# NOWHERE-ZERO 3-FLOW DALAM GRAF CAYLEY PADA GRUP NILPOTENT

**SKRIPSI**

**DINNY FITRIANI**
**0810432039**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS ANDALAS**
**PADANG 2012**

# ABSTRAK

Pada skripsi ini dikaji eksistensi *nowhere-zero 3-flow* dalam graf Cayley pada grup *nilpotent* dengan *valency* paling sedikit empat. Graf Cayley Cay($G$,$S$) adalah suatu graf yang titik-titiknya adalah elemen di grup $G$, dan dua titik $g, h$ bertetangga jika $gh^{-1} \in S$ dan/atau $hg^{-1} \in S$, dimana $S \subset G$. Jika $G$ memiliki subgrup normal abelian $H$ dan graf Cayley Cay($G$,$S$) memiliki *valency* paling sedikit empat sedemikian sehingga terdapat suatu *involution* di $S \cap H$ maka Cay($G$,$S$) merupakan suatu *nowhere-zero 3-flow*. Suatu grup $G$ disebut *nilpotent* jika $Z_c(G) = G$ untuk suatu $c \in \mathbb{Z}^+$. Setiap graf Cayley Cay($G$,$S$) pada grup *nilpotent* dengan *valency* paling sedikit empat merupakan suatu *nowhere-zero 3-flow*.

**Kata Kunci:** *Graf Cayley Cay(G,S), nilpotent, involution, nowhere-zero 3-flow.*

# DAFTAR ISI

# DAFTAR GAMBAR

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang Masalah

Salah satu topik yang dipelajari dalam teori graf adalah *nowhere-zero k-flow* dengan $k > 1$ dimana $k$ adalah bilangan bulat. Konsep *nowhere-zero k-flow* diperkenalkan oleh W. T. Tutte pada tahun 1954. Tutte [10] mengemukakan konjektur bahwa setiap graf yang tidak memuat jembatan merupakan suatu *nowhere-zero 5-flow.* Pada tahun 1976, Tutte [1] mengemukakan konjektur bahwa setiap graf 4-sisi terhubung merupakan suatu *nowhere-zero 3-flow.*

Konsep dari suatu graf Cayley pertama kali diperkenalkan pada tahun 1878 oleh A. Cayley [2]. Pada tahun 1979 Jaeger [6] menunjukkan bahwa setiap graf 4-sisi terhubung merupakan suatu *nowhere-zero 4-flow.* Karena sebarang graf transitif-titik dengan *valency* $k$ adalah $k$-sisi terhubung, maka setiap graf transitif-titik dengan *valency* empat merupakan suatu *nowhere-zero 4-flow.* Karena graf Cayley adalah transitif-titik, maka graf Cayley dengan *valency* paling sedikit empat merupakan suatu *nowhere-zero 4-flow.* Potočnik, dkk [8] menunjukkan bahwa setiap graf Cayley dengan *valency* paling sedikit empat pada suatu grup abelian merupakan suatu *nowhere-zero 3-flow.* Dari paparan di atas, dapat dilihat bahwa permasalahan *nowhere-zero 3-flow* merupakan topik yang menarik untuk dikaji. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengkaji eksistensi *nowhere-zero 3-flow* dalam graf Cayley pada grup *nilpotent*.

Setiap graf yang memiliki *valency* genap adalah graf Euler dan karenanya merupakan suatu *nowhere-zero 3-flow*. Selain itu, graf kubik yang bipartit juga merupakan suatu *nowhere-zero 3-flow*. Hal ini yang melatarbelakangi pengkajian *nowhere-zero 3-flow* dalam graf Cayley pada grup *nilpotent* dengan *valency* paling sedikit empat.

## 1.2 Perumusan Masalah

Adapun masalah yang dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana eksistensi *nowhere-zero 3-flow* dalam graf Cayley pada grup *nilpotent*.

## 1.3 Pembatasan Masalah

Agar penulisan ini terarah, maka penulis akan fokus untuk membahas tentang eksistensi *nowhere-zero 3-flow* dalam graf Cayley pada grup *nilpotent* dengan *valency* paling sedikit empat.

## 1.4 Tujuan

Tujuan dari penulisan ini adalah untuk mengkaji eksistensi *nowhere-zero 3-flow* dalam graf Cayley pada grup *nilpotent* dengan *valency* paling sedikit empat.

## 1.5 Sistematika Penulisan

Skripsi ini dibagi menjadi empat bab. Bab I terdiri dari latar belakang masalah, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan dan sistematika penulisan. Pada Bab II dijelaskan mengenai definisi dan terminologi dalam teori graf, definisi dan terminologi dalam teori grup, graf Cayley serta konsep tentang *nowhere-zero 3-flow*. Bab III memuat pembahasan mengenai eksistensi *nowhere-zero 3-flow* dalam graf Cayley pada grup *nilpotent*. Kesimpulan dan saran dari hasil pembahasan terdapat pada Bab IV.

# BAB II

# LANDASAN TEORI

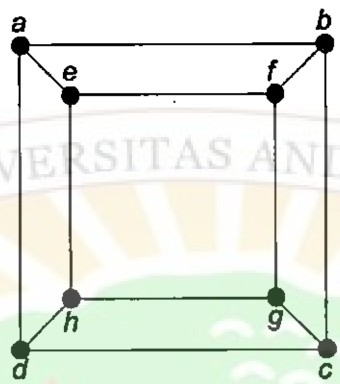
Dalam bab ini akan diberikan beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan permasalahan yang telah dikemukakan di Bab I. Definisi dan terminologi dalam teori graf disajikan pada Subbab 2.1, kemudian pada Subbab 2.2 diuraikan tentang definisi dan terminologi dalam teori grup, pada Subbab 2.3 diuraikan tentang graf Cayley, serta pada Subbab 2.4 diuraikan tentang konsep *nowhere-zero 3-flow*.

## 2.1 Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf

Suatu **graf** $G$ didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ adalah himpunan titik tak kosong dan $E(G)$ adalah himpunan sisi yang menghubungkan titik-titik pada $G$. Elemen dari $V(G)$ adalah **titik** (***vertex***), dan elemen dari $E(G)$ adalah **sisi** (***edge***).

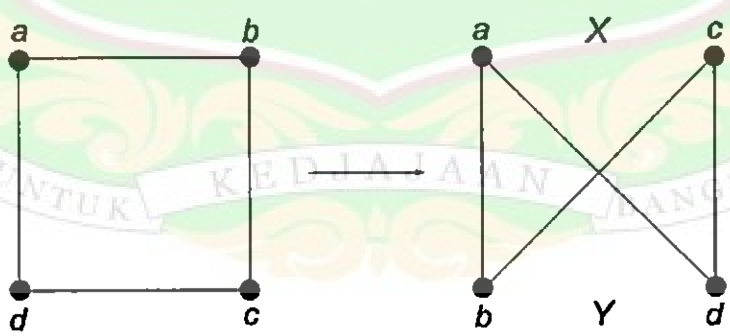
Jika sisi $e = uv \in E(G)$ dengan $u, v \in V(G)$, maka titik $u$ dikatakan **bertetangga** (***adjacent***) dengan $v$, sisi $e$ dikatakan **terkait** (***incident***) dengan titik $u$ dan $v$. Banyaknya titik dari suatu graf $G$ adalah **ordernya**, dinotasikan dengan $|G|$.

***Valency*** dari suatu titik $v$, dinotasikan dengan $val(v)$, adalah banyaknya sisi yang berkaitan dengan $v$. Suatu graf adalah **genap** jika semua titiknya memiliki *valency* genap. Graf yang semua titiknya memiliki *valency* yang sama, misalkan $k$, disebut **graf $k$-reguler**. Suatu graf 3-reguler disebut **graf kubik**, seperti terlihat pada Gambar 2.1.



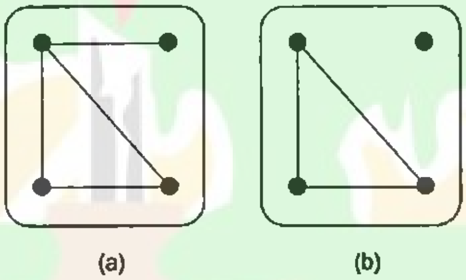

Gambar 2.1. Graf kubik

**Graf bipartit** $G$ adalah graf yang semua himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan partisi $X$ dan $Y$, sedemikian sehingga untuk setiap sisi $uv \in E(G)$, titik $u$ dan $v$ terletak di dua subhimpunan partisi yang berbeda. Partisi $(X, Y)$ ini disebut **bipartisi** dari graf $G$, seperti terlihat pada Gambar 2.2.




Gambar 2.2. Graf bipartit

**Jalan (*walk*)** dari titik $v_0$ ke titik $v_n$ di $G$ adalah barisan titik dan sisi berturut-turut $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \cdots, e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga berlaku $v_{i-1}v_i \in E(G)$ untuk $i = 1, 2, \cdots, n$. Jika titik-titik $v_0, v_1, \ldots, v_k$ dari suatu jalan $W$ berbeda, maka $W$ dikatakan suatu **lintasan** (***path***). Lintasan dengan $k$ titik dinotasikan dengan $P_k$. Suatu graf $G$ disebut **terhubung** (***connected***) jika setiap dua titiknya dihubungkan oleh suatu lintasan di $G$, seperti terlihat pada Gambar 2.3. Graf terhubung 2-reguler disebut ***cycle***. Jika sisi-sisi $e_1, e_2, \ldots, e_k$ dari suatu jalan $W$ adalah berbeda, maka $W$ disebut suatu ***trail***. Suatu ***trail*** **Euler** dari suatu graf $G$ adalah suatu *trail* yang melewati setiap sisi di $G$. Graf **Euler** adalah graf terhubung $G$ yang memiliki suatu *trail* tertutup yang memuat setiap sisi di $G$. *Trail* yang demikian disebut suatu **perjalanan** (***tour***) **Euler**.




Gambar 2.3. (a) Graf terhubung, (b) Graf tidak terhubung

**Teorema 2.1.** [3] *Misalkan G suatu graf terhubung. Graf G adalah Euler jika dan hanya jika setiap titiknya memiliki valency genap.*

**Bukti.**

Misalkan $W$ adalah suatu perjalanan Euler. Misalkan $v$ titik yang berbeda dengan $u$ adalah suatu titik yang terjadi $k$ kali di $W$. Jika suatu sisi tiba di titik $v$, maka sisi lainnya meninggalkan titik $v$ dan oleh karena itu $val(v) = 2k$. Karena $W$

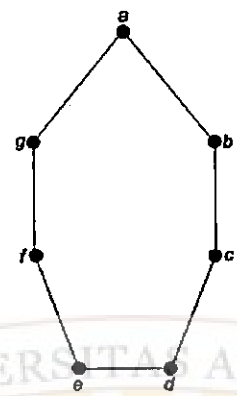
dimulai di titik $u$ dan berakhir di titik $u$ pula, maka $val(u)$ genap.

Sebaliknya, asumsikan $G$ adalah suatu graf terhubung sedemikian sehingga $val(v)$ genap untuk setiap $v \in G$. Misalkan $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_k v_k$ adalah suatu *trail* terpanjang di $G$. Karena semua *valency* titiknya genap, maka $v_0 = v_k$. Oleh karena itu $W$ adalah *trail* tertutup.

Jika $W$ bukan suatu perjalanan Euler dan karena $G$ terhubung maka terdapat suatu sisi $e = v_k u \in G$ untuk suatu $k$ yang tidak ada di $W$. Oleh karena itu $W$ bukan *trail* terpanjang di $G$, suatu kontradiksi. □

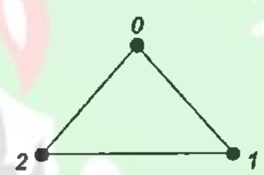
Suatu graf $H$ adalah **subgraf** dari graf $G$ jika berlaku $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Suatu subgraf terhubung maksimal disebut suatu **komponen** dari $G$. Suatu titik $v$ yang apabila dihapus mengakibatkan komponen dari $G \setminus \{v\}$ lebih banyak dari komponen $G$ disebut ***cut-vertex***, dan suatu sisi $e$ yang apabila dihapus mengakibatkan komponen dari $G \setminus \{e\}$ lebih banyak dari komponen $G$ disebut **jembatan** atau ***cut-edge***. Himpunan dari *cut-edge* disebut ***edge-cut.*** Graf **$k$-sisi terhubung** (***$k$-edge connected***) adalah graf yang tidak memiliki *edge-cut* sebanyak $l$ sisi untuk sebarang $l < k$. Graf 2-sisi terhubung adalah contoh dari graf $k$-sisi terhubung seperti terlihat pada Gambar 2.4.

Graf $G$ dan $H$ disebut **isomorfik** (dinotasikan dengan $G \cong H$) jika terdapat bijeksi $\theta : V(G) \to V(H)$ dan $\phi : E(G) \to E(H)$ sedemikian sehingga $\psi_G(e) = uv$ jika dan hanya jika $\psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$; suatu pasangan pemetaan $(\theta, \phi)$ disebut suatu **isomorfisma** antara $G$ dan $H$. Jika $G$ isomorfik ke dirinya sendiri maka pemetaan yang demikian disebut suatu **automorfisma** di $G$. Automorfisma yang mungkin dari graf 2-reguler pada Gambar 2.5 dapat diperhatikan




Gambar 2.4. Graf 2-sisi terhubung

pada Gambar 2.6.

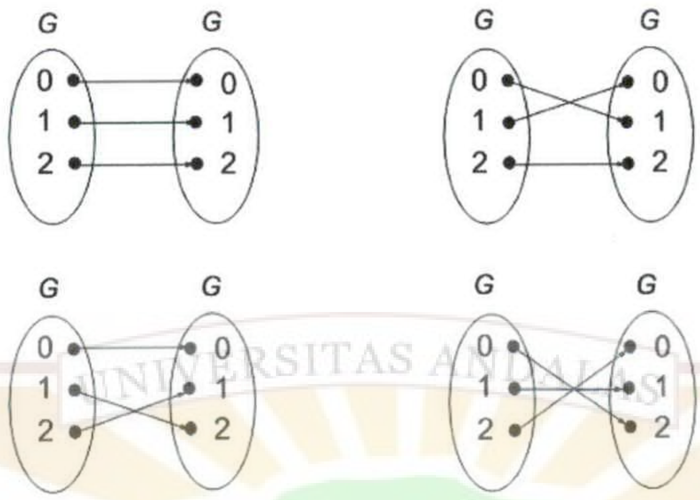



Gambar 2.5. Graf 2-reguler

Suatu graf $G$ disebut **transitif-titik** (***vertex-transitive***) jika untuk suatu 2 titik $v, w \in G$ terdapat suatu automorfisma dari $G$ yang memetakan $v$ ke $w$. Gambar 2.5 di atas adalah contoh dari graf transitif-titik.

## 2.2 Definisi dan Terminologi dalam Teori Grup

Misalkan $G$ suatu himpunan tak kosong dan $*$ suatu operasi yang didefinisikan dari $G$. Himpunan $G$ dikatakan suatu **grup** terhadap operasi $*$ yang dinotasikan dengan $(G, *)$ jika memenuhi:




Gambar 2.6. Automorfisma di graf 2-reguler

1. Setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$ ($G$ bersifat tutup terhadap operasi $*$);

2. Setiap $a, b, c \in G$ berlaku $a*(b*c) = (a*b)*c$ ($G$ bersifat asosiatif terhadap operasi $*$);

3. Ada suatu elemen dari $G$ yang dilambangkan dengan $e$ sedemikian sehingga setiap $a \in G$ berlaku $a*e = e*a = a$ ($G$ memiliki elemen identitas terhadap operasi $*$);

4. Setiap $a \in G$ terdapat $b \in G$ sedemikian sehingga $a*b = b*a = e$. Dalam hal ini, $b$ disebut invers dari $a$ dan dinotasikan dengan $a^{-1} = b$ (setiap elemen dari $G$ mempunyai invers).

Misalkan $(G, *)$ suatu grup. Grup $G$ disebut **grup abelian** jika setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$. Banyaknya elemen pada grup $G$ disebut **order** dari $G$, dinotasikan dengan $O(G)$. Jika $O(G) < \infty$, maka $G$ disebut **grup hingga**.

Suatu subhimpunan $U \subseteq G$ dari suatu grup $(G, *)$ disebut suatu **subgrup** dari $G$, jika dirinya sendiri adalah grup.

Misalkan $G$ adalah suatu grup. Untuk $x \in G$, **periode** dari $x$ didefinisikan sebagai bilangan bulat positif terkecil $n$ sedemikian sehingga $x^n = e$, dinotasikan dengan $|x|$. Elemen dengan periode 2 disebut ***involution***.

Suatu grup $G$ disebut **grup siklik** jika terdapat suatu elemen $x \in G$ dengan $G = \langle x \rangle$. Setiap elemen $x$ dengan sifat ini disebut suatu **pembangkit** (***generator***) dari $G$. Misalkan $x$ suatu elemen dari grup $G$, maka subgrup yang dibangkitkan oleh $x$, adalah subgrup $\langle x \rangle := \{x^m | m \in Z\}$ disebut dengan **subgrup siklik yang dibangkitkan oleh** $x$.

Misalkan $(G, *)$ suatu grup, $H$ subgrup dari $G$ dan $a \in G$.

1. Himpunan $H * a = \{h * a | h \in H\}$ disebut **koset kanan** dari $H$ di $G$ yang memuat $a$, dinotasikan dengan $H/G$.

2. Himpunan $a * H = \{a * h | h \in H\}$ disebut **koset kiri** dari $H$ di $G$ yang memuat $a$, dinotasikan dengan $G/H$.

Suatu subgrup $H$ dari suatu grup $G$ disebut **normal**, dinotasikan dengan $H \trianglelefteq G$, jika $gHg^{-1} = H$ untuk setiap $g \in G$. Grup $G/H$ disebut **grup faktor** atau **grup kuosien**.

**Lema 2.2.** [4] *Misalkan $G$ adalah suatu grup dengan suatu subgrup normal $H$. Jika $K \trianglelefteq G$ dan $K \subseteq H$, maka $K \trianglelefteq H$ dan $H/K \trianglelefteq G/K$.*

**Pusat** dari suatu grup $G$, dinotasikan dengan $Z(G)$, adalah suatu subhimpunan dari semua elemen $G$ sedemikan sehingga $gh = hg$ untuk setiap $h \in G$.

Suatu *involution* disebut ***involution*** **pusat** jika termuat dalam pusat dari suatu grup $G$.

**Definisi 2.3.** [4]

1. *Untuk sebarang grup $G$ definisikan subgrup berikut secara induktif:*

$$Z_0(G) = 1, \qquad Z_1(G) = Z(G)$$

*dan $Z_{i+1}(G)$ adalah subgrup di $G$ yang memuat $Z_i(G)$ sedemikian sehingga*

$$Z_{i+1}(G)/Z_i(G) = Z(G/Z_i(G));$$

2. *Suatu grup $G$ disebut* ***nilpotent*** *jika $Z_c(G) = G$ untuk suatu $c \in \mathbb{Z}^+$.*

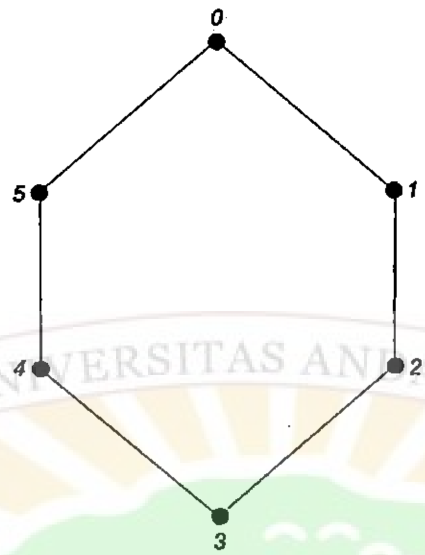
## 2.3 Graf Cayley

Diberikan suatu graf $\Gamma$, misalkan $V(\Gamma)$ adalah himpunan titik dan $E(\Gamma)$ adalah himpunan sisi, keduanya di graf $\Gamma$. Diberikan suatu grup $G$ dan suatu himpunan $S \subset G$, **graf Cayley** $\Gamma = \mathrm{Cay}(G,S)$ didefinisikan sebagai berikut.

1. Setiap titik $v \in V(\Gamma)$ adalah suatu elemen di $G$;

2. Dua titik $g, h \in V(\Gamma)$ bertetangga jika $gh^{-1} \in S$ dan/atau $hg^{-1} \in S$.

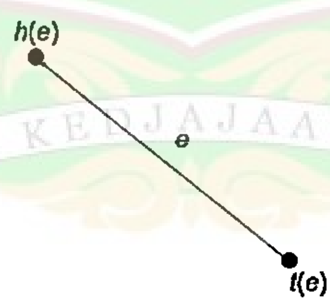
Untuk contoh graf Cayley, misal diberikan grup $G = \{\mathbb{Z}_6, +_6\}$ dengan $S = \{1, 5\}$, seperti terlihat pada Gambar 2.7.




Gambar 2.7. Graf Cay($G$,$S$)

## 2.4 *Nowhere-Zero 3-Flow*

Misalkan $G$ adalah suatu graf tak berarah. Orientasikan sisi di $G$ dengan memberi panah pada setiap sisi $e \in E(G)$, akibatnya titik-titik yang terkait dengan $e$ dibedakan, yang satu sebagai ***tail*** $t(e)$ dari $e$ dan yang satunya sebagai ***head*** $h(e)$ dari $e$, seperti terlihat pada Gambar 2.8.




Gambar 2.8. *Head* dan *tail* dari sisi berarah $e$

Jika $v \in V(G)$ dan $e \in E(G)$, definisikan

$$\eta(e,v)=\begin{cases}1, & jika\ v=h(e);\\ 0, & jika\ v\ tidak\ terkait\ dengan\ e;\\ -1, & jika\ v=t(e).\end{cases}$$

Suatu ***Z-flow*** pada $G$ adalah pemetaan

$$f: E(G)\rightarrow Z$$

sedemikian sehingga untuk setiap titik $v \in V(G)$ berlaku

$$\Sigma_{e\in E(G)}\eta(e,v)f(e)=0.$$

Pemetaan $f$ yang demikian disebut ***nowhere-zero Z-flow*** jika $f(e)\neq 0$ untuk setiap $e \in E(G)$.

Untuk $k \geq 2$, definisikan ***k-flow*** sebagai

$$f: E(G)\rightarrow Z_k$$

sedemikian sehingga untuk setiap titik $v \in V(G)$ berlaku

$$\Sigma_{e\in E(G)}\eta(e,v)f(e)\equiv 0\ mod\ k.$$

Selanjutnya, penulisan "$\equiv 0\ mod\ k$" disingkat dengan "0".

***Support*** dari suatu *k-flow* $f$ adalah subhimpunan dari $E(G)$ yang nilai *flow*nya tak nol dan ditulis, $Supp_k(f)=\{e\in E(G): f(e)\not\equiv 0\ mod\ k\}$. Suatu *k-flow* disebut ***nowhere-zero k-flow*** jika $Supp_k(f)=E(G)$. Untuk menyederhanakan penulisan, selanjutnya *nowhere-zero k-flow* disingkat dengan *k-NZF*.

**Lema 2.4.** [11] *Untuk setiap $k \geq 2$, pernyataan berikut ekivalen*

1. *G merupakan k-NZF;*

2. *G merupakan Z-NZF dengan semua nilai flow terletak pada selang* $[1-k, k-1]$

**Bukti.**

Dengan membalikkan arah semua sisi yang nilai *flow*nya negatif, diperoleh $G$ yang merupakan *k-NZF* dengan semua nilai *flow*nya terletak pada selang $[1-k, k-1]$. $\square$

**Lema 2.5.** [11] *Jika graf $G$ merupakan k-NZF, maka $G$ merupakan s-NZF untuk sebarang $s \geq k$ dengan $s \in N$.*

**Bukti.**

Misalkan $G$ merupakan *k-NZF* maka dari Lema 2.4, $G$ merupakan *Z-NZF* dengan semua nilai *flow*nya terletak pada selang $[1-k, k-1]$. Dengan mengganti semua *flow* bernilai negatif $g$ dengan $s+g$, maka diperoleh suatu *s-NZF*. $\square$

**Lema 2.6.** [11] *Graf $G$ merupakan 2-NZF jika dan hanya jika $G$ adalah graf Euler.*

**Bukti.**

Jika $G$ merupakan *2-NZF* maka nilai *flow* pada setiap sisi adalah 1. Ini mengakibatkan *valency* di setiap titik haruslah genap. Karenanya, $G$ adalah graf Euler yaitu graf yang setiap titiknya ber*valency* genap.

Sebaliknya, misalkan $G$ adalah graf Euler, perjalanan Euler dapat diuraikan menjadi *cycle-cycle*. Dengan mengirimkan *flow* bernilai 1 melewati setiap *cycle*, maka diperoleh *2-NZF* untuk graf $G$. $\square$

Misalkan graf kubik $G$ merupakan suatu *3-NZF*. Karena $2 \equiv -1 \, mod \, 3$ dan $-2 \equiv 1 \, mod \, 3$, maka dengan membalikkan arah *flow* yang bernilai negatif, diperoleh $G$ yang merupakan *3-NZF* dengan nilai *flow*nya hanya 1.

**Lema 2.7.** [11] *Suatu graf kubik G merupakan 3-NZF jika dan hanya jika G adalah graf bipartit.*

**Bukti.**

Misalkan graf kubik $G$ merupakan suatu *3-NZF*. Dengan cara di atas, arahnya dapat dipilih sehingga semua *flow* bernilai 1. Pada setiap titik, arah ketiga sisi masuk semua atau keluar semua. Titik yang arah *flow*nya masuk semua disebut sebagai *sink* dan titik yang arah *flow*nya keluar semua disebut sebagai *source*. Dengan mengelompokkan semua *sink* menjadi satu kelompok dan semua *source* menjadi satu kelompok yang lain, dapat dilihat bahwa $G$ adalah graf bipartit.

Sebaliknya, misalkan graf kubik $G$ adalah bipartit. Dengan memberi arah semua sisi dari satu kelas titik ke kelas titik yang lain dan memberi nilai *flow* 1 dihasilkan *3-NZF* untuk $G$. □

**Teorema 2.8.** [7] *Misalkan Cay(G,S) adalah suatu graf Cayley dengan valency paling sedikit empat sedemikian sehingga S memuat suatu involution pusat. Maka Cay(G,S) merupakan suatu 3-NZF.*

**Bukti.**

Misalkan Cay($G$,$S$) adalah suatu graf Cayley. Misalkan order $S$ ganjil dan $S_1$ adalah subhimpunan dari $S$ yang mempunyai tiga elemen sehingga $S \setminus S_1$ memuat suatu *involution* pusat $c$. Graf Cay($G$,$S$) dapat diuraikan menjadi suatu graf kubik bipartit Cay($G$,$S_1$) dan suatu graf dengan *valency* genap Cay($G$,$S \setminus S_1$). Akibatnya graf Cay($G$,$S$) merupakan suatu *3-NZF*. $\square$

# BAB III

## *NOWHERE-ZERO 3-FLOW* DALAM GRAF CAYLEY PADA GRUP *NILPOTENT*



Untuk mengkaji eksistensi *3-NZF* ini, akan digunakan lema berikut.

**Lema 3.1.** *Misalkan $G$ adalah suatu grup dan $H$ adalah suatu subgrup normal di $G$. Misalkan $S$ merupakan himpunan terpisah (*disjoint set*) dengan $H$. Jika Cay($G/H$,$S/H$) merupakan suatu 3-NZF, maka Cay($G$,$S$) juga merupakan suatu 3-NZF.*

**Bukti.**

Misalkan $G$ adalah suatu grup dan $H$ adalah suatu subgrup normal di $G$ dengan $H \cap S = \emptyset$. Misalkan $f_1$ adalah suatu *3-NZF* pada Cay($G/H$,$S/H$). Untuk setiap sisi $xy$ dari graf Cay($G$,$S$), terdapat satu korespondensi sisi $xHyH$ dari graf Cay($G/H$,$S/H$). Misalkan didefinisikan $f_2$ dengan menetapkan

$$f_2(xy) = f_1(xHyH)$$



Jelas bahwa $f_2$ adalah suatu *3-NZF* pada Cay($G$,$S$). □

Untuk lebih jelasnya, perhatikan ilustrasi berikut.

Diberikan grup $G = \{\mathbb{Z}_5, +_5\}$. Graf Cayley Cay($G$,$S^*$) memuat *valency* empat dengan himpunan $S^* = \{1, 2, 3, 4\}$ dan merupakan suatu *3-NZF*. Pilih $H = \{0, 2, 3\}$, perhatikan bahwa

- untuk $g = 0$
  1. $0 +_5 0 +_5 0 = 0$
  2. $0 +_5 2 +_5 0 = 2$
  3. $0 +_5 3 +_5 0 = 3$
- untuk $g = 1$
  1. $1 +_5 0 +_5 4 = 0$
  2. $1 +_5 2 +_5 4 = 2$
  3. $1 +_5 3 +_5 4 = 3$
- untuk $g = 2$
  1. $2 +_5 0 +_5 3 = 0$
  2. $2 +_5 2 +_5 3 = 2$
  3. $2 +_5 3 +_5 3 = 3$
- untuk $g = 3$
  1. $3 +_5 0 +_5 2 = 0$
  2. $3 +_5 2 +_5 2 = 2$
  3. $3 +_5 3 +_5 2 = 3$
- untuk $g = 4$
  1. $4 +_5 0 +_5 1 = 0$
  2. $4 +_5 2 +_5 1 = 2$

3. $4 +_5 3 +_5 1 = 3$.

Jelas bahwa $H = \{0, 2, 3\}$ merupakan subgrup normal di $G$. Perhatikan bahwa

- untuk $g = 0$

  1. $0 +_5 0 = 0$
  2. $0 +_5 2 = 2$
  3. $0 +_5 3 = 3$

- untuk $g = 1$

  1. $1 +_5 0 = 1$
  2. $1 +_5 2 = 3$
  3. $1 +_5 3 = 4$

- untuk $g = 2$

  1. $2 +_5 0 = 2$
  2. $2 +_5 2 = 4$
  3. $2 +_5 3 = 0$

- untuk $g = 3$

  1. $3 +_5 0 = 3$
  2. $3 +_5 2 = 0$
  3. $3 +_5 3 = 1$

- untuk $g = 4$

1. $4 +_5 0 = 4$

2. $4 +_5 2 = 1$

3. $4 +_5 3 = 2$.

Jadi, himpunan $G/H = \{0, 1, 2, 3, 4\} = G$. Dengan cara yang sama seperti di atas, $S^* = \{1, 2, 3, 4\}$ diperoleh dari $S/H$, dimana $S = \{1, 4\}$. Graf Cay($G$,$S^*$) merupakan Cay($G/H$,$S/H$). Untuk mendapatkan bentuk graf Cay($G/H$,$S/H$) dan graf Cay($G$,$S$) dilakukan dengan cara berikut.

- Untuk graf Cay($G/H$,$S/H$):

  1. Setiap titik $v \in$ Cay($G/H$,$S/H$) adalah suatu elemen di $G$;

  2. Dua titik $g, h \in$ Cay($G/H$,$S/H$) bertetangga jika $gh^{-1} \in S$ dan/atau $hg^{-1} \in S$. Perhatikan bahwa

     - $0 +_5 4 = 4 \in S$
     - $0 +_5 3 = 3 \in S$
     - $0 +_5 2 = 2 \in S$
     - $0 +_5 1 = 1 \in S$.

     Jadi, titik 0 bertetangga dengan titik $1, 2, 3, 4$.

     - $1 +_5 0 = 1 \in S$
     - $1 +_5 3 = 4 \in S$
     - $1 +_5 2 = 3 \in S$
     - $1 +_5 1 = 2 \in S$.

     Jadi, titik 1 bertetangga dengan titik $0, 2, 3, 4$.

- $2 +_5 0 = 2 \in S$
- $2 +_5 4 = 1 \in S$
- $2 +_5 2 = 4 \in S$
- $2 +_5 1 = 3 \in S$.

Jadi, titik 2 bertetangga dengan titik $0, 1, 3, 4$.

- $3 +_5 0 = 3 \in S$
- $3 +_5 4 = 2 \in S$
- $3 +_5 3 = 1 \in S$
- $3 +_5 1 = 4 \in S$.

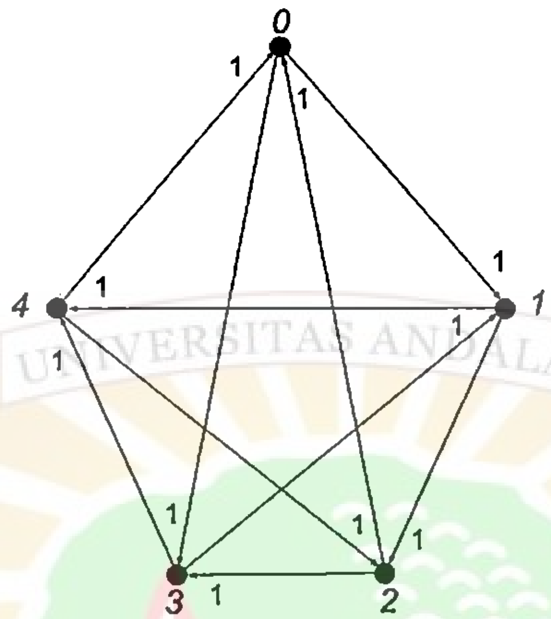
Jadi, titik 3 bertetangga dengan titik $0, 1, 2, 4$.

- $4 +_5 0 = 4 \in S$
- $4 +_5 4 = 3 \in S$
- $4 +_5 3 = 2 \in S$
- $4 +_5 2 = 1 \in S$.

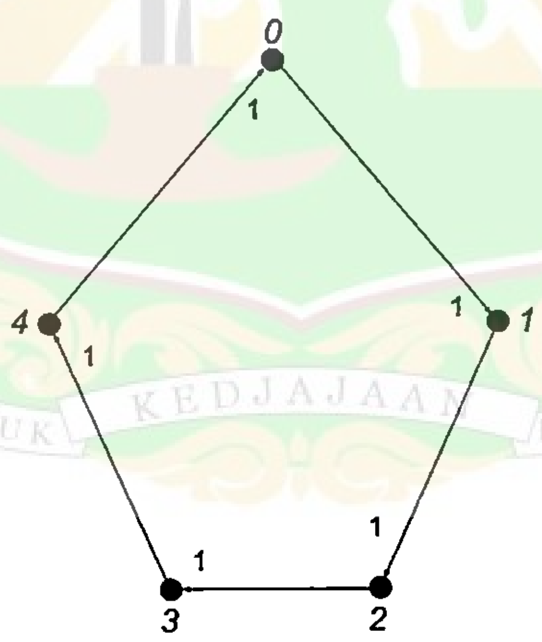
Jadi, titik 4 bertetangga dengan titik $0, 1, 2, 3$. Dapat disimpulkan bahwa graf Cay($G/H$,$S/H$) merupakan graf ber*valency* empat.

- Untuk graf Cay($G$,$S$): Dengan cara yang sama seperti di atas, diperoleh bahwa graf Cay($G$,$S$) merupakan graf ber*valency* dua.

Berdasarkan Lema 3.1 Cay($G$,$S$) merupakan suatu *3-NZF*, seperti terlihat pada Gambar 3.1 dan 3.2.




Gambar 3.1. *Nowhere-zero 3-flow* dalam graf Cay($G/H$,$S/H$)




Gambar 3.2. *Nowhere-zero 3-flow* dalam graf Cay($G$,$S$)

Adapun teorema-teorema yang akan dibuktikan adalah sebagai berikut.

**Teorema 3.2.** *Misalkan $G$ adalah suatu grup dengan suatu subgrup normal abelian $H$. Misalkan Cay(G,S) adalah suatu graf Cayley dengan valency paling sedikit empat sedemikian sehingga terdapat suatu involution di $S \cap H$. Maka Cay(G,S) merupakan suatu 3-NZF.*

**Bukti.**

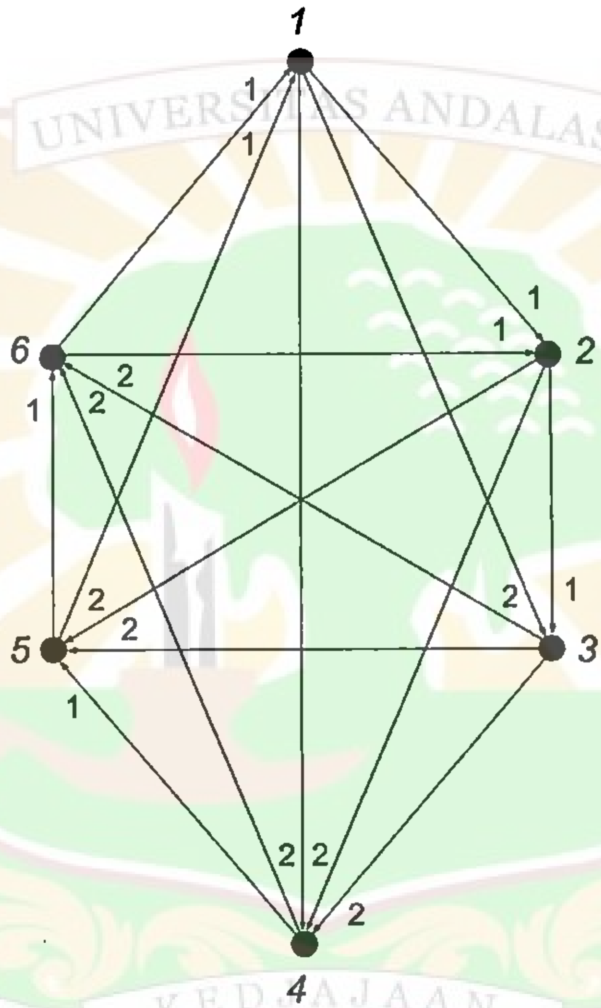
Misalkan $G$ adalah suatu grup dengan suatu subgrup normal abelian $H$. Misalkan Cay($G$,$S$) adalah suatu graf Cayley dengan *valency* paling sedikit empat sedemikian sehingga terdapat suatu *involution* di $S \cap H$. Karena $H$ memuat suatu *involution*, maka $H$ memuat order genap sehingga terdapat suatu *involution* pusat $c$ di $H$. Perhatikan dua kemungkinan berikut.

1. Jika *involution* pusat $c$ elemen $S$ maka berdasarkan Teorema 2.8 graf Cay($G$,$S$) merupakan suatu *3-NZF*;

2. Jika *involution* pusat $c$ bukan elemen $S$ maka $H_1 = \langle c \rangle$ adalah subgrup normal di $G$ dan $H$ yang merupakan himpunan terpisah dengan $S$. Berdasarkan Lema 2.2 maka $H/H_1 \trianglelefteq G/H_1$ dan berdasarkan Lema 3.1 Cay($G$,$S$) merupakan suatu *3-NZF*. □

Untuk lebih jelasnya, perhatikan ilustrasi berikut.

Diberikan grup $G = \{\mathbb{Z}_7 - \{0\}, \cdot_7\}$ dengan $H = \{6\}$ adalah subgrup normal abelian dari $G$. Graf Cayley Cay($G$,$S$) dimana $S = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ memuat *valency* 5. Berdasarkan Teorema 3.2, Cay($G$,$S$) merupakan suatu *3-NZF*, seperti terlihat pada Gambar 3.3.




Gambar 3.3. *Nowhere-zero 3-flow* dalam graf Cayley yang memuat *involution*

**Teorema 3.3.** *Setiap graf Cayley Cay(G,S) pada grup nilpotent dengan valency paling sedikit empat merupakan suatu 3-NZF.*

**Bukti.**

Ambil $G$ sebarang yang termasuk grup *nilpotent.* Karena $G$ memuat suatu *involution*, maka $G$ memiliki suatu pusat dengan order genap. Oleh karena itu, $G$ memuat suatu *involution* pusat $c$. Perhatikan dua kemungkinan berikut.

1. Jika *involution* pusat $c$ elemen $S$ maka berdasarkan Teorema 2.8 graf Cay($G$,$S$) merupakan suatu *3-NZF*;

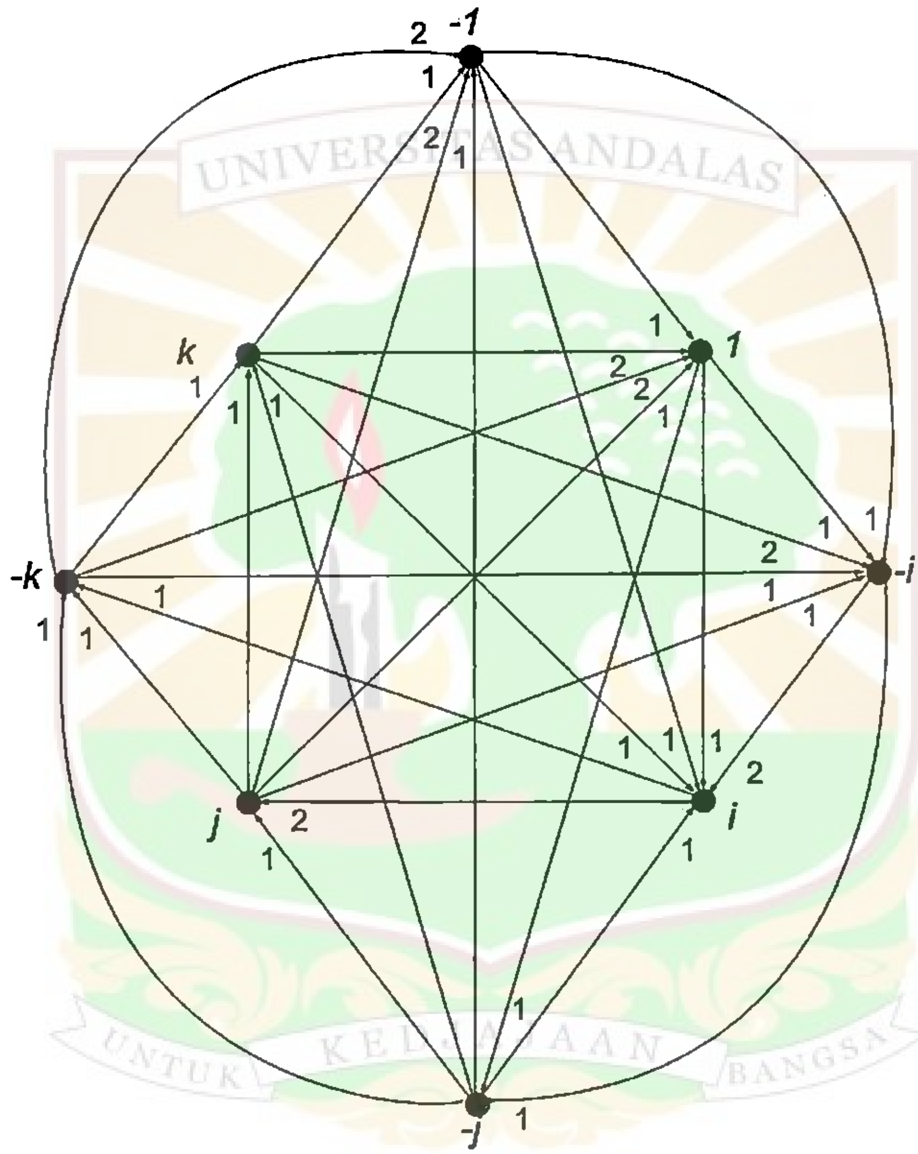
2. Jika *involution* pusat $c$ bukan elemen $S$ maka $H_1 = \langle c \rangle$ adalah suatu subgrup normal di $G$ dan $H$ yang merupakan himpunan terpisah dengan $S$, dan Cay($G$,$S$) merupakan suatu *3-NZF* berdasarkan Lema 3.1.

Karena $G$ diambil sebarang, maka berlaku bahwa setiap graf Cayley Cay($G$,$S$) pada grup *nilpotent* dengan *valency* paling sedikit empat merupakan suatu *3-NZF*.

□

Untuk lebih jelasnya, perhatikan ilustrasi berikut.

Diberikan grup quaternion $G = \{-1, 1, -i, i, -j, j, -k, k\}$ yang termasuk grup *nilpotent.* Graf Cayley Cay($G$,$S$) dengan $S = \{-1, -i, i, -j, j, -k, k\}$ memiliki *valency* 7. Berdasarkan Teorema 3.3, Cay($G$,$S$) merupakan suatu *3-NZF*, seperti terlihat pada Gambar 3.4.




Gambar 3.4. *Nowhere-zero 3-flow* dalam graf Cayley pada grup *nilpotent*

# BAB IV

# PENUTUP

## 4.1 Kesimpulan

Graf Cayley Cay($G$,$S$) adalah suatu graf yang titik-titiknya adalah elemen di grup $G$, dan dua titik $g, h$ bertetangga jika $gh^{-1} \in S$ dan/atau $hg^{-1} \in S$, dimana $S \subset G$. Jika $G$ memiliki subgrup normal abelian $H$ dan graf Cayley Cay($G$,$S$) memiliki *valency* paling sedikit empat sedemikian sehingga terdapat suatu *involution* di $S \cap H$ maka Cay($G$,$S$) merupakan suatu *nowhere-zero* 3-*flow*.

Suatu grup $G$ disebut *nilpotent* jika $Z_c(G) = G$ untuk suatu $c \in \mathbb{Z}^+$. Setiap graf Cayley Cay($G$,$S$) pada grup *nilpotent* dengan valency paling sedikit empat merupakan suatu *nowhere-zero* 3-*flow*.

## 4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya penulis menyarankan untuk mengkaji eksistensi *3-NZF* pada graf Cayley dengan karakteristik grup lainnya.

# DAFTAR PUSTAKA

[1] Bondy, J. A. dan U. S. R. Murty. 1976. *Graph Theory with Applications.* Macmillan, London.

[2] Cayley, A. 1878. On theory of groups. *Proceeding of the London Mathematical Society.* **9** : 126-133.

[3] Diestel, R. 2000. *Graph Theory.* Springer Verlag, New York.

[4] Dummit, D. S. dan R. M. Foote. 1991. *Abstract Algebra.* Prentice Hall, New Jersey.

[5] Hartsfield, N. dan G. Ringel. 1994. *Pearls in Graph Theory.* Academic Press, Inc., United States.

[6] Jaeger, F. 1979. Flows and generalized coloring theorems in graphs. *J. Combin. Theory.* Ser B. **26** : 205-216.

[7] *Nánásiová*, M. 2005. Flows in Cayley Graphs. Master's Thesis, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Institute of Informatics, Universitas Comeniana, Bratislava.

[8] Potočnik, et al. 2002. *Nowhere-zero 3-flows in Cayley graphs of Abelian groups.*

[9] Spindler, K. 1994. *Abstract Algebra with Applications, in Two Volumes, Volume I: Vector Spaces and Groups.* Marcel Dekker Inc, New York.

[10] Tutte, W. T. 1954. A contribution on the theory of chromatic polynomial. *Canad. J. Math..* Soc. **51** : 80-81.

[11] Uttunggadewa, S. 2000. *Indonesian Graphs An Investigation of the Nowhere-Zero Five-Flow Conjecture and the Cycle Double Cover Conjecture.* Dissertation, Faculty of Mathematical Sciences, University of Twente, The Netherlands.