyusahkanku. Benar, kini semua itu akan **Indah** pada waktunya), ReRe (Yg Slalu Di **TUA** kan.. hehe) Elind dan NovA (you call me **"Ting-Ting"**), mereka sepembimbing ne (TiKa-K, Dini, Sari, Yuli dan CiPi "makasih konsumsinya"), ManDa, SuLas (ketawa mulu kak Sul), AngGi, EriK, ShaNda (bu dokter gigi), Ade, HasaN (ku ingat kita punya cita2 sama **Pak Gubernur**.. salut kamu memilih jalan akademis yg equal dgn kepalamu), WeLLy, DeSi, HeLCi, LindO (pulkam2 se mah), Mia (*May..May..*), DanieL (kemana hilangnya??), Wili dan Elvi (ihh... Pecinta **Korea**.. haha..), Voenid, **temen seperjuagan PK1** (CeSa, WiWiek, MeTha, RaRa, Utee), Dina IraWati, Lia (**"Saudara BP"** ku), **PutRi**, Yolwi (**Pak Ketua** HIMATIKA), NeLi, LeOnY, RiriN, Dina YelNi dan RikA (tak bisa dipisahkan.. hihi), SarTi (Qoriah kita ne), TamA (ingat rambutnya yg KriTing berguLung2), AnniSaH, JoNi, BayU, PutRa, EriS (**"Saudara TA"** neh, thanks udah bantu2in ya ris.. ^_^), SumaRni (sendiri mulu kak nini).

Thanks Selama 3,5 Tahun Ini, kalian alWays meNghiBur Ku,, ku Pasti Rindu aKan caNda TawA KaliaN.... (Harus Ada ReUniAn Ya.....!!!)

Terbuat Temen AmbaCang ResiDence Boulevard (ARB - My Kos Neh),,

UncU (AntRo'08), SulthaN (TE'08), Arif (Akun-PoLi'08), Hanif (Akun-PoLi'09), AuLia (AgRi'08), AseP (agRi'08), IkhLas (AgRi'08), FadiL (AkuN'08), anGgiE (TE'10), JuaN (X-AkuND3'10) , PutRo (AkuN'08), JimI (Hkm'08), TomY (X-MJmn'08), QincAy (FsK'08) ...

KaliaN Temen2 Ku,, YanG BerbaGai Rasa,, Smuanya Ada Disitu,, Mulai dari tawA, DukA, Ceria, HappY, TangIs, AmaRaH... Semua Kita Lalui dalam 1 Atap...

aKu TunggU janJi Kita duLu,, KetemUan Lagi Waktu Kita Udah Tua.. hahaha,,, Gimana BentuKnya Semua Tuww Ya...???

Keluarga Djurdisar dan Asna beserta Kak Elmi, Bang Firman, Kak Aslimah, dan Putra atas keMurahan Hatinya memberikan temPat daN Fasilitas UntuK penulisan tuGAs akHir inI.

Yang Hampir Terlupakan,, ToTo ku yang hebat dan KucinG Ku "KittY" yang paling Imut di Ambacang Residence Boulevard, yang SeLalu temani Hari-Hari kaMi dengaNnya. Hahaha..

Terbuat KeluaRga MatH-004 (" Sapa Yang Gak KenaL SeeeHH...??? ")

My Saudara BP (SoBep) Nee... WinaLia AgwIL,, Tetep teruS berjuaNg ya...

KaKak Bp Ku,,

Uda TasLim (04-004), Uda RicKy (05-004), Uni LisManiZar (05-004), Uni DienG (06-004), Uni Tanti (06-004) , Thanks Ya.. Udah meNduKung viRza Slalu,, vIrza Gak akaN PerNah Lupa Itu..

Adek Bp Ku,,

Debi (09-004) "Yang Pinter Bgt, BerJUaNg truS ya Bie", FitRi & DiLLa (10-004) "kalian MemaNg adeK yang paling baek Koq..." maaf, Uda Cuma bisa beri dukungAn Bwt KaliaN... Juga Adek2 (11-004) yG inGin berGabuNg di BP-004.

Terbuat keLuarGa KKN-PPM NAGARI PAUH DUO NAN BATIGO - SOLSEL - SUMBAR,,

Ari (Hkm'08), IpHaT (Eko'08), AneS (Eko'08), FrisKa (AgrI'08), BareNo (dokTer'07), Alan (Akun'08), Epo(TP'08), Titik (TI'08), NisA (Hkm'08), EmiL (Farm'08), AseP (AgRo'08), VicKy (raWat'08), YunI (TerNak'08), AntoN (AgrI'08), Eko (Eko'08), Ice (AgrI'08), FitrI (dokTer'07).

34 Hari yang peNuh denGan KenanGan... I Miss It... (11 Juli - 13 Agustus 2011)

TeRuntUk Yang LaiN,,

Keluarga HIMATIKA, ANDALASWARA CHOIR, HIMPAC DPC-UNAND, HIMPAC-SUMBAR, PADUAN SUARA FMIPA.

Terima Kasih suDah berBaGi pengalaMan Yang paLing BerkeSan.

SenioR Math : Uda Sobri (abang angkatku ne..), Uda Novi, Uda Akhir, Uda Angga, Uda Aulia, Uda NewTon, Uda FirLand, Uda Pori, Uda Daniel, Uni Nurul, Uni Rida, Uni Melisa, Uni Vivi, Uni Winda, Uni Jessi, Uni Arum, Uni Yulian, Uni Yona, Uni Prima, Uni Imelda, Uni Nia, Uni Hades, Uni Meki, Uni vanY, Uni Rahma, Uni Yose, Uni Andra, Uni Ayu, Uni Cut, Uni Rian (Maaf gak DisebUt sMuanya..)

ThanKs Saran, Nasehat, dan DukungaNnya..

Adek2 MatH '09 dan '10 : RahmaT (Se-kampung ne), ZaKi, AnggI, UuL, LucKy, Zikra, BeY, RiskA, Yosi, Mulya, Dian, Fika, UssY, DesI, DeVi, Lia, Lina, SallY, Suci,, Firman, Eki, Abdi, sEno, RidHo, RusMan, Lidia, MisnawaTi, YosIka, Tami, Sri, Desi, Ivo, Mira. (maaF gak Disebut Smuanya..) TeteP SmaNgat Ya...

DoseN MatH-UnanD: Bu Ayu dan Bu Lyra (PA ku neH), Pembimbingku yang Paling Keren: Pak Muhafzan (aduh, ingat kata2 bapak "kamu Lambat ya...!!" haha..) dan Pak Efendi, Pak Syafrizal, Bu Sil dan Pak Zulakmal (Penguji Skripsi Ku..), Pak Budi Rudianto, Pak Narwen, Pak Admi, Pak Werman, Pak Made, Pak Iqbal, Pak Yudi, Pak Jon, Pak Dodi, Pak Budi Rahmadya, Pak Syafruddin, Bu Yozza, Bu Gema, Bu Izza, Bu Monik, Bu Nova, Bu Riri, dan Bu Maiyastri, Pak Ginting, Pak EffenDi.

Terima Kasih ataS iLmunya yang berHarga, dukuNgan & dorongannya Yg TelaH diBerikan,

Staf dan Pegawai MatH-UnanD: Mama Cun, Bu Eli, Pak Syamsir, Kak Opi, Mami Asnarti dan Kak Debi yang SeriNg noNgkrong Di Pustaka dan Ibu CS. Terima Kasih aTas banTuannya..

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur tak henti-hentinya penulis panjatkan ke hadirat Allah S.W.T. atas segala limpahan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul **"Hubungan Antara Ketercapaian dan Keterkontrolan Sistem Linier Kontinu Bergantung Terhadap Waktu"** yang merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang. Salawat dan salam semoga selalu tercurah kepada Baginda Rasulullah SAW yang menebar ilmu dan iman dalam cahaya Islam yang beliau bawa.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, dorongan, kerjasama maupun bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Dr. Muhafzan selaku Pembimbing I yang dengan sabar mengarahkan penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini melalui bimbingan dan diskusi yang sangat bermanfaat. Serta ilmu, ide, saran, dan nasihat yang diberikan selama penulis menjalani perkuliahan.

2. Bapak Efendi, M.Si selaku Pembimbing II yang membantu penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini, serta ilmu yang didapat selama penulis menjalani perkuliahan.

3. Bapak Dr. Syafrizal Sy, Ibu Dr. Susila Bahri dan Bapak Zulakmal, M.Si selaku penguji skripsi yang telah memberi masukan dan saran kepada penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.

4. Ibu Haripamyu, M.Si dan Ibu Dr. Lyra Yulianti selaku dosen Pembimbing Akademik yang telah memberi pengarahan, nasehat, motivasi dan ilmu selama penulis belajar di Jurusan Matematika FMIPA Unand.

5. Bapak Dr. Syafrizal Sy selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang.

6. Ayahanda Nazaruddin dan Ibunda Emmas yang teristimewa, serta kakak dan kedua adikku tersayang yang telah memberikan dorongan semangat, do'a, dan motivasi tiada henti.

Penulis selalu terbuka terhadap sumbangan pemikiran baik kritik maupun saran yang membangun untuk menyempurnakan skripsi ini. Penulis sangat menyadari bahwa dalam skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan dan tidak luput dari kekurangan karena terbatasnya ilmu dan pengalaman yang penulis miliki. Kritik dan saran tersebut dapat disampaikan melalui e-mail di `virza.gev.nz@gmail.com`.

Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan sesuatu yang bermanfaat bagi semua pihak yang membacanya. Amin.

Padang, Januari 2012

Penulis

ABSTRAK

Sistem linier kontinu bergantung terhadap waktu merupakan suatu model yang banyak dijumpai dalam beberapa aplikasi seperti rekayasa, biologi, ekonomi dan bidang-bidang lainnya. Skripsi ini mengkaji hubungan antara ketercapaian dan keterkontrolan sistem linier kontinu bergantung waktu. Dengan metode aljabar dibuktikan beberapa teorema agar diperoleh hubungan antara ketercapaian dan keterkontrolan sistem linier kontinu bergantung terhadap waktu. Selain itu, diberikan beberapa contoh sebagai ilustrasi untuk memperkuat keberlakuan teorema-teorema yang telah dibuktikan.

Kata kunci: *ketercapaian, keterkontrolan, sistem linier kontinu bergantung terhadap waktu.*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

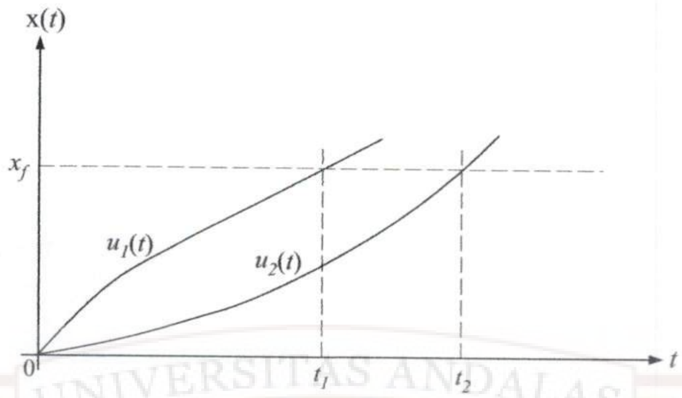
Diberikan suatu persamaan keadaan dari sistem linier kontinu bergantung terhadap waktu berikut:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t); \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{1.1.1}$$

dengan $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ dan untuk $t \geq 0$. Untuk selanjutnya, sistem (1.1.1) dinotasikan dengan $(A(t), B(t))$. Dalam Sistem (1.1.1), $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ menyatakan vektor keadaan dan $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ menyatakan vektor input. Notasi $\mathbb{R}^{n\times m}$ menyatakan himpunan matriks-matriks riil berukuran $n \times m$ dan $\mathbb{R}^n$ menyatakan himpunan vektor-vektor riil berdimensi n. Secara fisika, persamaan (1.1.1) menyatakan persamaan gerak suatu partikel dengan gaya $\mathbf{u}$. Dalam [**2**] disebutkan bahwa solusi (1.1.1) adalah

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \tag{1.1.2}$$

Hal yang menarik untuk dikaji dari sistem linier adalah masalah keterca-paian dan keterkontrolan. Untuk sistem (1.1.1), suatu keadaan $\mathbf{x}_f$ dikatakan tercapai jika terdapat suatu input $\mathbf{u}$ yang dapat mentransfer keadaan nol kepada keadaan $\mathbf{x}_f$ dalam waktu hingga t_f. Gambar (1.1.1) memperlihatkan bahwa input $u_1(t)$ membawa keadaan awal nol kepada keadaan x_f dalam waktu t_1, dan input $u_2(t)$ membawa keadaan awal nol kepada keadaan x_f dalam waktu t_2 dengan mengikuti lintasan yang berbeda.



Gambar 1.1.1. Keadaan $\mathbf{x}_f$ tercapai

Selain itu, suatu keadaan $\mathbf{x}_0$ dikatakan terkontrol jika terdapat suatu input $\mathbf{u}$ yang dapat mentransfer keadaan $\mathbf{x}_0$ kepada keadaan nol dalam waktu hingga t_f. Gambar 1.1.2. serupa dengan ketercapaian, input $u_1(t)$ membawa keadaan x_0 kepada keadaan nol dalam waktu t_1, dan input $u_2(t)$ membawa keadaan x_0 kepada keadaan nol dalam waktu t_2.

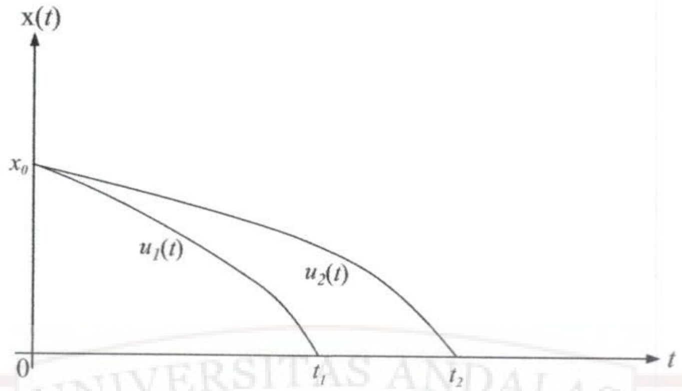
Ketercapaian mengandung makna bahwa kontrol $\mathbf{u}(t)$ mesti dicari sedemikian sehingga

$$\mathbf{x}_f = \int_0^{t_f} \Phi(t_f, \tau) B(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau. \tag{1.1.3}$$

Selain itu, keterkontrolan bermakna bahwa kontrol $\mathbf{u}(t)$ juga harus dicari sedemikian sehingga

$$\Phi(t_f, 0)\mathbf{x}_0 + \int_0^{t_f} \Phi(t_f, \tau) B(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau = \mathbf{0}. \tag{1.1.4}$$

Sistem (1.1.1) dikatakan tercapai keadaan pada waktu t_f apabila untuk setiap keadaan $\mathbf{x}_f$ tercapai, dan dikatakan terkontrol keadaan pada waktu t_0 apabila untuk setiap keadaan $\mathbf{x}_0$ terkontrol. Dari kedua makna ini perlu dikaji hubungan antara ketercapaian dan keterkontrolan sistem (1.1.1).



Gambar 1.1.2. Keadaan $\mathbf{x}_0$ terkontrol

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan uraian dari latar belakang, maka yang menjadi permasalahan dalam skripsi ini adalah

1. Bagaimanakah syarat cukup dan perlu untuk ketercapaian dari sistem (1.1.1)?
2. Bagaimanakah syarat cukup dan perlu untuk keterkontrolan dari sistem (1.1.1)?
3. Bagaimanakah hubungan antara ketercapaian dan keterkontrolan dari sistem (1.1.1)?

1.3 Pembatasan Masalah

Batasan masalah dari skripsi ini adalah sistem linier kontinu yang bergantung terhadap waktu.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk mempelajari ketercapaian, keterkontrolan, dan hubungan keduanya pada sistem (1.1.1).

1.5 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan skripsi ini yaitu Bab I merupakan pendahuluan yang berisikan latar belakang masalah, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan dan sistematika penulisan. Bab II merupakan landasan teori yang akan digunakan dalam menyelesaikan permasalahan pada skripsi ini. Bab III merupakan pembahasan mengenai ketercapaian, keterkontrolan, dan hubungan keduanya dari sistem (1.1.1) beserta hasilnya. Bab IV merupakan kesimpulan dari pembahasan beserta saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II
LANDASAN TEORI

Dalam bab ini akan diperkenalkan beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan permasalahan yang telah dikemukakan di Bab I. Konsep-konsep teori matriks disajikan pada Subbab 2.1, konsep-konsep ruang vektor pada Subbab 2.2, transformasi linier pada Subbab 2.3, hasil kali dalam dan norm pada Subbab 2.4 dan Subbab 2.5 diuraikan tentang sistem linier kontinu yang bergantung terhadap waktu.

2.1 Teori Matriks

Dalam [1] dinyatakan bahwa matriks adalah suatu jajaran persegi panjang dari bilangan-bilangan yang disusun menurut baris dan kolom. bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dalam matriks.

Transpos dari suatu matriks $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ditunjukkan dengan $A^T = [a_{ji}]_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Suatu matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dikatakan matriks simetris jika $A = A^T$.

Suatu matriks A berukuran $n \times n$ dikatakan tak singular, jika $det(A) \neq 0$, dalam hal sebaliknya disebut matriks singular. Selain itu, *rank* dari A, ditulis $rank(A)$ adalah jumlah baris tak nol dari bentuk eselon baris yang tereduksi dari A.

Suatu matriks A dikatakan berbentuk matriks eselon baris yang tereduksi jika matriks tersebut mempunyai sifat-sifat berikut:

1. Jika pada suatu baris tidak semua entrinya nol, maka entri pertama yang tidak nol haruslah 1, dimana 1 ini disebut sebagai satu utama.

2. Jika pada suatu baris semua entrinya adalah nol, maka baris tersebut terletak diposisi terbawah pada matriks.

3. Entri 1 utama pada baris ke $i+1$ terletak lebih kekanan dari entri 1 utama pada baris yang ke i.

4. Pada kolom yang memuat entri 1 utama, entri-entri lainnya pada kolom tersebut adalah nol.

Jika entri-entri dari matriks $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ adalah fungsi-fungsi yang dapat diturunkan, maka didefinisikan [4]:

1. $\frac{d}{dt}(A(t)) = \left[\frac{d}{dt}(a_{ij}(t))\right]_{i,j=1}^{n}$

2. $\int_a^t (A(\tau))d\tau = \left[\int_a^t (a_{ij}(\tau))d\tau\right]_{i,j=1}^{n}$

Teorema 2.1.1. [6] *Jika A matriks berukuran $n \times n$, maka pernyataan berikut ekuivalen:*

1. *A memiliki invers*

2. *$det(A) \neq 0$*

3. *$rank(A) = n$.*

Definisi 2.1.2. [**3**] *Misalkan A matriks riil $n \times n$, eksponensial dari matriks At, $t \in \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai*

$$e^{At} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k,$$

dengan $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ adalah matriks identitas.

2.2 Ruang Vektor

Suatu V dikatakan ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$ ditulis $(\mathrm{V}, \mathbb{R})$, jika V adalah suatu himpunan yang elemen-elemennya disebut vektor-vektor, dan terdapat $\mathbf{0} \in \mathrm{V}$ (disebut vektor nol) dilengkapi dengan operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar yang memenuhi sifat berikut [**6**]:

Untuk semua $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathrm{V}$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, berlaku

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathrm{V}$
2. $\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$
3. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
4. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
5. $\alpha\mathbf{v} \in \mathrm{V}$
6. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$
7. $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$
8. $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$

9. $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$

10. $(\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$.

Definisi 2.2.3. [6] *Suatu* U *dikatakan subruang dari ruang vektor* V *apabila* $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{V}$ *dan* U *adalah ruang vektor dengan operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar seperti pada* V.

Lema 2.2.4. [6] *Misalkan* V *ruang vektor dan* $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{V}$. *Himpunan tak kosong* U *dikatakan subruang dari* V *jika dan hanya jika*

1. $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in \mathrm{U} \ \ \forall \ \ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathrm{U}$.

2. $k\mathbf{u} \in \mathrm{U} \ \ \forall \ \ \mathbf{u} \in \mathrm{U}$ *dan* $k \in \mathbb{R}$

Jika $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{V}$, maka komplemen ortogonal U didefinisikan sebagai berikut [6]:

$$\mathrm{U}^{\perp} = \{\mathbf{x} \in \mathrm{V} : \mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0 \ \textit{untuk semua} \ y \in \mathrm{U}\}.$$

Pada [6] menjelaskan bahwa misalkan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ adalah vektor dan $r_1, r_2, \cdots, r_n$ adalah skalar. Vektor $\mathbf{w}$ dikatakan kombinasi linier dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ apabila

$$\mathbf{w} = r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \cdots + r_n\mathbf{v}_n.$$

Himpunan semua kombinasi linier dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ disebut span dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ dan ditulis *span*$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$.

Vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ dikatakan bebas linier jika hubungan

$$r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \cdots + r_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}, \tag{2.2.1}$$

dengan $r_1, r_2, \cdots, r_n$ adalah skalar, hanya dipenuhi oleh $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$. Selanjutnya, jika ada $r_i \neq 0$ untuk suatu $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ sedemikian sehingga (2.2.1) berlaku, maka vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ dikatakan tidak bebas linier (bergantung linier).

Himpunan vektor-vektor $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ dari ruang vektor V dikatakan basis untuk V, jika:

1. Vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ bebas linier, dan
2. *span*$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\} = \mathrm{V}$.

Misalkan V ruang vektor dan mempunyai basis dengan n elemen untuk suatu n bilangan asli, maka V dikatakan n-dimensional (berdimensi n). Jika r-vektor adalah n-dimensional untuk suatu n, maka V dikatakan berdimensi hingga. Jika V tak berdimensi hingga, maka V dikatakan berdimensi tak hingga.

Definisi 2.2.5. [7] *Misalkan* $(\mathrm{V}, \mathbb{R})$ *adalah suatu ruang vektor dan* $\mathrm{R}, \mathrm{S} \subseteq \mathrm{V}$. *Penjumlahan dan irisan dari* R *dan* S *didefinisikan masing-masing sebagai berikut:*

1. $\mathrm{R} + \mathrm{S} = \{\mathbf{r} + \mathbf{s} : \mathbf{r} \in \mathrm{R}, \quad \mathbf{s} \in \mathrm{S}\}$.

2. $\mathrm{R} \cap \mathrm{S} = \{\mathbf{v} : \mathbf{v} \in \mathrm{R} \ \ \textit{dan} \ \ \mathbf{v} \in \mathrm{S}\}$.

Definisi 2.2.6. [7] *Suatu ruang vektor* D *dikatakan jumlah langsung dari* R *dan* S *ditulis* $\mathrm{D} = \mathrm{R} \oplus \mathrm{S}$ *jika*

1. $\mathrm{R} \cap \mathrm{S} = \mathbf{0}$, *dan*

2. $\mathrm{R} + \mathrm{S} = \mathrm{D}$.

2.3 Transformasi Linier

Misalkan V dan W adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$. Fungsi $\mathrm{T} : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ dikatakan transformasi linier jika [**6**]:

1. $\mathrm{T}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathrm{T}(\mathbf{v}_1) + \mathrm{T}(\mathbf{v}_2) \;\; \forall \;\; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathrm{V}$.

2. $\mathrm{T}(k\mathbf{v}_1) = k\mathrm{T}(\mathbf{v}_1) \;\; \forall \;\; \mathbf{v}_1 \in \mathrm{V}$ dan $k \in \mathbb{F}$.

Teorema 2.3.7. [**6**] *Misalkan* $\mathrm{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *adalah suatu transformasi linier, maka terdapat secara tunggal matriks* $B \in R^{m \times n}$ *sedemikian sehingga* $\mathrm{T} = \mathrm{T}_B$.

Bukti.

Misalkan $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ basis standar untuk $\mathbb{R}^n$ dan $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m\}$ basis standar untuk $\mathbb{R}^m$. Ambil $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ sebarang, maka ada skalar-skalar $r_1, r_2, \cdots, r_n$ sedemikian sehingga

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} &= r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + \cdots + r_n\mathbf{e}_n \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Akibatnya,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}(\mathbf{u}) &= \mathrm{T}(r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + \cdots + r_n\mathbf{e}_n) \\
&= r_1\mathrm{T}(\mathbf{e}_1) + r_2\mathrm{T}(\mathbf{e}_2) + \cdots + r_n\mathrm{T}(\mathbf{e}_n) \\
&= r_1(b_{11}\varepsilon_1 + b_{21}\varepsilon_2 + \cdots + b_{m1}\varepsilon_m) + r_2(b_{11}\varepsilon_1 + b_{21}\varepsilon_2 + \cdots + b_{m1}\varepsilon_m) + \\
&\qquad \cdots + r_n(b_{1n}\varepsilon_1 + b_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + b_{mn}\varepsilon_m) \\
&= \varepsilon_1(r_1b_{11} + r_2b_{12} + \cdots + r_nb_{1n}) + \varepsilon_2(r_1b_{21} + r_2b_{22} + \cdots + r_nb_{2n}) + \\
&\qquad \cdots + \varepsilon_m(r_1b_{m1} + r_2b_{m2} + \cdots + r_nb_{mn}) \\
&= \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1b_{11} + r_2b_{12} + \cdots + r_nb_{1n} \\ r_1b_{21} + r_2b_{22} + \cdots + r_nb_{2n} \\ \vdots \\ r_1b_{m1} + r_2b_{m2} + \cdots + r_nb_{mn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Pilih $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$, maka $\mathrm{T}(\mathbf{u}) = B\mathbf{u}$. Karena B adalah matriks $m \times n$, maka dengan mengalikan B dari kiri pada suatu vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ dapat ditunjukkan dengan suatu fungsi $\mathrm{T}_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, sedemikian sehingga $\mathrm{T} = \mathrm{T}_B$. Ini berarti bahwa $\mathrm{T}(\mathbf{e}_1) = \mathrm{T}_B(\mathbf{e}_1), \mathrm{T}(\mathbf{e}_2) = \mathrm{T}_B(\mathbf{e}_2), \cdots, \mathrm{T}(\mathbf{e}_n) = \mathrm{T}_B(\mathbf{e}_n)$. □

Matriks B berukuran $m \times n$ yang berkaitan dengan transformasi linier pada Teorema 2.3.7 disebut matriks penyajian dari T terhadap basis standar untuk $\mathbb{R}^n$. Jika $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ adalah basis standar untuk $\mathbb{R}^n$, maka $B = (\mathrm{T}(\mathbf{e}_1) \ \ \mathrm{T}(\mathbf{e}_2) \ \ \cdots \ \ \mathrm{T}(\mathbf{e}_n))$.

Berdasarkan Teorema 2.3.7, karena $\mathrm{T} = \mathrm{T}_B$ maka

$$\mathrm{T}_B(\mathbf{v}) = \mathrm{T}(\mathbf{v}) = B\mathbf{v}; \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

akibatnya,

$$\mathrm{T}_B(\bullet) = \mathrm{T}(\bullet) = B.$$

Misalkan $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ adalah suatu transformasi linier. Dalam [7] dinyatakan bahwa range dari G didefinisikan sebagai

$$\mathcal{R}(G) \triangleq \{G(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\}, \tag{2.3.1}$$

dan null dari G didefinisikan sebagai

$$\mathcal{N}(G) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : G(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} = 0\}. \tag{2.3.2}$$

Dimensi dari $\mathcal{R}(G)$ disebut rank dari G, ditulis $rank(G)$ dan dimensi dari $\mathcal{N}(G)$ disebut nullitas dari G, ditulis $null(G)$.

Teorema 2.3.8. [7] *Misalkan* $G : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ *adalah suatu transformasi linier, maka*

1. $\mathcal{R}(G) \subseteq \mathrm{W}$.

2. $\mathcal{N}(G) \subseteq \mathrm{V}$.

Teorema 2.3.9. [7] *Misalkan* $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, *maka* $\mathcal{N}(G)^\perp = \mathcal{R}(G^T)$.

Teorema 2.3.10. [7] **(Teorema Dekomposisi)** *Misalkan* $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, *maka setiap vektor* $\mathbf{v}$ *pada domain ruang* $\mathbb{R}^n$ *dapat ditulis secara tunggal sebagai* $\mathbf{v} = \mathbf{x}+\mathbf{y}$, *dimana* $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(G)$ *dan* $\mathbf{y} \in \mathcal{N}(G)^{\perp} = \mathcal{R}(G^T)$ (*yaitu* $\mathbb{R}^n = \mathcal{N}(G) \oplus \mathcal{R}(G^T)$).

2.4 Hasil Kali Dalam dan Norm

Misalkan vektor $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, maka hasil kali dalam dari vektor $\mathbf{x}$ dan vektor $\mathbf{y}$ berupa skalar yang didefinisikan sebagai berikut [7]:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \triangleq \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Definisi 2.4.11. [6] *Misalkan* V *suatu ruang vektor riil. Hasil kali dalam pada* V *dinyatakan dengan* $\langle , \rangle$ *yang memenuhi:*

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ *untuk semua* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{V}$.
2. $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ *untuk semua* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{V}$ *dan* $k \in \mathbb{R}$.
3. $\langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u} \rangle$ *untuk semua* $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \in \mathrm{V}$.
4. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ *untuk semua* $\mathbf{v} \in \mathrm{V}$ *dan* $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ *jika hanya* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Teorema 2.4.12. [6] *Jika* $\langle , \rangle$ *merupakan hasil kali dalam pada* V, *maka* $\|.\| : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ *didefinisikan dengan* $\|\mathbf{v}\| = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle^{\frac{1}{2}}$ *adalah norm dari* V.

Definisi 2.4.13. [7] *Misalkan* $(\mathrm{V}, \mathbb{R})$ *adalah ruang vektor, suatu pemetaan* $\|.\| : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ *dikatakan suatu norm jika memenuhi sifat berikut:*

1. $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ *untuk semua* $\mathbf{v} \in \mathrm{V}$ *dan* $\|\mathbf{v}\| = 0$ *jika dan hanya jika* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
2. $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha| \, \|\mathbf{v}\|$ *untuk semua* $\mathbf{v} \in \mathrm{V}$ *dan untuk semua* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definisi 2.5.14. [2] *Jika* Ψ *adalah matriks fundamental dari* (2.5.2), *maka* Φ *yang didefinisikan sebagai*

$$\Phi(t, t_0) \triangleq \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0), \quad untuk \;\; t, t_0 \geq 0. \tag{2.5.3}$$

dikatakan matriks transisi keadaan dari (2.5.2).

Berikut merupakan konsep-konsep matriks transisi keadaan dari (2.5.2).

Teorema 2.5.15. [2] *Misalkan* $t_0 \in (\alpha, \beta)$ *dan* $\Phi(t, t_0)$ *adalah matriks transisi keadaan dari* (2.5.2) *untuk* $t \in (\alpha, \beta)$ *maka pernyataan berikut benar.*

1. $\Phi(t, t_0)$ *merupakan solusi tunggal dari persamaan diferensial matriks*

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0),$$

dengan $\Phi(t_0, t_0) = I$.

2. *Untuk setiap* $t, s, \tau \in (\alpha, \beta)$, *maka berlaku*

$$\Phi(t, \tau) = \Phi(t, s)\Phi(s, \tau).$$

3. *Untuk setiap* $t, \tau \in (\alpha, \beta)$, *maka berlaku* $\Phi(t, \tau)$ *tak singular dan*

$$\Phi^{-1}(t, \tau) = \Phi(\tau, t).$$

Bukti.

1. Misalkan Ψ matriks fundamental dari (2.5.2). Dengan menggunakan Definisi 2.5.14 diperoleh $\Phi(t, t_0) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)$. Oleh karena itu,

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \dot{\Psi}(t)\Psi^{-1}(t_0) = A(t)\Psi(t)\Psi^{-1}(t_0) = A(t)\Phi(t, t_0),$$

dan

$$\Phi(t_0, t_0) = \Psi(t_0)\Psi^{-1}(t_0) = I.$$

2. Misalkan Ψ matriks fundamental dan Φ matriks transisi keadaan dari (2.5.2).

   Menurut definisi

$$\Phi(t, \tau) = \Psi(t)\Psi^{-1}(\tau)$$

   sehingga

$$\Phi(t, \tau) = \Psi(t)\Psi^{-1}(s)\Psi(s)\Psi^{-1}(\tau)$$

   diperoleh

$$\Phi(t, \tau) = \Phi(t, s)\Phi(s, \tau),$$

   dengan $t, s, \tau \in (\alpha, \beta)$. Sehingga terbukti bahwa $\Phi(t, \tau) = \Phi(t, s)\Phi(s, \tau)$ terpenuhi.

3. Misalkan Ψ matriks fundamental, maka $det(\Psi(t)) \neq 0$ untuk setiap $t \in (\alpha, \beta)$.

   Oleh karena itu

$$det(\Psi(t, \tau)) = det(\Psi(t)\Psi^{-1}(\tau)) = det(\Psi(t))det(\Psi^{-1}(\tau)) \neq 0.$$

   Perhatikan bahwa

$$[\Phi(t, \tau)]^{-1} = [\Psi(t)\Psi^{-1}(\tau)]^{-1} = \Psi(\tau)\Psi^{-1}(t) = \Phi(\tau, t).$$

   Sehingga terbukti bahwa $\Phi(t, \tau)$ tak singular dan $\Phi^{-1}(t, \tau) = \Phi(\tau, t)$. $\square$

Berdasarkan konsep matriks transisi keadaan, maka solusi dari (2.5.2) diberikan oleh

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0.$$

Matriks transisi keadaan dari (2.5.2) dapat ditentukan dengan menggunakan teorema berikut.

Teorema 2.5.16. [2] *Jika untuk setiap* τ *dan* t *berlaku*

$$A(t)\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right] = \left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right] A(t), \tag{2.5.4}$$

maka

$$\Phi(t, t_0) = \exp\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right]. \tag{2.5.5}$$

Bukti.

Misalkan solusi (2.5.2) adalah

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0$$

dengan $\Phi(t, t_0)$ diberikan oleh (2.5.5). Subsitusikan

$$\exp\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right] = I + \int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau + \frac{1}{2!}\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)d\tau_1 + \cdots$$

dan

$$\frac{d}{dt}\exp\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right] = A(t) + \frac{1}{2}A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau_1)d\tau_1 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} A(\tau_1)d\tau_1 A(t) + \cdots$$

kedalam persamaan (2.5.5) maka diperoleh

$$A(t)+\frac{1}{2}A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau_1)d\tau_1+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} A(\tau_1)d\tau_1 A(t)+\cdots$$

$$= A(t) + A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau + \frac{1}{2!}A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)d\tau_1 + \cdots. \tag{2.5.6}$$

Persamaan (2.5.6) akan terpenuhi jika dan hanya jika

$$\frac{1}{2}A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau_1)d\tau_1 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} A(\tau_1)d\tau_1 A(t) = A(t)\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right]$$

dimana

$$A(t)\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right] = \left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right] A(t). \quad \square$$

Teorema 2.5.17. [5] *Solusi persamaan* (2.5.1) *diberikan oleh*

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \Phi(t,t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\
&= \Phi(t,t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,t_0)\Phi(t_0,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \qquad (2.5.7)\\
&= \Phi(t,t_0)\left[\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau\right],
\end{aligned}$$

dengan $\Phi(t,\tau)$ *adalah solusi tunggal dari*

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0),$$

$$\Phi(t_0,t_0) = I.$$

Bukti.

Akan ditunjukkan bahwa (2.5.7) adalah solusi (2.5.1).

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) &= \frac{d}{dt}\Phi(t,t_0)\mathbf{x}_0 + \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\
&= A(t)\Phi(t,t_0)\mathbf{x}_0 + \Phi(t,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)|_{(\tau=t)} + \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\Phi(t,t_0)\Phi(t_0,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\
&= A(t)\Phi(t,t_0)\mathbf{x}_0 + \Phi(t,t)B(t)\mathbf{u}(t) + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\Phi(t,t_0)\Phi(t_0,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\
&= A(t)\Phi(t,t_0)\mathbf{x}_0 + IB(t)\mathbf{u}(t) + A(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,t_0)\Phi(t_0,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\
&= A(t)\left[\Phi(t,t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau\right] + B(t)\mathbf{u}(t) \\
&= A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t). \quad \square
\end{aligned}$$

BAB III
HUBUNGAN ANTARA KETERCAPAIAN DAN KETERKONTROLAN SISTEM LINIER KONTINU BERGANTUNG TERHADAP WAKTU

Dalam bab ini akan dipelajari tentang ketercapaian, keterkontrolan, dan hubungan antara ketercapaian dan keterkontrolan dari sistem (1.1.1).

3.1 Ketercapaian Sistem Linier Kontinu

Terlebih dahulu akan dipaparkan definisi formal dari ketercapaian sebagai berikut.

Definisi 3.1.1. [2] *Suatu keadaan* $\mathbf{x}_f$ *dikatakan* ***tercapai*** *pada waktu* t_f *jika untuk suatu waktu hingga* $t_f > t_0$, *terdapat suatu input* $\mathbf{u}(t)$, $t \in [t_0, t_f]$ *yang mentransfer keadaan* $\mathbf{x}(t)$ *dari keadaan awal* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$ *kepada keadaan* $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$.

Jadi, jika $\mathbf{x}_f$ tercapai pada waktu t_f dari keadaan $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$, maka berdasarkan (1.1.2) diperoleh

$$\mathbf{x}_f = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau) B(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \tag{3.1.1}$$

dimana $\Phi(t_f, t)$ merupakan matriks transisi keadaan untuk sistem (1.1.1).

Misalkan $\mathfrak{R}_r^{t_f}$ menyatakan himpunan dari semua keadaan tercapai pada waktu t_f, yang secara simbolis dapat ditulis

$$\mathfrak{R}_r^{t_f} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \text{ tercapai dari } \mathbf{0} \text{ pada waktu } t_f\}.$$

$\mathfrak{R}_r^{t_f}$ merupakan suatu subruang dari ruang vektor keadaan $\mathbb{R}^n$. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut:

1. $\mathfrak{R}_r^{t_f} \neq \emptyset$. Karena $\mathbf{0} \in \mathfrak{R}_r^{t_f}$. Jelas bahwa $\mathfrak{R}_r^{t_f} \subseteq \mathbb{R}^n$.

2. Misalkan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathfrak{R}_r^{t_f}$, akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in \mathfrak{R}_r^{t_f}$. Perhatikan bahwa:

$$\mathbf{x}_1 \in \mathfrak{R}_r^{t_f} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$
$$\mathbf{x}_2 \in \mathfrak{R}_r^{t_f} \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

Sehingga

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = 2\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$
$$\frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

Misalkan $\mathbf{x}_3 \triangleq \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$, maka

$$\mathbf{x}_3 = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

yang menunjukkan bahwa $\mathbf{x}_3 \in \mathfrak{R}_r^{t_f}$, atau $\frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \in \mathfrak{R}_r^{t_f}$.

3. Misalkan $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}_r^{t_f}$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, akan ditunjukkan bahwa $\alpha\mathbf{x} \in \mathfrak{R}_r^{t_f}$. Perhatikan bahwa:

$$\mathbf{x} \in \mathfrak{R}_r^{t_f} \Rightarrow \alpha\mathbf{x} = \alpha\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$
$$= \int_{t_0}^{t_f} \alpha\Phi(t_f,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

yang menunjukkan bahwa $\alpha\mathbf{x} \in \mathfrak{R}_r^{t_f}$.

Sehingga $\mathfrak{R}_r^{t_f}$ disebut sebagai subruang keadaan tercapai. Untuk penyederhanaan penulisan, $\mathfrak{R}_r^{t_f}$ selanjutnya ditulis $\mathfrak{R}_r$.

Definisi 3.1.2. [2] *Sistem* (1.1.1) *dikatakan* ***tercapai keadaan*** *pada waktu* t_f *jika setiap keadaan* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *adalah tercapai, yakni* $\mathfrak{R}_r = \mathbb{R}^n$.

Lema 3.1.3. [2] *Misalkan*

$$L(\mathbf{u}, t_0, t_f) \triangleq \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{3.1.2}$$

dan

$$W_r \triangleq W_r(t_0, t_f) \triangleq \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_f, \tau)d\tau \tag{3.1.3}$$

dengan $\Phi(t_f, t)$ *menyatakan matriks transisi keadaan. Maka* $\mathcal{R}(L(\bullet, t_0, t_f)) = \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f))$ *untuk setiap* $t_f > t_0$.

Bukti.

Misalkan $t_f > t_0$ sebarang. Akan dibuktikan bahwa $\mathcal{R}(W_r(t_0, t_f)) \subset \mathcal{R}(L(\bullet, t_0, t_f))$ untuk setiap $t_f > t_0$. Misalkan $\mathbf{x}_f \in \mathcal{R}(W_r)$, maka terdapat $\eta_1 \in \mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga

$$\mathbf{x}_f = W_r\eta_1.$$

Akibatnya

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_f &= \left[\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_f, \tau)d\tau\right]\eta_1 \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_f, \tau)\eta_1 d\tau.\end{aligned}$$

Pilih $\mathbf{u}(t) = B^T(t)\Phi^T(t_f, t)\eta_1$, maka

$$\mathbf{x}_f = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

Akibatnya $\mathbf{x}_f = L(\mathbf{u}, t_0, t_f)$ yang menunjukkan bahwa $\mathbf{x}_f \in \mathcal{R}(L(\bullet, t_0, t_f))$. Jadi $\mathcal{R}(W_r(t_0, t_f)) \subset \mathcal{R}(L(\bullet, t_0, t_f))$.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\mathcal{R}(L(\bullet, t_0, tf)) \subset \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f))$. Misalkan $\mathbf{x}_f \in \mathcal{R}(L(\bullet, t_0, t_f))$, maka terdapat $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ sedemikian sehingga $L(\mathbf{u}, t_0, t_f) = \mathbf{x}_f$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{x}_f \in \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f))$.

Andaikan $\mathbf{x}_f \notin \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f))$, maka terdapat $\mathbf{x}'_f \in \mathcal{N}(W_r(t_0, t_f))$ sedemikian sehingga

$$W_r \mathbf{x}'_f = \mathbf{0}, \tag{3.1.4}$$

kalikan dari kiri kedua ruas (3.1.4) dengan $(\mathbf{x}'_f)^T$, diperoleh

$$(\mathbf{x}'_f)^T W_r \mathbf{x}'_f = 0. \tag{3.1.5}$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}
0 &= (\mathbf{x}'_f)^T W_r(t_0, t_f) \mathbf{x}'_f \\
&= (\mathbf{x}'_f)^T \left[\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_f, \tau) d\tau \right] \mathbf{x}'_f \\
&= \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}'_f)^T \Phi(t_f, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_f, \tau) \mathbf{x}'_f d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left[B^T(\tau) \Phi^T(t_f, \tau) \mathbf{x}'_f \right]^T \left[B^T(\tau) \Phi^T(t_f, \tau) \mathbf{x}'_f \right] d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left\langle \left[B^T(\tau) \Phi^T(t_f, \tau) \mathbf{x}'_f \right], \left[B^T(\tau) \Phi^T(t_f, \tau) \mathbf{x}'_f \right] \right\rangle d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left\| B^T(\tau) \Phi^T(t_f, \tau) \mathbf{x}'_f \right\|^2 d\tau.
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Persamaan (3.1.6) berlaku jika $\left\| B^T(\tau) \Phi^T(t_f, \tau) \mathbf{x}'_f \right\| = 0$. Selain itu, $\left\| B^T(\tau) \Phi^T(t_f, \tau) \mathbf{x}'_f \right\| = 0$ berlaku jika dan hanya jika $B^T(\tau) \Phi^T(t_f, \tau) \mathbf{x}'_f = \mathbf{0}$ untuk setiap $t \in [t_0, t_f]$, sehingga

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}'_f)^T \mathbf{x}_f &= (\mathbf{x}'_f)^T L(\mathbf{u}, t_0, t_f) \\
&= (\mathbf{x}'_f)^T \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau) B(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}'_f)^T \Phi(t_f,\tau) B(\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left[B^T(\tau)\Phi^T(t_f,\tau)\mathbf{x}'_f\right]^T \mathbf{u}(\tau) d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{0}^T \mathbf{u}(\tau) d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t_f} 0 d\tau \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Karena W_r simetris maka $\mathcal{R}(W_r(t_0,t_f)) = \mathcal{N}(W_r(t_0,t_f))^{\perp}$. Ini dapat dibuktikan sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}''_f \in \mathcal{R}(W_r(t_0,t_f)) &\Leftrightarrow \exists\, \mathbf{x}'''_f \in \mathbb{R}^n \ni W_r\mathbf{x}'''_f = \mathbf{x}''_f \\
&\Leftrightarrow (\mathbf{x}''_f)^T = \left(W_r\mathbf{x}'''_f\right)^T \\
&\Leftrightarrow (\mathbf{x}''_f)^T = (\mathbf{x}'''_f)^T W_r^T \\
&\Leftrightarrow (\mathbf{x}''_f)^T = (\mathbf{x}'''_f)^T W_r, \quad \text{karena } W_r = W_r^T \\
&\Leftrightarrow (\mathbf{x}''_f)^T\mathbf{x}'''_f = (\mathbf{x}'''_f)^T W_r \mathbf{x}'''_f, \quad \text{dengan } \mathbf{x}'''_f \in \mathcal{N}(W_r(t_0,t_f)) \\
&\Leftrightarrow (\mathbf{x}''_f)^T\mathbf{x}'''_f = 0, \quad \text{berdasarkan (3.1.5)} \\
&\Leftrightarrow \mathbf{x}''_f \in \mathcal{N}(W_r(t_0,t_f))^{\perp}.
\end{aligned}
$$

Dari proses ini, diperoleh $\mathcal{R}(W_r(t_0,t_f)) = \mathcal{N}(W_r(t_0,t_f))^{\perp}$.

Selanjutnya, tulis $\mathbf{x}_f = \mathbf{x}''_f + \mathbf{x}'''_f$ dimana $\mathbf{x}''_f \in \mathcal{R}(W_r(t_0,t_f))$ dan $\mathbf{x}'''_f \in \mathcal{N}(W_r(t_0,t_f))$. Karena $\mathbf{x}_f \notin \mathcal{R}(W_r(t_0,t_f))$ maka $\mathbf{x}'''_f \neq \mathbf{0}$, sedemikian sehingga $(\mathbf{x}'_f)^T\mathbf{x}'''_f \neq 0$ yang mengakibatkan $(\mathbf{x}'_f)^T\mathbf{x}_f \neq 0$.

Ini kontradiksi dengan $(\mathbf{x}'_f)^T\mathbf{x}_f = 0$. Jadi mestilah $\mathbf{x}_f \in \mathcal{R}(W_r(t_0,t_f))$ sedemikian sehingga $\mathcal{R}(L(\bullet,t_0,t_f)) \subset \mathcal{R}(W_r(t_0,t_f))$. Oleh karena itu, $\mathcal{R}(L(\bullet,t_0,t_f)) = \mathcal{R}(W_r(t_0,t_f))$ untuk setiap $t_f > t_0$. $\square$

Teorema 3.1.4. [2] *Diberikan sistem* $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$. *Maka terdapat input* $\mathbf{u}$ *yang mentransfer keadaan awal* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$ *kepada keadaan* $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$, *jika dan hanya jika terdapat suatu waktu hingga* $t_f > t_0$ *sedemikian sehingga*

$$\mathbf{x}_f \in \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f))$$

Selanjutnya, diberikan

$$\mathbf{u}(t) = B^T(t)\Phi^T(t_1, t)\eta_1 \tag{3.1.7}$$

dengan η_1 *merupakan suatu solusi dari* $W_r(t_0, t_f)\eta_1 = \mathbf{x}_f$ *dan* $t \in [t_0, t_f]$.

Bukti. Bukti dari teorema ini serupa dengan bukti dari Lema 3.1.3. □

Berikut merupakan akibat dari Teorema 3.1.4 untuk sistem tercapai keadaan yang dengan mudah dibuktikan dengan menggunakan Definisi 3.1.2 dan Teorema 3.1.4.

Akibat 3.1.5. [2] *Sistem* $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ *tercapai keadaan pada waktu* t_f, *jika dan hanya jika terdapat waktu hingga* $t_f > t_0$ *sedemikian sehingga*

$$rank(W_r(t_0, t_f)) = n. \tag{3.1.8}$$

Teorema berikut memberikan suatu input yang dapat mentransfer sebarang keadaan $\mathbf{x}_0$ kepada sebarang keadaan $\mathbf{x}_f$ dalam suatu waktu hingga $t_f - t_0$.

Teorema 3.1.6. [2] *Terdapat suatu input* $\mathbf{u}(t) = B^T(t)\Phi^T(t_f, t)\eta_1$ *yang mentransfer keadaan sistem* $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ *dari sebarang keadaan* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ *kepada sebarang keadaan* $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ *dengan* $t_f > t_0$ *jika dan hanya jika*

$$\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f)). \tag{3.1.9}$$

dengan $\eta_1 \in \mathbb{R}^n$ merupakan solusi dari

$$W_r(t_0, t_f)\eta_1 = \mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0. \tag{3.1.10}$$

Bukti.

($\Rightarrow$) Misalkan terdapat input $\mathbf{u}$ yang mentransfer keadaan dari sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ dari keadaan $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ kepada keadaan $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$, yaitu

$$\mathbf{x}_f = \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

maka

$$\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0 = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{3.1.11}$$

Misalkan $\widehat{\mathbf{x}}_f \triangleq \mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0$, maka (3.1.11) dapat ditulis

$$\widehat{\mathbf{x}}_f = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{3.1.12}$$

Persamaan (3.1.12) menyatakan terdapat suatu input $\mathbf{u}(t)$ yang mentransfer keadaan $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$ kepada keadaan $\mathbf{x}(t_f) = \widehat{\mathbf{x}}_f$ dengan $t_f > t_0$.

Dengan diberikan input $\mathbf{u}(t)$, maka (3.1.12) menjadi

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{x}}_f &= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_f, \tau)\eta_1 d\tau \\
\widehat{\mathbf{x}}_f &= \left[\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_f, \tau)d\tau\right]\eta_1 \\
\widehat{\mathbf{x}}_f &= W_r\eta_1,
\end{aligned}$$

dengan $\eta_1 \in \mathbb{R}^n$ suatu solusi dari $W_r(t_0, t_f)\eta_1 = \mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0$. Ini berarti $\widehat{\mathbf{x}}_f \in \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f))$, atau $\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f))$.

($\Leftarrow$) Misalkan $\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f))$. Ini berarti bahwa terdapat $\eta_1 \in \mathbb{R}^n$

sedemikian sehingga $\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0 = W_r\eta_1$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0 &= W_r\eta_1 \\ &= \left[\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_f, \tau)d\tau\right]\eta_1 \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_f, \tau)\eta_1 d\tau.\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Dengan menggunakan input $\mathbf{u}(t)$, maka (3.1.13) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}(t_0) &= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \mathbf{x}_f &= \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau.\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

Persamaan (3.1.14) menyatakan suatu input $\mathbf{u}(t)$ mentransfer dari keadaan $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ kepada keadaan $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ dengan $t_f > t_0$. □

Berikut merupakan akibat dari Teorema 3.1.6. untuk sistem tercapai keadaan.

Akibat 3.1.7. [2] *Misalkan sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ tercapai keadaan pada waktu t_f. Maka terdapat input yang mentransfer sebarang keadaan $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ kepada sebarang keadaan $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ dengan $t_f > t_0$. Input yang dimaksud adalah*

$$\mathbf{u}(t) = B^T(t)\Phi^T(t_f, t)W_r^{-1}(t_0, t_f)\left[\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0\right], \tag{3.1.15}$$

untuk $t \in [t_0, t_f]$.

Bukti.

Misalkan sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ tercapai keadaan pada waktu t_f, maka pada Akibat 3.1.5 $rank(W_r(t_0, t_f)) = n$ untuk suatu waktu $t_f > t_0$, ini mengakibatkan $det(W_r(t_0, t_f)) \neq 0$ sehingga $W_r(t_0, t_f)^{-1}$ ada.

Berdasarkan Teorema 3.1.6 diperoleh $\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}(W_r(t_0, t_f))$ ini berarti terdapat $\eta_1 \in \mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga $W_r(t_0, t_f)\eta_1 = \mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0$. Selanjutnya η_1 dapat dicari sebagai berikut:

$$W_r(t_0, t_f)\eta_1 = \mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0, \tag{3.1.16}$$

kalikan dari kiri kedua ruas (3.1.16) dengan $W_r(t_0, t_f)^{-1}$ diperoleh

$$\begin{aligned} W_r(t_0, t_f)^{-1} W_r(t_0, t_f)\eta_1 &= (W_r(t_0, t_f))^{-1} \left[\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0\right] \\ I\eta_1 &= W_r(t_0, t_f)^{-1} \left[\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0\right] \qquad (3.1.17) \\ \eta_1 &= W_r(t_0, t_f)^{-1} \left[\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0\right]. \end{aligned}$$

Subsitusikan persamaan (3.1.17) ke input $\mathbf{u}(t) = B^T(t)\Phi^T(t_f, t)\eta_1$ (berdasarkan Teorema 3.1.6), maka diperoleh

$$\mathbf{u}(t) = B^T(t)\Phi^T(t_f, t)W_r(t_0, t_f)^{-1} \left[\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0\right].$$

Dengan memberikan $\mathbf{u}(t) = B^T(t)\Phi^T(t_f, t)W_r(t_0, t_f)^{-1} \left[\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0\right]$, maka akan mentransfer sebarang keadaan $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ kepada sebarang keadaan $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ dengan $t_f > t_0$. $\square$

Contoh 3.1.1. Diberikan sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ dengan $A(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$. Akan ditunjukkan bahwa sistem ini tidak tercapai keadaan.

Dengan menggunakan Teorema 2.5.16 matriks transisi keadaan dari sistem tersebut adalah

$$\Phi(t, \tau) = \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & \frac{1}{2}(e^{t+\tau} - e^{-t+3\tau}) \\ 0 & e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

akibatnya $\Phi(t,\tau)B(\tau) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$ dan

$$W_r(t_0,t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} e^{-2t_f} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} (t_f - t_0)e^{-2t_f} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jelas bahwa $rank(W_r(t_0,t_f)) < 2 = n$ untuk sebarang $t_f > t_0$, sehingga sistem tidak tercapai keadaan pada t_f.

Contoh 3.1.2. Diberikan sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ dengan $A(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$. Akan dibuktikan bahwa sistem ini tercapai keadaan.

Dengan menggunakan Teorema 2.5.16 matriks transisi keadaan dari sistem tersebut adalah

$$\Phi(t,\tau) = \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & \frac{1}{2}(e^{t+\tau} - e^{-t+3\tau}) \\ 0 & e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

akibatnya $\Phi(t,\tau)B(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{t} - e^{-t+2\tau}) \\ e^{-t} \end{bmatrix}$ dan

$$\begin{aligned} W_r(t_0,t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{t_f} - e^{-t_f+2\tau}) \\ e^{-t_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{t_f} - e^{-t_f+2\tau}) & e^{-t_f} \end{bmatrix} d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{2t_f} - \frac{1}{2}e^{2\tau} + \frac{1}{4}e^{-2t_f+4\tau} & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t_f+2\tau}) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2t_f+2\tau}) & e^{-2t_f} \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} \frac{e^{2t_f}(4t_f - 4t_0 - 3) + 4e^{2t_0} + e^{-2t_f+4t_0}}{16} & \frac{e^{-2t_f+2t_0} + (2t_f - 2t_0 - 1)}{4} \\ \frac{e^{-2t_f+2t_0} + (2t_f - 2t_0 - 1)}{4} & (t_f - t_0)e^{-2t_f} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Jelas bahwa $rank(W_r(t_0, t_f)) = 2 = n$ untuk sebarang $t_f > t_0$ sehingga sistem tercapai keadaan pada t_f.

3.2 Keterkontrolan Sistem Linier Kontinu

Terlebih dahulu akan dipaparkan definisi formal dari keterkontrolan berikut.

Definisi 3.2.8. [2] *Suatu keadaan* $\mathbf{x}_0$ *dikatakan* ***terkontrol*** *pada waktu* t_0 *jika untuk suatu waktu hingga* $t_f > t_0$, *terdapat input* $\mathbf{u}(t)$, $t \in [t_0, t_f]$ *yang mentransfer keadaan* $\mathbf{x}(t)$ *dari keadaan* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ *kepada keadaan* $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$.

Jadi, jika keadaan $\mathbf{x}_0$ terkontrol pada waktu t_0, maka berdasarkan (1.1.2) diperoleh

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0} = \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

atau dapat ditulis

$$-\Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0 = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{3.2.1}$$

Dengan mengalikan dari kiri kedua ruas (3.2.1) dengan $\Phi^{-1}(t_f, t_0)$, diperoleh

$$\Phi^{-1}(t_f, t_0)(-\Phi(t_f, t_0))\mathbf{x}_0 = \int_{t_0}^{t_f} \Phi^{-1}(t_f, t_0)\Phi(t_f, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

Karena $\Phi^{-1}(t_f, t_0) = \Phi(t_0, t_f)$, maka

$$-\mathbf{x}_0 = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, t_f)\Phi(t_f, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

sehingga

$$-\mathbf{x}_0 = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \tag{3.2.2}$$

dimana $\Phi(t_0, \tau)$ merupakan matriks transisi keadaan untuk sistem (1.1.1).

Selanjutnya, misalkan $\mathfrak{R}_c^{t_0}$ menyatakan himpunan dari semua keadaan terkontrol pada waktu t_0, yang secara simbolis dapat ditulis

$$\mathfrak{R}_c^{t_0} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \text{ terkontrol pada waktu } t_0\}.$$

$\mathfrak{R}_c^{t_0}$ merupakan suatu subruang dari ruang vektor keadaan $\mathbb{R}^n$. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut:

1. $\mathfrak{R}_c^{t_0} \neq \emptyset$. Karena $\mathbf{0} \in \mathfrak{R}_c^{t_0}$. Jelas bahwa $\mathfrak{R}_c^{t_0} \subseteq \mathbb{R}^n$.

2. Misalkan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathfrak{R}_c^{t_0}$, maka akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in \mathfrak{R}_c^{t_0}$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 \in \mathfrak{R}_c^{t_0} &\Rightarrow \mathbf{x}_1 = -\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \mathbf{x}_2 \in \mathfrak{R}_c^{t_0} &\Rightarrow \mathbf{x}_2 = -\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

   Sehingga

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 &= -2\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) &= -\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

   Misalkan $\mathbf{x}_3 \triangleq \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$, maka

$$\mathbf{x}_3 = -\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

   yang menunjukkan bahwa $\mathbf{x}_3 \in \mathfrak{R}_c^{t_0}$, atau $\frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \in \mathfrak{R}_c^{t_0}$.

3. Misalkan $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}_c^{t_0}$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, maka akan ditunjukkan bahwa $\alpha\mathbf{x} \in \mathfrak{R}_c^{t_0}$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \mathfrak{R}_c^{t_0} \Rightarrow \alpha\mathbf{x} &= -\alpha\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ &= -\int_{t_0}^{t_0} \alpha\Phi(t_0,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

   yang menunjukkan bahwa $\alpha\mathbf{x} \in \mathfrak{R}_c^{t_0}$.

Sehingga $\mathfrak{R}_c^{t_0}$ disebut sebagai subruang keadaan terkontrol. Untuk penyederhanaan penulisan $\mathfrak{R}_c^{t_0}$ selanjutnya ditulis $\mathfrak{R}_c$.

Definisi 3.2.9. [2] *Sistem* (1.1.1) *dikatakan* ***terkontrol keadaan*** *pada waktu* t_0 *jika setiap keadaan* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *adalah terkontrol yakni* $\mathfrak{R}_c = \mathbb{R}^n$.

Lema 3.2.10. *Misalkan*

$$\widehat{L}(\mathbf{u}, t_0, t_f) \triangleq \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{3.2.3}$$

dan

$$W_c \triangleq W_c(t_0, t_f) \triangleq \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_0, \tau)d\tau \tag{3.2.4}$$

dengan $\Phi(t_0, t)$ *menyatakan matriks transisi keadaan. Maka* $\mathcal{R}(\widehat{L}(\bullet, t_0, t_f)) = \mathcal{R}(W_c(t_0, t_f))$ *untuk setiap* $t_0 < t_f$.

Bukti.

Misalkan $t_0 < t_f$ sebarang. Akan dibuktikan bahwa $\mathcal{R}(W_c(t_0, t_f)) \subset \mathcal{R}(\widehat{L}(\bullet, t_0, t_f))$ untuk setiap $t_0 < t_f$. Misalkan $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}(W_c)$, maka terdapat $\eta_1 \in \mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga

$$\mathbf{x}_0 = W_c\eta_1.$$

Akibatnya

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_o &= \left[\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_0, \tau)d\tau\right]\eta_1 \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_0, \tau)\eta_1 d\tau.\end{aligned}$$

Pilih $\mathbf{u}(t) = -B^T(t)\Phi^T(t_0, t)\eta_1$, maka

$$-\mathbf{x}_0 = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

Akibatnya $-\mathbf{x}_0 = \widehat{L}(\mathbf{u}, t_0, t_f)$ yang menunjukkan bahwa $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}(\widehat{L}(\bullet, t_0, t_f))$. Jadi $\mathcal{R}(W_c(t_0, t_f)) \subset \mathcal{R}(\widehat{L}(\bullet, t_0, t_f))$.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\mathcal{R}(\widehat{L}(\bullet, t_0, tf)) \subset \mathcal{R}(W_c(t_0, t_f))$. Misalkan $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}(\widehat{L}(\bullet, t_0, t_f))$, maka terdapat $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ sedemikian sehingga $\widehat{L}(\mathbf{u}, t_0, t_f) = -\mathbf{x}_0$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}(W_c(t_0, t_f))$.

Andaikan $\mathbf{x}_0 \notin \mathcal{R}(W_c(t_0, t_f))$, maka terdapat $\mathbf{x}'_0 \in \mathcal{N}(W_c(t_0, t_f))$ sedemikian sehingga

$$W_c \mathbf{x}'_0 = \mathbf{0}, \tag{3.2.5}$$

kalikan dari kiri kedua ruas (3.2.5) dengan $(\mathbf{x}'_0)^T$, diperoleh

$$(\mathbf{x}'_0)^T W_c \mathbf{x}'_0 = 0. \tag{3.2.6}$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}
0 &= (\mathbf{x}'_0)^T W_c(t_0, t_f)\mathbf{x}'_0 \\
&= (\mathbf{x}'_0)^T \left[\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_0,\tau)d\tau\right]\mathbf{x}'_0 \\
&= \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}'_0)^T \Phi(t_0,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_0,\tau)\mathbf{x}'_0 d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left[B^T(\tau)\Phi^T(t_0,\tau)\mathbf{x}'_0\right]^T \left[B^T(\tau)\Phi^T(t_0,\tau)\mathbf{x}'_0\right] d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left\langle \left[B^T(\tau)\Phi^T(t_0,\tau)\mathbf{x}'_0\right], \left[B^T(\tau)\Phi^T(t_0,\tau)\mathbf{x}'_0\right]\right\rangle d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left\|B^T(\tau)\Phi^T(t_0,\tau)\mathbf{x}'_0\right\|^2 d\tau.
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Persamaan (3.2.7) berlaku jika $\left\|B^T(\tau)\Phi^T(t_0,\tau)\mathbf{x}'_0\right\| = 0$. Selain itu, $\left\|B^T(\tau)\Phi^T(t_0,\tau)\mathbf{x}'_0\right\| = 0$ berlaku jika dan hanya jika $B^T(\tau)\Phi^T(t_0,\tau)\mathbf{x}'_0 = \mathbf{0}$ untuk setiap $t \in [t_0, t_f]$, sehingga

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{x}_0')^T\mathbf{x}_0 &= (\mathbf{x}_0')^T\left[-\widehat{L}(\mathbf{u},t_0,t_f)\right]\\
&= (\mathbf{x}_0')^T\left[\int_{t_0}^{t_f} -\Phi(t_0,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau\right]\\
&= \int_{t_0}^{t_f} -(\mathbf{x}_0')^T\Phi(t_0,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau\\
&= \int_{t_0}^{t_f} -\left[B^T(\tau)\Phi^T(t_0,\tau)\mathbf{x}_0'\right]^T\mathbf{u}(\tau)d\tau\\
&= \int_{t_0}^{t_f} -\mathbf{0}^T\mathbf{u}(\tau)d\tau\\
&= \int_{t_0}^{t_f} 0d\tau\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Karena W_c simetris maka $\mathcal{R}(W_c(t_0,t_f)) = \mathcal{N}(W_c(t_0,t_f))^{\perp}$. Ini dapat dibuktikan sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_0'' \in \mathcal{R}(W_c(t_0,t_f)) &\Leftrightarrow \exists\, \mathbf{x}_0''' \in \mathbb{R}^n \ni W_c\mathbf{x}_0''' = \mathbf{x}_0''\\
&\Leftrightarrow (\mathbf{x}_0'')^T = (W_c\mathbf{x}_0''')^T\\
&\Leftrightarrow (\mathbf{x}_0'')^T = (\mathbf{x}_0''')^T W_c^T\\
&\Leftrightarrow (\mathbf{x}_0'')^T = (\mathbf{x}_0''')^T W_c, \quad \text{karena } W_c = W_c^T\\
&\Leftrightarrow (\mathbf{x}_0'')^T\mathbf{x}_0''' = (\mathbf{x}_0''')^T W_c\mathbf{x}_0''', \quad \text{dengan } \mathbf{x}_0''' \in \mathcal{N}(W_c(t_0,t_f))\\
&\Leftrightarrow (\mathbf{x}_0'')^T\mathbf{x}_0''' = 0, \quad \text{berdasarkan (3.2.6)}\\
&\Leftrightarrow \mathbf{x}_0'' \in \mathcal{N}(W_c(t_0,t_f))^{\perp}.
\end{aligned}
$$

Dari proses ini, diperoleh $\mathcal{R}(W_c(t_0,t_f)) = \mathcal{N}(W_c(t_0,t_f))^{\perp}$.

Selanjutnya, tulis $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0'' + \mathbf{x}_0'''$ dimana $\mathbf{x}_0'' \in \mathcal{R}(W_c(t_0,t_f))$ dan $\mathbf{x}_0''' \in \mathcal{N}(W_c(t_0,t_f))$. Karena $\mathbf{x}_0 \notin \mathcal{R}(W_c(t_0,t_f))$ maka $\mathbf{x}_0''' \neq \mathbf{0}$, sedemikian sehingga $(\mathbf{x}_0')^T\mathbf{x}_0''' \neq 0$ yang mengakibatkan $(\mathbf{x}_0')^T\mathbf{x}_0 \neq 0$.

Ini kontradiksi dengan $(\mathbf{x}_0')^T\mathbf{x}_0 \neq 0$. Jadi mestilah $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}(W_c(t_0, t_f))$ sedemikian sehingga $\mathcal{R}(\widehat{L}(\bullet, t_0, t_f)) \subset \mathcal{R}(W_c(t_0, t_f))$. Oleh karena itu, $\mathcal{R}(\widehat{L}(\bullet, t_0, t_f)) = \mathcal{R}(W_c(t_0, t_f))$ untuk setiap $t_0 > t_f$. □

Teorema 3.2.11. *Diberikan sistem* $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$. *Maka terdapat input* $\mathbf{u}$ *yang mentransfer keadaan awal* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ *kepada keadaan* $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$, *jika dan hanya jika terdapat suatu waktu hingga* $t_0 < t_f$ *sedemikian sehingga*

$$\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}(W_c(t_0, t_f))$$

Selanjutnya, diberikan

$$\mathbf{u}(t) = -B^T(t)\Phi^T(t_0, t)\eta_1 \tag{3.2.8}$$

dengan η_1 *merupakan suatu solusi dari* $W_c(t_0, t_f)\eta_1 = \mathbf{x}_0$ *dan* $t \in [t_0, t_f]$.

Bukti. Bukti dari teorema ini serupa dengan bukti dari Lema 3.2.10. □

Berikut merupakan akibat dari Teorema 3.2.11 untuk sistem terkontrol keadaan yang dengan mudah dibuktikan dengan menggunakan Definisi 3.2.9 dan Teorema 3.2.10.

Akibat 3.2.12. [1] *Sistem* $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ *terkontrol keadaan pada* t_0, *jika dan hanya jika terdapat waktu hingga* $t_0 < t_f$ *sedemikian sehingga*

$$rank(W_c(t_0, t_f)) = n. \tag{3.2.9}$$

Teorema berikut memberikan suatu input yang mentransfer sebarang keadaan $\mathbf{x}_0$ kepada sebarang keadaan $\mathbf{x}_f$ dalam suatu waktu hingga $t_f - t_0$.

Teorema 3.2.13. *Terdapat suatu input* $\mathbf{u}(t) = -B^T(t)\Phi^T(t_0, t)\eta_1$ *yang mentransfer keadaan sistem* $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ *dari keadaan* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ *kepada* *keadaan* $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ *dengan* $t_0 < t_f$ *jika dan hanya jika*

$$\mathbf{x}_0 - \Phi(t_0, t_f)\mathbf{x}_f \in \mathcal{R}(W_c(t_0, t_f)). \tag{3.2.10}$$

dengan $\eta_1 \in \mathbb{R}^n$ *merupakan solusi dari*

$$W_c(t_0, t_f)\eta_1 = \mathbf{x}_0 - \Phi(t_0, t_f)\mathbf{x}_f. \tag{3.2.11}$$

Bukti.

($\Rightarrow$) Misalkan terdapat input $\mathbf{u}$ yang mentransfer keadaan dari sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ dari keadaan $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ kepada keadaan $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$, yaitu

$$\mathbf{x}_f = \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

maka

$$\mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0 = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{3.2.12}$$

Kalikan dari kiri kedua ruas (3.2.12) dengan $\Phi^{-1}(t_f, t_0)$ sehingga

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(t_f, t_0)\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_0 &= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \Phi(t_0, t_f)\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_0 &= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Dengan diberikan input $\mathbf{u}(t)$, maka (3.2.13) menjadi

$$\begin{aligned} \Phi(t_0, t_f)\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_0 &= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \Phi(t_0, t_f)\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_0 &= \left[-\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_0, \tau)d\tau\right]\eta_1 \\ \mathbf{x}_0 - \Phi(t_0, t_f)\mathbf{x}_f &= W_c\eta_1, \end{aligned}$$

dengan $\eta_1 \in \mathbb{R}^n$ suatu solusi dari $W_c(t_0, t_f)\eta_1 = \mathbf{x}_0 - \Phi(t_0, t_f)\mathbf{x}_f$. Ini berarti $\mathbf{x}_0 - \Phi(t_0, t_f)\mathbf{x}_f \in \mathcal{R}(W_c(t_0, t_f))$.

($\Leftarrow$) Misalkan $\mathbf{x}_0-\Phi(t_0,t_f)\mathbf{x}_f \in \mathcal{R}(W_c(t_0,t_f))$. Ini berarti bahwa terdapat $\eta_1 \in \mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga $\mathbf{x}_0 - \Phi(t_0,t_f)\mathbf{x}_f = W_c\eta_1$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_0 - \Phi(t_0,t_f)\mathbf{x}_f &= W_c\eta_1 \\ &= \left[\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_0,\tau)d\tau\right]\eta_1 \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_0,\tau)\eta_1 d\tau.\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Dengan menggunakan input $\mathbf{u}(t)$, maka (3.2.14) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_0 - \Phi(t_0,t_f)\mathbf{x}(t_f) &= -\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \mathbf{x}_0 &= \Phi(t_0,t_f)\mathbf{x}(t_f) - \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau.\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Persamaan (3.2.15) menyatakan suatu input $\mathbf{u}(t)$ mentransfer dari keadaan $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ kepada keadaan $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ dengan $t_0 < t_f$. □

Berikut merupakan akibat dari Teorema 3.2.13 untuk sistem terkontrol keadaan.

Akibat 3.2.14. *Misalkan sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ terkontrol keadaan pada waktu t_0. Maka terdapat input yang mentransfer sebarang keadaan $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ kepada sebarang keadaan $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ dengan $t_0 < t_f$. Input yang dimaksud adalah*

$$\mathbf{u}(t) = -B^T(t)\Phi^T(t_0,t)W_c^{-1}(t_0,t_f)\left[\mathbf{x}_0 - \Phi(t_0,t_f)\mathbf{x}_f\right], \tag{3.2.16}$$

untuk $t \in [t_0,t_f]$.

Bukti.

Misalkan sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ terkontrol keadaan pada waktu t_0, maka pada Akibat 3.2.12 $rank(W_c(t_0,t_f)) = n$ untuk suatu waktu $t_0 < t_f$, ini mengakibatkan $det(W_c(t_0,t_f)) \neq 0$ sehingga $W_c(t_0,t_f)^{-1}$ ada.

Berdasarkan Teorema 3.2.13 diperoleh $\mathbf{x}_0 - \Phi(t_0, t_f)\mathbf{x}_f \in \mathcal{R}(W_c(t_0, t_f))$ ini berarti terdapat $\eta_1 \in \mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga $W_c(t_0, t_f)\eta_1 = \mathbf{x}_0 - \Phi(t_0, t_f)\mathbf{x}_f$. Selanjutnya η_1 dapat dicari sebagai berikut:

$$W_c(t_0, t_f)\eta_1 = \mathbf{x}_0 - \Phi(t_0, t_f)\mathbf{x}_f, \tag{3.2.17}$$

kalikan dari kiri kedua ruas (3.2.17) dengan $W_c(t_0, t_f)^{-1}$ diperoleh

$$\begin{aligned} W_c(t_0, t_f)^{-1}W_c(t_0, t_f)\eta_1 &= (W_c(t_0, t_f))^{-1}\left[\mathbf{x}_0 - \Phi(t_0, t_f)\mathbf{x}_f\right] \\ I\eta_1 &= W_c(t_0, t_f)^{-1}\left[\mathbf{x}_0 - \Phi(t_0, t_f)\mathbf{x}_f\right] \\ \eta_1 &= W_c(t_0, t_f)^{-1}\left[\mathbf{x}_0 - \Phi(t_0, t_f)\mathbf{x}_f\right]. \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Subsitusikan persamaan (3.2.18) ke input $\mathbf{u}(t) = -B^T(t)\Phi^T(t_0, t)\eta_1$ (berdasarkan Teorema 3.2.13), maka diperoleh

$$\mathbf{u}(t) = -B^T(t)\Phi^T(t_0, t)W_c(t_0, t_f)^{-1}\left[\mathbf{x}_0 - \Phi(t_0, t_f)\mathbf{x}_f\right].$$

Dengan memberikan $\mathbf{u}(t) = -B^T(t)\Phi^T(t_0, t)W_c(t_0, t_f)^{-1}\left[\mathbf{x}_0 - \Phi(t_0, t_f)\mathbf{x}_f\right]$, maka akan mentransfer sebarang keadaan $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ kepada sebarang keadaan $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ dengan $t_0 < t_f$. $\square$

Contoh 3.2.1. Diberikan sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ dengan $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2t \end{bmatrix}$ dan $B(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$. Akan dibuktikan bahwa sistem ini tidak terkontrol keadaan.

Dengan menggunakan Teorema 2.5.16, matriks transisi keadaan dari sistem tersebut adalah

$$\Phi(t, \tau) = \begin{bmatrix} e^{(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{(t^2-\tau^2)} \end{bmatrix}$$

akibatnya $\Phi(t,\tau)B(\tau) = \begin{bmatrix} e^{t-2\tau} \\ 0 \end{bmatrix}$ dan

$$W_c(t_0,t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} e^{t_0-2\tau} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t_0-2\tau} & 0 \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} e^{2t_0-4\tau} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} -\frac{e^{2t_0-4\tau}}{4} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{t_0}^{t_f}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{e^{2t_0-4t_f}}{4} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{e^{-2t_0}}{4} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-e^{2t_0-4t_f}+e^{-2t_0}}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jelas bahwa $rank(W_c(t_0,t_f)) < 2 = n$ untuk sebarang $t_0 < t_f$ sehingga sistem tidak terkontrol keadaan pada t_0.

Contoh 3.2.2. Diberikan sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ dengan $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Akan dibuktikan bahwa sistem ini terkontrol keadaan.

Dengan menggunakan Teorema 2.5.16, matriks transisi keadaan dari sistem tersebut adalah

$$\Phi(t,\tau) = \begin{bmatrix} e^{(t-\tau)} & \frac{1}{2}(e^{t+2\tau} - e^{-2t+\tau}) \\ 0 & e^{(-t+\tau)} \end{bmatrix}$$

akibatnya $\Phi(t,\tau)B(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{t+2\tau} - e^{-2t+\tau}) \\ e^{(-t+\tau)} \end{bmatrix}$ dan

$$W_c(t_0,t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{t_0+2\tau} - e^{-2t_0+\tau}) \\ e^{(-t_0+\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{t_0+2\tau} - e^{-2t_0+\tau}) & e^{-t_0+\tau} \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(e^{2t_0-4\tau} - 2e^{-t_0-\tau} + e^{-4t_0+2\tau}) & \frac{1}{2}(e^{t_0-2\tau} - e^{-2t_0+\tau}) \\ \frac{1}{2}(e^{t_0-2\tau} - e^{-2t_0+\tau}) & e^{-2t_0+2\tau} \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{16}e^{2t_0-4\tau} + \frac{1}{2}e^{-t_0-\tau} + \frac{1}{8}e^{-4t_0+2\tau} & -\frac{1}{4}(e^{t_0-2\tau}) - \frac{1}{2}(e^{-2t_0+\tau}) \\ -\frac{1}{4}(e^{t_0-2\tau}) - \frac{1}{2}(e^{-2t_0+\tau}) & \frac{1}{2}e^{-2t_0+2\tau} \end{bmatrix}_{t_0}^{t_f}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{16}e^{2t_0-4t_f} + \frac{1}{2}e^{-t_0-t_f} + \frac{1}{8}e^{-4t_0+2t_f} & -\frac{1}{4}(e^{t_0-2t_f}) - \frac{1}{2}(e^{-2t_0+t_f}) \\ -\frac{1}{4}(e^{t_0-2t_f}) - \frac{1}{2}(e^{-2t_0+t_f}) & \frac{1}{2}e^{-2t_0+2t_f} \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} -\frac{9}{16}e^{-2t_0} & -\frac{3}{4}e^{-t_0} \\ -\frac{3}{4}e^{-t_0} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-e^{2t_0-4t_f}+8e^{-t_0-t_f}+2e^{-4t_0+2t_f}-9e^{-2t_0}}{16} & \frac{e^{t_0-2t_f}-e^{-2t_0+t_f}-3e^{-t_0}}{4} \\ \frac{e^{t_0-2t_f}-e^{-2t_0+t_f}-3e^{-t_0}}{4} & \frac{e^{-2t_0+t_f}-1}{2} \end{bmatrix}.$$

Jelas bahwa $rank(W_c(t_0,t_f)) = 2 = n$ untuk sebarang $t_0 < t_f$ sehingga sistem terkontrol keadaan pada t_0.

3.3 Hubungan Antara Ketercapaian dan Keterkontrolan Sistem Linier Kontinu

Teorema berikut memperlihatkan hubungan antara ketercapaian dan keterkontrolan sistem (1.1.1).

Teorema 3.3.15. [2] *Jika sistem* $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ *tercapai keadaan pada* t_f*, maka sistem tersebut terkontrol keadaan pada suatu* $t_0 < t_f$*. Selain itu, jika sistem tersebut terkontrol keadaan pada* t_0*, maka sistem tersebut tercapai keadaan pada suatu* $t_f > t_0$*.*

Bukti.

Misalkan sistem (1.1.1) tercapai keadaan pada t_f, maka berdasarkan Akibat 3.1.5 berlaku $rank(W_r(t_0, t_f)) = n$. Akan dibuktikan bahwa sistem tersebut terkontrol keadaan pada suatu $t_0 < t_f$ dengan menunjukkan bahwa $rank(W_c(t_0, t_f)) = n$.

Perhatikan matriks $W_c(t_0, t_f)$ pada persamaan (3.2.3). Dengan mengalikan matriks $W_c(t_0, t_f)$ dari kiri dengan $\Phi(t_f, t_0)$ dan dari kanan dengan $\Phi^T(t_f, t_0)$ diperoleh

$$\begin{aligned}
&\Phi(t_f,t_0)W_c(t_0,t_f)\Phi^T(t_f,t_0) \\
&\quad= \Phi(t_f,t_0)\left[\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_0,\tau)d\tau\right]\Phi^T(t_f,t_0) \\
&\quad= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f,t_0)\Phi(t_0,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_0,\tau)\Phi^T(t_f,t_0)d\tau \\
&\quad= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f,t_0)\Phi(t_0,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\left(\Phi(t_f,t_0)\Phi(t_0,\tau)\right)^T d\tau \\
&\quad= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_f,\tau)d\tau = W_r(t_0,t_f).
\end{aligned}$$

Karena $\Phi(t_f, t_0)$ adalah matriks tak singular untuk setiap t_0 dan t_f, maka $rank(\Phi(t_f, t_0)) = n$. Selanjutnya, karena $rank(W_r(t_0, t_f)) = n$ dan $rank(\Phi(t_f, t_0)) = n$, maka mestilah $rank(W_c(t_0, t_f)) = n$ untuk suatu $t_0 < t_f$ yang menunjukkan bahwa sistem terkontrol keadaan.

Misalkan sistem (1.1.1) terkontrol keadaan pada t_0, maka berdasarkan Akibat 3.2.10 berlaku $rank(W_c(t_0, t_f)) = n$. Akan dibuktikan bahwa sistem tersebut tercapai keadaan pada suatu $t_f > t_0$ dengan menunjukkan bahwa $rank(W_r(t_0, t_f)) = n$.

Perhatikan matriks $W_r(t_0, t_f)$ pada persamaan (3.1.3). Dengan mengalikan matriks $W_r(t_0, t_f)$ dari kiri dengan $\Phi(t_0, t_f)$ dan dari kanan dengan $\Phi^T(t_0, t_f)$ diperoleh

$$
\begin{aligned}
&\Phi(t_0, t_f)W_r(t_0, t_f)\Phi^T(t_0, t_f)\\
&\quad= \Phi(t_0, t_f)\left[\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_f, \tau)d\tau\right]\Phi^T(t_0, t_f)\\
&\quad= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, t_f)\Phi(t_f, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_f, \tau)\Phi^T(t_0, t_f)d\tau\\
&\quad= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, t_f)\Phi(t_f, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\left(\Phi(t_0, t_f)\Phi(t_f, \tau)\right)^T d\tau\\
&\quad= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_0, \tau)d\tau\\
&\quad= W_c(t_0, t_f).
\end{aligned}
$$

Karena $\Phi(t_0, t_f)$ adalah matriks tak singular untuk setiap t_0 dan t_f, maka $rank(\Phi(t_0, t_f)) = n$. Selanjutnya, karena $rank(W_c(t_0, t_f)) = n$ dan $rank(\Phi(t_0, t_f)) = n$, maka mestilah $rank(W_r(t_0, t_f)) = n$ untuk suatu $t_f > t_0$ yang menunjukkan bahwa sistem tercapai keadaan. □

Contoh 3.3.1. Diberikan sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ dimana $A(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$. Dalam Contoh 3.1.1 telah ditunjukkan bahwa sistem tidak tercapai keadaan pada t_f. Akan diperlihatkan bahwa sistem ini tidak terkontrol keadaan pada t_0. Karena sistem tidak tercapai keadaan pada t_f, maka terdapat suatu waktu berhingga $t_f > t_0$ sedemikian sehingga

$$rank(W_r(t_0, t_1)) < n = 2.$$

Telah diperoleh

$$\Phi(t,\tau) = \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & \frac{1}{2}(e^{t+\tau} - e^{-t+3\tau}) \\ 0 & e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

dan $\Phi(t_0,\tau)B(\tau) = \begin{bmatrix} e^{-(t_0-\tau)} & \frac{1}{2}(e^{t_0+\tau} - e^{-t_0+3\tau}) \\ 0 & e^{-(t_0-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\tau} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t_0} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Sehingga

$$W_c(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} e^{-t_0} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t_0} & 0 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} (t_f - t_0)e^{-2t_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jelas bahwa $rank(W_c(t_0, t_f)) < 2 = n$ untuk sebarang $t_0 < t_f$. Oleh karena itu sistem tidak terkontrol keadaan pada t_0.

Contoh 3.3.2. Diberikan sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ dimana $A(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$. Dalam Contoh 3.1.2 telah ditunjukkan bahwa sistem tercapai keadaan pada t_f. Akan dibuktikan bahwa sistem ini terkontrol keadaan pada t_0. Karena sistem tercapai keadaan pada t_f, maka terdapat suatu waktu berhingga $t_f > t_0$ sedemikian sehingga

$$rank(W_r(t_0, t_1)) = n = 2.$$

Telah diperoleh

$$\Phi(t, \tau) = \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & \frac{1}{2}(e^{t+\tau} - e^{-t+3\tau}) \\ 0 & e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

dan

$$\begin{aligned} \Phi(t_0, \tau)B(\tau) &= \begin{bmatrix} e^{-(t_0-\tau)} & \frac{1}{2}(e^{t_0+\tau} - e^{-t_0+3\tau}) \\ 0 & e^{-(t_0-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-\tau} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{t_0} - e^{-t_0+2\tau}) \\ e^{-t_0} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} W_c(t_0, t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{t_0} - e^{-t_0+2\tau}) \\ e^{-t_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{t_0} - e^{-t_0+2\tau}) & e^{-t_0} \end{bmatrix} d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{2t_0} - \frac{1}{2}e^{2\tau} + \frac{1}{4}e^{-2t_0+4\tau} & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t_0+2\tau}) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2t_0+2\tau}) & e^{-2t_0} \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} \frac{e^{2t_f}(4t_f-4t_0-5)+4e^{2t_0}+e^{-2t_f+4t_0}}{16} & \frac{e^{-2t_f+2t_0}+(2t_f-2t_0-1)}{4} \\ \frac{e^{-2t_f+2t_0}+(2t_f-2t_0-1)}{4} & (t_f - t_0)e^{-2t_0} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Jelas bahwa $rank(W_c(t_0, t_f)) = 2 = n$ untuk sebarang $t_0 < t_f$. Oleh karena itu sistem terkontrol keadaan pada t_0.

Contoh 3.3.3. Diberikan sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$ dengan $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dalam Contoh 3.2.2 telah ditunjukkan bahwa sistem terkontrol keadaan pada t_0. Akan dibuktikan bahwa sistem ini tercapai keadaan pada t_f. Karena sistem terkontrol keadaan pada t_0, maka terdapat suatu waktu berhingga $t_0 < t_f$ sedemikian sehingga

$$rank(W_c(t_0, t_1)) = n = 2.$$

Telah diperoleh

$$\Phi(t,\tau) = \begin{bmatrix} e^{(t-\tau)} & \frac{1}{2}(e^{t+2\tau} - e^{-2t+\tau}) \\ 0 & e^{(-t+\tau)} \end{bmatrix}$$

dan $\Phi(t_f,\tau)B(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{t_f+2\tau} - e^{-2t_f+\tau}) \\ e^{(-t_f+\tau)} \end{bmatrix}$.

Sehingga

$$\begin{aligned}
W_r(t_0,t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{t_f+2\tau} - e^{-2t_f+\tau}) \\ e^{(-t_f+\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{t_f+2\tau} - e^{-2t_f+\tau}) & e^{(-t_f+\tau)} \end{bmatrix} d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(e^{2t_f-4\tau} - 2e^{-t_f-\tau} + e^{-4t_f+2\tau}) & \frac{1}{2}(e^{3\tau} - e^{-3t_f+2\tau}) \\ \frac{1}{2}(e^{3\tau} - e^{-3t_f+2\tau}) & e^{-2t_f+2\tau} \end{bmatrix} d\tau \\
&= \begin{bmatrix} \frac{7e^{-2t_f} - 8e^{-t_0-t_f} + 5e^{-4t_0+2t_f}}{16} & \frac{e^{-t_f} + e^{t_f-2t_0} - 2e^{-2t_f+t_0} - 2}{4} \\ \frac{e^{-t_f} + e^{t_f-2t_0} - 2e^{-2t_f+t_0} - 2}{4} & \frac{1}{2}(t_f - t_0) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Jelas bahwa $rank(W_r(t_0,t_f)) = 2 = n$ untuk sebarang $t_f > t_0$. Oleh karena itu sistem tercapai keadaan pada t_f.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian dari Bab III, dapat diberikan kesimpulan sebagai berikut:

1. Syarat cukup dan perlu untuk tercapai keadaan dari sistem (1.1.1) adalah

$$rank(W_r(t_0, t_f)) = n,$$

2. Syarat cukup dan perlu untuk terkontrol keadaan dari sistem (1.1.1) adalah

$$rank(W_c(t_0, t_f)) = n,$$

3. Jika sistem (1.1.1) tercapai keadaan pada t_f, maka sistem tersebut terkontrol keadaan pada suatu $t_0 < t_f$. Selain itu, jika sistem tersebut terkontrol keadaan pada t_0, maka sistem tersebut tercapai keadaan pada suatu $t_f > t_0$.

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan untuk membahas tentang hubungan antara ketercapaian dan keterobservasian sistem linier kontinu bergantung terhadap waktu, atau hubungan antara keterkontrolan dan keterkontruksian sistem linier kontinu bergantung terhadap waktu.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H. 1991. *Aljabar Linier Elementer Edisi Lima.* Terjemahan, Erlangga. Jakarta.

[2] Antsaklis, Panos J. dan Anthony N. Michel. 2006. *Linear Systems.* Birkhäuser. Boston.

[3] Antsaklis, Panos J. dan Anthony N. Michel. 2007. *A Linear Systems Primer.* Birkhäuser. Boston.

[4] Cullen, C.G. 1966. *Matrices and Linear Transformation.* Addison Wesley Publising. Pittburg-Pennsylvania.

[5] Gopal, M. 1993. *Modern Control System Theory.* New Age International (P) Ltd. New Delhi.

[6] Jacob, Bill. 1990. *Linear Algebra.* W.H. Freeman and Company. New York.

[7] Laub, Alan J. 2005. *Matrix Analysis for Scientists and Engineers.* SIAM. USA.

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Virza Gavinda Nz, dilahirkan di Lhokseumawe pada tanggal 14 Juni 1990 dari pasangan Nazaruddin dan Emmas. Penulis adalah anak kedua dari empat bersaudara. Penulis menamatkan pendidikan Sekolah Dasar di SD Negeri 11 Lhokseumawe pada tahun 2002, SMP Negeri 2 Lhokseumawe pada tahun 2005, dan SMA Negeri 1 Lhokseumawe pada tahun 2008. Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur PMDK (Penulusuran Minat dan Kemampuan).

Selama menjadi mahasiswa di jurusan Matematika FMIPA Unand, penulis aktif dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA), organisasi Himpunan Mahasiswa dan Pelajar Aceh Cabang Unand (HIMPAC DPC UNAND), organisasi Himpunan Mahasiswa dan Pelajar Aceh Sumatera Barat (HIMPAC SUMBAR), organisasi ANDALASWARA CHOIR SUMBAR dan pengajar privat mata pelajaran Matematika. Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) pada tahun 2011 di Jorong Bukit Sikumpa, Nagari Pauh Duo Nan Batigo, Kecamatan Alam Pauh, Kabupaten Solok Selatan dalam rangka menyelesaikan salah satu mata kuliah wajib fakultas.