PELABELAN TOTAL (a,d)-SISI ANTI AJAIB SUPER PADA GRAF ULAT

SKRIPSI

FITRI SARI GUSTIAN
06934032

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2011

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa:

Nama	:	Fitri Sari Gustian
Nomor Buku Pokok	:	06 934 032
Jurusan	:	Matematika
Bidang	:	Kombinatorik
Judul Skripsi	:	**Pelabelan Total (a,d)-Sisi Anti Ajaib Super Pada Graf Ulat**

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal **03 Januari 2012** berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing

1.

Dr. Lyra Yulianti
NIP: 19750706 199903 2 003

2.

Dr. Syafrizal Sy
NIP: 19670807 199309 1 001

Penguji,

1.

Narwen, M.Si
NIP: 19670410 199702 1 001

2.

Ir. Hazmira Yozza, M.Si
NIP: 19690308 199403 2 002

3.

Zulakmal, M.Si
NIP: 19671108 199802 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand

Dr. Syafrizal Sy
NIP: 19670807 199309 1 001

KATA PENGANTAR

Assalammu'alaikum Wr. Wb.

Syukur Alhamdulillah penulis ucapkan kehadiran Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-NYA, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul " PELABELAN TOTAL *(a,d)*-SISI ANTI AJAIB SUPER PADA GRAF ULAT ". Penulisan skripsi ini merupakan salah satu syarat untuk menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Andalas Padang.

Penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada kedua orang tua yang selalu memberikan semangat dan motivasi kepada penulis. Tidak lupa pula penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penulisan skripsi ini terutama sekali kepada :

1. Bapak Dr. Syafrizal Sy, selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas Padang sekaligus pembimbing 2 yang telah banyak memberikan saran kepada penulis sampai selesainya tugas akhir ini.
2. Ibuk Dr. Lyra Yulianti selaku pembimbing 1 yang telah banyak memberikan bimbingan, pengarahan dan saran kepada penulis sampai selesainya tugas akhir ini.
3. Bapak Narwen M.Si, ibu Ir. Hazmira Yozza M.Si dan bapak Zulakmal M.Si selaku penguji yang telah banyak meluangkan waktu, memberikan bimbingan, pengarahan dan saran dalam penulisan skripsi ini.

4. Bapak Dr. Muhafzan selaku Penasehat Akademik yang telah memberikan motivasi kepada penulis.
5. Ibu Dr. Lyra Yulianti selaku koordinator pendidikan Jurusan Matematika Universitas Andalas.
6. Seluruh staf pengajar Jurusan Matematika Universitas Andalas yang telah banyak memberikan ilmu yang bermanfaat bagi penulis. Dan seluruh staf tata usaha Jurusan Matematika yang telah banyak membantu selama penulis melaksanakan studi di Jurusan Matematika Universitas Andalas.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih banyak kekurangannya. Untuk itu penulis sangat mengharapkan sekali kritik dan saran atas kekurangan tersebut. Akhir kata semoga skripsi ini bermanfaat bagi kita semua. Amin

Padang, Januari 2012

Penulis

ABSTRAK

Graf ulat $\boldsymbol{Sn_1, n_2, \dots, n_r}$ adalah suatu graf yang diperoleh dari r buah graf bintang, dimana dua titik pusat Sn_i dan Sn_{i+1} dihubungkan oleh satu sisi, untuk setiap $i = 1,2,3, \dots, r-1$. **Graf bintang** (*star*) adalah suatu graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat n+1 yang disebut dengan pusat, dan n titik lain yang berderajat satu yang disebut daun.

Suatu pelabelan total dari graf $G = (V, E)$ dengan v titik dan e sisi adalah pemetaan satu-satu dari himpunan V(G) ∪ E(G) ke himpunan bilangan bulat positif {1, 2, ..., v + e}. Pada tulisan ini telah ditunjukkan bahwa $S_{n_1,n_2,\dots n_r}$ mempunyai pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib super dengan batasan $d \leq 3$. Pada tulisan ini juga telah ditunjukkan bahwa $Sn_1, n_2, \dots, n_r$ adalah graf total $(a, 0)$-sisi anti ajaib super dan graf total $(a, 2)$-sisi anti ajaib super.

Kata Kunci : *Graf Ulat, Graf Bintang, Graaf Terhubung, Pelabelan total (a,d)-Sisi Anti Ajaib Super.*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

No. Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Masalah pelabelan dalam teori graf mulai dikembangkan pada pertengahan tahun 1963. Pelabelan pada suatu graf muncul pertama kali pada karya Rosa tahun 1967. Pelabelan pada suatu graf adalah suatu pemetaan (fungsi) yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi atau keduanya) ke himpunan bilangan bulat. Jika domain dari fungsi adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi, maka pelabelan disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika domainnya titik dan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan total (*total labeling*) (Miller, 2000: 165).

Pelabelan pada graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedlaček (1964), kemudian Stewart (1966), serta Kotzig dan Rosa (1970). Hingga saat ini pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, karena model-model yang terdapat pada pelabelan graf berguna untuk aplikasi yang luas, seperti dalam masalah peta jaringan jalan raya, jaringan internet, sistem alamat jaringan komunikasi, dan desain sirkuit.

Graf ulat (*caterpillar Graph*) adalah graf yang jika semua titik ujungnya dihilangkan akan menghasilkan lintasan. Perlu diingat kembali bahwa titik ujung adalah titik yang berderajat satu. Bobot sisi dari suatu sisi xy terhadap suatu pelabelan adalah jumlah dari label yang diberikan kepada sisi xy serta label titik x dan y yang terkait dengan sisi xy tersebut. Jika suatu graf memiliki bobot titik dan bobot sisi yang sama, maka graf tersebut dikatakan sebagai graf dengan pelabelan ajaib. Jika graf memiliki bobot titik dan bobot sisi yang berbeda, maka graf tersebut dikatakan sebagai graf dengan pelabelan anti ajaib. Bobot sisi dari suatu sisi xy terhadap suatu pelabelan adalah jumlah dari label yang diberikan kepada sisi xy serta label titik x dan y yang terkait dengan sisi xy tersebut.

1.2 Permasalahan

Masalah yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah bagaimana memberikan pelabelan total (a,d)-sisi-anti ajaib super pada suatu graf.

1.3 Pembatasan Masalah

Permasalahan pada tugas akhir ini dibatasi pada kajian tentang pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib super pada graf ulat $S_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$, dimana a adalah bobot sisi terkecil, d adalah selisih bobot sisi, dan $n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ adalah banyak daun pada graf ulat tersebut.

1.4 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan dari penulisan skripsi ini adalah menunjukkan bahwa graf ulat $S_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ dapat dilabeli dengan pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib super dengan syarat $d \leq 3$. Selain itu juga akan ditunjukkan bahwa $S_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ mempunyai pelabelan total $(a,0)$-sisi anti ajaib super dan total $(a,2)$-sisi anti ajaib super.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini secara keseluruhan disajikan dalam empat bab. Bab I berisikan pendahuluan yang didalamnya tercakup latar belakang, permasalahan, pembatasan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan skripsi ini. Konsep dasar dari teori graf berupa definisi dan terminologi, graf ulat, pelabelan pada graf, serta beberapa definisi pendukung yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan skripsi ini disajikan pada Bab II sebagai landasan teori. Kemudian, pembahasan dari permasalahan tersebut akan diuraikan pada Bab III mengenai pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib super pada graf ulat. Penulisan skripsi ini diakhiri dengan bagian kesimpulan dan saran yang disajikan pada Bab IV.

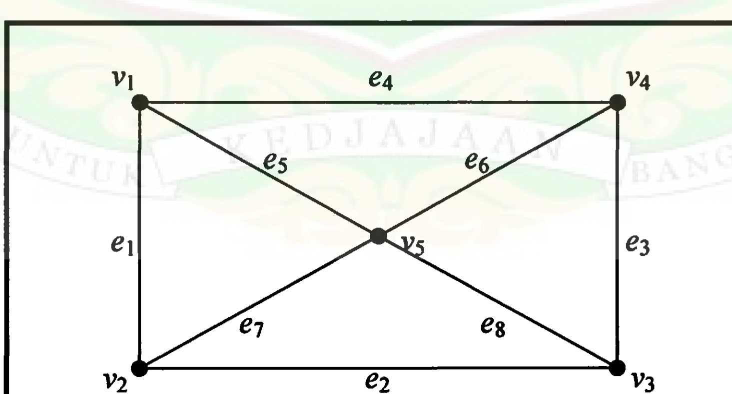
BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam bab ini akan diberikan beberapa definisi dan konsep dasar dari teori graf, serta akan dijelaskan beberapa jenis pelabelan graf yang akan digunakan pada bab-bab selanjutnya. Kajian diawali dengan definisi dan terminologi graf, graf ulat, dan pelabelan pada graf.

2.1 Pengertian dan Terminologi Graf

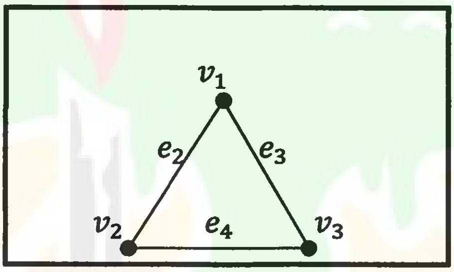
Sebuah graf G dinyatakan sebagai pasangan terurut himpunan (V, E), dimana V adalah himpunan tidak kosong yang anggota-anggotanya adalah titik, disebut dengan **himpunan titik** (*vertex*) yang dinotasikan dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, dan E adalah **himpunan sisi** (*edge*) yang menghubungkan sepasang titik di $V(G)$, dinotasikan dengan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Banyak titik yang ada pada graf G disebut **orde** graf yaitu $|V(G)| = v$, sedangkan banyak sisi pada graf disebut **ukuran** graf yaitu $|E(G)| = e$.



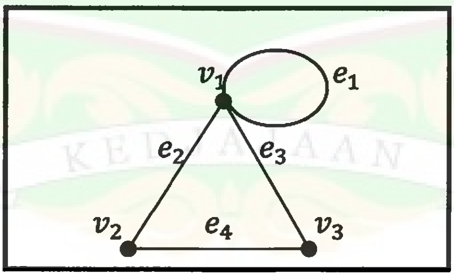
Gambar 2.1.1. Ilustrasi graf

Pada suatu graf, dua buah titik dikatakan **bertetangga (*adjacent*)** bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Untuk sebarang sisi $e = v_i v_j$, jika sisi e_i **terkait (*incident*)** dengan titik v_j dan titik v_k, maka titik v_j dan v_k disebut **titik ujung** dari sisi e_i.

Jika terdapat beberapa sisi berbeda pada graf yang menghubungkan pasangan titik yang sama, maka graf yang demikian dikatakan mempunyai **sisi ganda** (*multiple edge*) atau disebut juga sisi paralel. Sisi yang menghubungkan titik yang sama disebut sebagai **gelang** (*loop*). Graf yang tidak memuat sisi ganda dan loop disebut sebagai **graf sederhana.**



Gambar 2.1.2 Graf sederhana



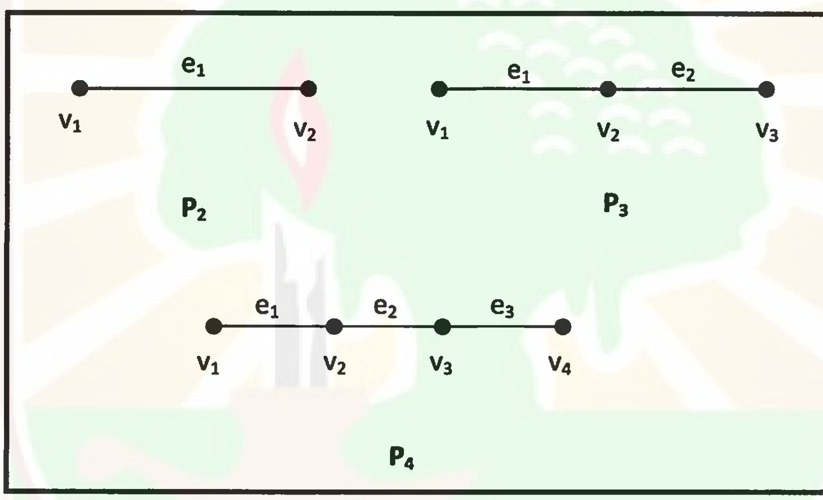
Gambar 2.1.3 Graf dengan Loop dan sisi ganda

Derajat (*degree*) dari titik v_i pada graf G adalah banyaknya titik yang bertetangga dengan v. Jika titik v berderajat nol, yang berarti v tidak bertetangga dengan semua titik di G, maka v disebut **titik terisolasi** (*isolated vertex*). Derajat terkecil dari suatu graf G dinyatakan dengan $\delta = \delta(G) = \min_{v \in V} d(v)$ dan derajat terbesar dinyatakan sebagai $\Delta = \Delta(G) = \min_{v \in V} d(v)$. Jika $\delta = \Delta = \mathrm{r}$, maka graf G disebut **graf reguler berderajat r** (*r-regular graph*).

2.2 Beberapa Jenis Graf

➤ **Graf Lintasan (*Path*)**

Graf lintasan yaitu graf yang terdiri dari lintasan tunggal, dinotasikan dengan P_n, yang memiliki *n* titik serta *n*-1 sisi.



Gambar 2.2.1 Graf Lintasan

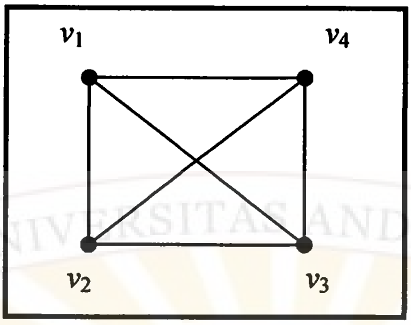
➤ **Graf Terhubung**

Graf G dikatakan **terhubung** jika untuk setiap dua titik di G, terdapat lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut.

Gambar 2.2.2 Graf Terhubung dan Graf Tak Terhubung

> **Graf Lengkap**

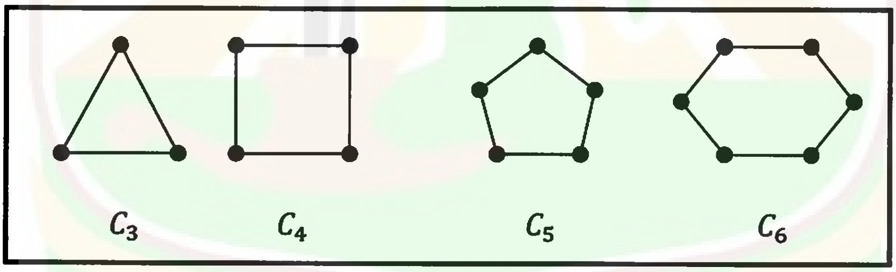
Graf lengkap K_n $(n > 1)$ adalah graf dengan n titik yang setiap dua titiknya saling bertetangga.



Gambar 2.2.3 Graf Lengkap K_4

> **Graf Siklus**

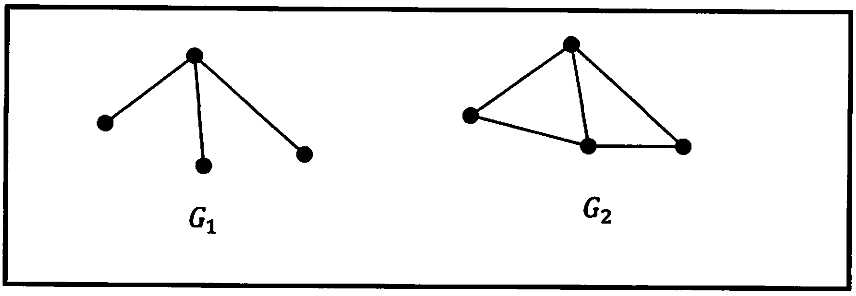
Graf siklus adalah graf terhubung yang setiap titiknya berderajat dua. Graf siklus dengan n titik dilambangkan dengan C_n. Gambar 2.2.4 merupakan gambar graf C_n , dengan $3 \leq n \leq 6$.



Gambar 2.2.4 Graf Siklus C_n

> **Graf Pohon (*Tree*)**

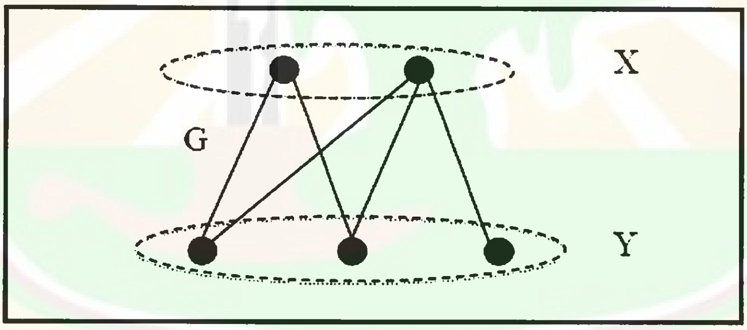
Graf pohon ***(tree)*** didefinisikan sebagai graf terhubung berorde n yang tidak memuat lingkaran. Graf pohon dengan n titik dilambangkan dengan T_n. Contoh graf pohon terlihat pada gambar berikut.



Gambar 2.2.5 G_1 pohon, G_2 bukan pohon

- **Graf Bipartit**

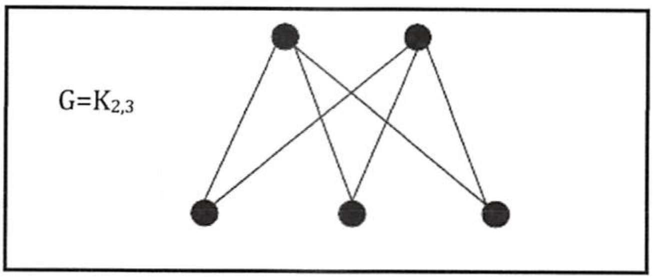
Graf bipartit adalah graf sederhana yang himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi dua bagian, misal X dan Y, sedemikian sehingga setiap sisinya mempunyai titik ujung di X dan titik ujung yang lain di Y. Contoh graf bipartit terlihat pada Gambar 2.2.6 berikut.



Gambar 2.2.6 Graf Bipartit

- **Graf Bipartit Lengkap**

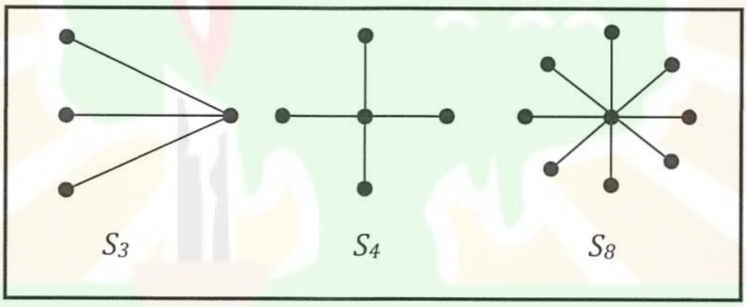
Graf bipartit lengkap adalah suatu graf bipartit yang semua titik dipartisi pertama bertetangga dengan semua titik di partisi yang lain. Notasi graf bipartit lengkap dengan banyaknya titik di bagian yang satu m dan bagian yang lain n adalah $K_{m,n}$. Pada gambar berikut diberikan ilustrasi suatu graf bipartit lengkap $K_{2,3}$.



Gambar 2.2.7 Graf Bipartit Lengkap $K_{2,3}$

➢ **Graf bintang (Star)**

Graf bintang (*star*) adalah suatu graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat n+1 yang disebut dengan pusat, dan n titik lain yang berderajat satu yang disebut daun.



Gambar 2.2.8 Graf Bintang

➢ **Graf Ulat (*caterpillar*)**

Graf ulat $Sn_1, n_2, \dots, n_r$ adalah suatu graf yang diperoleh dari r buah graf bintang, dimana dua titik pusat Sn_i dan Sn_{i+1} dihubungkan oleh satu sisi, untuk setiap $i = 1,2,3, \dots, r-1$. Graf ulat dapat dilihat sebagai barisan graf bintang $S_{n_1} \cup S_{n_2} \cup \dots \cup S_{n_r}$ dimana setiap S_{n_i} adalah bintang dengan titik pusat c_i dan n_i buah daun, $i = 1, 2, \dots, r$. Daun S_i tersebut termasuk c_{i-1} dan c_{i+1} untuk $i = 2, 3, \dots, r-1$.

Graf ulat $Sn_1,n_2,\ldots,n_r$ memiliki himpunan titik :

$$V\left(S_{n_1},S_{n_2},\ldots S_{n_r}\right) = \{c_i \mid 1 \le i \le r\} \cup \bigcup_{i=2}^{r-1} \{x_i^j \mid 2 \le j \le n_i - 1\} \cup$$

$$\left\{x_1^j \middle| 1 \le j \le n_1 - 1\right\} \cup \left\{x_r^j \middle| 2 \le j \le n_r\right\}$$

dan himpunan sisi :

$$E\,(Sn_1,n_2,\ldots,n_r) = \{c_i c_{i+1} \mid 1 \le i \le r-1\} \cup \bigcup_{i=2}^{r-1} \{c_i x_i^j \mid 2 \le j \le n_i - 1\} \cup$$

$$\left\{c_1 x_1^j \mid 1 \le j \le n_1 - 1\right\} \cup \left\{c_r x_r^j \mid 2 \le j \le n_r\right\}$$

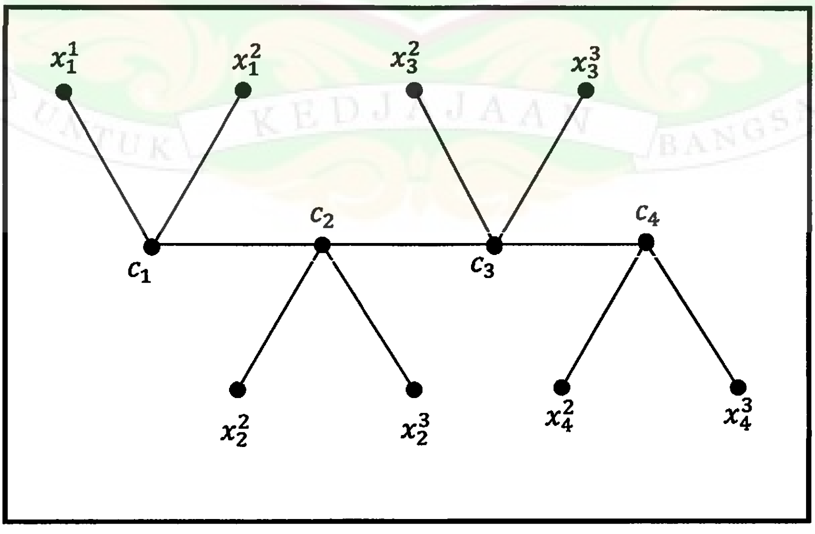
dimana

$$|V\,(\,Sn_1,n_2,\ldots,n_r)| = \sum_{i=1}^{r} n_i - r + 2$$

dan

$$|E\,(\,Sn_1,n_2,\ldots,n_r)| = \sum_{i=1}^{r} n_i - r + 1$$

Berikut ini diberikan contoh Graf Ulat



Gambar 2.2.9 Graf ulat $S_{3,4,4,3}$

Himpunan titik dan sisi pada $S_{3,4,4,3}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$V(S_{3,4,4,3}) = \{c_i \mid 1 \le i \le 4\} \cup \{x_1^j \mid 1 \le j \le 2\} \cup \{x_4^j \mid 2 \le j \le 3\} \cup \{x_2^j \mid 2 \le j \le 3\} \cup \{x_3^j \mid 2 \le j \le 3\}$$

$$E(S_{3,4,4,3}) = \{c_i c_{i+1} \mid 1 \le i \le 3\} \cup \{c_1 x_1^j \mid 1 \le j \le 2\} \cup \{c_4 x_4^j \mid 2 \le j \le 3\} \cup \{c_2 x_2^j \mid 2 \le j \le 3\} \cup \{c_3 x_3^j \mid 2 \le j \le 3\}$$

Dimana

$$|V(S_{3,4,4,3})| = (3+4+4+3) - 4 + 2$$
$$= 12$$

$$|E(S_{3,4,4,3})| = (3+4+4+3) - 4 + 1$$
$$= 11$$

2.3 Pelabelan Graf

Suatu pelabelan total dari graf $G = (V, E)$ dengan v titik dan e sisi adalah pemetaan satu-satu dari himpunan V(G) ∪ E(G) ke himpunan bilangan bulat positif {1, 2, ..., v + e}. Jika domain dari pemetaan adalah titik, maka pelabelan disebut **pelabelan titik** (***vertex labeling***). Jika domainnya adalah sisi, maka disebut **pelabelan sisi** (***edge labeling***), dan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut **pelabelan total** (***total labeling***).

Jumlah label sisi dan label dua titik misalkan x dan y yang terkait pada sisi tersebut didefinisikan sebagai **bobot sisi** (***weight of edge***) dilambangkan dengan $w(xy)$. Sedangkan definisi **bobot titik** (***weight of vertex***) yaitu jumlah label titik yang terkait di sisi tersebut dilambangkan dengan $w(x)$. Jika graf memiliki bobot titik dan bobot sisi yang sama, maka pelabelan pada graf ini disebut graf dengan **pelabelan ajaib**. Jika graf memiliki bobot titik dan bobot sisi yang berbeda, maka pelabelan pada graf ini disebut graf dengan **pelabelan anti ajaib** dan jumlah masing-masing bobotnya membentuk sebuah himpunan aritmatika. Pelabelan ini didefinisikan oleh Simanjuntak, dkk. [2000]

Definisi 2.3.1 [2] *Suatu pemetaan* $g: V(g) \cup E(G \rightarrow \{1,2,\dots,v+e\}$ *disebut pelabelan total (a,d)-sisi-anti ajaib dari G jika himpunan bobot sisi dari semua sisi di G* = $\{a, a+d, \cdots, a+(e-1)d\}$, *untuk* $a > 0$ *dan* $d \geq 0$.

Suatu pelabelan (a,d)-sisi-anti ajaib pada graf G dengan v titik dan e sisi disebut pelabelan total (a,d)-sisi-anti ajaib super jika g(V(G)) = {1,2,...,v} dan g(E(G))= {v+1,v+2,...,v+e}.

Jika *G* dapat dilabeli dengan pelabelan anti ajaib maka *G* disebut graf anti ajaib.

Berikut ini adalah beberapa jenis pelabelan anti-ajaib pada suatu graf.

a) **Pelabelan sisi (a,d)-titik-anti ajaib**

   Graf G dikatakan mempunyai pelabelan sisi (a,d)-titik anti ajaib jika terdapat bilangan bulat $a > 0$, $d \geq 0$ dan $\lambda_1 : E(G) \rightarrow \{1,2,\dots,e\}$, sedemikian sehingga himpunan bobot titik dari G dinotasikan $W_1 = \{w(x) | w(x) = \sum \lambda_1(xy), xy \epsilon E(G)\}$ dapat ditulis sebagai $W_1 = \{a, a+d, a+2d, \dots, a+(v-1)d\}$.

b) **Pelabelan titik (a,d)-sisi-anti ajaib**

Graf G dikatakan mempunyai pelabelan titik (a,d)-sisi anti ajaib jika terdapat bilangan bulat > 0 , $d \geq 0$ dan $\lambda_2 : E(G) \rightarrow \{1,2,\dots,v\}$, sedemikian sehingga himpunan bobot sisi dari G dinotasikan $W_2 = \{w(xy)|w(xy) = \lambda_2(\mathrm{x}) + \lambda_2(\mathrm{y}), xy\epsilon E(G)\}$ dapat ditulis sebagai $W_2 = \{a, a+d, a+2d, \dots, a+(e-1)d\}$.

c) **Pelabelan total (a,d)-titik-anti ajaib**

Sebuah fungsi bijeksi $\lambda_3 : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,\dots,v+e\}$ dikatakan pelabelan total titik-anti ajaib pada graf G jika himpunan bobot titik untuk semua titik di G, $W_3 = \{w(x)|w(x) = \lambda_3(x) + \sum \lambda_3\,(xy), xy\epsilon E(G)\}$ dapat ditulis sebagai $W_3 = \{a, a+d, a+2d, \dots, a+(v-1)d\}$ untuk suatu $a > 0$ dan $d \geq 0$.

d) **Pelabelan total (a,d)-sisi-anti ajaib**

Sebuah fungsi bijeksi $\lambda_4 : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,\dots,v+e\}$ dikatakan pelabelan total sisi-anti ajaib pada graf G jika himpunan bobot sisi untuk semua titik di G, $W_4 = \{w(xy)|w(xy) = \lambda_4(\mathrm{x}) + \lambda_4(\mathrm{y}) + \lambda_4(\mathrm{xy}), xy\epsilon E(G)\}$ dapat ditulis sebagai $W_3 = \{a, a+d, a+2d, \dots, a+(e-2)d\}$ untuk suatu $a > 0$ dan $d \geq 0$.

Untuk selanjutnya, pembahasan dibatasi pada pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib super untuk graf ulat.

BAB III

PELABELAN TOTAL *(a,d)*-SISI ANTI AJAIB SUPER

PADA GRAF ULAT

Pada bab ini akan dijelaskan tentang pelabelan total (*a,d*)-sisi anti ajaib super untuk graf ulat. Kajian akan dibatasi untuk $d \leq 3$.

Teorema 3.1

Jika suatu graf ulat dengan $v \geq 2$, *merupakan graf dengan pelabelan total (a,d) – sisi anti ajaib super, maka* $d \leq 3$.

Bukti : Misalkan G adalah graf ulat dengan $|V(G)| = v$ dan $|E(G)| = e$, dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Karena graf ulat termasuk graf pohon, maka haruslah $e = v - 1$. Sehingga pelabelan sisi anti ajaib super terhadap G dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$h: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2v - 1\} \qquad \dots..(3.1)$$

dengan himpunan bobot sisi

$$W = \{w(xy) \mid w(xy) = h(x) + h(y) + h(xy), xy \in E(G)\} \qquad \dots..(3.2)$$

Himpunan tersebut membentuk barisan aritmatika dengan bobot minimum a serta beda d sebagai berikut :

$$W = \{a, a + d, a + 2d, \dots., a + (v - 2)d\}$$

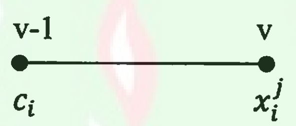
- Bobot sisi minimum yang mungkin pada pelabelan h adalah $v + 4$, karena jika titik pusat c_i dilabeli dengan 1, titik pada daun x_i^j untuk suatu i dan j, dilabeli dengan 2 dan sisinya dengan label minimum, yaitu $v + 1$, maka :

$$w(c_i x_i^j) = h(c_i) + h(x_i^j) + h(c_i x_i^j)$$

$$= \ 1 \ + \ 2 \ + (v+1)$$

$$= v + 4$$

- Bobot sisi maksimum yang mungkin pada pelabelan h adalah $(4v-2)$, karena jika titik pusat c_i dilabeli dengan $v-1$, titik pada daun x_i^j untuk suatu i dan j, dilabeli dengan v dan sisinya dilabeli dengan $2v-1$ maka :



$$w(c_i x_i^j) = h(c_i) + h(x_i^j) + h(c_i x_i^j)$$

$$= v - 1 + \ v \ + (2v-1)$$

$$= 4v - 2$$

Untuk bobot sisi minimum yang mungkin pada pelabelan h adalah :

$$v + 4 \leq a \qquad \text{..... (3.3)}$$

Untuk bobot sisi maksimum yang mungkin pada pelabelan h adalah :

$$a + (v-2)d \leq 4v - 2 \qquad \text{..... (3.4)}$$

Subtitusikan (3.3) ke (3.4), sehingga :

$$\Leftrightarrow \qquad v + 4 + (v-2)d \ \leq \ a + (v-2)d \leq 4v - 2$$

$$\Leftrightarrow \qquad v + 4 + (v-2)d \ \leq \ 4v - 2$$

$$\Leftrightarrow \qquad (v-2)d \ \leq \ 4v - 2 - v - 4 \qquad untuk\ v \neq 2$$

$$\Leftrightarrow \qquad (v-2)d \leq 3v-6$$

$$\Leftrightarrow \qquad d \leq \frac{3v-6}{(v-2)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad d \leq \frac{3(v-2)}{(v-2)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad d \leq 3 \qquad \blacksquare$$

Dari Teorema 3.1 dapat dilihat bahwa pada pelabelan (a,d)-sisi anti ajaib super pada graf ulat, selisih dari bobot sisi akan bernilai 0, 1, 2 atau 3.

Berikut diberikan beberapa konstruksi untuk pelabelan graf ulat $n_1, n_2, \cdots, n_r$:

1. Konstruksi sebuah pelabelan $\lambda : V(Sn_1, n_2, \cdots, n_r) \rightarrow \{1,2, \ldots, v+e\}$ sebagai berikut:

Untuk $d = 0, d = 1$ dan $d = 2$:

- Daun-daun Sn_2 dilabeli dengan bilangan $1,2,3, \ldots, n_2$, dengan $\lambda(c_1) = 1$ dan $\lambda(c_3) = n_2$.
- Daun-daun Sn_4 (kecuali c_3) dilabeli dengan $n_2 + 1$, $n_2 + 2, \ldots, n_2 + n_4 - 1$ dimana $\lambda(c_5) = n_2 + n_4 - 1$.
- Langkah 1 dan 2 diulangi untuk $Sn_6, Sn_8, \ldots, Sn_r$ yaitu daun-daun Sn_r (kecuali c_{r-1}) dilabeli dengan $n_2 + n_4 + \ldots$, $n_2 + n_4 + \ldots + 1, \ldots, n_2 + n_4 + \ldots - 2$ dimana $\lambda(c_5) = n_2 + n_4 + \ldots + n_r - 2$.

- Daun-daun pada Sn_1 diberi label dengan bilangan bulat $n_2 + n_4 + \ldots + n_r - 1,\ n_2 + n_4 + \ldots + n_r, \ldots, n_2 + n_4 + \ldots + n_r + n_1 - 2$, dimana $\lambda(c_2) = n_2 + n_4 + \ldots + n_r + n_1 - 2$.
- Daun-daun pada Sn_3 (kecuali c_2) diberi label dengan bilangan bulat $n_2 + n_4 + \ldots + n_r + n_1 - 1, n_2 + n_4 + \ldots + n_r + n_1, \ldots, n_2 + n_4 + \ldots + n_r + n_1 + n_3 - 3$ dimana $\lambda(c_4) = n_2 + n_4 + \ldots + n_r + n_1 + n_3 - 3$.
- Daun-daun pada $Sn_5, Sn_7, \cdots, Sn_r$ dilabeli, sehingga $\lambda(c_r)$ merupakan nilai terbesar yaitu v yaitu Daun-daun Sn_{r-1} (kecuali c_r) dilabeli dengan $n_2 + n_4 + \ldots + n_r + n_1 + n_3 - 2,\quad n_2 + n_4 + \ldots + n_r + n_1 + n_3, \ldots, n_2 + n_4 + \ldots + n_r + n_1 + n_3 + \ldots + n_{r-1} - 3$ dimana $\lambda(c_5) = n_2 + n_4 + \ldots + n_r + n_1 + n_3 + \ldots + n_{r-1} - 3$.
- Sisi-sisi $Sn_1, n_2, \cdots, n_r$ diberi label yang berada pada himpunan $\{v + 1, v + 2, v + 3, \ldots, 2v - 1\}$:

  a). Untuk $d = 0$ label sisi terkecil diletakkan pada sisi label dua buah titik terbesar secara berurutan.

  b). Untuk $d = 1$ label sisi terkecil diletakkan pada sisi dengan label dua buah titik terbesar pada daun ganjil, kemudian label sisi terkecil dijumlahkan dengan label dua buah titik terbesar pada daun genap secara berurutan.

  c). Untuk $d = 2$ label sisi terkecil diletakkan pada sisi dengan label dua buah titik terkecil secara berurutan.

2. Konstruksi sebuah pelabelan $\lambda : V(Sn_1, n_2, \cdots, n_r) \rightarrow \{1,2, \ldots, v + e\}$ sebagai berikut:

Untuk $d = 3$ memiliki dua buah konstruksi pelabelan

2.1 Untuk $d = 3$ dengan r genap

- Daun-daun Sn_2 dilabeli dengan bilangan 1,3,5,...$2n_2$-1, dengan $\lambda(c_1) = 1$ dan $\lambda(c_3) = 2n_2$-1.
- Daun-daun Sn_4 (kecuali c_3) dilabeli dengan $2n_2 + 1$, $2n_2 + 3$,...,$2n_2 + 2n_4 - 3$ dimana $\lambda(c_5) = 2n_2 + 2n_4 - 3$.
- Langkah 1 dan 2 diulangi untuk $Sn_6, Sn_8, \cdots Sn_r$.
- Daun-daun pada Sn_1 diberi label dengan bilangan bulat 2,4,6,..., $2n_1$, dimana $\lambda(c_2) = 2n_1$.
- Daun-daun pada Sn_3 (kecuali c_2) diberi label dengan bilangan bulat $2n_1 + 2$, $2n_1 + 4$, ..., $2n_1+2n_3 - 2$ dimana $\lambda(c_4) = 2n_1 + 2n_3 - 2$.
- Daun-daun pada $Sn_5, Sn_7, \cdots, Sn_r$ dilabeli, sehingga $\lambda(c_r)$ merupakan nilai terbesar yaitu v.
- Sisi-sisi $Sn_1, n_2, \cdots, n_r$ diberi label yang berada pada himpunan $\{v + 1, v + 2, v + 3, \dots, 2v - 1\}$ dengan cara label sisi terkecil diletakkan pada sisi dengan label dua buah titik terkecil secara berurutan.

2.2 Untuk $d = 3$ dengan r ganjil

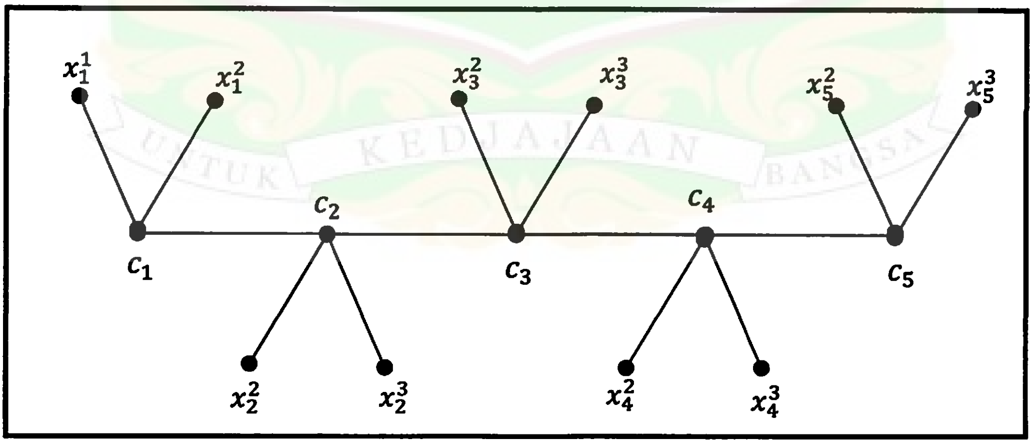
- Daun-daun Sn_2 dilabeli dengan bilangan 2,4,6,..., $2n_2$ dengan $\lambda(c_1) = 2$ dan $\lambda(c_3) = 2n_2$.
- Daun-daun Sn_4 (kecuali c_3) dilabeli dengan$2n_2 + 2$, $2n_2 + 4$, ..., $2n_2 + 2n_4 - 2$ dimana $\lambda(c_5) = n_2 + 2n_4 - 2$.
- Langkah 1 dan 2 diulangi untuk $Sn_6, Sn_8, \cdots Sn_{r-1}$.

- Daun-daun pada Sn_1 diberi label dengan bilangan bulat 1,3,5,..., $2n_1 - 1$, dimana $\lambda(c_2) = 2n_1 - 1$.
- Daun-daun pada Sn_3 (kecuali c_2) diberi label dengan bilangan bulat $2n_1 + 1, 2n_1 + 3, \ldots, 2n_1 + 2n_3 - 3$ dimana $\lambda(c_4) = 2n_1 + 2n_3 - 3$.
- Daun-daun pada $Sn_5, Sn_7, \cdots, Sn_{r-1}$ dilabeli, sehingga $\lambda(c_{r-1})$ merupakan nilai terbesar yaitu v.
- Sisi-sisi $Sn_1, n_2, \cdots, n_{r-1}$ diberi label yang berada pada himpunan $\{v + 1, v + 2, v + 3, \ldots, 2v - 1\}$ dengan cara label sisi terkecil diletakkan pada sisi dengan label dua buah titik terkecil secara berurutan.

Untuk lebih jelasnya, diberikan contoh sebagai berikut :

Contoh 3.1

Pelabelan total $(a, 3)$-sisi anti ajaib super pada graf ulat $S_{3,4,4,4,3}$ seperti gambar 3.2, himpunan label untuk titik $V = \{1,2,3, \ldots, 15\}$ dan himpunan label sisi $E = \{16,17, \ldots, 29\}$.



Gambar 3.2 Graf ulat S_{n_1,n_2,n_3,n_4,n_5}

Langkah- langkah untuk melabelkan Graf $S_{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5}$

1. Beri label masing-masing titik berdasarkan konstruksi 2.2. Karena $d = 3$ dan memiliki r ganjil, maka :
   a) $\lambda(c_1) = 2$
   b) $\lambda(c_2) = 5$
   c) $\lambda(c_3) = 8$
   d) $\lambda(c_4) = 11$
   e) $\lambda(c_5) = 14$
   f) $\lambda(x_1^1) = 1$
   g) $\lambda(x_1^2) = 3$
   h) $\lambda(x_2^2) = 4$
   i) $\lambda(x_2^3) = 6$
   j) $\lambda(x_3^2) = 7$
   k) $\lambda(x_3^3) = 9$
   l) $\lambda(x_4^2) = 10$
   m) $\lambda(x_4^3) = 12$
   n) $\lambda(x_5^2) = 13$
   o) $\lambda(x_5^3) = 15$
2. Beri label sisi-sisi pada graf dengan cara sebagai berikut:
   - Lihat pelabelan titik pada langkah 1 yang sudah dilabeli,
   - Label sisi terkecil diletakkan pada sisi dimana jumlah label kedua titik yang terkait dengan sisi tersebut adalah nilai terkecil, sebagai berikut :

     a) $\lambda(c_1x_1^1) = 16$
     b) $\lambda(c_1x_1^2) = 17$
     c) $\lambda(c_1c_2) = 18$
     d) $\lambda(c_2x_2^2) = 19$
     e) $\lambda(c_2x_2^3) = 20$
     f) $\lambda(c_2c_3) = 21$
     g) $\lambda(c_3x_3^2) = 22$
     h) $\lambda(c_3x_3^3) = 23$
     i) $\lambda(c_3c_4) = 24$
     j) $\lambda(c_4x_4^2) = 25$
     k) $\lambda(c_4x_4^3) = 26$
     l) $\lambda(c_4c_5) = 27$
     m) $\lambda(c_5x_5^2) = 28$
     n) $\lambda(c_5x_5^3) = 29$
3. Diperoleh bobot sisi untuk masing-masing sisi adalah :

   a) $w_1 = \lambda(c_1) + \lambda(c_1x_1^1) + \lambda(x_1^1) = 2 + 16 + 1 = 19$

b) $w_2 = \lambda(c_1) + \lambda(c_1x_1^2) + \lambda(x_1^2) = 2 + 17 + 3 = 22$

c) $w_3 = \lambda(c_1) + \lambda(c_1c_2) + \lambda(c_1) = 2 + 18 + 5 = 25$

d) $w_4 = \lambda(c_2) + \lambda(c_2x_2^2) + \lambda(x_2^2) = 5 + 19 + 4 = 28$

e) $w_5 = \lambda(c_2) + \lambda(c_2x_2^3) + \lambda(x_2^3) = 5 + 20 + 6 = 31$

f) $w_6 = \lambda(c_2) + \lambda(c_2c_3) + \lambda(c_3) = 5 + 21 + 8 = 34$

g) $w_7 = \lambda(c_3) + \lambda(c_3x_3^2) + \lambda(x_3^2) = 8 + 22 + 7 = 37$

h) $w_8 = \lambda(c_3) + \lambda(c_3x_3^3) + \lambda(x_3^3) = 8 + 23 + 9 = 40$

i) $w_9 = \lambda(c_3) + \lambda(c_3c_4) + \lambda(c_4) = 8 + 24 + 11 = 43$

j) $w_{10} = \lambda(c_4) + \lambda(c_4x_4^2) + \lambda(x_4^2) = 11 + 25 + 10 = 46$

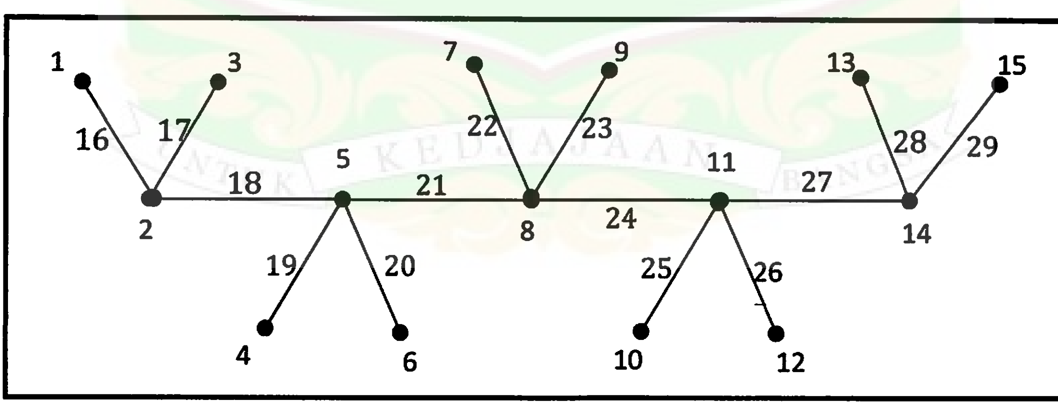
k) $w_{11} = \lambda(c_4) + \lambda(c_4x_4^3) + \lambda(x_4^3) = 11 + 26 + 12 = 49$

l) $w_{12} = \lambda(c_4) + \lambda(c_4c_5) + \lambda(c_5) = 11 + 27 + 14 = 52$

m) $w_{13} = \lambda(c_5) + \lambda(c_5x_5^2) + \lambda(x_5^2) = 14 + 28 + 13 = 55$

n) $w_{14} = \lambda(c_5) + \lambda(c_5x_5^3) + \lambda(x_5^3) = 14 + 29 + 15 = 58$

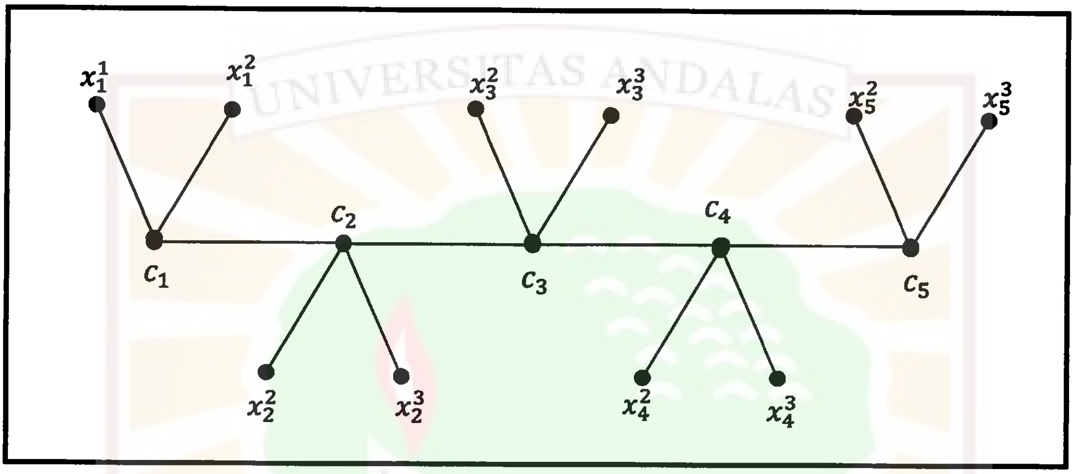
Maka himpunan bobot sisi graf ulat $S_{3,4,4,4,3}$, $W = \{19, 22, \ldots, 58\}$, sehingga diperoleh pelabelan total (19,3)-sisi anti ajaib super pada raf ulat $S_{3,4,4,4,3}$.



Gambar 3.3 Pelabelan total (19,3)-sisi anti ajaib super pada Graf ulat $S_{3,4,4,4,3}$

Contoh 3.2

Pelabelan total $(a, 2)$-sisi anti ajaib super pada graf ulat $S_{3,4,4,4,3}$ seperti gambar 3.3, himpunan label untuk titik $V = \{1,2,3, \dots ,15\}$ dan himpunan label sisi $E = \{16,17, \dots ,29\}$.



Gambar 3.4 Graf ulat S_{n_1,n_2,n_3,n_4,n_5}

Langkah- langkah untuk melabelkan Graf S_{n_1,n_2,n_3,n_4,n_5}

1. Beri label masing-masing titik berdasarkan konstruksi 1. Karena $d = 2$, maka :
   a) $\lambda(c_1) = 1$
   b) $\lambda(c_2) = 10$
   c) $\lambda(c_3) = 4$
   d) $\lambda(c_4)=13$
   e) $\lambda(c_5) = 7$
   f) $\lambda(x_1^1) = 8$
   g) $\lambda(x_1^2) = 9$
   h) $\lambda(x_2^2) = 2$
   i) $\lambda(x_2^3) = 3$
   j) $\lambda(x_3^2) = 11$
   k) $\lambda(x_3^3) = 12$
   l) $\lambda(x_4^2) = 5$
   m) $\lambda(x_4^3) = 6$
   n) $\lambda(x_5^2) = 14$
   o) $\lambda(x_5^3) = 15$
2. Beri label sisi-sisi pada graf dengan cara sebagai berikut:
   - Lihat pelabelan titik pada langkah 1 yang sudah dilabeli,

- Label sisi terkecil diletakkan pada sisi dimana jumlah label kedua titik yang terkait dengan sisi tersebut adalah nilai terkecil, sebagai berikut :

  a) $\lambda(c_1x_1^1) = 16$

  b) $\lambda(c_1x_1^2) = 17$

  c) $\lambda(c_1c_2) = 18$

  d) $\lambda(c_2x_2^2) = 19$

  e) $\lambda(c_2x_2^3) = 20$

  f) $\lambda(c_2c_3) = 21$

  g) $\lambda(c_3x_3^2) = 22$

  h) $\lambda(c_3x_3^3) = 23$

  i) $\lambda(c_3c_4) = 24$

  j) $\lambda(c_4x_4^2) = 25$

  k) $\lambda(c_4x_4^3) = 26$

  l) $\lambda(c_4c_5) = 27$

  m) $\lambda(c_5x_5^2) = 28$

  n) $\lambda(c_5x_5^3) = 29$

3. Diperoleh bobot sisi untuk masing-masing sisi adalah :

   a) $w_1 = \lambda(c_1) + \lambda(c_1x_1^1) + \lambda(x_1^1) = 1 + 16 + 8 = 25$

   b) $w_2 = \lambda(c_1) + \lambda(c_1x_1^2) + \lambda(x_1^2) = 1 + 17 + 9 = 27$

   c) $w_3 = \lambda(c_1) + \lambda(c_1c_2) + \lambda(c_1) = 1 + 18 + 10 = 29$

   d) $w_4 = \lambda(c_2) + \lambda(c_2x_2^2) + \lambda(x_2^2) = 10 + 19 + 2 = 31$

   e) $w_5 = \lambda(c_2) + \lambda(c_2x_2^3) + \lambda(x_2^3) = 10 + 20 + 3 = 33$

   f) $w_6 = \lambda(c_2) + \lambda(c_2c_3) + \lambda(c_3) = 10 + 21 + 4 = 35$

   g) $w_7 = \lambda(c_3) + \lambda(c_3x_3^2) + \lambda(x_3^2) = 4 + 22 + 11 = 36$

   h) $w_8 = \lambda(c_3) + \lambda(c_3x_3^3) + \lambda(x_3^3) = 4 + 23 + 12 = 37$

   i) $w_9 = \lambda(c_3) + \lambda(c_3c_4) + \lambda(c_4) = 4 + 24 + 13 = 38$

   j) $w_{10} = \lambda(c_4) + \lambda(c_4x_4^2) + \lambda(x_4^2) = 13 + 25 + 5 = 39$

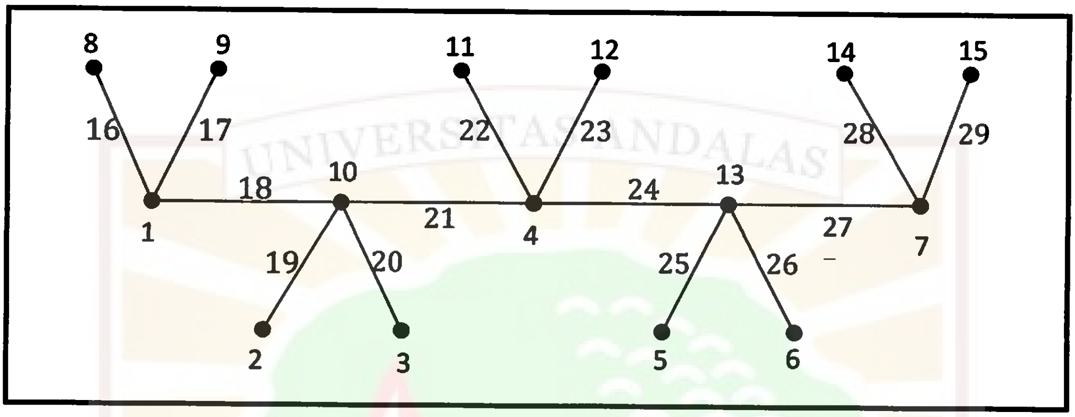
   k) $w_{11} = \lambda(c_4) + \lambda(c_4x_4^3) + \lambda(x_4^3) = 13 + 26 + 6 = 41$

   l) $w_{12} = \lambda(c_4) + \lambda(c_4c_5) + \lambda(c_5) = 13 + 27 + 7 = 43$

   m) $w_{13} = \lambda(c_5) + \lambda(c_5x_5^2) + \lambda(x_5^2) = 7 + 28 + 14 = 45$

n) $w_{14} = \lambda(c_5) + \lambda(c_5x_5^3) + \lambda(x_5^3) = 7 + 29 + 15 = 47$

Maka himpunan bobot sisi graf ulat $S_{3,4,4,4,3}$, $W = \{25,27,\dots,47\}$, sehingga diperoleh pelabelan total (25,2)-sisi anti ajaib super pada Graf ulat $S_{3,4,4,4,3}$.



Gambar 3.5 Pelabelan total (25,2)-sisi anti ajaib super pada Graf ulat $S_{3,4,4,4,3}$

Teorema 3.2

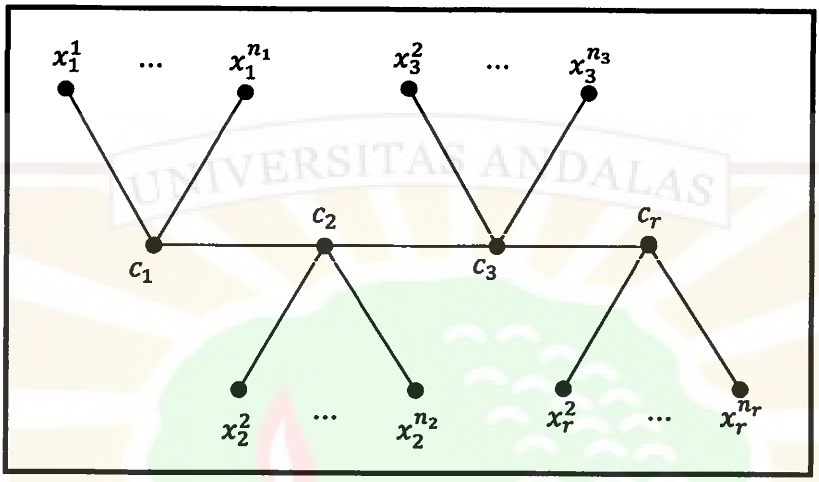
Semua graf ulat merupakan graf (a, d)*-sisi anti ajaib super dengan* $d = 0$ *dan* 2

Bukti :

Misalkan G adalah graf ulat $S_{n_1,n_2,\dots,n_r}$. Pandang graf ulat $S_{n_1,n_2,\dots,n_r}$ sebagai graf bipartit. Karena graf ulat merupakan bagian dari graf bipartit yang titik-titiknya dapat dipartisi menjadi dua bagian. Maka graf G dapat dipartisi menjadi dua baris, di mana setiap baris berisi titik dari satu set partisi. Titik-titik $a_1, a_2, \dots, a_t$ merupakan titik-titik di baris pertama, diurutkan dari kanan ke kiri. Sementara titik-titik $b_1, b_2, \dots, b_{v-t}$ merupakan titik-titik di baris kedua yang diurutkan dari kiri ke kanan.

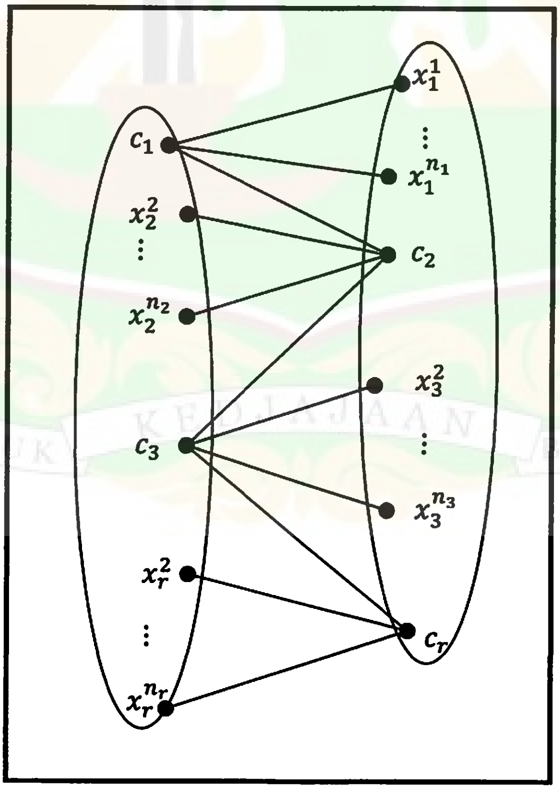
Misal $G = (V_1, V_2, E)$ adalah graf bipartit yang berasal dari graf ulat $S_{n_1,n_2,\dots,n_r}$ dimana $V_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ dan $V_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_{v-t}\}$

Berikut diberikan contoh graf ulat $S_{n_1,n_2,\dots,n_r}$



Gambar 3.6 Graf ulat $S_{n_1,n_2,\dots,n_r}$

Maka $S_{n_1,n_2,\dots,n_r}$ dapat disajikan sebagai graf bipartit berikut:



Gambar 3.7Graf bipartit dari Graf $S_{n_1,n_2,\dots,n_r}$

Konstruksikan pelabelan titik $\lambda : V(G) \to \{1, 2, \ldots., v\}$ dengan cara berikut :

$$\lambda(a_i) = i \; untuk \; 1 \le i \le t, \qquad\qquad i = \{1,2,3, \ldots, t\}$$

$$\lambda(b_j) = t + j \; untuk \; 1 \le j \le v - t, \qquad\qquad j = \{1,2,3, \ldots, v - t\}$$

Himpunan bobot sisi

$$\bigcup_{xy\in(G)} \{w(xy)\} = \lambda(a_i) \cup \lambda(b_j) = \{1,2, \ldots, t\} \cup \{t+1, t+2, \ldots, t+(v-t)\}$$

$$= \{1,2, \ldots, t\} \cup \{t+1, t+2, \ldots, v\} = \{t+2, t+3, \ldots., t \;+ v\}$$

Jika pelabelan titik λ digabung dengan pelabelan sisi dengan himpunan label sisi $\{v+1, v+2, \ldots, 2v-1\}$, maka diperoleh pelabelan **total $(2v+t+1, 0)$-sisi-anti ajaib super** atau **total $(v+t+3, 2)$-sisi anti ajaib super.** Berikut diberikan penjelasannya :

a. Pelabelan Total $(2v+t+1, 0)$-sisi anti ajaib super

- Bobot sisi minimum yang mungkin pada pelabelan λ adalah $2v+t+1$, karena jika a_i dilabeli dengan $v-1$, b_j dilabeli dengan v dan sisinya dilabeli dengan label minimum yaitu $t+2$ maka :

$$w(a_ib_j) = \lambda(a_i) + \lambda(b_j) + \lambda(a_ib_j) \qquad \text{untuk suatu } i, j$$
$$= v - 1 + v + (t+2)$$
$$= 2v + t + 1$$

  Jumlah bobot sisi yang mungkin adalah $2v+t+1$

- Bobot sisi maksimum yang mungkin pada pelabelan λ adalah $2v+t+1$, karena jika a_i dilabeli dengan 1, b_i dilabeli dengan v dan sisinya dilabeli dengan label maksimum yaitu $t+v$ maka:

$$w(a_ib_j) = \lambda(a_i) + \lambda(b_j) + \lambda(a_ib_j) \qquad \text{untuk suatu } i, j$$

$$= 1 \quad + \quad v \quad + (t + v)$$
$$= 2v + t + 1$$

Jumlah bobot sisi yang mungkin adalah $2v + t + 1$.

Untuk bobot sisi minimum yang mungkin pada pelabelan λ adalah :

$$2v + t + 1 \leq a \qquad \text{..... (3.5)}$$

Untuk bobot sisi maksimum yang mungkin pada pelabelan h adalah :

$$a + (v-2)d \leq 2v + t + 1 \qquad \text{..... (3.6)}$$

Subtitusikan (3.5) ke (3.6) , sehingga :

$$\Leftrightarrow \quad 2v + t + 1 + (v-2)d \leq a + (v-2)d \leq 2v + t + 1$$
$$\Leftrightarrow \quad 2v + t + 1 + (v-2)d \leq 2v + t + 1$$
$$\Leftrightarrow \quad (v-2)d \leq 2v + t + 1 - (2v + t + 1)$$
$$\Leftrightarrow \quad (v-2)d \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad d \leq \frac{0}{(v-2)}$$
$$\Leftrightarrow \quad d \leq 0. \qquad \blacksquare$$

Karena $0 \leq d$ dan $d \leq 0$ maka $d = 0$.

b. Pelabelan total $(v + t + 3, 2)$-sisi anti ajaib super

- Bobot sisi minimum yang mungkin pada pelabelan λ adalah $v + t + 3$, karena jika a_i dilabeli dengan 1, b_i dilabeli dengan v dan sisinya dilabeli dengan label minimum yaitu $(t + 2)$ maka :

$$w(a_i b_j) = \lambda(a_i) + \lambda(b_j) + \lambda(a_i b_j) \qquad \textit{untuk suatu } i, j$$
$$= 1 + v + (t + 2)$$
$$= v + t + 3$$

Jumlah bobot sisi yang mungkin adalah $v + t + 3$

- Bobot sisi maksimum yang mungkin pada pelabelan λ adalah $3v + t - 1$, karena jika titik pusat c_i dilabeli dengan $v - 1$, titik pada daun n_i dilabeli dengan v, dan sisinya dilabeli dengan label minimum yaitu $(t + v)$ maka :

$$\begin{aligned} w(a_i b_j) &= \lambda(a_i) + \lambda(b_j) + \lambda(a_i b_j) \qquad \textit{untuk suatu } i, j \\ &= v - 1 + v + (t + v) \\ &= 3v + t - 1 \end{aligned}$$

Jumlah bobot sisi yang mungkin adalah $3v + t - 1$.

Untuk bobot sisi minimum yang mungkin pada pelabelan λ adalah :

$$v + t + 3 \leq a \qquad \text{..... (3.7)}$$

Untuk bobot sisi maksimum yang mungkin pada pelabelan λ adalah :

$$a + (v - 2)d \leq 3v + t - 1 \qquad \text{..... (3.8)}$$

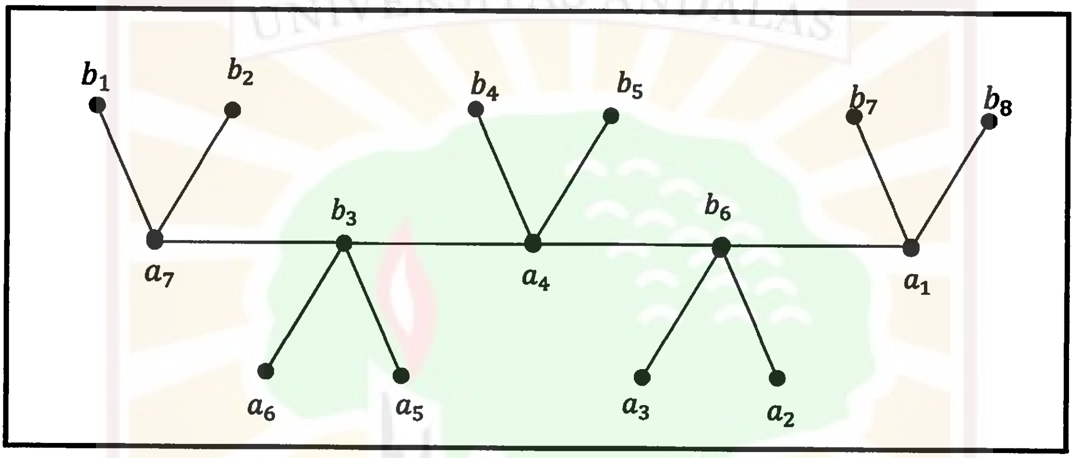
Subtitusikan (3.7) ke (3.8) , sehingga :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad v + t + 3 + (v - 2)d &\leq a + (v - 2)d \leq 3v + t - 1 \\ \Leftrightarrow \quad v + t + 3 + (v - 2)d &\leq 3v + t - 1 \\ \Leftrightarrow \quad (v - 2)d &\leq 3v + t - 1 - (v + t + 3) \\ \Leftrightarrow \quad (v - 2)d &\leq 2v - 4 \\ \Leftrightarrow \quad d &\leq \frac{2(v - 2)}{(v - 2)} \\ \Leftrightarrow \quad d &\leq 2. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Karena $2 \leq d$ dan $d \leq 2$ maka $d = 2$.

Contoh 3.3

Akan diberikan pelabelan total $(2v + t + 1,0)$-sisi anti ajaib super pada graf ulat $S_{3,4,4,4,3}$. Karena pelabelan total $(2v + t + 1,0)$-sisi anti ajaib super dan $|V(G)| = 15$, maka himpunan label untuk titik $V = \{1,2,3,\dots,15\}$ dan himpunan label untuk sisi $E = \{16,17,\dots,29\}$.



Gambar 3.8 Graf ulat $S_{3,4,4,4,3}$

Dari gambar dapat diketahui bahwa $t = 7$, sehingga diperoleh pelabelan total (25,0)-sisi titik anti ajaib super pada graf ulat $S_{3,4,4,4,3}$.

Langkah- langkah untuk melabelkan Graf $S_{3,4,4,4,3}$

1. Beri label masing-masing titik berdasarkan konstruksi 1. Karena $d = 0$, maka:
   a) $\lambda(a_7) = 1$
   b) $\lambda(b_3) = 10$
   c) $\lambda(a_4) = 4$
   d) $\lambda(b_6) = 13$
   e) $\lambda(a_1) = 7$
   i) $\lambda(a_5) = 3$
   j) $\lambda(b_4) = 11$
   k) $\lambda(b_5) = 12$
   l) $\lambda(a_3) = 5$
   m) $\lambda(a_2) = 6$

f) $\lambda(b_1) = 8$

g) $\lambda(b_2) = 9$

h) $\lambda(a_6) = 2$

n) $\lambda(b_7) = 14$

o) $\lambda(b_8) = 15$

2. Beri label sisi-sisi pada graf dengan cara sebagai berikut:

➢ Lihat pelabelan titik pada langkah 1 yang telah dilabeli,

➢ Label sisi terkecil diletakkan pada sisi dimana jumlah label kedua titik yang terkait dengan sisi tersebut adalah nilai terbesar, sebagai berikut :

a) $\lambda(a_7b_1) = 29$

b) $\lambda(a_7b_2) = 28$

c) $\lambda(a_7b_3) = 27$

d) $\lambda(b_3a_6) = 26$

e) $\lambda(b_3a_5) = 25$

f) $\lambda(b_3a_4) = 24$

g) $\lambda(a_4b_4) = 23$

h) $\lambda(a_4b_5) = 22$

i) $\lambda(a_4b_6) = 21$

j) $\lambda(b_6a_3) = 20$

k) $\lambda(b_6a_2) = 19$

l) $\lambda(b_6a_1) = 18$

m) $\lambda(a_1b_7) = 17$

n) $\lambda(a_1b_8) = 16$

3. Diperoleh bobot sisi untuk masing-masing sisi adalah :

a) $w_1 = \lambda(a_1) + \lambda(a_1b_8) + \lambda(b_8) = 1 + 29 + 8 = 38$

b) $w_2 = \lambda(a_1) + \lambda(a_1b_7) + \lambda(b_7) = 1 + 28 + 9 = 38$

c) $w_3 = \lambda(b_6) + \lambda(b_6a_1) + \lambda(a_1) = 1 + 27 + 10 = 38$

d) $w_4 = \lambda(b_6) + \lambda(b_6a_2) + \lambda(a_2) = 10 + 26 + 2 = 38$

e) $w_5 = \lambda(b_6) + \lambda(b_6a_3) + \lambda(a_3) = 10 + 25 + 3 = 38$

f) $w_6 = \lambda(a_4) + \lambda(a_4b_6) + \lambda(b_6) = 10 + 24 + 4 = 38$

g) $w_7 = \lambda(a_4) + \lambda(a_4b_5) + \lambda(b_5) = 4 + 23 + 11 = 38$

h) $w_8 = \lambda(a_4) + \lambda(a_4b_4) + \lambda(b_4) = 4 + 22 + 12 = 38$

i) $w_9 = \lambda(b_3) + \lambda(b_3a_4) + \lambda(a_4) = 4 + 21 + 13 = 38$

j) $w_9 = \lambda(b_3) + \lambda(b_3a_5) + \lambda(a_5) = 13 + 20 + 5 = 38$

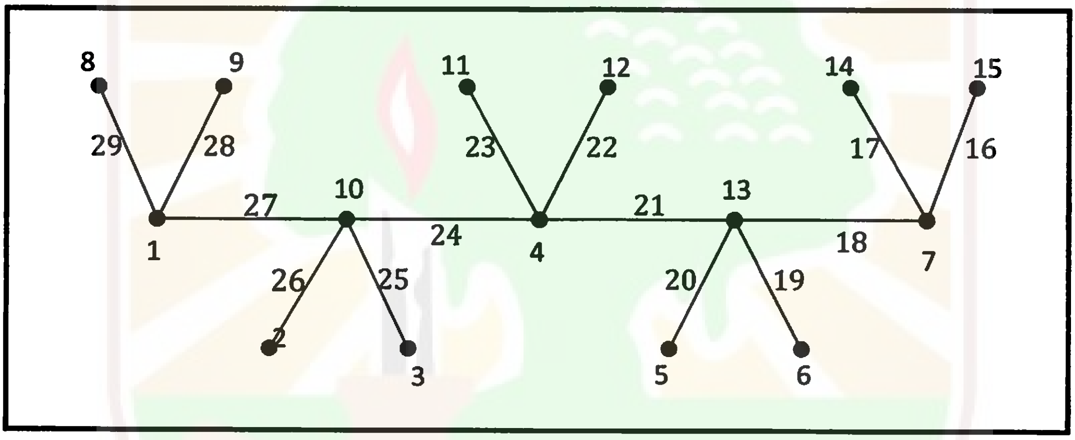
k) $w_{10} = \lambda(b_3) + \lambda(b_3a_6) + \lambda(a_6) = 13 + 19 + 6 = 38$

l) $w_{11} = \lambda(a_7) + \lambda(a_7b_3) + \lambda(b_3) = 13 + 18 + 7 = 38$

m) $w_{12} = \lambda(a_7) + \lambda(a_7b_2) + \lambda(b_2) = 7 + 17 + 14 = 38$

n) $w_{13} = \lambda(a_7) + \lambda(a_7b_1) + \lambda(b_1) = 7 + 16 + 15 = 38$

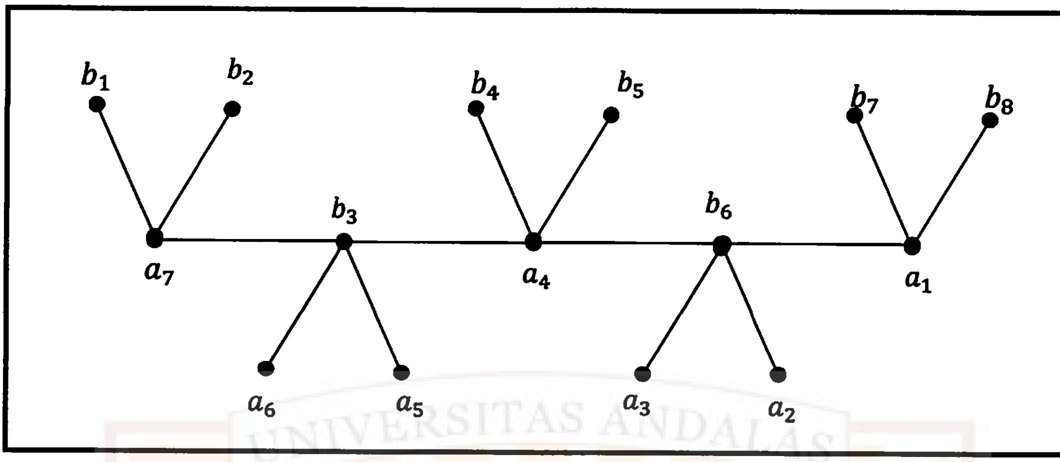
Maka himpunan bobot sisi graf ulat $S_{3,4,4,4,3}$, $W = \{38\}$, sehingga diperoleh pelabelan total (38,0)-sisi ajaib super pada graf ulat $S_{3,4,4,4,3}$.



Gambar 3.9 Pelabelan total (38, 0)-sisi ajaib super pada Graf ulat $S_{3,4,4,4,3}$

Contoh 3.4

Akan diberikan pelabelan total $(v + t + 3, 2)$- sisi anti ajaib super pada graf ulat $S_{3,4,4,4,3}$. Karena pelabelan total $(v + t + 3, 2)$- sisi anti ajaib super dan $|V(G)| = 15$, maka himpunan label untuk titik $V = \{1,2,3, \dots ,15\}$ dan himpunan label untuk sisi $E = \{16,17, \dots ,29\}$



Gambar 3.10 Graf ulat $S_{3,4,4,4,3}$

Dari gambar dapat diketahui $t = 7$, sehingga diperoleh pelabelan total (25,2)-sisi titik anti ajaib super pada graf ulat $S_{3,4,4,4,3}$.

Langkah- langkah untuk melabelkan graf $S_{3,4,4,4,3}$

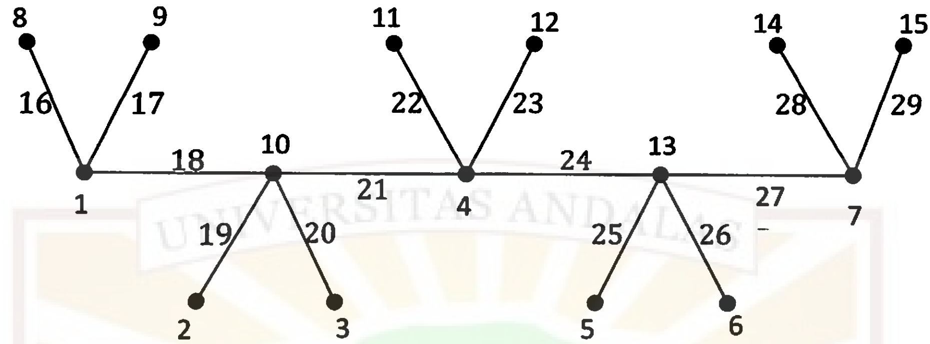
1. Beri label masing-masing titik berdasarkan Konstruksi 1. Karena $d = 2$, maka:
   a) $\lambda(a_7) = 1$
   b) $\lambda(b_3) = 10$
   c) $\lambda(a_4) = 4$
   d) $\lambda(b_6) = 13$
   e) $\lambda(a_1) = 7$
   f) $\lambda(b_1) = 8$
   g) $\lambda(b_2) = 9$
   h) $\lambda(a_6) = 2$
   i) $\lambda(a_5) = 3$
   j) $\lambda(b_4) = 11$
   k) $\lambda(b_5) = 12$
   l) $\lambda(a_3) = 5$
   m) $\lambda(a_2) = 6$
   n) $\lambda(b_7) = 14$
   o) $\lambda(b_8) = 15$
2. Beri label sisi-sisi pada graf dengan cara sebagai berikut:
   - Lihat pelabelan titik pada langkah1 yang telah dilabeli,

- Label sisi terkecil diletakkan pada sisi dimana jumlah label kedua titik yang terkait dengan sisi tersebut adalah nilai terkecil, sebagai berikut :

a) $\lambda(a_7b_1) = 16$
b) $\lambda(a_7b_2) = 17$
c) $\lambda(a_7b_3) = 18$
d) $\lambda(b_3a_6) = 19$
e) $\lambda(b_3a_5) = 20$
f) $\lambda(b_3a_4) = 21$
g) $\lambda(a_4b_4) = 22$
h) $\lambda(a_4b_5) = 23$
i) $\lambda(a_4b_6) = 24$
j) $\lambda(b_6a_3) = 25$
k) $\lambda(b_6a_2) = 26$
l) $\lambda(b_6a_1) = 27$
m) $\lambda(a_1b_7) = 28$
n) $\lambda(a_1b_8) = 29$

3. Diperoleh bobot sisi untuk masing-masing sisi adalah :
   a) $w_1 = \lambda(a_1) + \lambda(a_1b_8) + \lambda(b_8) = 1 + 16 + 8 = 25$
   b) $w_2 = \lambda(a_1) + \lambda(a_1b_7) + \lambda(b_7) = 1 + 17 + 9 = 27$
   c) $w_3 = \lambda(b_6) + \lambda(b_6a_1) + \lambda(a_1) = 1 + 18 + 10 = 29$
   d) $w_4 = \lambda(b_6) + \lambda(b_6a_2) + \lambda(a_2) = 10 + 19 + 2 = 31$
   e) $w_5 = \lambda(b_6) + \lambda(b_6a_3) + \lambda(a_3) = 10 + 20 + 3 = 33$
   f) $w_6 = \lambda(a_4) + \lambda(a_4b_6) + \lambda(b_6) = 10 + 21 + 4 = 35$
   g) $w_7 = \lambda(a_4) + \lambda(a_4b_5) + \lambda(b_5) = 4 + 22 + 11 = 37$
   h) $w_8 = \lambda(a_4) + \lambda(a_4b_4) + \lambda(b_4) = 4 + 23 + 12 = 39$
   i) $w_9 = \lambda(b_3) + \lambda(b_3a_4) + \lambda(a_4) = 4 + 24 + 13 = 41$
   j) $w_9 = \lambda(b_3) + \lambda(b_3a_5) + \lambda(a_5) = 13 + 25 + 5 = 43$
   k) $w_{10} = \lambda(b_3) + \lambda(b_3a_6) + \lambda(a_6) = 13 + 26 + 6 = 45$
   l) $w_{11} = \lambda(a_7) + \lambda(a_7b_3) + \lambda(b_3) = 13 + 27 + 7 = 47$
   m) $w_{12} = \lambda(a_7) + \lambda(a_7b_2) + \lambda(b_2) = 7 + 28 + 14 = 49$
   n) $w_{13} = \lambda(a_7) + \lambda(a_7b_1) + \lambda(b_1) = 7 + 29 + 15 = 51$

Maka himpunan bobot sisi graf ulat $S_{3,4,4,4,3}$, $W = \{25,27,\dots,51\}$, sehingga diperoleh pelabelan total (25,2)-sisi anti ajaib super pada graf ulat $S_{3,4,4,4,3}$.



Gambar 3.11 Pelabelan total $(25,2)$-sisi anti ajaib super pada Graf ulat $S_{3,4,4,4,3}$

BAB IV

KESIMPULAN

Graf ulat $S_{n_1,n_2,\dots n_r}$ adalah graf yang diperoleh dari r buah graf bintang, dimana dua titik pusat Sn_i dan Sn_{i+1} dihubungkan oleh satu sisi, untuk setiap $i = 1,2,3,\dots,r-1$. Pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib super adalah pemetaan satu-satu $\lambda : V(G) \cup E(G) \longrightarrow \{1,2,\dots,v+e\}$, sedemikian sehingga himpunan semua bobot sisi dari semua sisi di G, dinotasikan $W(xy) = \{w(xy) | w(xy) = \lambda(\mathrm{x}) + \lambda(\mathrm{y}) + \lambda(\mathrm{xy}),\ \mathrm{xy} \in \mathrm{E(G)}\}$ dapat ditulis sebagai $W(xy) = \{a, a+d, a+2d, \dots, a+(v-2)d\}$ untuk suatu $a > 0$ dan $d \geq 0$.

Pada tulisan ini telah ditunjukkan bahwa $S_{n_1,n_2,\dots n_r}$ mempunyai pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib super dengan batasan $d \leq 3$. Pada tulisan ini juga telah ditunjukkan bahwa $Sn_1, n_2, \dots, n_r$ adalah graf total $(a,0)$-sisi anti ajaib super dan graf total $(a,2)$-sisi anti ajaib super.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Baca, M. and M. Miller. 2008, ***Super Edge-Antimagic Graphs***, Brown Walker Press, Boca Raton-Florida.

[2] Baca, M. Y. Lin, M. Miller and M. Z. Youssef. 2007, Edge-antimagic graphs, *Discrete Mathematics* **307** (2007): 1232-1244.

[3] Chartrand. G. and P. Zhang. 2005, ***Introduction to Graph Theory,*** Mc Graw-Hill Press, Boston.

[4] Enomoto, H. A. S. Llado, T. Nakamigawa and G. Ringel. 1998, Super Edge-Magic Graphs, SUT. J. Math 34: 105-109.

[5] Ngurah, A.A.G. 2001. *Pelabelan Ajaib dan Anti Ajaib.* ITB.Bandung. *Tesis-S2,* tidak diterbitkan.

[6] Simanjuntak, R. F. Bertault and M. Miller. 2000, Two new (a, d)-antimagic graph labelings, *Proc. of Eleventh Australia Workshop of Combinatorial Algorithm* : 179-189.

[7] Sugeng, K.A, Miller, M. Slamin and M. Baca. 2005. *(a,d)-Edge-Antimagic Total Labelings Of Caterpillars,* Locture Notes on Computer Sciences 3330, 169-180.

Penulis dilahirkan di Padang pada tanggal 9 Mei 1988 dari ayah W. Agustiansyah dan ibu Sismawati. Penulis merupakan putri ketiga dari empat bersaudara. Tahun 2006 Penulis lulus dari SMA Negeri 9 Jambi dan pada tahun yang sama pula lulus seleksi masuk UNAND melalui jalur Seleksi Penerimaan Mahasiswa Baru. Penulis memilih Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Penulis pernah mengikuti KKN (Kuliah Kerja Nyata) di nagari Padang Gelugur (Pasaman Barat) untuk menyelesaikan mata kuliah wajib.