TEOREMA INVERSI PADA FUNGSI KARAKTERISTIK

Skripsi

TIKA YULIANA
0810431009

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM UNIVERSITAS ANDALAS PADANG 2012

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa:

Nama	:	Tika Yuliana
No. Buku Pokok	:	0810431009
Jurusan	:	Matematika
Bidang	:	Statistika
Judul Skripsi	:	**Teorema Inversi pada Fungsi Karakteristik**

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal **25 Juli 2012** berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing,

1.

Dr. Dodi Devianto
NIP. 19771227 200012 1 002

2.

Dr. Admi Nazra
NIP. 19730330 199903 1 002

Penguji,

1.

Hazmira Yozza, M.Si
NIP. 19690308 199403 2 002

2.

Dr. Lyra Yulianti
NIP. 19750706 199903 2 003

3.

Budi Rudianto, M.Si
NIP. 132 169 920

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand

Dr. Syafrizal Sy
NIP. 19670807 199309 1 001

Kk Ayu(makasih atas rekomendasiannya kk), Kak Dila(Buk Sek) Bg Andi Ketua, Bg Bagus, Kk Adek, Fildzah(makasih atas kerjasamanya selama kita jd penjab),Bg Faisal, Ocin, Iche, Kk Gita, Victor, dan yg lain maaf tidak bisa disebutkan satu per satu.

Keluarga besar HIMATIKA

Semangat dan perjuangan bersama-sama selalu menjadi kenangan di kemudian hari yang tak terhingga nilainya.

Keluarga besar UKO Unand

Di sini penuh senyum, tawa, canda, bahkan tangis. Banyak sekali pelajaran yang saya dapatkan di rumah kecil ini. Semua yang tidak di ajarkan di bangku kuliah, saya temukan di sini. Sangat2 beruntung telah menjadi bagian dari UKM yang bergelut di bidang olahraga yaitu UKO. Widia(si krpuk merah batu busuak), Ocha(adiak bp), Riri(si buk ben dan buk sek), Rizka(si krpuk merah pariaman), Noval(botak pancameeh), Anton(bagi2lah piti kuliah yg ndak jd kalua tu...), Jefri, Doni(cemungudzz ketua), Heri(diam2 menghanyutkan), Sigit, Ismail(chayo duo singgit), Ifdil(makasih atas tumpangan2nya slama ne), Adit(ucok dr Medan), Ican(aman ketua diksar), Noven(mhsiswa poli pertama dan terakhir masuk UKO), putra(yg hilang ntah kmna..??), pasangan baru Bg DJ dan Kk Ika, Kk Novi, Kk Adek, Bg Ben, Kk Puti, Bg Alwis, Bg Rio(bg simpuruik), Bg Kile, Bg Iyal, Bg Taufik, Bg Dede, Bg Afe, Bg Alfi, Bg Dolly, Bg Doni, Bg Edo wasit, Bg Fauzan, Bg Kiki, Bg Popo, Bg Febi, Bg Ryan made, Bg Alfin, Bg Sony, Bg Suja, Bg Franky, Kk Emi, Kk Shinta, Kk Rani, Meri, Cha2, Hesti, Tika, Isil, Ami, Nita, Uli, Cici, Arif, Taufan, Oon, Ari, Eko, Rizki, Ricky, Razi, Rozi, Nando, dan yang lain maaf tidak bisa disebutkan satu per satu. Terima kasih atas ilmu dan pengalaman tentang organisasinya. Selalu bangga bisa menjadi bagian dari kalian.

BP 009

Uni Vanny, Uni Winda, Uni Farida, Ocha, Meri, Firman, Misna.

Teman-teman angkatan 2008 O'Laplace (kOsong LAPan Leader mAth ComunitiEs)

KATA PENGANTAR

Syukur alhamdulillah, segala puji Penulis haturkan atas kehadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya sehingga Penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul "Teorema Inversi pada Fungsi Karakteristik". Shalawat dan salam semoga selalu tercurahkan kepada Baginda Rasulullah SAW yang telah menebarkan ilmu dan iman dalam cahaya Islam yang beliau bawa. Penulis menyadari sepenuhnya bahwa begitu banyak pihak yang telah turut membantu dalam penyelesaian skripsi ini. Melalui kesempatan ini, Penulis menyampaikan ungkapan terima kasih dan penghargaan yang tulus kepada yang terhormat :

1. Bapak Dr. Syafrizal Sy, sebagai ketua jurusan pada jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas.
2. Bapak Dr. Dodi devianto dan Bapak Dr. Admi Nazra sebagai pembimbing yang telah telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, pengarahan, dan saran kepada penulis sampai selesainya skripsi ini.
3. Ibu Hazmira Yozza, M.Si, Ibu Dr. Lyra Yulianti, dan Bapak Budi Rudianto, M.Si sebagai penguji yang telah memberikan pengarahan dan saran untuk perbaikan penulisan skripsi ini.
4. Ibu Haripamyu, M.Si dan Ibu Dr. Lyra Yulianti selaku pembimbing akademis yang telah memberikan nasehat dan motivasi kepada penulis.
5. Seluruh staf pengajar jurusan Matematika Universitas Andalas yang telah banyak memberikan ilmu yang bermanfaat bagi penulis dan seluruh staf tata usaha jurusan Matematika yang telah banyak membantu selama penulis melaksanakan studi di jurusan Matematika Universitas Andalas.
6. Pengurus pusat KSE dan para donatur atas kepercayaannya memberikan bantuan beasiswa kepada penulis, bantuan tersebut sangat membantu sekali

dalam kelancaran studi penulis dan dapat juga meringankan beban orang tua.

7. Seluruh teman-teman yang telah mendukung dan memberikan semangat kepada penulis terutama teman-teman angkatan 2008 (O'Laplace). Buat kakak-kakak senior dan adik-adik junior yang tidak bisa disebutkan satu persatu di Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) jurusan Matematika Universitas Andalas.

8. Seluruh keluarga besar Unit Kegiatan Olahraga (UKO) yang telah memberikan dukungan kepada penulis yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

9. Semua pihak yang telah membantu penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Selesainya skripsi ini tidak lepas dari do'a yang tulus, motivasi, dorongan semangat, dan bantuan yang senantiasa diberikan oleh kedua orang tua, Ayahanda Naswardi dan Ibunda Ratna Wilis, kakanda Dona Maliza, adinda Winda Oktri Ledya dan Kiki ratika Sari serta seluruh keluarga besar penulis.

Penulis selalu terbuka terhadap sumbangan pemikiran baik kritik maupun saran yang membangun untuk menyempurnakan skripsi ini. Penulis sangat menyadari bahwa dalam skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan dan tidak luput dari kekurangan karena terbatasnya ilmu dan pengalaman yang penulis miliki.

Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan sesuatu yang bermanfaat bagi semua pihak yang membacanya. Amin.

Padang, Agustus 2012

Penulis

ABSTRAK

Fungsi karakteristik dari suatu peubah acak X dinotasikan sebagai $\varphi_X(t)$ dan didefinisikan sebagai $\varphi_X(t) = E[e^{itX}]$, dimana $t \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$ dan $e^{itX} = \cos tX + i \sin tX$. Teorema inversi menyatakan bahwa fungsi karakteristik dapat digunakan untuk menentukan fungsi kepekatan peluang dari peubah acak yaitu

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt.$$

Kata kunci : *fungsi karakteristik, teorema inversi, dan peubah acak.*

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Pada teori peluang dan statistika digunakan beberapa transformasi dan fungsi pembangkit, salah satunya fungsi karakteristik. Fungsi karakteristik dari suatu peubah acak X dinotasikan sebagai $\varphi_X(t)$ dan didefinisikan sebagai berikut

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}],$$

dimana $e^{itX} = \cos(X) + i\sin(X)$. Jelas terlihat bahwa fungsi karakteristik mempunyai kesamaan dengan fungsi pembangkit momen $M_X(t) = E[e^{tX}]$, akan tetapi dengan menambahkan 'i' pada eksponennya, dimana i adalah bilangan imaginer.

Sama halnya dengan fungsi pembangkit momen, fungsi karakteristik juga dapat digunakan untuk menghitung momen dari suatu peubah acak X. Selain itu, fungsi karakteristik juga dapat digunakan untuk menentukan fungsi distribusi dari suatu peubah acak. Berbeda dengan fungsi pembangkit lainnya, fungsi karakteristik selalu ada untuk setiap fungsi distribusi, karena

$$|\varphi_X(t)| = |E[e^{itX}]| \leq E[|e^{itX}|] = E[1] < \infty.$$

Rao dan Randal (2006) menyatakan bahwa fungsi karakteristik secara tunggal menentukan sebaran peluang yang bersesuaian dengan peubah acaknya. Jadi setiap sebaran peluang memiliki fungsi karakteristik yang berbeda. Ketunggalan fungsi karakteristik merupakan akibat dari teorema inversi fungsi karakteristik, dimana secara eksplisit teorema inversi dapat menentukan fungsi distribusi $F(x)$ bilamana fungsi karakteristik $\varphi_X(t)$ diketahui. Oleh sebab itu, kajian tentang teorema inversi pada fungsi karakteristik sangat menarik untuk dikaji. Jadi dalam tulisan ini akan dibahas pembuktian teorema inversi pada fungsi karakteristik.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, yang akan dikaji dalam penulisan ini adalah teorema inversi pada fungsi karakteristik.

1.3 Tujuan

Adapun tujuan dari penulisan ini adalah untuk mengkaji teorema inversi pada fungsi karakteristik.

1.4 Sistematika Penulisan

Tulisan ini dibagi atas empat Bab. Bab I Pendahuluan terdiri dari latar belakang, perumusan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan. Bab II merupakan landasan teori yang berisi tentang materi dasar dan materi penunjang, yang akan digunakan dalam menyelesaikan permasalahan pada penulisan ini. Bab III memuat pembahasan tentang teorema inversi pada fungsi karakteristik. Bab IV merupakan kesimpulan dari pembahasan.

BAB II
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diuraikan beberapa definisi dan teorema yang akan digunakan untuk membuktikan teorema inversi pada fungsi karakteristik.

2.1 Teori Peluang

Berikut ini akan diberikan beberapa definisi percobaan, ruang contoh dan titik contoh.

Definisi 2.1.1. [1] *Percobaan adalah suatu proses untuk memperoleh suatu hasil yang teramati dari suatu fenomena.*

Definisi 2.1.2. [1] *Ruang contoh adalah himpunan semua kemungkinan hasil dari suatu percobaan.*

Definisi 2.1.3. [1] *Titik contoh adalah anggota dari ruang contoh.*

2.2 Peubah Acak dan Fungsi Distribusi

Berikut ini akan diberikan beberapa definisi dan teorema dari peubah acak dan fungsi distribusi.

Definisi 2.2.4. [1] *Suatu peubah acak, notasikan sebagai X, adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada suatu ruang contoh S, yang menghubungkan setiap titik* *contoh e dalam S dengan suatu bilangan riil x, atau dapat dituliskan sebagai* $X(e) = x$.

Definisi 2.2.5. [1] *Jika himpunan dari semua nilai yang mungkin bagi peubah acak X adalah himpunan tercacah* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *atau* $x_1, x_2, \cdots$ *maka X dinamakan peubah acak diskrit. Fungsi*

$$f(x) = P[X = x],\ x = x_1, x_2, ...$$

yang memasangkan setiap nilai x dengan nilai peluang dinamakan sebagai fungsi kepekatan peluang diskrit. Untuk selanjutnya ditulis sebagai fkp diskrit.

Definisi 2.2.6. [1] *Fungsi sebaran kumulatif dari peubah acak X didefinisikan untuk setiap nilai riil x sebagai*

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Untuk selanjutnya ditulis sebagai fungsi distribusi.

Definisi 2.2.7. [1] *Suatu peubah acak X dikatakan peubah acak kontinu jika terdapat suatu fungsi* $f(x)$ *yang dinamakan fungsi kepekatan peluang* (fkp) *sehingga fungsi distribusi dapat dinyatakan sebagai*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \ \ dan \ \ f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = F'(x).$$

Teorema 2.2.8. [1] *Suatu fungsi* $f(x)$ *merupakan* fkp *diskrit jika untuk suatu himpunan bilangan riil tak hingga yang tercacah* $x_1, x_2, \cdots$ *terpenuhi kedua sifat berikut*

$$f(x_i) \geq 0,$$

dan

$$\sum_{\forall x_i} f(x_i) = 1.$$

Teorema 2.2.9. [1] *Fungsi $f(x)$ adalah fkp bagi suatu peubah acak yang kontinu jika dan hanya jika memenuhi sifat-sifat berikut*

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

2.3 Nilai Harapan dan Fungsi Pembangkit Momen

Berikut ini akan diberikan beberapa definisi dari nilai harapan dan fungsi pembangkit momen.

Definisi 2.3.10. [1] *Misal X merupakan peubah acak diskrit dengan fkp $f(x)$, maka nilai harapan dari X dinyatakan oleh*

$$E[X] = \sum_{\forall i} x_i P(X = x_i) = \sum_{\forall i} x_i f(x_i).$$

Definisi 2.3.11. [1] *Misal X merupakan peubah acak kontinu dengan fkp $f(x)$, maka nilai harapan dari X dinyatakan oleh*

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)dx.$$

Definisi 2.3.12. [1] *Misal X adalah peubah acak maka nilai harapan*

$$M_X(t) = E[e^{tX}].$$

dinamakan fungsi pembangkit momen dari peubah acak X jika nilai harapan itu ada untuk setiap t yang berada dalam selang $-h < t < h$ untuk suatu nilai $h > 0$.

2.4 Fungsi dan Limit

Berikut ini akan diberikan beberapa definisi dan teorema dari fungsi dan limit.

Definisi 2.4.13. [5] *Suatu fungsi f adalah suatu aturan korespondensi (padanan) yang menghubungkan setiap objek x dalam satu himpunan, yang disebut daerah asal, dengan sebuah nilai tunggal $f(x)$ dari suatu himpunan kedua, yang disebut daerah hasil fungsi.*

Definisi 2.4.14. [2] *Fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ dikatakan terbatas pada A, jika terdapat konstanta $M > 0$ sedemikian sehingga $|f(x)| \leq M$, untuk semua $x \in A$.*

Definisi 2.4.15. [5] $\lim_{x \to c} f(x) = L$ *berarti bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|f(x) - L| < \epsilon$ asalkan bahwa $0 < |x - c| < \delta$, yaitu*

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Definisi 2.4.16. [5] *Misal f terdefinisi pada suatu selang terbuka yang mengandung c, maka f kontinu di c jika*

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

2.5 Turunan

Berikut ini akan diberikan definisi dari turunan.

Definisi 2.5.17. [5] *Turunan suatu fungsi f didefinisikan sebagai fungsi lain f' yang nilainya pada sebarang bilangan c adalah*

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

asalkan limit tersebut ada dan bukan ∞ atau $-\infty$.

2.6 Integral

Misalkan P adalah partisi dari selang $[a, b]$, norma P dinotasikan dengan $|P|$ adalah panjang selang bagian yang terpanjang dari partisi P, $\bar{x}_i$ adalah titik sampel untuk selang bagian ke-i dan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Definisi 2.6.18. [5] *Misalkan f suatu fungsi yang didefinisikan pada selang tertutup $[a, b]$. Jika*

$$\lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

ada, maka f terintegralkan pada $[a, b]$. Lebih lanjut, $\int_a^b f(x)dx$, disebut integral tentu (integral Riemann) f dari a ke b, didefinisikan sebagai

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) \Delta x_i.$$

Teorema 2.6.19. [5] *Jika f kontinu pada $[a, b]$ maka terdapat suatu bilangan c antara a dan b sedemikian sehingga*

$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a).$$

Teorema 2.6.20. [5] *Jika f fungsi genap, maka*

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

Jika f fungsi ganjil, maka

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

2.7 Fungsi Karakteristik

Berikut ini akan diberikan beberapa definisi dan proposisi dari fungsi karakteristik.

Definisi 2.7.21. [6] *Misal X suatu peubah acak, maka fungsi karakteristik dari X didefinisikan sebagai*

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}].$$

dimana $t \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$ dan $e^{itX} = \cos tX + i \sin tX$.

Proposisi 2.7.22. [6] *Fungsi karakteristik ada untuk sebarang sebaran.*

Proposisi 2.7.23. [6] *Misalkan X suatu peubah acak dengan fungsi karakteristik $\varphi_X(t)$, maka fungsi karakteristik dari $-X$ adalah $\overline{\varphi_X(t)}$.*

Proposisi 2.7.24. [6] *$\varphi_X(t)$ adalah kontinu seragam .*

Proposisi 2.7.25. [6] *Misalkan X suatu peubah acak, maka fungsi karakteristik dari $a + bX$ adalah $e^{iat}\varphi_X(bt)$.*

Proposisi 2.7.26. [6] *Misalkan X dan Y adalah suatu peubah acak yang saling bebas, maka $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.*

2.8 Teorema Fubini

Berikut ini akan diberikan teorema dari integral lipat atau dikenal sebagai teorema fubini.

Teorema 2.8.27. [3] *Misalkan fungsi f terbatas dan terintegralkan pada persegi panjang $R = [a, b] \times [c, d]$, maka*

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy.$$

BAB III
TEOREMA INVERSI PADA FUNGSI KARAKTERISTIK

Berikut ini akan diberikan pembuktian dari teorema inversi pada fungsi karakteristik.

Teorema 3.0.1. *Misal terdapat X suatu peubah acak. F adalah suatu fungsi distribusi dan φ_X adalah fungsi karakteristik, maka berlaku hubungan*

$$F(a+h) - F(a-h) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin th}{t} e^{-ita} \varphi_X(t) dt, \qquad -\infty < T < \infty$$

untuk $a \in \mathbb{R}$ dan $h > 0$, bilamana $a+h, a-h \in C_F$, dimana C_F adalah domain untuk F yang kontinu.

Bukti. Misalkan $\theta(t) = \frac{\sin th}{t} e^{-ita} \varphi_X(t)$ dan $I_T = \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \theta(t) dt$.

Untuk $h > 0$, perhatikan bahwa

$$|\theta(t)| = \left| \frac{\sin th}{t} e^{-ita} \varphi_X(t) \right| = \left| \frac{\sin th}{t} \right| |e^{-ita}| \, |\varphi_X(t)| \leq h \left| \frac{\sin th}{th} \right|$$

Karena $|\frac{\sin th}{th}| \leq 1$, maka $|\theta(t)| \leq h$. Dengan demikian,

$$\int |\theta(t)| dt \leq \int h \; dt < \infty.$$

Karena $\int |\theta(t)| dt$ terbatas, dengan kata lain $|\theta(t)|$ terintegralkan, maka I_T ada dan berhingga.

Sekarang perhatikan pernyataan di bawah ini,

$$\begin{aligned} I_T &= \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin th}{t}e^{-ita}\varphi_X(t)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin th}{t}e^{-ita}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF(x)\right]dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin th}{t}e^{i(x-a)t}\int_{-\infty}^{\infty}dF(x)dt. \end{aligned}$$

Karena $\int\theta(t)dt$ ada, maka menurut *Teorema Fubini* pertukaran integral pada I_T dibolehkan. Dengan demikian diperoleh pernyataan berikut,

$$\begin{aligned} I_T &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dF(x)\int_{-T}^{T}\frac{\sin th}{t}e^{i(x-a)t}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dF(x)\left[\int_{-T}^{T}\frac{\sin th}{t}\cos(x-a)t\ dt + i\int_{-T}^{T}\frac{\sin th}{t}\sin(x-a)t\ dt\right]. \end{aligned}$$

Misalkan

$$B_1 = \frac{\sin th}{t}\cos(x-a)t \quad dan \quad B_2 = \frac{\sin th}{t}\sin(x-a)t.$$

Karena B_1 adalah fungsi genap dan B_2 adalah fungsi ganjil, maka pernyataan I_T di atas menjadi,

$$I_T = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dF(x)\int_{0}^{T}\frac{\sin th}{t}\cos(x-a)t\ dt,$$

atau

$$I_T = \int_{-\infty}^{\infty}g(x,T)\ dF(x),$$

dimana

$$g(x,T) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{T}\frac{\sin th}{t}\cos(x-a)t\ dt.$$

Karena

$$2\ sin\ th\ cos(x-a)t = \sin(x-a+h)t - \sin(x-a-h)t,$$

maka diperoleh

$$g(x,T) = \frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\sin(x-a+h)t - \sin(x-a-h)t}{t}dt,$$

atau

$$g(x,T) = \frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\sin(x-a+h)t}{t}dt - \frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\sin(x-a-h)t}{t}dt.$$

Misalkan

$$p(h,T) = \frac{2}{\pi}\int_0^T \frac{\sin th}{t}dt,$$

akibatnya

$$g(x,T) = \frac{1}{2}p(x-a+h,T) - \frac{1}{2}p(x-a-h,T).$$

Karena

$$\int_0^\infty \frac{sinth}{t}dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2},\ \text{untuk } h > 0 \\ 0,\ \text{untuk } h = 0, \\ \frac{-\pi}{2},\ \text{untuk } h < 0 \end{cases}$$

maka diperoleh

$$\lim_{T\to\infty} p(h,T) = \lim_{T\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^T \frac{sinth}{t}dt = \begin{cases} 1,\ \text{untuk } h > 0 \\ 0,\ \text{untuk } h = 0. \\ -1,\ \text{untuk } h < 0 \end{cases}$$

Dengan demikian $p(h,T)$ terbatas untuk setiap $h \in \mathbb{R}$ dan $T > 0$, begitu juga $g(x,T)$ terbatas untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dan $T > 0$, sehingga berlaku pernyataan berikut yaitu,

$$\lim_{T\to\infty} g(x,T) = \begin{cases} 0, \text{ untuk } x < a-h \\ \frac{1}{2}, \text{ untuk } x = a-h \\ 1, \text{ untuk } a-h < x < a+h. \\ \frac{1}{2}, \text{ untuk } x = a+h \\ 0, \text{ untuk } x > a+h \end{cases}$$

Selanjutnya diperoleh

$$\lim_{T\to\infty} I_T = \lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,T)dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{T\to\infty} g(x,T)\right] dF(x).$$

Karena $a+h, a-h \in C_F$, jadi

$$\lim_{T\to\infty} I_T = \int_{a-h}^{a+h} 1.dF(x) = F(a+h) - F(a-h).$$

Dengan perkataan lain dapat disimpulkan bahwa

$$F(a+h) - F(a-h) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin th}{t} e^{-ita} \varphi_X(t)dt. \blacksquare \tag{3.0.1}$$

Selanjutnya, persamaan (3.0.1) dapat ditulis dalam bentuk lain yaitu, misalkan $a+h=c$ dan $a-h=b$ akibatnya $b+c=2a$, dan $c-b=2h$. Perhatikan bahwa,

$$\frac{e^{-itb} - e^{-itc}}{2i} = \frac{\cos tb - i\sin tb - (\cos tc - i\sin tc)}{2i},$$

atau

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-itb}-e^{-itc}}{2i} &= \frac{\cos tb-\cos tc+i(\sin tc-i\sin tb)}{2i}\\
&= \frac{2(\sin\frac{(b+c)}{2}t.\sin\frac{(c-b)}{2}t)+2i(\cos\frac{(b+c)}{2}t.\sin\frac{(c-b)}{2}t)}{2i}\\
&= \frac{2(\sin ta)(\sin th)+2i(\cos ta)(\sin th)}{2i}\\
&= \frac{2i\sin th(\cos ta-i\sin ta)}{2i}\\
&= \sin th(e^{-ita}).
\end{aligned}$$

Jadi diperoleh

$$\frac{e^{-itb}-e^{-itc}}{2i} = \sin th(e^{-ita}),$$

dengan demikian

$$\frac{\sin th}{t}e^{-ita} = \frac{e^{-itb}-e^{-itc}}{2it}. \tag{3.0.2}$$

Oleh karena itu, jika $b, c \in C_F$ dengan $b < c$ maka persamaan (3.0.1) menjadi

$$F(c)-F(b) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itb}-e^{-itc}}{it}\varphi_X(t)dt. \tag{3.0.3}$$

Teorema 3.0.2. *Jika F terdiferensial pada x dengan $F'(x) = f(x)$ maka*

$$f(x) = \lim_{h\to 0}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{1-e^{-iht}}{iht}e^{-itx}\varphi_X(t)dt, \tag{3.0.4}$$

jika dan hanya jika ruas kanan dari persamaan (3.0.4) ada. Jika $\varphi_X(t)$ terintegral pada $\mathbb{R}$ dan $f(x)$ ada untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ maka

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi_X(t)dt. \tag{3.0.5}$$

Bukti. $(\Rightarrow)$ Misalkan $c = x + h$ dan $b = x$.

Dengan demikian

$$\frac{e^{-itb} - e^{-itc}}{2it} = \frac{e^{-itx} - e^{-it(x+h)}}{2it}. \tag{3.0.6}$$

Perhatikan persamaan (3.0.4) yaitu

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{h\to 0} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \left(\frac{1 - e^{-iht}}{iht} \right) e^{-itx} \varphi_X(t) dt. \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx} - e^{-i(x+h)t}}{it} \varphi_X(t) dt. \end{aligned}$$

Akibatnya persamaan (3.0.3) dapat dituliskan kembali menjadi

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \left(\frac{e^{-itx} - e^{-i(x+h)t}}{it} \right) \varphi_X(t) dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \left(\frac{1 - e^{-iht}}{it} \right) e^{-itx} \varphi_X(t) dt, \end{aligned}$$

atau

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \left(\frac{1 - e^{-iht}}{iht} \right) e^{-itx} \varphi_X(t) dt. \tag{3.0.7}$$

Ini berarti persamaan (3.0.4) dapat dituliskan menjadi

$$f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} (F(x+h) - F(x)).$$

Karena F terdiferensial di x, maka

$$f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F^{'}(x).$$

Dengan perkataan lain, ruas kanan persamaan (3.0.4) ada.

$(\Leftarrow)$ Dari persamaan (3.0.7) dapat dilihat bahwa ruas kanan persamaan (3.0.4) adalah sebagai berikut,

$$\lim_{h\to 0} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \left(\frac{1 - e^{-iht}}{iht} \right) e^{-itx} \varphi_X(t) dt = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F^{'}(x).$$

Karena $F'(x) = f(x)$, jadi

$$f(x) = \lim_{h\to 0}\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\frac{1-e^{-iht}}{iht}\right)e^{-itx}\varphi_X(t)dt.$$

Selanjutnya karena $f(x)$ ada untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, maka dari persamaan (3.0.4) diperoleh

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{h\to 0}\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\frac{1-e^{-iht}}{iht}\right)e^{-itx}\varphi_X(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\lim_{h\to 0}\frac{1-e^{-iht}}{iht}\right)e^{-itx}\varphi_X(t)dt. \end{aligned}$$

Karena

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-e^{-iht}}{iht} = \lim_{h\to 0}\frac{1-cos(-th)-i\ sin(-th)}{iht} = 1,$$

maka

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)dt. \ \blacksquare$$

Berikut ini akan diberikan contoh aplikasi dari teorema inversi pada fungsi karakteristik. Misalkan $X \sim Cauchy(0,1)$ memiliki fungsi karakteristik $e^{-|t|}$ (lihat Rao dan Randal (2006)). Dengan menggunakan teorema inversi dapat dicari fungsi kepekatan peluang dari sebaran *Cauchy* tersebut.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}e^{-|t|}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [\cos(tx) - i\sin(tx)]\, e^{-|t|}dt, \end{aligned}$$

karena $\cos(tx)$ adalah fungsi genap dan $\sin(tx)$ adalah fungsi ganjil, maka $f(x)$ dapat dituliskan kembali dalam bentuk sebagai berikut

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(tx)e^{-|t|}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(tx)e^{-t}dt, \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \cos(tx)e^{-t}dt &= \lim_{a\to\infty}\left[e^{-t}\frac{1}{x}\sin(tx)\right]_0^a + \int_0^\infty \frac{1}{x}\sin(tx)e^{-t}dt \\ &= \lim_{a\to\infty}\left[e^{-t}\frac{1}{x}\sin(tx)\right]_0^a + \frac{1}{x}\left[e^{-t}(-\frac{1}{x}\cos(tx)) - \frac{1}{x}\int_0^\infty \cos(tx)e^{-t}dt\right] \\ &= \lim_{a\to\infty}\left[\frac{e^{-t}}{x}\sin(tx) - \frac{e^{-t}}{x^2}\cos(tx)\right]_0^a - \frac{1}{x^2}\int_0^\infty \cos(tx)e^{-t}dt. \end{aligned}$$

Sehingga dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\int_0^\infty \cos(tx)e^{-t}dt &= \lim_{a\to\infty}\left[\frac{e^{-t}}{x}\sin(tx) - \frac{e^{-t}}{x^2}\cos(tx)\right]_0^a \\ \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)\int_0^\infty \cos(tx)e^{-t}dt &= \lim_{a\to\infty}\left[\frac{e^{-t}}{x}\sin(tx) - \frac{e^{-t}}{x^2}\cos(tx)\right]_0^a \\ \int_0^\infty \cos(tx)e^{-t}dt &= \lim_{a\to\infty}\left[\frac{e^{-t}}{x}\sin(tx) - \frac{e^{-t}}{x^2}\cos(tx)\right]_0^a \frac{x^2}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(tx)e^{-t}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}. \blacksquare \end{aligned}$$

BAB IV
KESIMPULAN

Misal X suatu peubah acak, maka fungsi karakteristik dari X didefinisikan sebagai

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}].$$

dimana $t \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$ dan $e^{itX} = \cos tX + i \sin tX$.

Fungsi karakteristik tersebut dapat digunakan untuk menentukan nilai fungsi sebaran, yaitu

$$F(a+h) - F(a-h) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin th}{t} e^{-ita} \varphi_X(t) dt, \qquad -\infty < T < \infty$$

untuk $a \in \mathbb{R}$ dan $h > 0$, bilamana $a + h, a - h \in C_F$, dimana C_F adalah domain untuk F yang kontinu.

Selain itu fungsi karakteristik juga dapat digunakan untuk menentukan fungsi kepekatan peluang dari peubah acak yaitu

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt.$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bain, L.J. dan M. Engelhardt. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics Second Edition.* Duxbury Press, California.

[2] Bartle, R.G. dan D.R. Sherbert. 1927. *Introduction to Real Analysis Second Edition.* John Willey and Sons, Inc, Singapore.

[3] Budhi, W.S. 2001. *Kalkulus Peubah Banyak dan Penggunaannya.* Penerbit ITB, Bandung.

[4] Maspupu, J. 2008. Peranan Formulasi Inversi pada Fungsi Karakteristik suatu Variabel Acak. *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi-II 2008 Universitas Lampung, 17-18 November 2008.* 216-221 .

[5] Purcel, E.J., D. Varberg. dan S.E. Rigdon. 2004. *Kalkulus, Alih Bahasa I Nyoman Susila Edisi ke-8.* Erlangga, Jakarta.

[6] Rao, M.M. dan R.J. Swift. 2006. *Probability with Applications Second Edition.* Springer, United States of America.