



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar Unand.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Unand.

BILANGAN RAMSEY UNTUK PASANGAN POHON DAN RODA DENGAN LIMA ATAU ENAM TITIK

SKRIPSI



**BERKAH FAJAR
05134019**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN
ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS PADANG
2012**

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Syukur Alhamdulillah penulis haturkan atas kehadiran Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-NYA, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul "BILANGAN RAMSEY UNTUK PASANGAN POHON DAN RODA DENGAN LIMA ATAU ENAM TITIK". Shalawat dan salam semoga selalu tercurahkan kepada Rasulullah SAW.

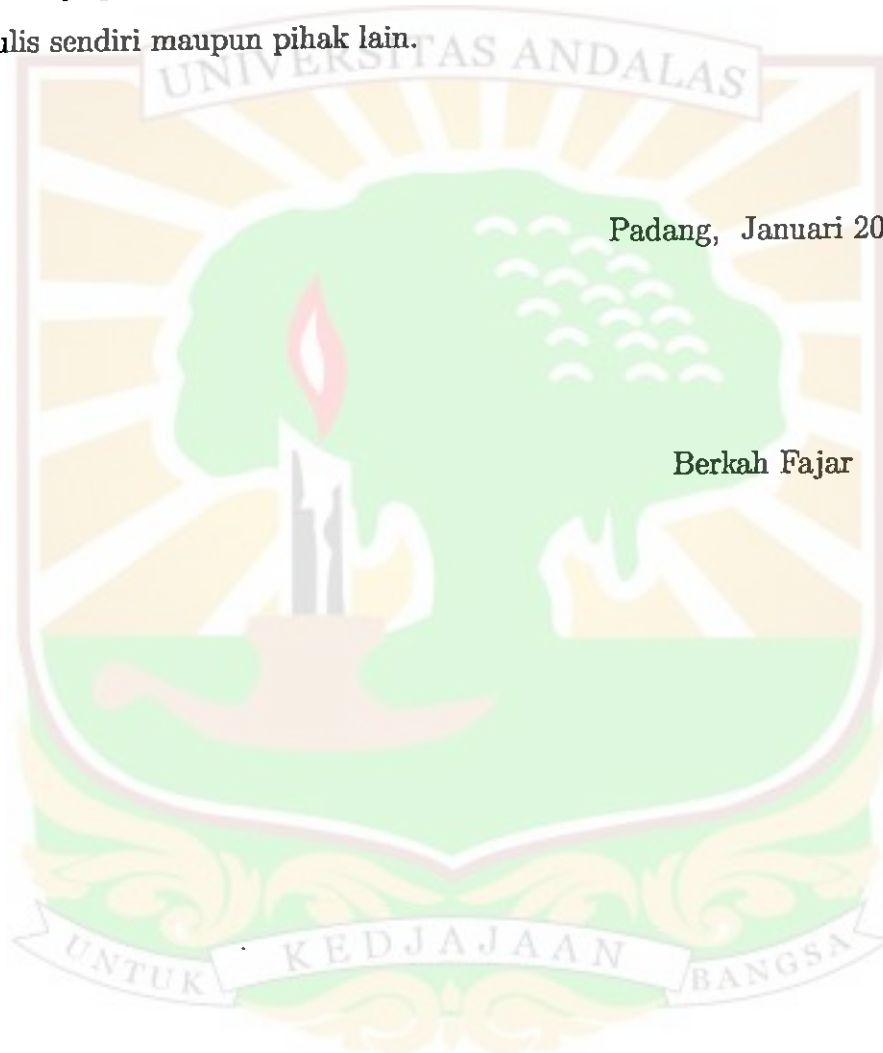
Penulisan skripsi ini merupakan salah satu syarat untuk menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Andalas. Penulis menyampaikan ungkapan terima kasih yang setulusnya kepada :

1. Ibu Dr.Lyra Yulianti dan Bapak Narwen, M.Si selaku pembimbing yang telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, pengarahan, dan saran kepada penulis sampai selesainya skripsi ini.
2. Bapak Efendi M.Si, Bapak Dr.Dodi Devianto dan Bapak Dr.Syafrizal Sy selaku penguji yang telah memberikan pengarahan dan saran untuk perbaikan penulisan skripsi ini.
3. Bapak Dr.Syafrizal Sy, selaku ketua jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Andalas.
4. Seluruh Bapak/Ibu dosen jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Andalas.
5. Seluruh staf tata usaha jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Andalas.
6. Kedua orang tua dan seluruh keluarga yang telah banyak memberikan dukungan moril dan materi kepada penulis.

7. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih memiliki banyak kekurangan. Untuk itu kepada semua pihak penulis mengharapkan kritik dan saran demi penyempurnaan skripsi ini.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan berguna bagi penulis sendiri maupun pihak lain.



ABSTRAK

Pada skripsi ini akan dikaji bilangan Ramsey untuk pasangan *pohon* dan *roda* dengan lima atau enam titik. Untuk dua graf, G dan H , *bilangan Ramsey graf* $R(G, H)$ didefinisikan sebagai bilangan terkecil n sedemikian sehingga setiap graf F dengan n titik akan memuat G atau komplemen dari F memuat H . Akan dipelajari bilangan Ramsey $R(G, W_m)$ jika G adalah sebarang *pohon* T_n , akan ditunjukkan jika T_n bukan suatu bintang maka bilangan Ramsey

$$R(T_n, W_4) = 2n - 1 \text{ untuk } n \geq 4$$

$$R(T_n, W_5) = 3n - 2 \text{ untuk } n \geq 3$$

Kata Kunci: *bilangan Ramsey graf, pohon T_n , roda W_m*



DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	ii
ABSTRAK	iv
DAFTAR ISI	v
DAFTAR TABEL	vii
DAFTAR GAMBAR	viii
PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	3
1.3 Pembatasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penulisan	3
1.5 Sistematika Penulisan	3
LANDASAN TEORI	4
2.1 Definisi dan Terminologi	4
2.2 Jenis-jenis Graf	10
2.3 Operasi-operasi pada graf	14
2.4 Bilangan Ramsey Klasik	16
2.5 Bilangan Ramsey Graf	19

**BILANGAN RAMSEY UNTUK PASANGAN PO-
HON DAN RODA DENGAN LIMA ATAU ENAM
TITIK**

35

KESIMPULAN

45

DAFTAR PUSTAKA

46



Daftar Tabel

2.4.1	Bilangan ramsey Klasik [4]	18
-------	--------------------------------------	----

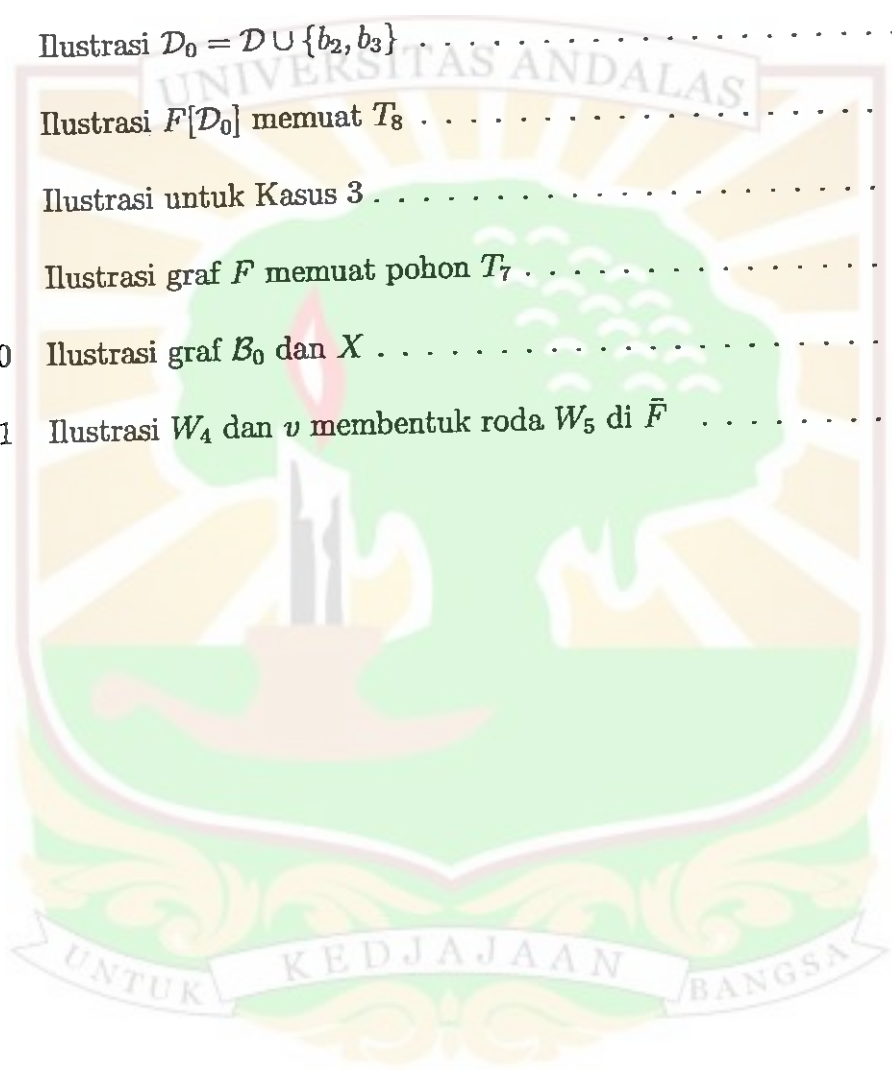


DAFTAR GAMBAR

2.1.1	Ilustrasi ketetanggaan pada suatu graf	5
2.1.2	Contoh Subgraf $H_1 = G - u$ dan $H_2 = G - e$	7
2.1.3	Ilustrasi penginduksian suatu graf	8
2.1.4	Graf dan Komplementnya	8
2.1.5	Bilangan kromatik pada bintang dengan m genap	9
2.1.6	Bilangan kromatik pada bintang dengan m ganjil	10
2.2.7	Lintasan P_3 dan P_4	10
2.2.8	Siklus C_3, C_4, C_5 dan C_6	11
2.2.9	Roda W_3, W_4 dan W_5	11
2.2.10	Pohon T_{18}	12
2.2.11	Bintang S_9	12
2.2.12	Graf Lengkap K_2, K_3, K_4 dan K_5	13
2.2.13	Graf Pesta	13
2.3.14	Operasi pada graf	15
2.4.15	Graf $(K_3, K_4, 8)$ -elok [6]	19
2.5.16	Ilustrasi untuk batas atas bilangan Ramsey graf	22
2.5.17	Ilustrasi untuk batas bawah bilangan Ramsey graf	22
2.5.18	Ilustrasi graf $P_3 = H_1 + K_1$	23
2.5.19	Ilustrasi graf $H_t + K_1$ memuat semua pohon T_n	24
2.5.20	Ilustrasi pohon T_{n+2} dan T'	24

2.5.21	Ilustrasi pohon T' termuat dalam graf $H_t + K_1$	25
2.5.22	Ilustrasi graf $H_t + K_1 + \{x_1, x_2\}$ dan graf $H_{t+1} + K_1$	25
2.5.23	Ilustrasi P_4 termuat dalam H_2	26
2.5.24	Ilustrasi graf H_t yang memuat semua pohon T_n tapi tidak memuat bintang S_n	26
2.5.25	(a) Ilustrasi graf T dan T' (b) graf T' termuat dalam H_t	27
2.5.26	Ilustrasi graf H_{t+1} dan graf $H_t + \{x_1, x_2\}$	27
2.5.27	(a) Ilustrasi graf F tidak memuat lintasan P_n (b) Ilustrasi L lintasan terpanjang di F	28
2.5.28	\bar{F} memuat W_4	28
2.5.29	Ilustrasi zp_1 dan zp_2 bukan anggota $E(F)$	29
2.5.30	Ilustrasi $X = V(F) \setminus V(L)$	29
2.5.31	Ilustrasi \bar{F} memuat W_4	30
2.5.32	Ilustrasi \bar{F} memuat W_4	30
2.5.33	Ilustrasi graf F tidak memuat lintasan P_n	31
2.5.34	Ilustrasi zp_1 dan zp_2 bukan anggota $E(F)$	31
2.5.35	Ilustrasi $X = V(F) \setminus V(L)$	32
2.5.36	Ilustrasi \bar{F} memuat W_5	32
2.5.37	Ilustrasi zq_1 dan zq_2 bukan anggota $E(F)$	33
2.5.38	Ilustrasi $Y = V(F) \setminus (V(L) \cup V(Q))$	33
2.5.39	Ilustrasi \bar{F} memuat W_5	34
2.5.40	Ilustrasi \bar{F} memuat W_5	34
3.0.1	Ilustrasi untuk Fakta 1	38

3.0.2	(a) Ilustrasi untuk $ B = 1$ dan (b) $ B = 2$	38
3.0.3	Ilustrasi untuk Kasus 2	39
3.0.4	Ilustrasi untuk Fakta 2	40
3.0.5	Ilustrasi untuk Fakta 3	40
3.0.6	Ilustrasi $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D} \cup \{b_2, b_3\}$	41
3.0.7	Ilustrasi $F[\mathcal{D}_0]$ memuat T_8	41
3.0.8	Ilustrasi untuk Kasus 3	42
3.0.9	Ilustrasi graf F memuat pohon T_7	43
3.0.10	Ilustrasi graf \mathcal{B}_0 dan X	44
3.0.11	Ilustrasi W_4 dan v membentuk roda W_5 di \bar{F}	44



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf sering digunakan dalam menyederhanakan atau menganalisis suatu permasalahan yang ditemui dalam kehidupan sehari-hari. Teori graf berfungsi untuk mengaitkan hubungan antara suatu himpunan objek dengan himpunan objek lainnya. Graf merepresentasikan objek-objek diskrit dan kaitan antara objek-objek tersebut. Representasi dari teori graf adalah dengan menyatakan objek sebagai titik, sedangkan hubungan antar objek dinyatakan dengan sisi. Sebagai contoh, misalkan sebuah peta jaringan jalan raya yang menghubungkan sejumlah kota pada sebuah propinsi. Pada peta tersebut terdapat sebuah graf, dimana kota dinyatakan sebagai titik dan jalan raya dinyatakan sebagai sisi.

Salah satu teori yang berkembang pesat dalam bidang graf adalah teori Ramsey. Teori Ramsey pertama kali dikemukakan oleh Frank Plumpton Ramsey pada tahun 1930. Ramsey menunjukkan bahwa untuk setiap bilangan asli n , terdapat bilangan asli $R(n)$, sedemikian sehingga jika sisi-sisi dari graf lengkap dengan $R(n)$ titik diwarnai dengan warna merah atau biru, maka graf tersebut akan selalu memuat graf lengkap K_n merah atau K_n biru sebagai subgraf. Bilangan $R(n)$ ini kemudian disebut sebagai bilangan Ramsey. Kemudian, permasalahan ini diperluas oleh Erdős dan Szekeres pada tahun 1935. Mereka membuktikan

bahwa jika diberikan dua buah bilangan asli a dan b dengan a dan $b \geq 2$, maka terdapat bilangan asli $R(a, b)$ sedemikian sehingga jika sisi-sisi dari graf lengkap dengan $R(a, b)$ titik diwarnai dengan warna merah atau biru, maka graf tersebut akan selalu memuat graf lengkap K_a merah atau K_b biru sebagai subgraf.

Pada perkembangan selanjutnya studi bilangan Ramsey tidak hanya terbatas pada graf lengkap saja tetapi juga telah diperumum untuk jenis graf sebarang lainnya, seperti *Cycle*, roda, pohon, bintang, pasangan pohon dan roda, pasangan bintang dan roda, dan lain-lain.

Salah satu studi bilangan Ramsey yang telah dilakukan yaitu untuk pasangan pohon dan roda. Salah satu graf yang termasuk pohon adalah bintang. Penentuan bilangan Ramsey untuk pasangan bintang dan roda telah dilakukan oleh Surahmat dan E.T Baskoro (lihat [8]) dimana bilangan Ramsey untuk pasangan bintang S_n dan roda W_m untuk $m = 4$ dan 5 adalah :

$$R(S_n, W_4) = \begin{cases} 2n - 1, & n \text{ ganjil dan } n \geq 3 \\ 2n + 1, & n > 3 \end{cases}$$

$$R(S_n, W_5) = 3n - 2, n \geq 3$$

Berdasarkan hasil penelitian tersebut maka menarik untuk dibahas bagaimana menentukan bilangan Ramsey graf untuk pasangan pohon selain bintang dan roda.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang dikaji pada tugas akhir ini adalah bagaimana cara menentukan bilangan Ramsey untuk pasangan pohon selain bintang dan roda.

1.3 Pembatasan Masalah

Pada tugas akhir ini, kajian tentang bilangan Ramsey untuk pasangan pohon dan roda dibatasi pada banyaknya titik pada roda yaitu lima atau enam titik.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan tugas akhir ini adalah untuk menentukan bilangan Ramsey untuk pasangan pohon dan roda dengan lima atau enam titik.

1.5 Sistematika Penulisan

Tugas Akhir ini dibagi menjadi empat bab, yaitu Bab I menguraikan tentang latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan, sedangkan pada Bab II, berisi teori-teori dan definisi yang mendukung pembahasan dalam permasalahan yang akan dibahas. Kemudian, pembahasan serta penyelesaian permasalahan dalam penulisan tugas akhir ini akan diberikan pada Bab III. Penulisan tugas akhir ini diakhiri oleh Bab IV yang berisi kesimpulan.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas tentang definisi dan terminologi, jenis-jenis graf, dan pengertian bilangan Ramsey graf.

2.1 Definisi dan Terminologi

Semua definisi dan terminologi pada bagian ini dikutip dari [2].

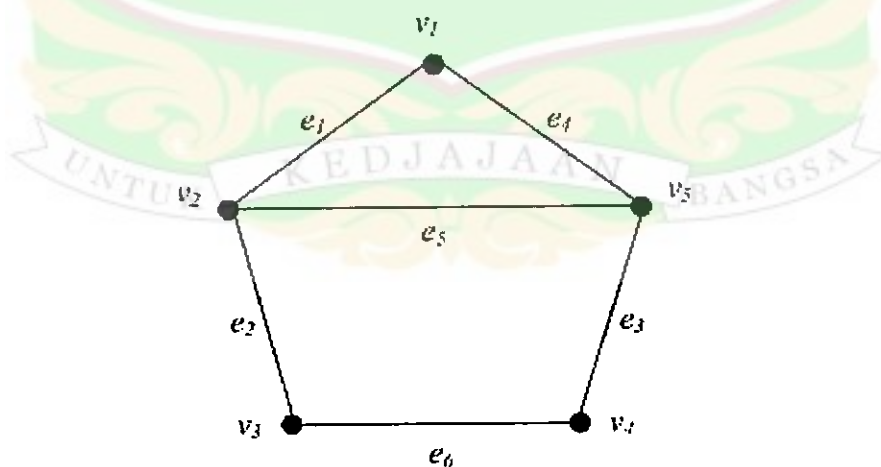
Graf $G = (V(G), E(G)) = (V, E)$ adalah pasangan himpunan terurut yang terdiri dari himpunan titik-titik yang tak kosong (*vertices*) $V(G)$ dan himpunan sisi (*edges*) $E(G)$. Banyaknya titik di G dinotasikan dengan $|V(G)| = p$, disebut **orde** dari G dan banyaknya sisi di G dinotasikan dengan $|E(G)| = q$, disebut **ukuran** dari G . Misalkan u dan v adalah dua titik yang bertetangga di G . Jika u dan v dihubungkan oleh lebih dari satu sisi maka G dikatakan graf yang memuat **sisi ganda**. Selanjutnya, jika titik-titik ujung dari suatu sisi terkait pada titik yang sama, maka sisi tersebut dinamakan *loop*.

Graf G dikatakan **graf sederhana** apabila G tidak memuat sisi ganda dan *loop*. Untuk selanjutnya, pada tulisan ini hanya dibicarakan graf sederhana. Titik u disebut **bertetangga** (*adjacent*) dengan titik v jika $e = uv \in E(G)$ dan sisi e dikatakan **terkait** (*incident*) dengan titik u dan v . Dua sisi e_1 dan e_2 pada G disebut sisi-sisi yang bertetangga jika e_1 dan e_2 terkait pada satu titik yang sama.

Jalan (*walk*) dari titik u_0 ke titik u_n di G adalah barisan hingga $u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, \dots, u_{n-1}, e_n, u_n$ dari titik-titik dan sisi-sisi di G sedemikian sehingga $e_i = u_{i-1}u_i \in E(G)$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$. **Panjang** dari jalan adalah banyaknya sisi dari barisan tersebut. Jalan dikatakan tertutup jika $u_0 = u_n$, dan dikatakan terbuka jika $u_0 \neq u_n$. **Lintasan** adalah jalan yang semua titiknya berbeda.

Derajat dari titik x di G adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik x dan dinotasikan dengan $d(x)$. Jika $d(x) = 0$, maka x dikatakan **titik terisolasi**. Derajat minimum dari G , dinotasikan dengan $\delta(G)$, adalah derajat terkecil dari titik-titik di G , sedangkan derajat terbesarnya disebut derajat maksimum dari G dan dinotasikan dengan $\Delta(G)$.

Gambar 2.1.1 memperlihatkan anggota himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dengan $|V(G)| = 5$, sedangkan anggota himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ dengan $|E(G)| = 6$. Titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 dan v_5 sedangkan sisi e_6 bertetangga dengan sisi e_2 dan e_3 .



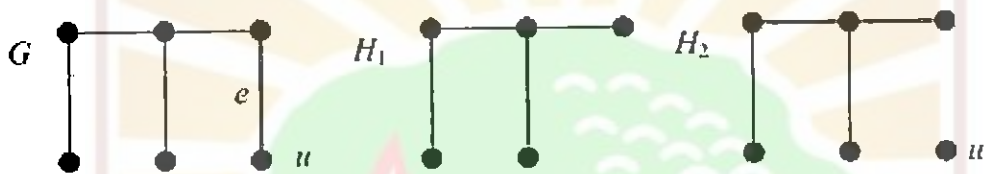
Gambar 2.1.1. Ilustrasi ketetangaan pada suatu graf

Lingkungan dari titik-titik $v \in V(G)$ di $B \subset V(G)$ adalah semua titik yang bertetangga dengan titik v di $B \subset V(G)$, ditulis $N_B(v) = \{y \in V(G) | vy \in E(G)\}$. Sebagai contoh pada gambar 2.1.1 misalkan $B = \{v_2, v_3\}$ maka $N_B(v) = \{v_1, v_4, v_5\}$. Kardinalitas dari $N_B(v)$ dinotasikan dengan $\mathfrak{D}_B(v)$. Dua titik di G dikatakan **saling bebas** jika dua titik tersebut tidak bertetangga. Suatu himpunan $I \subset V(G)$ dikatakan **himpunan saling bebas** jika setiap dua titik di I tidak bertetangga. Secara serupa, dua sisi dalam G dikatakan saling bebas jika dua sisi tersebut tidak bertetangga.

Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf berorde n dan $X \subseteq V$. Himpunan X disebut himpunan bebas jika untuk setiap dua titik $x, y \in X$ berlaku $xy \notin E(G)$. Misalkan Y adalah himpunan bebas dari G . Jika untuk setiap himpunan bebas X dari G berlaku $|X| \leq |Y|$, maka Y disebut **himpunan bebas terbesar** dari G . Kardinalitas himpunan bebas terbesar dari G dinotasikan dengan $c(G)$. Komponen bebas terbesar dari G adalah G itu sendiri. Dapat ditulis $c(G) = |G|$. Sebagai contoh $c(T_n) = n$ karena $c(T_n) = |T_n| = n$.

Titik u dikatakan terhubung dengan titik v pada graf G , jika terdapat suatu lintasan dengan titik u dan v sebagai titik ujungnya. Setiap graf G dikatakan **graf terhubung** jika setiap dua titiknya terhubung, sedangkan graf yang tidak demikian disebut **graf tak terhubung**. Jarak dari titik u ke titik v pada suatu graf, dinotasikan $d(u, v)$, didefinisikan sebagai panjang lintasan terpendek dari u ke v di G . Jika tidak terdapat lintasan dari dua titik di suatu graf maka jarak kedua titik tersebut didefinisikan sebagai tak hingga.

Misal terdapat graf G dan H . Jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$ maka H disebut **subgraf** dari G , dan dinotasikan $H \subseteq G$. Misalkan $u \in V(G)$ dengan $|V(G)| \geq 2$, maka $G - u$ adalah subgraf dari graf G dengan $V(G - u) = V(G) \setminus \{u\}$ dan $E(G - u) = E(G) \setminus \{uv \mid v \in V(G)\}$. Misalkan $e = uv \in E(G)$, maka $G - e$ adalah suatu subgraf dari graf G dengan $V(G - e) = V(G)$ dan $E(G - e) = E(G) \setminus \{e\}$ seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.1.2 berikut :

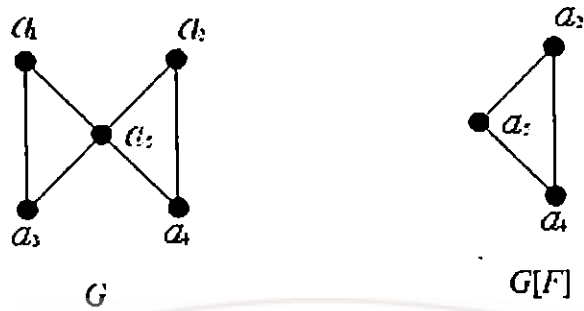


Gambar 2.1.2. Contoh Subgraf $H_1 = G - u$ dan $H_2 = G - e$

F dikatakan **subgraf maksimal** dari graf G jika setiap subgraf H dari graf G berlaku $F \subseteq H \subseteq G$ maka $F = H$. Bila F merupakan subgraf maksimal dan terhubung dari graf G , maka F disebut **subgraf terhubung maksimal**.

Setiap subgraf terhubung maksimal dari graf tak terhubung G disebut **komponen** dari G . Banyaknya titik pada komponen terbesar dalam graf G dibandingkan dengan $c(G)$.

Subgraf F dikatakan **subgraf yang menginduksi** (*induced subgraph*) graf G jika F subgraf dari G dan juga untuk $u, v \in V(F)$ dan $uv \in E(G)$ mengakibatkan $uv \in E(F)$. Graf G yang diinduksi oleh F dinotasikan dengan $G[F]$. Contoh graf G yang diinduksi oleh subgraf F dapat dilihat pada Gambar 2.1.3 berikut.



Gambar 2.1.3. Ilustrasi penginduksian suatu graf

Komplemen dari G , dinotasikan dengan \bar{G} , adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$, dimana dua titik bertetangga di \bar{G} jika dan hanya jika dua titik tersebut tidak bertetangga di G . Suatu graf G memenuhi $\bar{\bar{G}} = G$. Contoh suatu graf dan komplemennya diberikan oleh Gambar 2.1.4 berikut.



Gambar 2.1.4. Graf dan Komplemennya

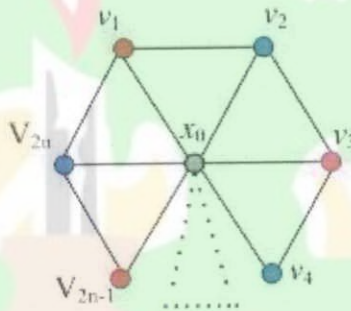
Bilangan kromatik (*chromatic number*) dari graf G adalah bilangan asli terkecil k sedemikian sehingga jika titik-titik di G diwarnai dengan k warna maka tidak ada dua titik yang bertetangga yang mempunyai warna yang sama. Bilangan kromatik dari G dinotasikan dengan $\chi(G)$.

Sebagai contoh :

$$\chi(W_m) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } m \text{ genap} \\ 4, & \text{untuk } m \text{ ganjil} \end{cases}$$

1. $\chi(W_m) = 3$ untuk $m = 2n$, dengan $n = 1, 2, 3, \dots$

Bilangan kromatik pada bintang untuk nilai m genap adalah 3. Hal ini diperoleh, karena setelah dilakukan pewarnaan pada bintang sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga yang mempunyai warna yang sama, maka terdapat tiga warna yaitu abu-abu, merah dan biru [lihat Gambar 2.1.5].

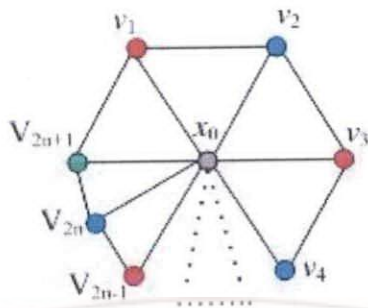


Gambar 2.1.5. Bilangan kromatik pada bintang dengan m genap

2. $\chi(W_m) = 4$ untuk $m = 2n + 1$, dengan $n = 1, 2, 3, \dots$

Bilangan kromatik pada bintang untuk nilai m ganjil adalah 4. Hal ini diperoleh, karena setelah dilakukan pewarnaan pada bintang sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga yang mempunyai warna yang sama, maka terdapat empat warna yaitu abu-abu, merah, biru dan hijau [lihat Gambar 2.1.6].

MILIK
UPT PERPUSTAKAAN
UNIVERSITAS ANDALAS



Gambar 2.1.6. Bilangan kromatik pada bintang dengan m ganjil

2.2 Jenis-jenis Graf

Berikut adalah beberapa jenis graf yang akan digunakan dalam pembahasan ini.

1. Lintasan (*Path*)

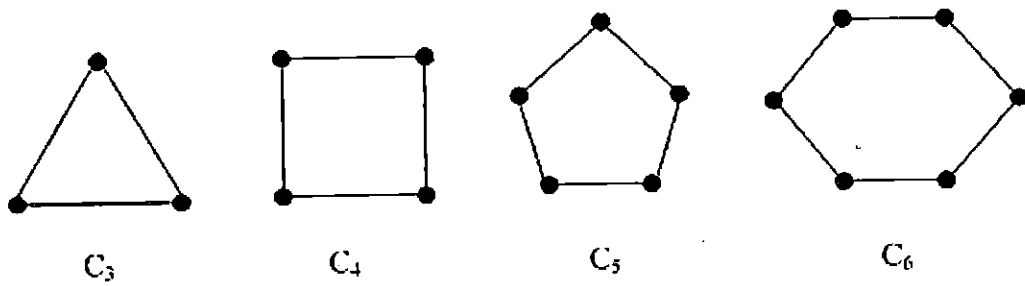
Lintasan (*path*) adalah jalan (*walk*) yang semua titiknya berbeda. Lintasan dengan n titik dilambangkan dengan P_n . Lintasan dengan n titik memiliki $n - 1$ sisi. Pada Gambar 2.2.7 diperlihatkan lintasan dengan 3 dan 4 titik.



Gambar 2.2.7. Lintasan P_3 dan P_4

2. Cycle (Siklus)

Cycle (siklus) adalah graf terhubung yang setiap titiknya berderajat dua. Siklus dengan n titik dilambangkan dengan $C_n, n \geq 3$. Gambar 2.2.8 merupakan siklus dengan $3 \leq n \leq 6$.

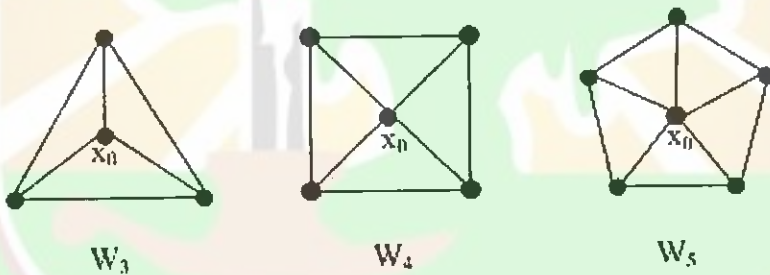


Gambar 2.2.8. Siklus C_3, C_4, C_5 dan C_6 .

3. Roda

Roda (*wheel*) adalah suatu graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu titik x_0 , yang bertetangga dengan semua titik di C_n . $W_m = x_0 + C_n$.

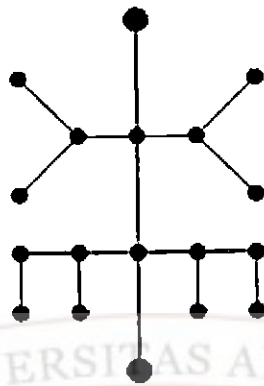
Roda dengan $m + 1$ titik dilambangkan dengan simbol $W_m, m \geq 3$.



Gambar 2.2.9. Roda W_3, W_4 dan W_5

4. Pohon (*tree*)

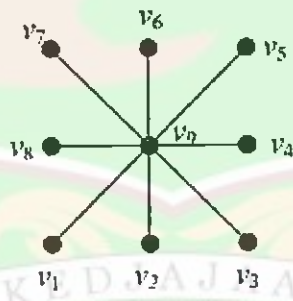
Pohon dengan n titik dilambangkan dengan T_n . Pohon adalah graf terhubung berorde n yang tidak memuat siklus. Titik-titik berderajat satu pada pohon dinamakan daun. Gambar 2.2.10 memperlihatkan salah satu pohon dengan $n = 18$.



Gambar 2.2.10. Pohon T_{18}

5. Bintang

Bintang adalah pohon berorde n yang memiliki 1 titik berderajat $n - 1$ yang disebut pusat dan $n - 1$ titik berderajat satu. Bintang dengan n titik dilambangkan dengan S_n . Pada Gambar 2.2.11 diberikan bintang S_9 dengan titik pusat v_9 .

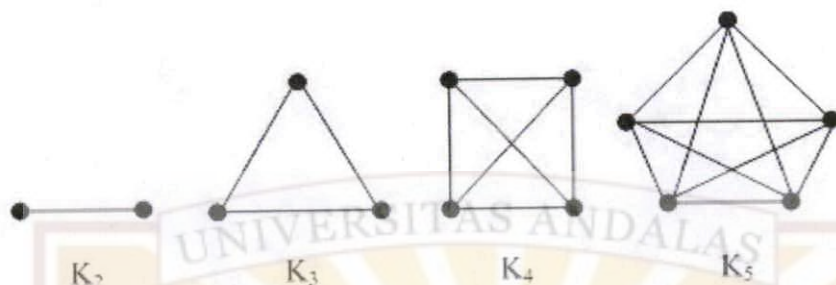


Gambar 2.2.11. Bintang S_9

6. Graf Lengkap

Graf lengkap (*complete graph*) adalah graf sederhana yang setiap titiknya bertetangga ke semua titik lainnya. Graf lengkap dengan n titik dilambangkan dengan K_n . Setiap titik pada K_n berderajat $n - 1$. Banyaknya sisi

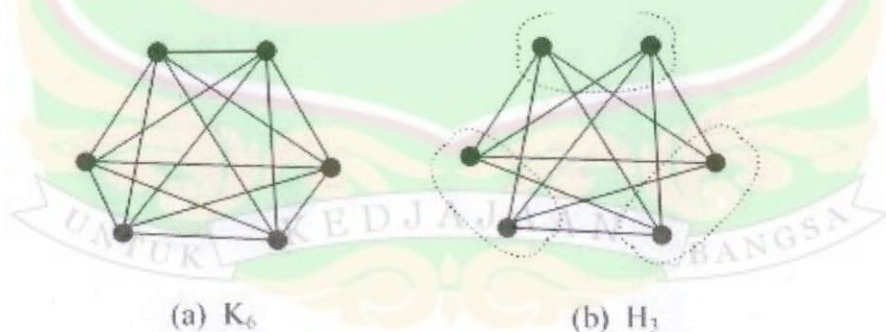
pada graf lengkap dengan n titik adalah $n(n - 1)/2$. Pada gambar 2.2.12 diberikan beberapa contoh dari graf lengkap.



Gambar 2.2.12. Graf Lengkap K_2, K_3, K_4 dan K_5

7. Graf Pesta (*Cocktail-Party Graph*)

Graf pesta H_n adalah suatu graf yang diperoleh dari graf lengkap K_{2n} dengan cara menghapus sebanyak n sisi yang saling bebas. Pada Gambar 2.2.13 bagian (a) adalah graf lengkap K_6 dan bagian (b) adalah graf pesta H_3 .



Gambar 2.2.13. Graf Pesta

MILIK
UPT PERPUSTAKAAN
UNIVERSITAS ANDALAS

2.3 Operasi-operasi pada graf

Misal terdapat dua graf G_1 dan G_2 dimana :

$$|V(G_1)| = p_1 \quad |V(G_2)| = p_2$$

$$|E(G_1)| = q_1 \quad |E(G_2)| = q_2$$

Terdapat beberapa operasi terhadap kedua graf tersebut, diantaranya

1. Operasi Gabungan (*Union*). Graf G_3 dikatakan sebagai gabungan dari G_1 dan G_2 , dinotasikan $G_3 = G_1 \cup G_2$ apabila

$$V(G_3) = V(G_1) \cup V(G_2) \text{ dan } E(G_3) = E(G_1) \cup E(G_2).$$

diperoleh bahwa

$$|V(G_3)| = |V(G_1)| + |V(G_2)| = p_1 + p_2$$

$$|E(G_3)| = |E(G_1)| + |E(G_2)| = q_1 + q_2.$$

2. Operasi tambah (*join*). Graf G_4 dikatakan sebagai join dari G_1 dan G_2 , dinotasikan $G_4 = G_1 + G_2$ apabila untuk setiap titik di G_1 diberikan sisi-sisi yang menghubungkan titik tersebut dengan semua titik di G_2 . Diperoleh bahwa

$$|V(G_4)| = |V(G_1)| + |V(G_2)| = p_1 + p_2$$

$$|E(G_4)| = |E(G_1)| \cdot |E(G_2)| + |E(G_1)| + |E(G_2)| = q_1 \cdot q_2 + q_1 + q_2$$

3. Operasi perkalian cartesius (*Cartesian Product*). Graf G_5 dikatakan sebagai hasil kali dari (G_1 dan G_2), dinotasikan $G_5 = G_1 \times G_2$ apabila memenuhi syarat berikut. Setiap titik $u \in G_5$ dapat ditulis sebagai pasangan terurut (u_1, u_2) dimana $u_1 \in V(G_1)$ dan $u_2 \in V(G_2)$. Dua titik u dan v di G_5 dikatakan bertetangga jika

(i) $u_1 = v_1$ dan $u_2v_2 \in E(G_2)$, atau

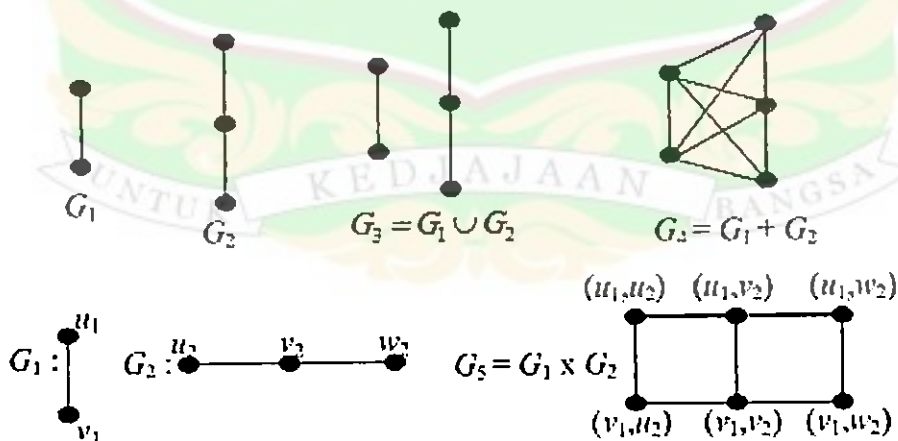
(ii) $u_2 = v_2$ dan $u_1v_1 \in E(G_1)$.

Diperoleh bahwa

$$|V(G_5)| = |V(G_1)| \cdot |V(G_2)| = p_1p_2$$

$$|E(G_5)| = |V(G_1)| \cdot |E(G_2)| + |V(G_2)| \cdot |E(G_1)| = p_1q_2 + p_2q_1.$$

Lebih jelasnya dapat dilihat pada Gambar 2.3.14 dimana $G_3 = G_1 \cup G_2$, $G_4 = G_1 + G_2$ dan $G_5 = G_1 \times G_2$.



Gambar 2.3.14. Operasi pada graf

2.4 Bilangan Ramsey Klasik

Definisi dari bilangan Ramsey klasik diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.4.1. Misalkan $a, b \geq 2$ adalah bilangan asli. Bilangan Ramsey $R(a, b)$ adalah bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga, jika sisi-sisi graf lengkap K_n diwarnai dengan warna merah atau biru, maka senantiasa terdapat subgraf K_a merah atau K_b biru.

Dari definisi diatas dapat ditulis bahwa

$$R(a, b) = R(K_a, K_b)$$

dengan a dan b adalah banyaknya titik pada graf lengkap. Karena setiap graf F memenuhi $\bar{\bar{F}} = F$, maka bilangan Ramsey klasik bersifat simetris yaitu :

$$R(a, b) = R(b, a).$$

Sebelum menentukan nilai eksak bilangan Ramsey, terlebih dahulu diberikan definisi graf elok.

Definisi 2.4.2. Diberikan dua graf G dan H . Graf F disebut graf (G, H) -elok jika F tidak memuat G dan \bar{F} tidak memuat H . Sebarang graf (G, H) -elok dengan n titik dinotasikan dengan graf (G, H, n) -elok.

Selanjutnya, akan ditinjau nilai eksak bilangan Ramsey klasik. Dalam hal $a = 1$ atau $a = 2$ jelas bahwa :

$$R(1, b) = 1 \text{ dan } R(2, b) = b. \quad \text{untuk sebarang } b \text{ bilangan asli.} \quad (1)$$

Erdős dan Szekeres telah memberikan eksistensi dari bilangan Ramsey klasik $R(a, b)$ dengan menunjukkan batas atasnya sebagaimana teorema berikut.

Teorema 2.4.3. [6] *Untuk setiap bilangan bulat positif a dan b , bilangan Ramsey $R(a, b)$ senantiasa ada; dan memenuhi*

$$R(a, b) \leq \binom{a+b-2}{a-1}$$

Akibat 2.4.4. [6] *Untuk setiap $a \geq 2$ dan $b \geq 2$ berlaku*

$$R(a, b) \leq R(a-1, b) + R(a, b-1).$$

Selanjutnya, jika $R(a-1, b)$ dan $R(a, b-1)$ keduanya genap, maka

$$R(a, b) < R(a-1, b) + R(a, b-1).$$

Hingga saat ini, baru sembilan buah nilai eksak bilangan Ramsey klasik yang diketahui. Greenwood dan Gleason (1955) menunjukkan $R(3, 3) = 6$, $R(3, 4) = 9$, $R(3, 5) = 14$, $R(4, 4) = 18$. Selanjutnya Kery (1964) membuktikan $R(3, 6) = 18$ dan diikuti oleh Kalbfleisch (1966) yang memberikan $R(3, 7) = 23$. Dua bilangan Ramsey lain diberikan oleh Grienstead dan Roberts (1982), yaitu $R(3, 8) = 28$ dan $R(3, 9) = 36$. Hasil terbaru dalam hal ini diberikan oleh McKay dan Radziszowski (1995) yang menunjukkan bahwa $R(4, 5) = 25$.

Untuk nilai a dan b lainnya, penentuan nilai eksak bilangan Ramsey klasik merupakan persoalan yang sulit. Akan tetapi, batas atas dan batas bawah non-trivial dari bilangan tersebut telah diperoleh, seperti pada tabel berikut :

$a \setminus b$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	6	9	14	18	23	28	36	40 43	46 51	52 59	59 69	66 78	73 88
4		18	25	35 41	49 61	56 84	73 115	92 149	97 191	128 238	133 291	141 349	153 417
5			43 49	58 87	80 143	101 216	125 316	143 442	159 633	185 848	209 1139	235 1461	265 1878
6				102 165	113 298	130 495	169 780	179 1171	253 1804	262 2566	317 3705		401 6911
7					205 540	216 1031	237 1713	289 2826	405 4553	416 6954	511 10581		22116
8						282 1870	317 3583				817 27490		861 63620
9							565 6588	580 12677					
10								798 23556					1265 81200

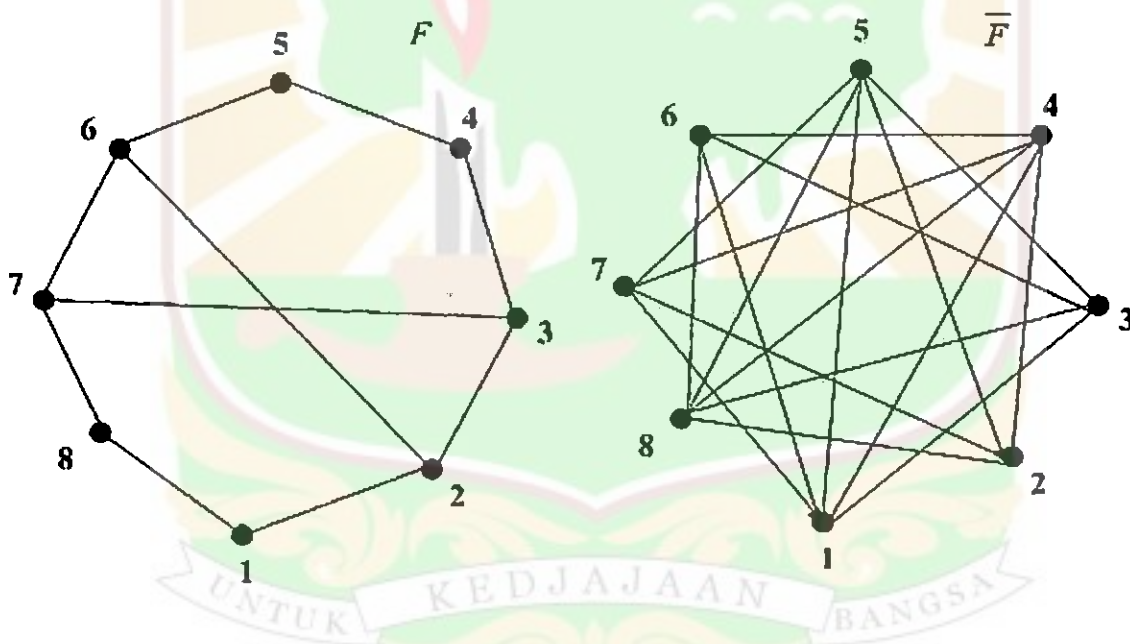
Tabel 2.4.1. Bilangan ramsey Klasik [4]

Berikut akan diberikan contoh pembuktian bilangan Ramsey klasik untuk $R(3, 4) = 9$, yang ditemukan oleh Greenwood dan Gleason (1955).

Teorema 2.4.5. [6] $R(3, 4) = 9$.

Bukti.

Karena $R(2, 4) = 4$ (berdasarkan persamaan (1)) dan $R(3, 3) = 6$ (berdasarkan tabel 2.4.1) keduanya bilangan genap, maka menurut Akibat 2.4.4, diperoleh $R(3, 4) < R(2, 4) + R(3, 3) = 4 + 6 = 10$. Selanjutnya karena diperoleh graf $(K_3, K_4, 8)$ -elok seperti pada Gambar 2.4.15 maka haruslah $R(3, 4) = 9$.



Gambar 2.4.15. Graf $(K_3, K_4, 8)$ -elok [6]

2.5 Bilangan Ramsey Graf

Definisi 2.5.6. Diberikan dua graf G dan H . Bilangan Ramsey graf $R(G, H)$ didefinisikan sebagai bilangan terkecil n sedemikian sehingga setiap graf F dengan

n titik akan memuat G atau komplemen dari F memuat H .

Selanjutnya akan dibahas batas bawah bilangan Ramsey graf. Dengan menggunakan konsep bilangan kromatik pada graf H dan $c(G)$, Chávatal dan Harary memperoleh batas bawah bilangan Ramsey graf $R(G, H)$ sebagai berikut.

Teorema 2.5.7. [6] (Batas Bawah) Untuk setiap graf G dan H berlaku

$$R(G, H) \geq (c(G) - 1)(\chi(H) - 1) + 1$$

dimana $\chi(H)$ adalah bilangan kromatik pada graf H , dan $c(G)$ adalah banyak titik pada komponen maksimal dalam graf G .

Bukti.

Misal terdapat graf $F = (\chi(H) - 1)K_{c(G)-1}$. Dalam hal ini F tidak memuat G sebagai subgraf karena setiap komponen dari F mempunyai orde $c(G) - 1$. Karena $\chi(\bar{F}) < \chi(H) - 1$ maka \bar{F} tidak memuat H . Diperoleh $R(G, H) \geq (c(G) - 1)(\chi(H) - 1) + 1$. ■

Contoh 2.5.1.

Misal terdapat graf $G = P_4$ dan $H = W_5$, karena $c(P_4) = 4$ dan $\chi(W_5) = 4$, maka berdasarkan teorema 2.5.7 diperoleh

$$R(P_4, W_5) \geq (4 - 1)(4 - 1) + 1 = 10.$$

Misal $F = (\chi(W_5) - 1)K_{c(P_4)-1} = (4 - 1)K_{4-1} = 3K_3$ (dengan $|V(F)| = 9$). Jelas F tidak memuat P_4 , karena setiap komponen F mempunyai orde $c(P_4) - 1 =$

$4 - 1 = 3$. Selanjutnya, karena $\chi(\bar{F}) < \chi(W_5) - 1 = 4 - 1 = 3$, maka \bar{F} tidak akan memuat W_5 . Sehingga haruslah $R(P_4, W_5) \geq 10$.

Untuk menunjukkan bahwa bilangan Ramsey $R(G, H) = n$, dilakukan dua langkah pembuktian sebagai berikut:

- Langkah 1. Menunjukkan bahwa $R(G, H) \leq n$, dengan cara menunjukkan bahwa sebarang pewarnaan merah-biru pada semua sisi dari graf K_n memuat graf G merah atau graf H biru.
- Langkah 2. Menunjukkan bahwa $R(G, H) \geq n$, dengan cara menunjukkan bahwa terdapat pewarnaan merah-biru pada semua sisi dari graf K_{n-1} sehingga K_{n-1} tidak memuat graf G merah dan juga tidak memuat graf H biru.

Contoh 2.5.2.

Akan dibuktikan $R(K_3, K_4) = 9$, dengan langkah-langkah berikut.

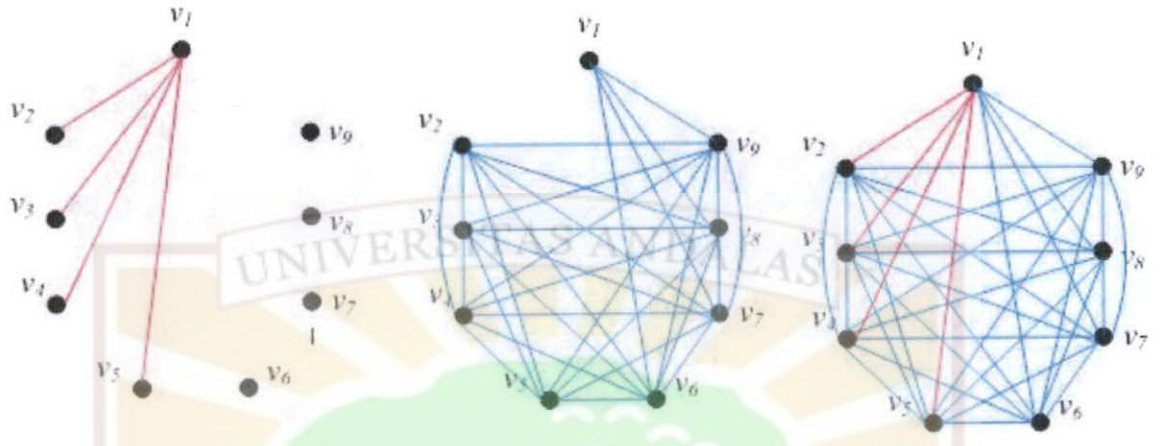
(i) $R(K_3, K_4) \leq 9$.

Andaikan K_9 tidak memuat K_3 merah. Akan ditunjukkan bahwa K_9 memuat K_4 biru [lihat Gambar 2.5.16].

(ii) $R(K_3, K_4) \geq 9$.

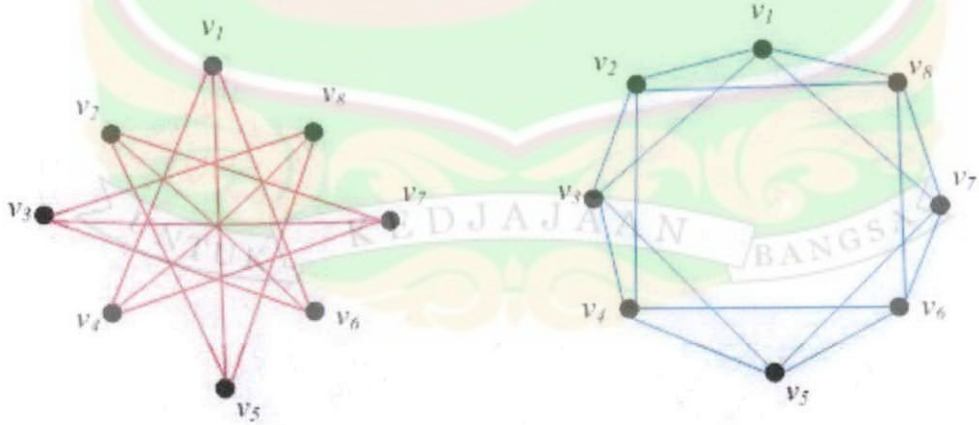
Andaikan K_8 tidak memuat K_3 merah. Akan ditunjukkan K_8 juga tidak memuat K_4 biru [lihat Gambar 2.5.17].

Dari pernyataan (i) dan (ii) terbukti bahwa $R(K_3, K_4) = 9$.



(a) K_9 tidak memuat K_3 merah (b) K_9 memuat K_4 biru (c) K_9 yang diwarnai dengan warna merah dan biru

Gambar 2.5.16. Ilustrasi untuk batas atas bilangan Ramsey graf



(a) K_8 tidak memuat K_3 merah (b) K_8 tidak memuat K_4 biru

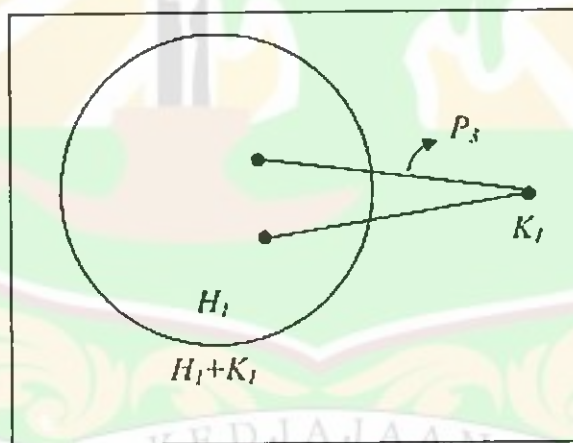
Gambar 2.5.17. Ilustrasi untuk batas bawah bilangan Ramsey graf

Pada perkembangan selanjutnya, penentuan bilangan Ramsey tidak hanya terbatas pada graf lengkap, tetapi dapat diperumum untuk graf yang lain. Pada tulisan ini, bilangan Ramsey graf yang akan dikaji adalah untuk pasangan T_n dan W_m dimana $m = 4$ dan 5 . Sebelum menentukan bilangan Ramsey graf tersebut, terlebih dahulu akan dibahas dua lema berikut.

Lema 2.5.8. Untuk n ganjil, $n \geq 3$, dan $n = 2t + 1$, graf $H_t + K_1$ memuat semua pohon T_n dengan n titik.

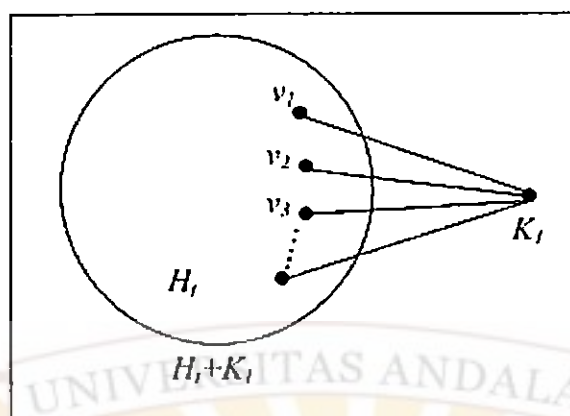
Bukti.

Akan ditunjukkan dengan menggunakan induksi matematika. Untuk $n = 3$, pohon $T_3 = P_3$ dan jelas bahwa $P_3 = H_1 + K_1$, lihat Gambar 2.5.18 berikut.



Gambar 2.5.18. Ilustrasi graf $P_3 = H_1 + K_1$

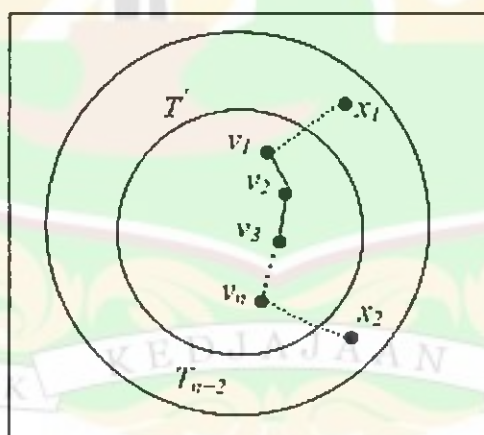
Asumsikan lema ini benar untuk $n < k$ dan $n = 2t + 1$, yaitu $H_t + K_1$ memuat semua pohon T_n dengan n titik, lihat Gambar 2.5.19.



Gambar 2.5.19. Ilustrasi graf $H_t + K_1$ memuat semua pohon T_n

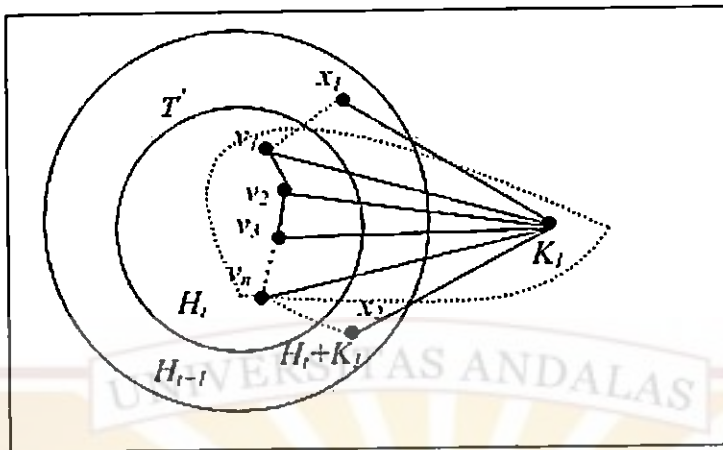
Akan ditunjukkan bahwa $H_{t+1} + K_1$ memuat semua pohon T_{n+2} dengan $n+2$ titik.

Misal T suatu pohon dengan $n+2$ titik, maka T setidaknya memuat dua daun, sebut saja x_1 dan x_2 . Jika kedua titik tersebut dihapus dari T , maka diperoleh suatu pohon T' dengan n titik, lihat Gambar 2.5.20.



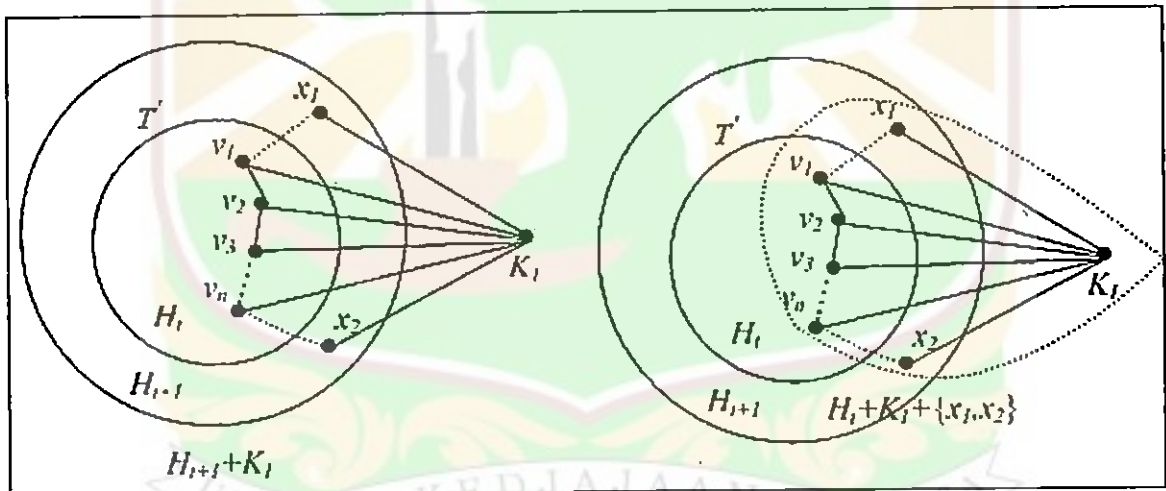
Gambar 2.5.20. Ilustrasi pohon T_{n+2} dan T'

Menurut asumsi induksi matematika, pohon T' akan termuat dalam $H_t + K_1$, lihat Gambar 2.5.21.



Gambar 2.5.21. Ilustrasi pohon T' termuat dalam graf $H_t + K_1$

Karena graf $H_{t+1} + K_1 = H_t + K_1 + x_1, x_2$ maka $H_{t+1} + K_1$ memuat pohon T , lihat Gambar 2.5.22. Maka lemma terbukti. ■



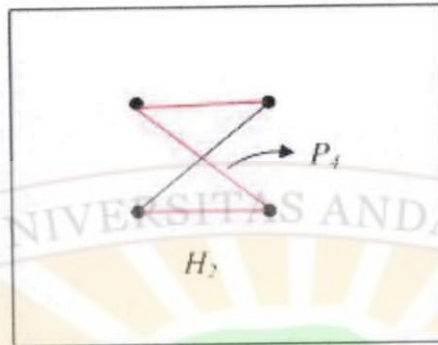
Gambar 2.5.22. Ilustrasi graf $H_t + K_1 + \{x_1, x_2\}$ dan graf $H_{t+1} + K_1$

Lema 2.5.9. Untuk n genap, $n \geq 4$, dan $n = 2t$, graf pesta H_t dengan $2t$ titik akan memuat semua pohon T_n dengan n titik kecuali bintang S_n .

Bukti.

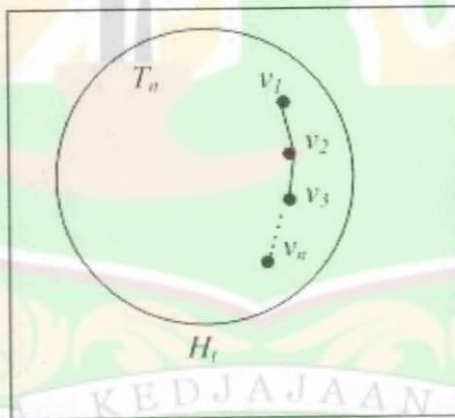
Akan ditunjukkan dengan menggunakan induksi matematika. Untuk $n = 4$, pohon

satu-satunya yang bukan bintang adalah lintasan P_4 . Dalam hal ini, P_4 termuat dalam H_2 , lihat Gambar 2.5.23.



Gambar 2.5.23. Ilustrasi P_4 termuat dalam H_2

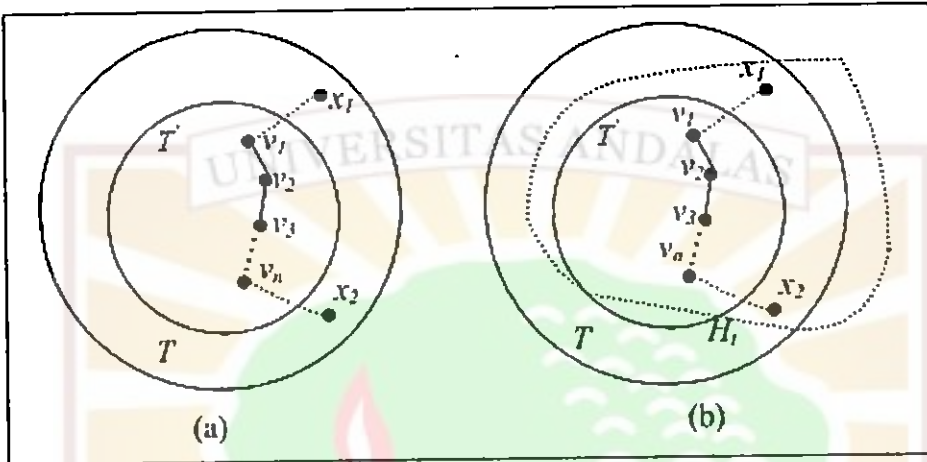
Misalkan lema benar untuk $n = 2t$, yakni H_t memuat semua pohon $T_n \neq S_n$, dengan n titik, dan n bilangan genap, lihat Gambar di bawah ini.



Gambar 2.5.24. Ilustrasi graf H_t yang memuat semua pohon T_n tapi tidak memuat bintang S_n

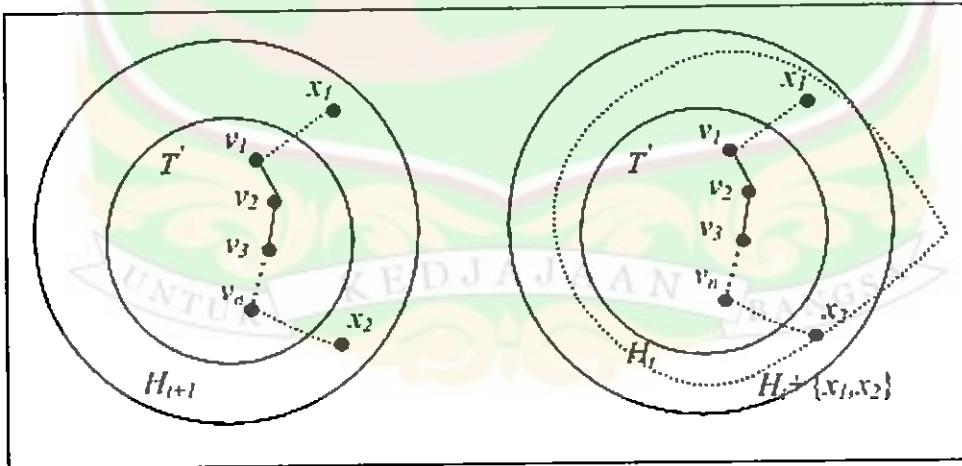
Selanjutnya, akan diperlihatkan H_{t+1} memuat semua pohon $T_{n+2} \neq S_{n+2}$ untuk n genap. Misalkan T suatu pohon yang bukan merupakan suatu bintang dengan $n + 2$ titik. Maka T setidaknya memuat dua daun, sebut saja x_1 dan x_2 . Jika

kedua titik tersebut dihapus dari pohon T , maka diperoleh pohon T' dengan n titik. Menurut asumsi induksi pohon T' akan termuat dalam H_t , lihat Gambar 2.5.25.



Gambar 2.5.25. (a) Ilustrasi graf T dan T' (b) graf T' termuat dalam H_t

Karena $H_{t+1} = H_t + \{x_1, x_2\}$ maka pohon T akan termuat dalam H_{t+1} tersebut. ■

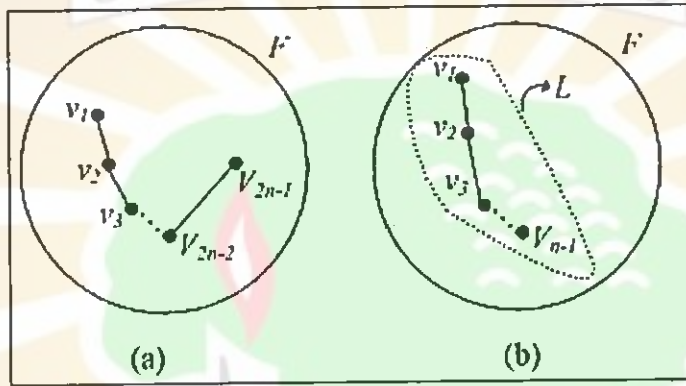


Gambar 2.5.26. Ilustrasi graf H_{t+1} dan graf $H_t + \{x_1, x_2\}$

Teorema 2.5.10. [6] $R(P_n, W_4) = 2n - 1$ untuk semua $n \geq 3$.

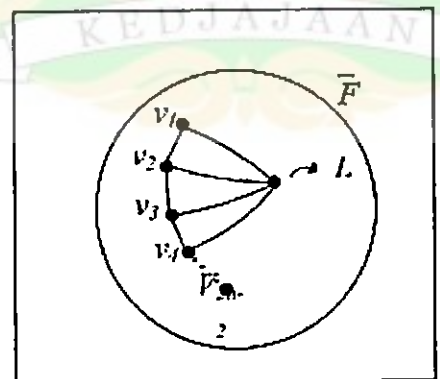
Bukti.

Misalkan graf F dengan orde $2n - 1$ dan tidak memuat lintasan P_n . Akan ditunjukkan \bar{F} memuat W_4 . Misalkan L adalah lintasan terpanjang di F , lihat Gambar 2.5.27.



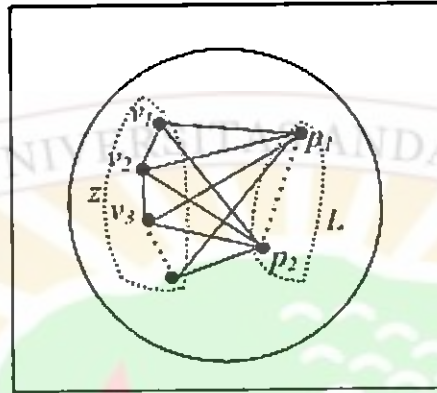
Gambar 2.5.27. (a) Ilustrasi graf F tidak memuat lintasan P_n (b) Ilustrasi L lintasan terpanjang di F

Bila $|V(L)| = 1$ maka $V(F)$ merupakan himpunan bebas, dan akibatnya \bar{F} akan memuat W_4 , lihat Gambar 2.5.28.



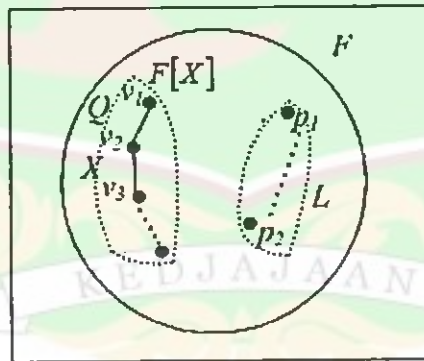
Gambar 2.5.28. \bar{F} memuat W_4

Selanjutnya, asumsikan $|V(L)| \neq 1$. Misalkan p_1 dan p_2 adalah titik-titik ujung dari L . Dalam hal ini $zp_1, zp_2 \notin E(F)$ untuk setiap $z \in V(F) \setminus V(L)$, lihat Gambar 2.5.29.



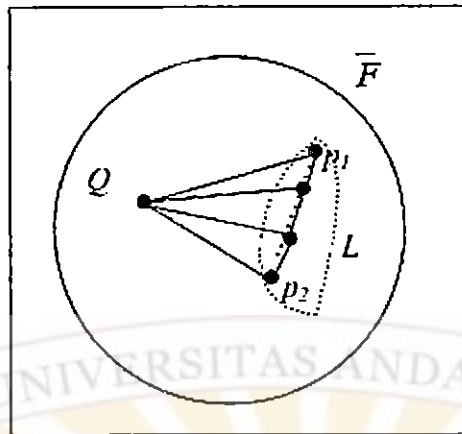
Gambar 2.5.29. Ilustrasi zp_1 dan zp_2 bukan anggota $E(F)$

Misalkan $X = V(F) \setminus V(L)$ dan Q adalah lintasan terpanjang dalam subgraf $F[X]$, lihat Gambar 2.5.30.



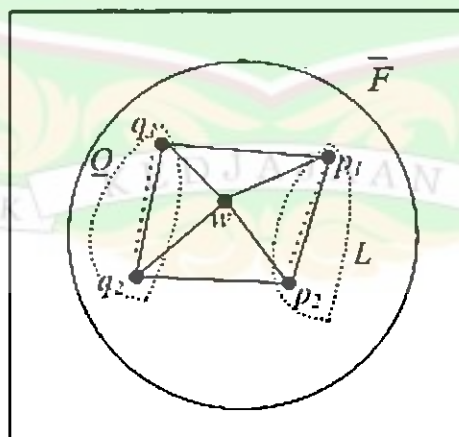
Gambar 2.5.30. Ilustrasi $X = V(F) \setminus V(L)$

Bila $|V(Q)| = 1$ maka X merupakan himpunan bebas di F , dan akibatnya \bar{F} akan memuat W_4 , lihat Gambar 2.5.31.



Gambar 2.5.31. Ilustrasi \bar{F} memuat W_4

Asumsikan $|V(Q)| \neq 1$. Misalkan q_1 dan q_2 adalah titik-titik ujung dari lintasan Q . Karena $|V(F)| = 2n - 1$ dan lintasan terpanjang di F mempunyai paling banyak $n - 1$ titik maka ada sedikitnya satu titik $w \notin V(L) \cup V(Q)$ sedemikian sehingga w tidak bertetangga dengan semua titik-titik ujung p_1, p_2, q_1 dan q_2 . Dengan demikian, \bar{F} memuat W_4 dengan w sebagai porosnya dan himpunan $\{p_1, q_1, p_2, q_2\}$ sebagai rimnya. ■

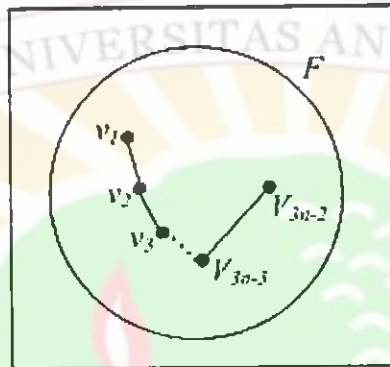


Gambar 2.5.32. Ilustrasi \bar{F} memuat W_4

Teorema 2.5.11. [6] $R(P_n, W_5) = 3n - 2$ untuk semua $n \geq 3$.

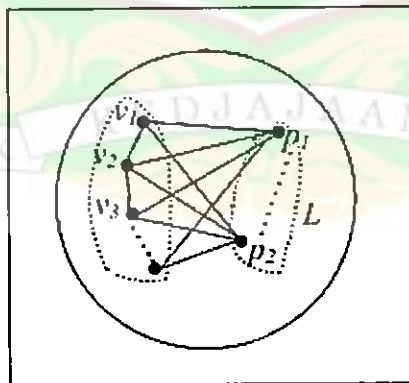
Bukti.

Misalkan graf F dengan orde $3n - 2$ dan tidak memuat lintasan P_n , lihat Gambar 2.5.33.



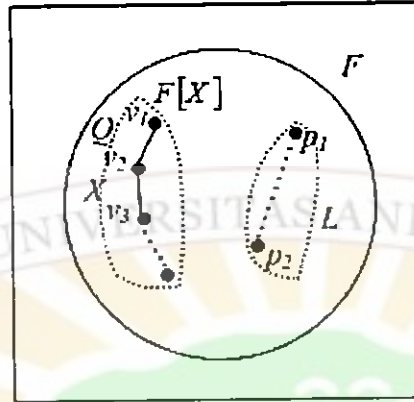
Gambar 2.5.33. Ilustrasi graf F tidak memuat lintasan P_n

Akan ditunjukkan \bar{F} memuat W_5 . Selanjutnya asumsikan $|V(L)| \neq 1$. Misalkan p_1 dan p_2 adalah titik-titik ujung dari L . Dalam hal ini $zp_1, zp_2 \notin E(F)$ untuk setiap $z \in V(F) \setminus V(L)$, lihat Gambar 2.5.34.



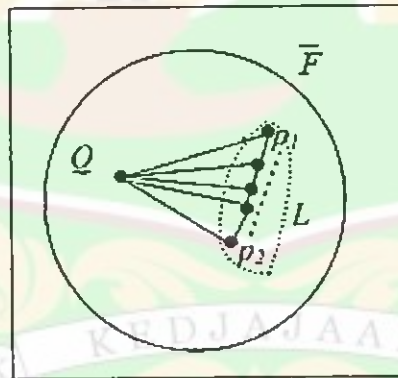
Gambar 2.5.34. Ilustrasi zp_1 dan zp_2 bukan anggota $E(F)$

Misalkan $X = V(F) \setminus V(L)$ dan Q adalah lintasan terpanjang dalam subgraf $F[X]$, lihat Gambar 2.5.35.



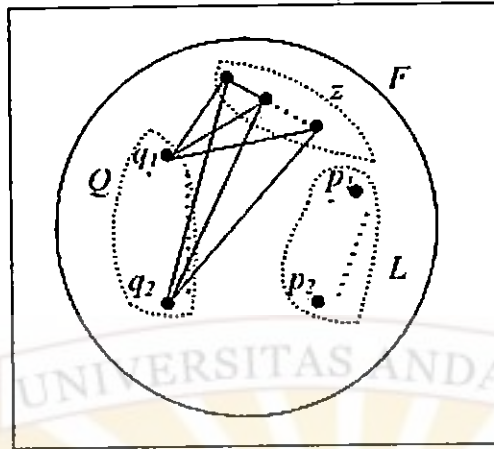
Gambar 2.5.35. Ilustrasi $X = V(F) \setminus V(L)$

Bila $|V(Q)| = 1$ maka X merupakan himpunan bebas di F dan akibatnya \bar{F} akan memuat W_5 , lihat Gambar 2.5.36.



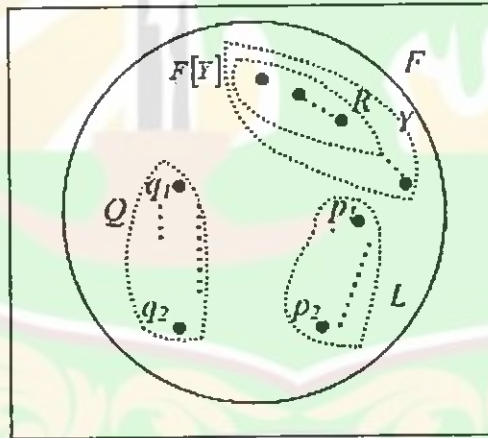
Gambar 2.5.36. Ilustrasi \bar{F} memuat W_5

Asumsikan $|V(Q)| \neq 1$. Misalkan q_1 dan q_2 adalah titik-titik ujung dari lintasan Q . Dalam hal ini $zq_1, zq_2 \notin E(F)$ untuk setiap $z \in V(F) \setminus (V(L) \cup V(Q))$, lihat Gambar 2.5.37.



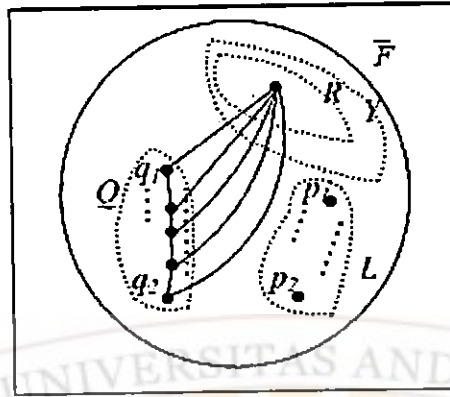
Gambar 2.5.37. Ilustrasi zq_1 dan zq_2 bukan anggota $E(F)$

Misalkan $Y = V(F) \setminus (V(L) \cup V(Q))$ dan R adalah lintasan terpanjang dalam subgraf $F[Y]$, lihat Gambar 2.5.38.



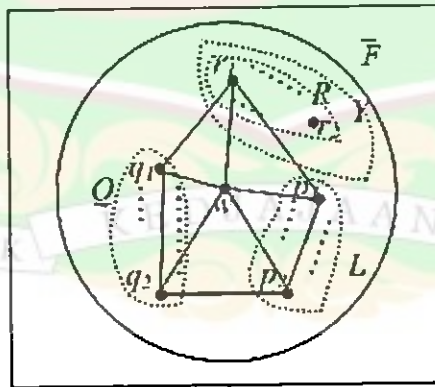
Gambar 2.5.38. Ilustrasi $Y = V(F) \setminus (V(L) \cup V(Q))$

Bila $|V(R)| = 1$ maka Y merupakan himpunan bebas di F , dan akibatnya \bar{F} memuat W_5 , lihat Gambar 2.5.39.



Gambar 2.5.39. Ilustrasi \bar{F} memuat W_5

Asumsikan $|V(R)| \neq 1$. Misalkan r_1 dan r_2 adalah titik-titik ujung dari lintasan R . Karena $|V(F)| = 3n - 2$ dan lintasan terpanjang dalam F mempunyai paling banyak $n - 1$ titik maka ada sedikitnya satu titik $w \notin (V(L) \cup V(Q) \cup V(R))$ sedemikian sehingga w tidak bertetangga dengan ke-enam titik-titik ujung tersebut. Dengan demikian, \bar{F} memuat W_5 dengan w sebagai porosnya dan $\{p_1, q_1, r_1, p_2, q_2\}$ sebagai rimnya, lihat Gambar 2.5.40. ■



Gambar 2.5.40. Ilustrasi \bar{F} memuat W_5

BAB III

BILANGAN RAMSEY UNTUK PASANGAN POHON DAN RODA DENGAN LIMA ATAU ENAM TITIK

Berikut adalah hasil utama dari kajian ini.

Dengan menggunakan lema 2.5.8 dan 2.5.9 akan ditunjukkan dua teorema berikut.

Teorema 3.0.1. *Misalkan $n \geq 4$ dan diberikan pohon T_n yang bukan S_n . Maka bilangan Ramsey graf $R(T_n, W_4) = 2n - 1$.*

Bukti.

Akan ditunjukkan dengan menggunakan induksi matematika. Untuk $n = 4$, dimana $T_4 \neq S_4$ hanya terdapat $T_4 = P_4$. Telah ditunjukkan pada Teorema 2.5.10 bahwa $R(P_n, W_4) = 2n - 1$ untuk $n \geq 3$. Asumsikan teorema 3.0.1 ini berlaku untuk $n < k$, yaitu $R(T_n, W_4) = 2n - 1$ untuk setiap pohon $T_n \neq S_n$. Misalkan T_k adalah pohon dengan k titik yang bukan merupakan bintang S_k . Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa $R(T_k, W_4) = 2k - 1$.

Misalkan terdapat graf F dengan orde $2k - 1$ yang tidak memuat pohon T_k tersebut. Akan ditunjukkan bahwa \bar{F} memuat W_4 . Andaikan \bar{F} tidak memuat W_4 . Jika B merupakan himpunan bebas terbesar di F maka $|B| \leq 4$. Karena jika $|B| > 4$ maka \bar{F} akan memuat W_4 dimana hal tersebut bertentangan dengan hipotesis di atas. Misalkan $Y = V(F) \setminus B$. Selanjutnya, perhatikan fakta berikut.

Fakta 1 : *Setiap titik di Y bertetangga dengan suatu titik di B .*

Jika tidak demikian, B bukan merupakan himpunan bebas terbesar di F .

Sekarang, akan ditinjau tiga kasus berikut.

Kasus 1 : $|B| \leq 2$.

Jika $|B| = 1$ maka F harus merupakan suatu graf lengkap dan hal ini berakibat F memuat T_k , ini suatu kontradiksi. Jika $|B| = 2$, maka menurut asumsi induksi, subgraf $F[Y]$ memuat semua pohon $T_{k-1} \neq S_{k-1}$ dengan $k - 1$ titik. Menurut Fakta 1, diperoleh $F \supseteq T_k$, hal ini kontradiksi dengan pernyataan $F \not\supseteq T_k$.

Kasus 2 : $|B| = 3$.

Misalkan $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Menurut asumsi induksi, subgraf induksi $F[Y]$ memuat semua pohon yang bukan bintang dengan orde $k-2$. Secara khusus, $F[Y]$ memuat sebuah pohon $T_{k-2} \subseteq T_k$, dimana T_{k-2} diperoleh dari pohon T_k tersebut di atas dengan cara menghapus dua daun f dan g di T_k yang tidak bertetangga dengan suatu titik yang sama di B . Misalkan $C_0 = V(T_{k-2})$. Misalkan pula terdapat titik v_0 dan titik v_1 di C_0 sedemikian sehingga fv_0 dan gv_1 merupakan sisi-sisi di $E(T_k)$. Menurut Fakta 1, terdapat titik b di B sedemikian sehingga $v_0b, v_1b \in E(F)$, jika tidak demikian, F akan memuat pohon T_k . Katakanlah $b = b_1$. Akibatnya subgraf yang diinduksi oleh himpunan $\{b_1\} \cup C_0$ akan memuat pohon T_{k-1} di F . Misalkan $\mathcal{D} = Y \setminus C_0$. Jelas bahwa $|\mathcal{D}| = k - 2$. Selanjutnya perhatikan dua fakta berikut.

Fakta 2 : *Tidak ada titik di \mathcal{D} sebagai tetangga dari titik v_i untuk setiap $i = 0, 1$.*

Jika tidak demikian, F akan memuat pohon T_k .

Fakta 3 : *Setiap titik di \mathcal{D} bertetangga dengan titik $b_j \in B$ untuk setiap $j = 2, 3$.*

Jika tidak demikian, komplemen dari subgraf yang diinduksi oleh $\mathcal{D} \cup \{b_2, b_3, v_0, v_1\}$ akan memuat W_4 , hal ini kontradiksi dengan pernyataan $\bar{F} \not\subseteq W_4$.

Misalkan $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D} \cup \{b_2, b_3\}$. Jelas bahwa $|\mathcal{D}_0| = k$. Akibatnya diperoleh $|N_{\mathcal{D}}(u)| \geq k - 4$ untuk setiap $u \in \mathcal{D}$, karena \bar{F} tidak memuat roda W_4 .

Selanjutnya jika k **genap**, maka subgraf $F[\mathcal{D}_0]$ yang diinduksi oleh \mathcal{D}_0 memuat graf $H_{\frac{k}{2}}$. Akibatnya, menurut Lema 2.5.9, $F[\mathcal{D}_0]$ akan memuat pohon T_k . Hal ini kontradiksi dengan pernyataan $F \not\subseteq T_k$.

Jika k **ganjil**, maka subgraf $F[\mathcal{D}_0]$ akan memuat $H_{\frac{k-1}{2}} + K_1$. Menurut Lema 2.5.8, $F[\mathcal{D}_0]$ memuat pohon T_k . Hal ini kontradiksi dengan pernyataan $F \not\subseteq T_k$.

Kasus 3 : $|B| = 4$.

Misalkan $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Dalam kasus ini, $|Y| = 2(k - 2) - 1$. Menurut asumsi induksi, subgraf $F[Y]$ akan memuat pohon $T_{k-2} \subset T_k$. Misalkan pula $\mathcal{L}_0 = V(T_{k-2})$. Karena $\bar{F} \not\subseteq W_4$, maka untuk setiap $x \in \mathcal{L}_0$ harus bertetangga dengan sedikitnya dua titik di B . Dengan demikian, subgraf $F[\mathcal{L}_0 \cup B]$ memuat pohon T_k . Hal ini kontradiksi dengan pernyataan $F \not\subseteq T_k$. ■

Contoh 3.0.3.

Untuk $n = 8$. Akan ditunjukkan $R(T_8, W_4) = 2(8) - 1 = 15$.

Misalkan T_8 adalah pohon dengan 8 titik yang bukan bintang S_8 .

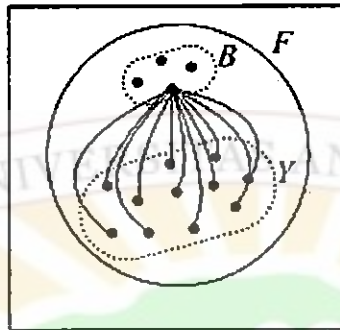
Misal F adalah $(T_8, W_4, 14)$ -graf elok. $F \not\subseteq T_8, \bar{F} \not\subseteq W_4$ dan $|F| = 14$

Jika B merupakan himpunan bebas terbesar di F maka $|B| \leq 4$.

Misalkan $Y = V(F) \setminus B$. Selanjutnya perhatikan fakta berikut.

Fakta 1 : *Setiap titik di Y bertetangga dengan suatu titik di B .*

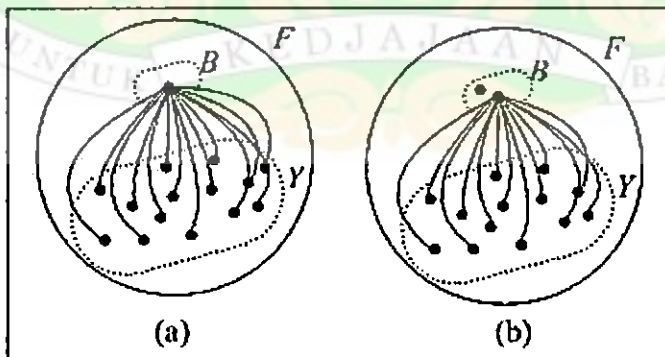
Jika tidak demikian, B bukan merupakan himpunan bebas terbesar di F . Lihat Gambar berikut.



Gambar 3.0.1. Ilustrasi untuk Fakta 1

Sekarang, akan ditinjau tiga kasus berikut.

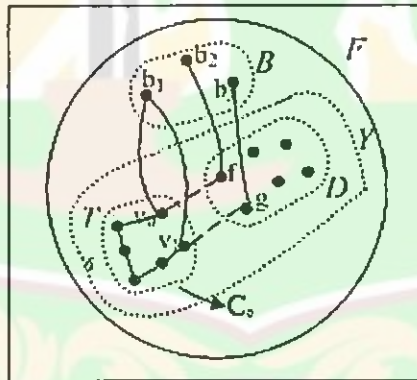
Kasus 1 : $|B| \leq 2$. Jika $|B| = 1$ maka F harus merupakan suatu graf lengkap dan hal ini berakibat F memuat T_8 , ini merupakan suatu kontradiksi. Jika $|B| = 2$, maka menurut asumsi induksi subgraf $F[Y]$ memuat semua pohon T_7 dengan 7 titik. Menurut Fakta 1 diperoleh $F \supseteq T_8$. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan $F \not\supseteq T_8$, lihat Gambar 3.0.2.



Gambar 3.0.2. (a) Ilustrasi untuk $|B| = 1$ dan (b) $|B| = 2$

Kasus 2 : $|B| = 3$.

Misalkan $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Menurut asumsi induksi, subgraf induksi $F[Y]$ memuat semua pohon yang bukan bintang dengan orde 6. Secara khusus, $F[Y]$ memuat $T_6 \subseteq T_8$, dimana T_6 diperoleh dari pohon T_8 tersebut dengan cara menghapus dua daun f dan g di T_8 yang tidak bertetangga dengan suatu titik yang sama di B . Misalkan $C_0 = V(T_6)$. Misalkan pula titik v_0 dan titik v_1 di C_0 sedemikian sehingga fv_0 dan gv_1 merupakan sisi-sisi di $E(T_8)$. Menurut Fakta 1, terdapat titik b di B sedemikian sehingga $v_0b, v_1b \in E(F)$, jika tidak demikian, F akan memuat pohon T_8 . Katakanlah $b = b_1$. Akibatnya subgraf yang diinduksi oleh himpunan $\{b_1\} \cup C_0$ akan memuat pohon T_7 di F . Misalkan $D = Y \setminus C_0$. Jelas bahwa $|D| = 6$. Lihat Gambar 3.0.3.

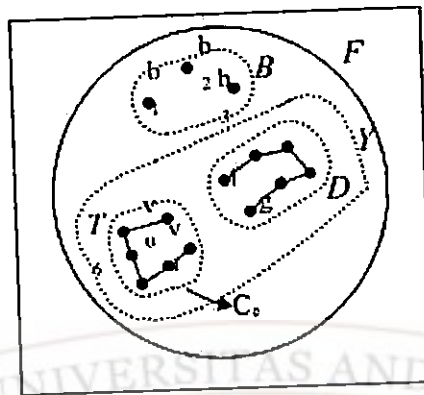


Gambar 3.0.3. Ilustrasi untuk Kasus 2

Selanjutnya perhatikan dua fakta berikut.

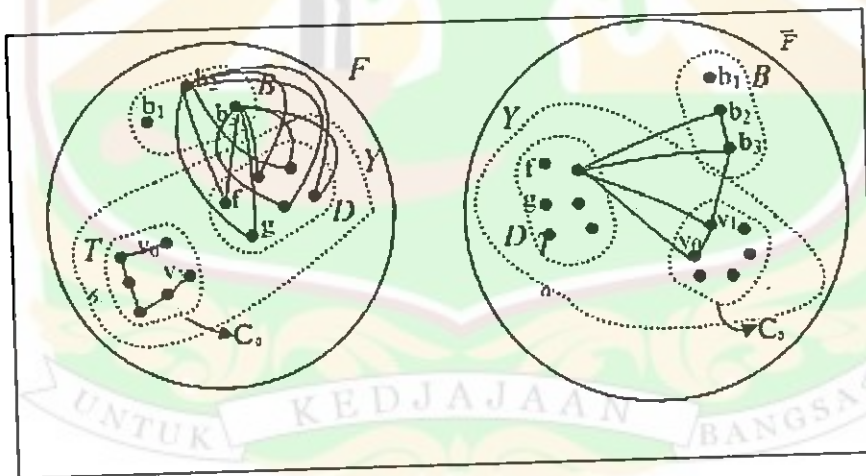
Fakta 2 : Tidak ada titik di D sebagai tetangga dari titik v_i untuk setiap $i = 0, 1$.

Jika tidak demikian, F akan memuat pohon T_8 , lihat Gambar 3.0.4.



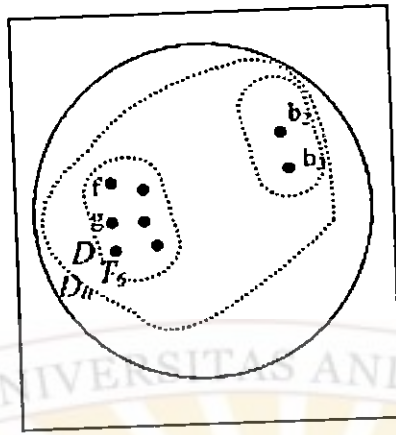
Gambar 3.0.4. Ilustrasi untuk Fakta 2

Fakta 3 : *Setiap titik di D bertetangga dengan titik $b_j \in B$ untuk setiap $j = 2, 3$. Jika tidak demikian, komplement dari subgraf yang diinduksi oleh $\mathcal{D} \cup \{b_2, b_3, v_0, v_1\}$ akan memuat W_4 , hal ini kontradiksi dengan pernyataan $\bar{F} \not\supseteq W_4$, lihat Gambar 3.0.5.*



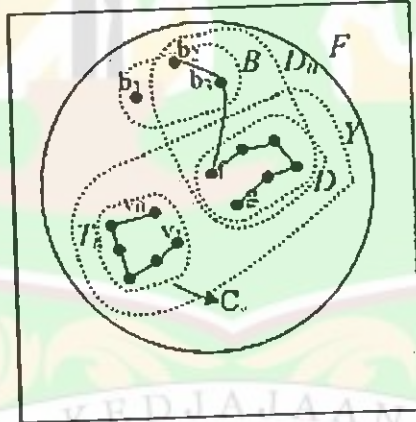
Gambar 3.0.5. Ilustrasi untuk Fakta 3

Misalkan $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D} \cup \{b_2, b_3\}$. Jelas bahwa $|\mathcal{D}_0| = 8$. Akibatnya diperoleh $|N_{\mathcal{D}}(u)| \geq 4$ untuk setiap $u \in D$, karena \bar{F} tidak memuat roda W_4 , lihat gambar 3.0.6.



Gambar 3.0.6. Ilustrasi $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D} \cup \{b_2, b_3\}$

Maka subgraf $F[\mathcal{D}_0]$ yang diinduksi oleh \mathcal{D}_0 memuat graf H_4 . Akibatnya, menurut Lema 2.5.9, $F[\mathcal{D}_0]$ akan memuat pohon T_8 . Hal ini kontradiksi dengan pernyataan $F \not\supseteq T_8$, lihat Gambar 3.0.7.

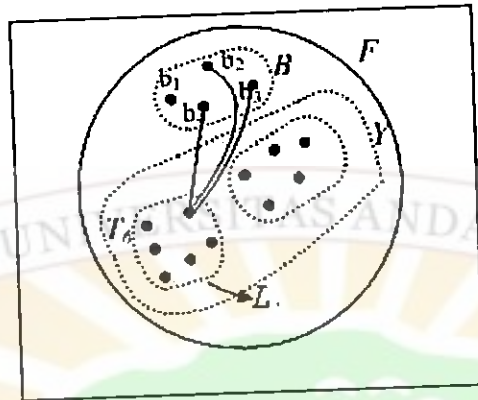


Gambar 3.0.7. Ilustrasi $F[\mathcal{D}_0]$ memuat T_8

Kasus 3 : $|B| = 4$.

Misalkan $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Dalam kasus ini, $|Y| = 11$. Menurut asumsi induksi, subgraf $F[Y]$ akan memuat pohon $T_6 \subseteq T_8$. Misalkan pula $\mathcal{L}_0 = V(T_6)$. Karena $\bar{F} \not\supseteq W_4$, untuk setiap $x \in \mathcal{L}_0$ harus bertetangga dengan sedikitnya dua titik di

B. Dengan demikian, subgraf $F[\mathcal{L}_0 \cup B]$ memuat pohon T_8 . Hal ini kontradiksi dengan pernyataan $F \not\supseteq T_8$, lihat Gambar 3.0.8.



Gambar 3.0.8. Ilustrasi untuk Kasus 3

Teorema 3.0.2. Misalkan $n \geq 3$ dan diberikan pohon T_n yang bukan S_n . Maka bilangan Ramsey graf $R(T_n, W_5) = 3n - 2$.

Bukti.

Akan ditunjukkan dengan menggunakan induksi matematika. Untuk $n = 3$, pohon $T_3 = P_3$ dan teorema ini benar menurut Teorema 2.5.11. Asumsikan teorema ini benar untuk $n < k$, yaitu $R(T_n, W_5) = 3n - 2$. Akan ditunjukkan bahwa $R(T_k, W_5) = 3k - 2$. Misalkan graf F dengan orde $3k - 2$ dan tidak memuat suatu pohon $T_k \neq S_k$. Akan ditunjukkan \bar{F} memuat W_5 . Andaikan \bar{F} tidak memuat W_5 . Menurut asumsi induksi, F akan memuat semua pohon dengan $k - 1$ titik. Secara khusus, F memuat pohon $T_{k-1} \subseteq T_k$ dimana T_{k-1} diperoleh dengan menghapus satu daun v pada pohon T_k tersebut. Misalkan $\mathcal{B}_0 = V(T_{k-1})$ dan $X = V(F) \setminus \mathcal{B}_0$. Jelas, $|X| = (3k - 2) - (k - 1) = 2k - 1$. Selanjutnya, menurut Teorema 3.0.1, subgraf $F[X]$ memuat semua pohon $T_k \neq S_k$

atau $\overline{F[x]}$ memuat roda W_4 . Jika $\overline{F[x]}$ memuat roda W_4 maka W_4 dan v akan membentuk roda W_5 di \overline{F} . Hal ini kontradiksi dengan pernyataan $\overline{F} \not\subseteq W_5$. ■

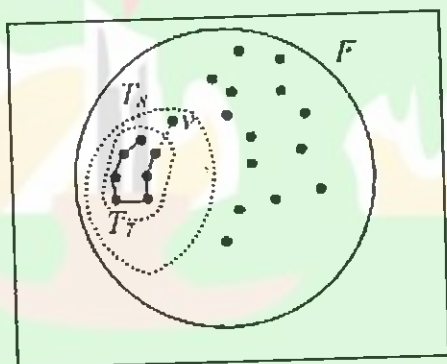
Contoh 3.0.4.

Untuk $n = 8$. Akan ditunjukkan $R(T_8, W_5) = 3(8) - 2 = 22$.

Misalkan T_8 adalah pohon dengan 8 titik yang bukan bintang S_8 .

Misal F adalah $(T_8, W_5, 21)$ -graf elok. $F \not\subseteq T_8, \overline{F} \not\subseteq W_5$ dan $|F| = 21$

F akan memuat semua pohon dengan tujuh titik. Secara khusus, F memuat pohon $T_7 \subseteq T_8$ dimana T_7 diperoleh dengan menghapus satu daun v pada pohon T_8 tersebut. Lihat Gambar 3.0.9 berikut.



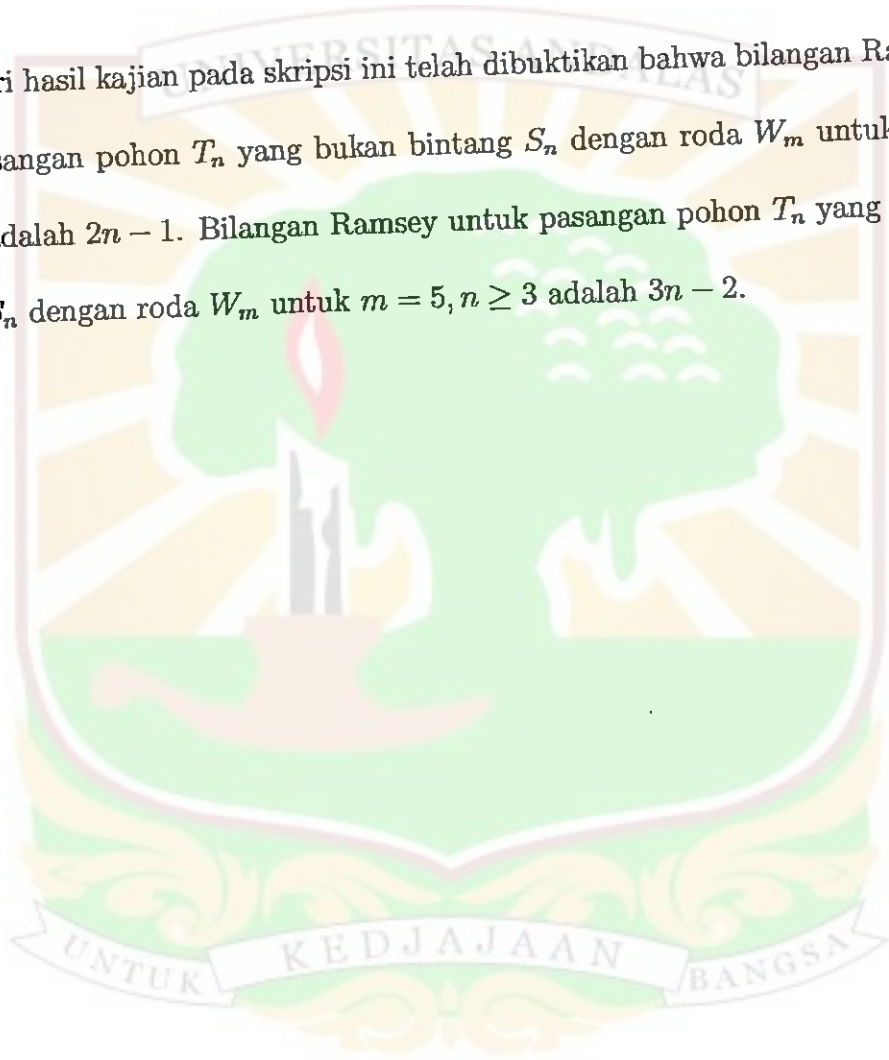
Gambar 3.0.9. Ilustrasi graf F memuat pohon T_7

Misalkan $B_0 = V(T_7)$ dan $X = V(F) \setminus B_0$. Jelas, $|X| = (3(8) - 2) - (8 - 1) = 2(8) - 1 = 15$. Lihat Gambar 3.0.10.

BAB IV

KESIMPULAN

Dari hasil kajian pada skripsi ini telah dibuktikan bahwa bilangan Ramsey untuk pasangan pohon T_n yang bukan bintang S_n dengan roda W_m untuk $m = 4, n \geq 4$ adalah $2n - 1$. Bilangan Ramsey untuk pasangan pohon T_n yang bukan bintang S_n dengan roda W_m untuk $m = 5, n \geq 3$ adalah $3n - 2$.



DAFTAR PUSTAKA

- [1] Baskoro, E.T, dkk. 2002. *On Ramsey Number for Trees versus wheels of five or six vertices*. Graph and Combinatorics. 4 : 717 -721.
- [2] Chartrand, G. and Ping Zhang. 2005. *Introduction to Graph Theory*. McGraw-Hill Press, Singapore.
- [3] Hasmawati. 2007. *Bilangan Ramsey untuk graf gabungan bintang*. ITB Bandung. *Disertasi-S3*. Tidak diterbitkan.
- [4] Radziszowski, S. P. 2009. *Small Ramsey Number*. Electron J. Combin. DS1.12
- [5] Surahmat dan E.T. Baskoro. 2001. *On the Ramsey number of a path or a star versus W_4 or W_5* . *Proceedings of the 12-th Australian Workshop on Combinatorial Algorithms*. Bandung. 165-170.
- [6] Surahmat. 2003. *Bilangan Ramsey untuk graf Roda*. ITB Bandung. *Disertasi-S3*. Tidak diterbitkan.

RIWAYAT HIDUP PENULIS



Penulis bernama Berkah Fajar, dilahirkan di Padang pada tanggal 11 Maret 1986 dari pasangan Muhammad Nur Rauf dan Eliwati. Penulis adalah anak kelima dari lima bersaudara. Penulis menamatkan pendidikan Sekolah Dasar di SD Negeri 23 Marapalam pada tahun 1999, SLTP Negeri 8 Padang pada tahun 2002, dan SMA Negeri 10 Padang pada tahun 2005. Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur Seleksi Penerimaan Mahasiswa Baru (SPMB). Pada tahun 2008, penulis melaksanakan Praktek Kerja Lapangan (PKL) di Badan Pusat Statistik Kota Padang dalam rangka menyelesaikan salah satu mata kuliah wajib fakultas. Selama menjadi mahasiswa di Jurusan Matematika FMIPA UNAND, penulis aktif dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) FMIPA UNAND. Penulis pernah menjabat sebagai Ketua Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) FMIPA UNAND periode 2008-2009.

UNTUK KEDJAJAAN BANGSA