PELABELAN TOTAL (a,d)- SISI ANTIAJAIB SUPER PADA GRAF PERTEMANAN Fn

SKRIPSI

APRINALDI ANTONI
07934018

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2012

KATA PENGANTAR

Syukur Alhamdulillah, puji syukur penulis sampaikan kehadirat Allah SWT karena berkat ridho dan izin-Nya jualah penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul ***"Pelabelan Total (a, d)-Sisi Antiajaib Super Pada Graf Pertemanan F_n"***. Salawat dan salam tidak lupa penulis kirimkan kepada Nabi Muhammad SAW beserta keluarganya, sahabatnya, dan orang-orang yang mengikuti sunnahnya. Skripsi ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Keluarga tercinta, Ayah, Ibu dan Adik yang selalu mendoakan dan senantiasa memberikan dukungan kepada penulis.

2. Bapak Dr. Syafrizal Sy selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang.

3. Bapak Ir. Werman Kasoep, M.Kom selaku Pembimbing Akademik yang telah membantu penulis dalam urusan akademik terutama dalam merancang studi agar dapat selesai tepat pada waktunya. Serta nasihat dan ilmu yang telah diberikan selama penulis menjalani perkuliahan.

4. Ibu Dr. Lyra Yulianti selaku Pembimbing yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini, dan untuk ilmu, saran, dan nasihat yang diberikan selama proses bimbingan tugas akhir.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1735 oleh seorang matematikawan terkenal Swiss yang bernama Leonhard Euler. Teori graf pertama kali muncul sebagai representasi permasalahan Jembatan Konigsberg. Terdapat tujuh jembatan yang berada di atas sungai Pregel di kota Konigsberg, salah satu kota yang terletak di Prusia bagian Timur Jerman. Permasalahan yang timbul adalah bagaimana cara seseorang berpindah dari satu tempat ke tempat lain dengan melewati setiap jembatan tepat satu kali. Kemudian Leonhard Euler memodelkan permasalahan tersebut ke dalam model matematika berupa bagan yang terdiri dari titik dan garis. Titik mempresentasikan kota yang dihubungkan jembatan dan garis sebagai jembatan yang menghubungkan kota. Model ini kemudian dikenal sebagai teori graf.

Permasalahan pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedlacek (1964), kemudian dikembangkan oleh Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Pelabelan graf merupakan salah satu topik teori graf yang banyak mendapatkan apresiasi perhatian dari matematikawan dan matematikawati di seluruh dunia. Pemanfaatan model-model pada pelabelan graf sangat berguna untuk aplikasi yang luas dan sangat besar peranannya yang bisa dirasakan. Beberapa di antaranya adalah dalam masalah koding, kristologi sinar-x, radar, system alamat jaringan komunikasi, navigasi geografis dan desain sirkuit.

Pelabelan graf merupakan suatu pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf ke himpunan bilangan bulat positif. Elemen-elemen graf itu sendiri meliputi himpunan titik himpunan sisi, dan himpunan titik dan sisi. Pelabelan titik adalah pelabelan graf dimana domainnya merupakan himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan graf dimana domainnya merupakan himpunan sisi, sedangkan pelabelan total adalah pelabelan graf dimana domainnya merupakan gabungan himpunan titik dan sisi.

Misalkan terdapat graf $G = (V, E)$, dimana titik $u, v \in V(G)$ dan $e \in E(G)$. Misalkan $e = uv \in E(G)$, maka bobot sisi e terhadap suatu pelabelan adalah jumlah dari label yang diberikan kepada sisi e dengan label titik u dan label titik v.

Suatu graf dikatakan sebagai graf dengan pelabelan ajaib jika graf tersebut mempunyai bobot titik atau bobot sisi yang sama. Akan tetapi, jika graf tersebut memiliki bobot titik atau bobot sisi yang berbeda, maka graf tersebut dikatakan sebagai graf dengan pelabelan antiajaib.

Misalkan $|V(G)| = p$ adalah banyaknya titik dalam graf G, sementara $|E(G)| = q$ menunjukkan banyaknya sisi dalam graf G tersebut. Jika semua sisi memiliki bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi membentuk barisan aritmatika $\{a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (q - 1)d\}$, dimana a adalah suku pertama, dan d adalah beda, maka pelabelan tersebut dinamakan pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah bagaimana memberikan pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super pada suatu graf.

1.3 Pembatasan Masalah

Dalam penulisan ini permasalahan dibatasi pada bagaimana memberikan pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super pada graf pertemanan F_n.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan ini adalah untuk mengkaji pelabelan total sisi antiajaib, serta menentukan pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super pada graf pertemanan F_n untuk $n \geq 1$.

1.5 Sistematika Penulisan

Tugas Akhir ini dibagi menjadi empat bab. Bab I menguraikan tentang latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan. Bab II berisi teori-teori dan definisi yang mendukung pembahasan dalam permasalahan yang akan dibahas.

Pembahasan dari permasalahan di atas akan penulis uraikan dan sajikan dalam Bab III, yaitu mengenai pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super pada graf pertemanan F_n. Selain itu pada Bab III ini juga akan disajikan beberapa teorema pendukung untuk membantu proses pembuktian. Sedangkan untuk kesimpulan dan saran disajikan dalam bab terakhir yaitu bab IV atau Bab Penutup.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada Bab II ini diuraikan beberapa kajian dasar yang digunakan untuk membantu menyelesaikan permasalahan pemberian suatu pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super pada graf pertemanan F_n, untuk setiap $n \geq 1$. Kajian dasar tersebut berupa definisi dan terminologi yang diuraikan pada Subbab 2.1. Selanjutnya, Subbab 2.2 menjelaskan tentang jenis-jenis graf F_n, sementara Subbab 2.3 menjelaskan graf pertemanan, dan Subbab 2.4 menjelaskan tentang pelabelan graf.

2.1 Definisi dan Terminologi Graf

Suatu graf $G = (V, E)$ adalah pasangan himpunan V yang merupakan himpunan tidak kosong berisikan titik-titik (*vertex*), dan himpunan E yang merupakan himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan titik-titik di V. Pasangan titik dan sisi tersebut dapat ditulis dengan notasi $G = (V, E)$. Elemen-elemen dari V disebut **titik** dari G dan elemen-elemen dari E disebut **sisi** dari G.

Titik (Vertex) digunakan untuk melambangkan objek, sedangkan **sisi** (**Edge**) digunakan untuk melambangkan jalan penghubung antara dua objek.

Definisi graf menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi titiknya harus ada minimal satu. Graf dengan satu titik dan tidak mempunyai sisi disebut **graf trivial**.

Sebuah sisi dinamakan **loop** jika sisi tersebut menghubungkan suatu titik dengan titik itu sendiri, sebuah sisi dinamakan **sisi ganda** jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik yang sama.

Gambar 2.1.1. Graf sederhana, graf dengan sisi ganda dan graf dengan loop

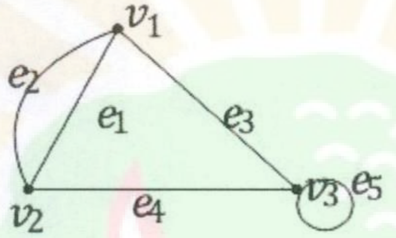
Pada Gambar 2.1.1, G_1 adalah graf dengan $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G_1) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, sementara G_2 adalah graf dengan $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G_2) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Selanjutnya, G_3 adalah graf dengan $V(G_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G_3) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$.

Pada G_2, sisi $e_3 = v_1v_3$ dan sisi $e_4 = v_1v_3$ dinamakan **sisi-ganda** (***multiple edges*** atau ***paralel edges***) karena kedua sisi ini menghubungkan dua buah titik yang sama, yaitu titik v_1 dan simpul v_3.

Pada G_3, sisi $e_8 = v_3v_3$ dinamakan **loop** karena sisi tersebut berawal dan berakhir pada titik yang sama.

Suatu barisan yang terdiri dari titik-titik dan sisi-sisi bergantian dinamakan

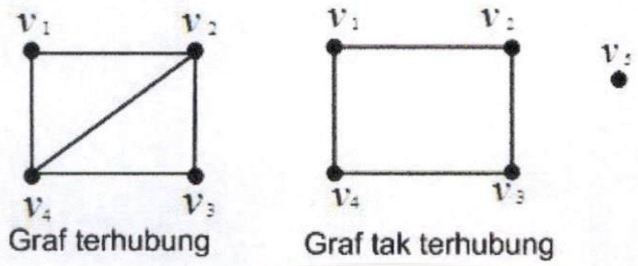
jalan (***walk***). Suatu jalan yang setiap sisi yang dilewatinya berbeda dinamakan **jejak** (***trail***). Jika semua titik yang dilewati pada suatu jejak berbeda, maka jejak tersebut dinamakan **lintasan** (***path***). Sementara **siklus** (***cycle***) adalah suatu lintasan yang melewati titik-titik yang berbeda, akan tetapi diawali dan diakhiri pada titik yang sama.



Gambar 2.1.2. Jalan, jejak, lintasan dan siklus

Pada Gambar 2.1.2, salah satu **walk** pada graf tersebut adalah v_1, e_1, v_2, e_2, v_1. Salah satu **trail** pada graf tersebut adalah v_3, e_5, v_3, e_3, v_1. Salah satu **path** pada graf tersebut adalah v_1, e_1, v_2, e_4, v_3. Sementara salah satu **siklus** dari graf tersebut adalah $v_1, e_1, v_2, e_4, v_3, e_3, v_1$.

Pada dasarnya graf dibedakan menjadi dua yaitu **Graf terhubung** (*Connected Graph*) dan graf tak terhubung (*Disconnected Graph*). Graf terhubung adalah graf dengan sifat bahwa untuk setiap pasangan titik v_i dan v_j di dalam V, terdapat lintasan dari v_i ke v_j. Sementara graf tak terhubung adalah graf dengan sifat bahwa terdapat satu atau lebih pasangan titik v_i dan v_j di dalam V, dimana tidak terdapat lintasan di titik v_i dan v_j.



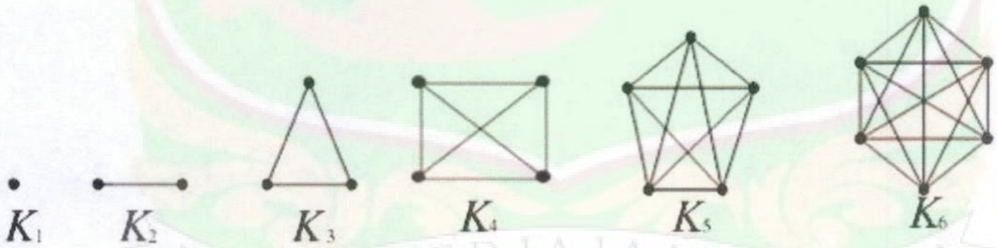
Gambar 2.1.3. Graf terhubung dan graf tak terhubung

2.2 Jenis-jenis Graf

Terdapat beberapa jenis-jenis graf, yaitu:

1. **Graf Lengkap**

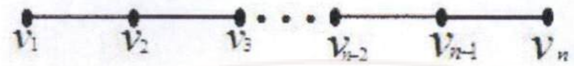
   Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap titiknya mempunyai sisi ke semua titik lainnya. Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n. Pada Gambar 2.2.4 diberikan contoh graf lengkap K_n untuk $1 \leq n \leq 6$.



Gambar 2.2.4. Graf Lengkap $K_n, 1 \leq n \leq 6$

2. **Graf Lintasan**

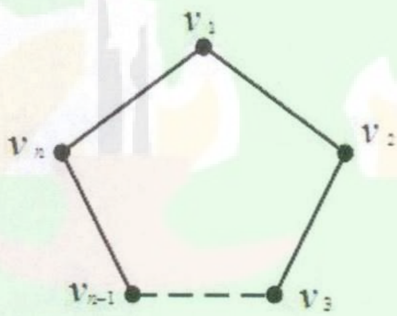
Graf lintasan adalah graf dengan dua titik ujung berderajat satu dan $n-2$ titik berderajat dua. Graf lintasan dengan n titik dilambangkan dengan P_n.



Gambar 2.2.5. Graf Lintasan P_n

3. **Graf Siklus**

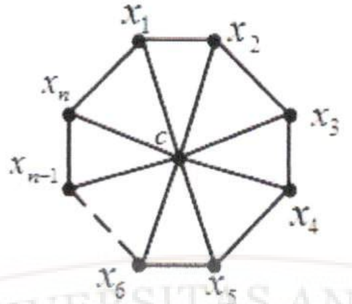
Graf siklus adalah graf terhubung yang setiap titiknya berderajat dua. Graf siklus dengan n titik dilambangkan dengan C_n.



Gambar 2.2.6. Graf Siklus C_n

4. **Graf Roda**

Graf roda adalah graf siklus yang setiap titiknya dihubungkan dengan titik tengah lingkaran, graf roda dilambangkan dengan W_n.



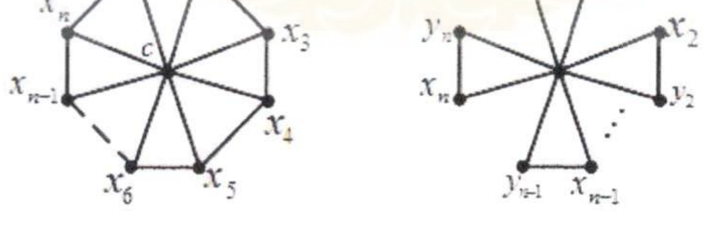
Gambar 2.2.7. Graf Roda W_n

2.3 Graf Pertemanan F_n

Graf Pertemanan F_n adalah graf terhubung yang berasal dari graf roda yang diperoleh dengan menghilangkan sisi bagian luar dengan ketentuan sisi luar yang tersisa tidak terhubung dengan sisi luar lainnya. Graf F_n mempunyai himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut :

$V(F_n) = \{c\} \cup \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i \mid 1 \leq i \leq n\}$

$E(F_n) = \{cx_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{cy_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_iy_i \mid 1 \leq i \leq n\}$



Gambar 2.3.8. Graf Pertemanan F_n

BAB III

PELABELAN TOTAL (a,d)-SISI ANTIAJAIB SUPER PADA GRAF PERTEMANAN F_n

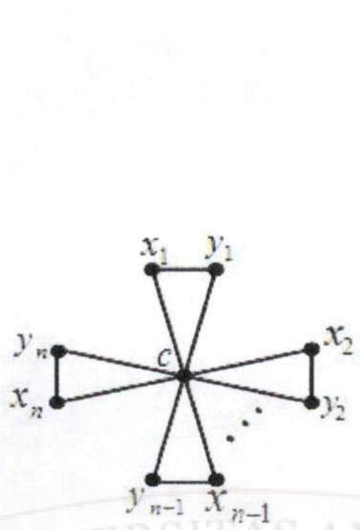
Pada Subbab 3.1 akan diberikan syarat perlu bagi F_n agar mempunyai pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super, pada Subbab akan diberikan syarat perlu bagi F_n agar mempunyai pelabelan titik $(a, 1)$-sisi antiajaib dan pada Subbab 3.3 akan ditunjukkan bahwa F_n mempunyai pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super untuk $d \in \{0, 1, 2\}$.

3.1 Syarat Perlu

Pada Subbab 3.1 ini diberikan syarat perlu bagi F_n agar mempunyai pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super.

Teorema 3.1.1. *Untuk $n \geq 1$, jika Graf Pertemanan F_n memiliki pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super, maka $d < 3$.*

Bukti. Diketahui bahwa jumlah semua titik pada graf F_n adalah $|V(F_n)| = 1+2n$ dan jumlah semua sisi pada graf F_n adalah $|E(F_n)| = 3n$ (Gambar 3.1.1).



Gambar 3.1.1. Graf pertemanan F_n

Misalkan f adalah suatu pemetaan dan F_n mempunyai pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib, maka:

$$f : V(F_n) \cup E(F_n) \rightarrow \{1, 2, \ldots, |V| + |E|\}$$

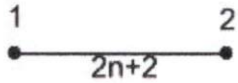
$$f : V(F_n) \cup E(F_n) \rightarrow \{1, 2, \ldots, 5n + 1\}.$$

Karena f adalah pelabelan super, maka haruslah

$$f : V(F_n) \rightarrow \{1, 2, \ldots, 1 + 2n\}, \text{ dan}$$

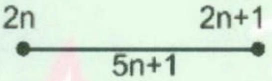
$$f : E(F_n) \rightarrow \{2n + 2, 2n + 3, \ldots, 5n + 1\}.$$

Bobot sisi dari graf pertemanan F_n dapat ditulis sebagai $W = \{a, a + d, \ldots, a + (3n - 1)d\}$ dengan bobot minimumnya adalah $2n + 5$. Seperti yang terlihat pada Gambar 3.1.2, dimana titik u dan v adalah dua buah label titik dengan label terkecil yaitu masing-masing 1 dan 2, dan sisi uv dilabeli dengan label sisi terkecil $2n + 2$.



Gambar 3.1.2. Bobot minimum

Bobot maksimum pada pelabelan tersebut adalah $9n + 2$. Seperti yang terlihat pada Gambar 3.1.3, titik u dilabeli dengan $2n$, titik v dilabeli dengan $2n + 1$ yang merupakan label titik terbesar dan sisiuv dilabeli dengan label sisi terbesar $5n + 1$.



Gambar 3.1.3. Bobot Maksimum

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} a + (3n - 1)d &< 9n + 2 \\ (3n - 1)d &< 9n + 2 - a \\ d &< \frac{(9n + 2 - a)}{3n - 1} \end{aligned}$$

Karena bobot minimum sebesar $2n + 5$ dan bobot maksimum sebesar $9n + 2$, maka berlaku hubungan berikut

$$\begin{aligned} d &< \frac{(9n + 2 - a)}{3n - 1} \\ d &< \frac{(9n + 2 - (2n + 5))}{3n - 1} \\ d &< \frac{(7n - 3)}{3n - 1}. \end{aligned}$$

Sehingga untuk $n \geq 1$, haruslah $d < 3$. □

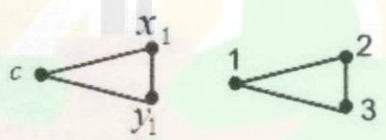
3.2 Pelabelan titik (a, d)-sisi antiajaib super pada graf F_n

Pada Subbab 3.2 akan diberikan syarat perlu bagi F_n agar mempunyai pelabelan titik $(a, 1)$-sisi antiajaib.

Lema 3.2.2. *Graf pertemanan F_n mempunyai pelabelan titik $(a, 1)$-sisi antiajaib jika dan hanya jika $n \in \{1, 3, 4, 5, 7\}$.*

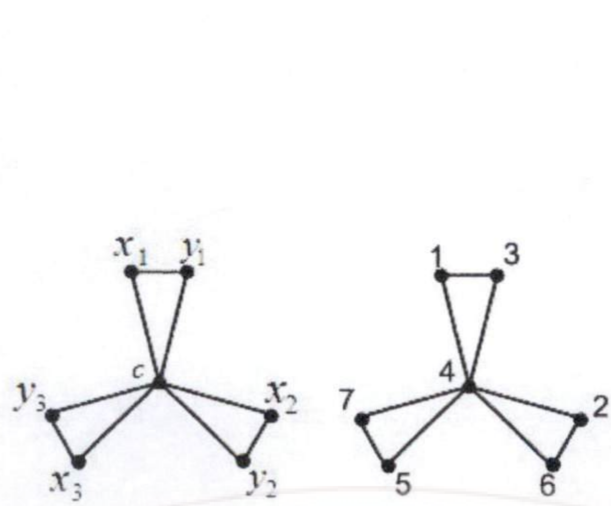
Bukti. ($\Leftarrow$) Misalkan $n \in \{1, 3, 4, 5, 7\}$, akan ditunjukkan F_n mempunyai pelabelan titik $(a, 1)$-sisi antiajaib dengan himpunan label titik $V(F_n) = \{1, 2, \ldots, 2n+1\}$ dan himpunan label sisi $E(F_n) = \{2n+2, 2n+3, \ldots, 5n+1\}$.

- Untuk $n = 1$, F_n mempunyai pelabelan titik $(a, 1)$-sisi antiajaib. Dapat dilihat pada Gambar 3.2.4 berikut:



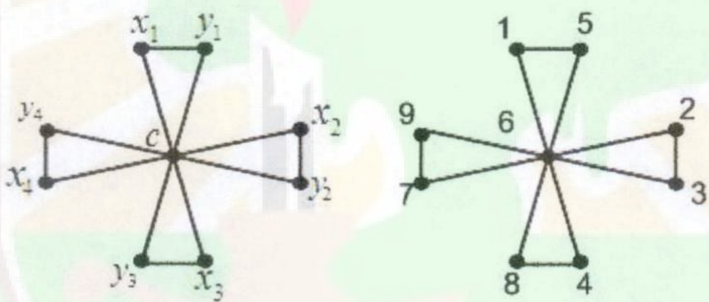
Gambar 3.2.4. Pelabelan titik pada F_1

- Untuk $n = 3$, F_n mempunyai pelabelan titik $(a, 1)$-sisi antiajaib. Dapat dilihat pada Gambar 3.2.5 berikut:



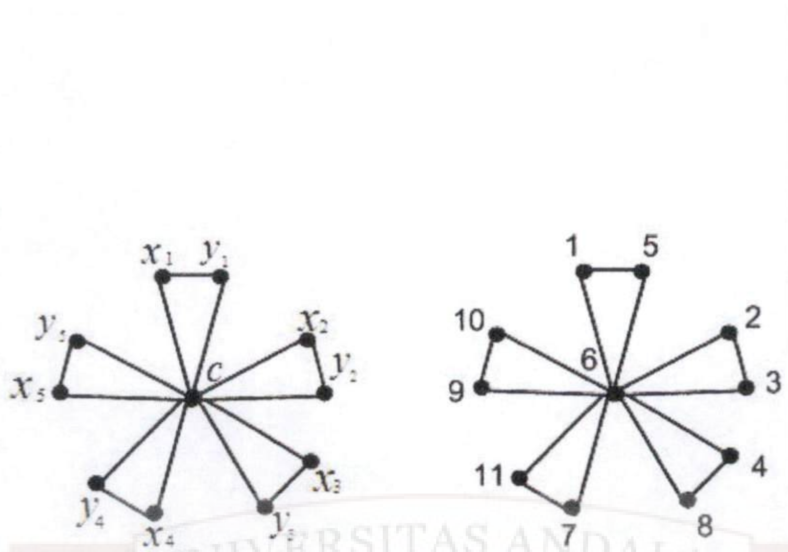
Gambar 3.2.5. Pelabelan titik pada F_3

- Untuk $n = 4$, F_n mempunyai pelabelan titik $(a, 1)$-sisi antiajaib. Dapat dilihat pada Gambar 3.2.6 berikut:



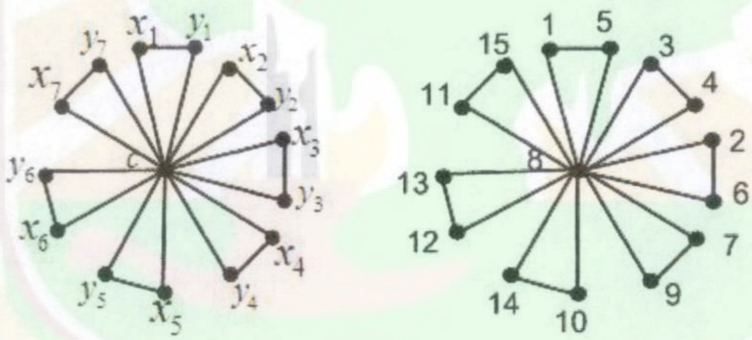
Gambar 3.2.6. Pelabelan titik pada F_4

- Untuk $n = 5$, F_n mempunyai pelabelan titik $(a, 1)$-sisi antiajaib. Dapat dilihat pada Gambar 3.2.7 berikut:



Gambar 3.2.7. Pelabelan titik pada F_5

- Untuk $n = 7$, F_n mempunyai pelabelan titik $(a, 1)$-sisi antiajaib. Dapat dilihat pada Gambar 3.2.8 berikut:



Gambar 3.2.8. Pelabelan titik pada F_7

($\Rightarrow$) Misalkan diberikan suatu pelabelan terhadap titik-titik F_n $g : V(F_n) \rightarrow \{1, 2, \ldots, 2n+1\}$ dengan himpunan bobot sisi dari semua sisi di F_n yaitu $W = \{a, a+1, \ldots, a+(3n-1)\}$. Akan ditunjukkan bahwa untuk kasus-kasus lainnya ($n \neq \{1, 3, 4, 5, 7\}$) tidak diperoleh pelabelan total sisi antiajaib.

Misalkan $g(c) = k$, $1 \leq k \leq 2n+1$, dan $g(V(F_n)) = T_1 \cup T_2 \cup \{k\}$, dengan $T_1 = \{1, 2, \ldots, k-2, k-1\}$, $T_2 = \{k+1, k+2, \ldots, 2n, 2n+1\}$.

Notasikan

$$\begin{aligned}
W_1 &= \{w(cx_i)|1 \leq i \leq n\} \cup \{w(cy_i)|1 \leq i \leq n\} \\
&= \{k+1, k+2, \ldots, 2k-2, 2k-1, \ldots, k+2n+1\} \\
W_2 &= \{a, a+1, \ldots, k-1, k\} \\
W_3 &= \{k+2n+2, k+2n+3, \ldots, a+3n-2, a+3n-1\}
\end{aligned}$$

Himpunan bobot sisi W_2 diperoleh dari penjumlahan dua anggota berbeda di himpunan $T_1 - \{t_1\}, t_1 \in T_1$ dan bobot sisi dari W_3 diperoleh dari penjumlahan dua anggota berbeda di himpunan $T_2 - \{t_2\}, t_2 \in T_2$. Selanjutnya, terdapat suatu sisi x_iy_i dengan bobot $w(x_iy_i) = 2k = t_1 + t_2$ dengan $t_1 \in T_1, t_2 \in T_2$.

Dapat dilihat bahwa pada himpunan $T_1 - \{t_1\}$ terdapat $k-2$ unsur, maka terdapat $(k-2)/2$ pasangan titik, yang berarti bahwa k haruslah genap dan $|W_2| = (k-2)/2$. Sehingga penjumlahan dari semua nilai di himpunan $T_1 - \{t_1\}$ sama dengan penjumlahan bobot sisi di W_2.

Perhatikan bahwa:

- $T_1 = \{1, 2, \ldots, k-2, k-1\}$, maka jumlah dari suku-suku di T_1 adalah $\dfrac{k(k-1)}{2}$.
- karena $W_2 = \{a, a+1, \ldots, k-1, k\}$ dan $|W_2| = (k-2)/2$, maka jumlah dari suku-suku di W_2 adalah

$$\begin{aligned}
S &= \frac{(k-2)/2}{2}\left(2a + \left(\frac{k-2}{2} - 1\right)\right) \\
S &= \frac{(k-2)2a}{4} + \left(\frac{k-2}{4}\right)\left(\frac{(k-2)}{2} - 1\right) \\
S &= \frac{k-2}{2}a + \frac{k-2}{4}\left(\frac{k-2}{2} - 1\right)
\end{aligned}$$

Karena penjumlahan dari semua nilai di himpunan $T_1 - \{t_1\}$ sama dengan penjumlahan bobot sisi di W_2 dan dari persamaan, maka berlaku hubungan berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{k(k-1)}{2} - t_1 &= \frac{k-2}{2}a + \frac{k-2}{4}\left(\frac{k-2}{2} - 1\right) \\
t_1 &= \frac{k(k-1)}{2} - \frac{k-2}{2}a - \frac{k^2-6k+8}{8} \\
t_1 &= \frac{4k(k-1)}{8} - \frac{4(k-2)}{8}a - \frac{k^2-6k+8}{8} \\
t_1 &= \frac{4k^2-4k-4ka+8a-k^2+6k-8}{8} \\
t_1 &= \frac{3k^2+2k-(4k-8)a-8}{8} \qquad (3.2.1)
\end{aligned}$$

Untuk $1 \leq t_1 \leq k-1$, maka persamaan (3.2.1) menjadi

$$1 \leq \frac{3k^2+2k-(4k-8)a-8}{8} \leq k-1$$

$$8 \leq 3k^2+2k-(4k-8)a-8 \leq 8k-8$$

$$16-3k^2-2k \leq -(4k-8)a \leq 6k-3k^2$$

$$(-3k-8)(k-2) \leq -4(k-2)a \leq -3k(k-2)$$

$$\frac{-3k}{-4} \leq a \leq \frac{-3k-8}{-4}$$

$$\frac{3}{4}k \leq a \leq \frac{3k+8}{4}$$

Dalam menghitung bobot sisi dari graf pertemanan F_n, label titik pusat dari F_n digunakan $2n$ kali sementara label titik-titik lainnya digunakan sebanyak dua kali. Misalkan label pusat dari F_n adalah k untuk $1 \leq k \leq 2n+1$, maka jumlah dari label titik tersebut adalah

$$2\sum_{i=1}^{n} g(x_i) + 2\sum_{i=1}^{n} g(y_i) + 2ng(c) = 2\sum_{i=1}^{n} g(x_i) + 2\sum_{i=1}^{n} g(y_i) + 2nk \qquad (3.2.2)$$

Karena terdapat suatu sisi x_iy_i dengan bobot $w(x_iy_i) = 2k$, maka penghitungan label titik selain label pusat dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{n} g(x_i) + 2\sum_{i=1}^{n} g(y_i) &= 2(1+2+\ldots+2n+(2n+1)) - 2k \\
&= 2\left(\frac{2n+1}{2}\right)(2+2n) - 2k \\
&= 2\left(\frac{4n^2+6n+2}{2}\right) - 2k \\
&= 4n^2+6n+2-2k \qquad (3.2.3)
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh jumlah dari semua label titik dari F_n adalah

$$2\sum_{i=1}^{n} g(x_i) + 2\sum_{i=1}^{n} g(y_i) + 2ng(c) = 4n^2+6n+2+2nk-2k \qquad (3.2.4)$$

Untuk menghitung bobot total W, maka dapat dilakukan dengan menjumlahkan semua bobot sisi dari graf F_n yaitu

$$\sum_{i=1}^{n} w(cx_i) + \sum_{i=1}^{n} w(cy_i) + \sum_{i=1}^{n} w(x_iy_i) = W(F_n) \qquad (3.2.5)$$

dengan nilai bobot F_n adalah $\{a, a+1, a+2, \ldots, a+(3n-1)\}$, maka jumlah dari suku-suku di $W(F_n)$ adalah

$$\begin{aligned}
W(F_n) &= (a+(a+1)+(a+2)+,\ldots,+a+(3n-1)) \\
&= 3na + \frac{9n^2-3n}{2}
\end{aligned}$$

sehingga persamaan (3.2.6) menjadi

$$\sum_{i=1}^{n} w(cx_i) + \sum_{i=1}^{n} w(cy_i) + \sum_{i=1}^{n} w(x_iy_i) = 3na + \frac{9n^2-3n}{2} \qquad (3.2.6)$$

Dengan menyamakan persamaan (3.2.4) dan persamaan (3.2.6), maka diperoleh:

$$
\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{n} g(x_i) + 2\sum_{i=1}^{n} g(y_i) + 2ng(c) &= \sum_{i=1}^{n} w(cx_i) + \sum_{i=1}^{n} w(cy_i) + \sum_{i=1}^{n} w(x_iy_i) \\
4n^2 + 6n + 2 + 2nk - 2k &= 3na + \frac{9n^2 - 3n}{2} \\
4nk - 4k - n^2 + 15n + 4 &= 6na \qquad (3.2.7)
\end{aligned}
$$

Untuk k genap yaitu $2 \leq k \leq 2n$ dan $\frac{3k}{4} \leq a \leq \frac{(3k+8)}{4}$, maka dapat dicari semua kemungkinan nilai n, k, a sebagai berikut:

- jika $n = 1$, diperoleh:

$$
\begin{aligned}
2 \leq k &\leq 2n \\
2 \leq k &\leq 2(1) \\
k &= 2
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
\frac{3k}{4} \leq a &\leq \frac{(3k+8)}{4} \\
\frac{3(2)}{4} \leq a &\leq \frac{(3(2)+8)}{4} \\
\frac{6}{4} \leq a &\leq \frac{(12)}{4}
\end{aligned}
$$

Nilai a yang mungkin dalam selang $\frac{6}{4} \leq a \leq \frac{(12)}{4}$ adalah 2 dan 3. Sehingga untuk kasus $n = 1$ diperoleh kemungkinan nilai (n, k, a) yaitu $(1, 2, 2)$ dan $(1, 2, 3)$. Dengan cara yang sama, maka diperoleh kemungkinan nilai (n, k, a) untuk $n \in \{3, 4, 5, 7\}$ pada graf F_n, yaitu:

- jika $n = 3$, maka $(n, k, a) = (3,2,2), (3,2,3), (3,4,3), (3,4,4), (3,4,5), (3,6,5), (3,6,6)$

- jika $n = 4$, maka $(n, k, a) = (4,2,2), (4,2,3), (4,4,3), (4,4,4), (4,4,5), (4,6,5), (4,6,6), (4,8,6), (4,8,7), (4,8,8)$

- jika $n = 5$, maka $(n, k, a) = (5,2,2), (5,2,3), (5,4,3), (5,4,4), (5,4,5), (5,6,5), (5,6,6), (5,8,6), (5,8,7), (5,8,8), (5,10,8), (5,10,9)$

- jika $n = 7$, maka $(n, k, a) = (7,2,2), (7,2,3), (7,4,3), (7,4,4), (7,4,5), (7,6,5), (7,6,6), (7,8,6), (7,8,7), (7,8,8), (7,10,8), (7,10,9), (7,12,9), (7,12,10), (7,12,11)$

Agar F_n mempunyai pelabelan titik $(a, 1)$-sisi antiajaib, maka haruslah dipilih nilai n, k, a sehingga memenuhi persamaan (3.2.7).

Jika $n = 1$, maka:

- untuk $(n, k, a) = (1,2,2)$

$$\begin{aligned} 4nk - 4k - n^2 + 15n + 4 &= 6na \\ 4(1)(2) - 4(2) - (1)^2 + 15(1) + 4 &= 6(1)(2) \\ 18 &\neq 12 \end{aligned}$$

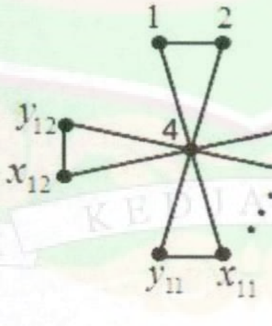
- untuk $(n, k, a) = (1,2,3)$

$$\begin{aligned} 4nk - 4k - n^2 + 15n + 4 &= 6na \\ 4(1)(2) - 4(2) - (1)^2 + 15(1) + 4 &= 6(1)(3) \\ 18 &= 18 \end{aligned}$$

Sehingga untuk $n = 1$, nilai n, k, a yang memenuhi persamaan (3.2.7) adalah $(1, 2, 3)$. Dengan cara yang sama, maka diperoleh kemungkinan nilai n, k, a yang memenuhi persamaan (3.2.7) untuk $n \in \{3, 4, 5, 7\}$ yaitu:

- jika $n = 3$, maka $(n, k, a) = (3, 4, 4)$
- jika $n = 4$, maka $(n, k, a) = (4, 4, 4), (4, 6, 5), (4, 8, 6)$
- jika $n = 5$, maka $(n, k, a) = (5, 6, 5)$
- jika $n = 7$, maka $(n, k, a) = (7, 8, 6)$

Dapat dilihat bahwa untuk $n = 12$, $k = 4$ dan $a = 3$, maka bobot sisi 3, 4, dan 5 dapat ditulis sebagai jumlah dua label titik yang berbeda, yaitu $3 = 1 + 2$, $4 = 1 + 3$, dan $5 = 1 + 4$ (tapi, tidak mungkin memberikan label 1 pada sebarang titik di F_{12} untuk memperoleh bobot sisi 3, 4, dan 5), dapat dilihat pada Gambar 3.2.9. Ini berarti bahwa F_{12} tidak mempunyai pelabelan titik $(3, 1)$-sisi anti ajaib.



Gambar 3.2.9. Graf F_{12}

Sehingga terbukti bahwa graf pertemanan F_n mempunyai pelabelan titik $(a, 1)$-sisi antiajaib untuk $n \in \{1, 3, 4, 5, 7\}$ $\square$

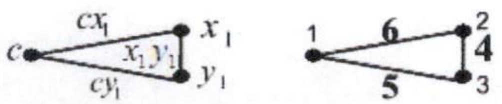
3.3 Pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super graf pertemanan F_n untuk $n \in \{1, 3, 4, 5, 7\}$

Pada Subbab 3.3 akan ditunjukkan bahwa untuk $n \in \{1, 3, 4, 5, 7\}$, graf pertemanan F_n memiliki pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super dengan $d = \{0, 1, 2\}$.

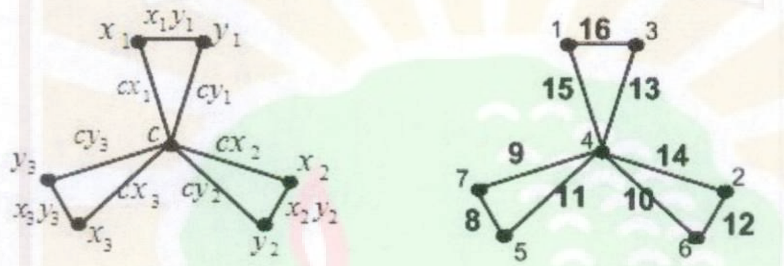
Teorema 3.3.3. *Untuk $n \in \{1, 3, 4, 5, 7\}$, maka Graf Pertemanan F_n memiliki pelabelan total $(a, 0)$-sisi antiajaib super dan pelabelan total $(a, 2)$-sisi antiajaib super.*

Bukti. Misal diberikan pelabelan titik $g_i, 1 \leq i \leq 5$ untuk $F_n, n \in \{1, 3, 4, 5, 7\}$. Pelabelan g_1 adalah untuk F_1, g_2 untuk F_3, g_3 untuk F_4, g_4 untuk F_5 dan g_5 untuk F_7. Himpunan label titik F_n adalah $\{1, 2, \ldots, 2n+1\}$, sementara himpunan label sisi adalah {2n+2,2n+3,. . . ,5n+1}. Akan ditunjukkan bahwa F_n memiliki pelabelan total $(a, 0)$-sisi antiajaib super dan pelabelan total $(a, 2)$-sisi antiajaib super.

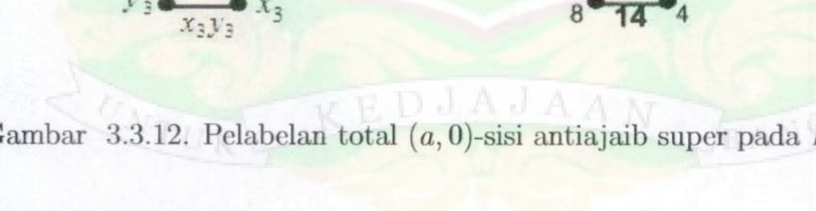
• Untuk $d = 0$



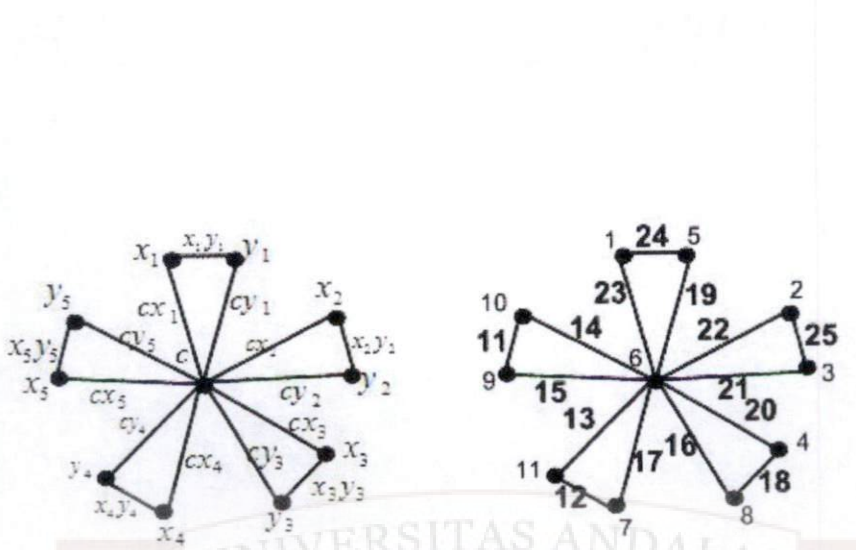
Gambar 3.3.10. Pelabelan total $(a, 0)$-sisi antiajaib super pada F_1



Gambar 3.3.11. Pelabelan total $(a, 0)$-sisi antiajaib super pada F_3



Gambar 3.3.12. Pelabelan total $(a, 0)$-sisi antiajaib super pada F_4

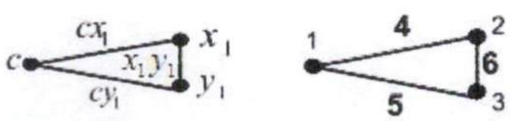


Gambar 3.3.13. Pelabelan total $(a, 0)$-sisi antiajaib super pada F_5

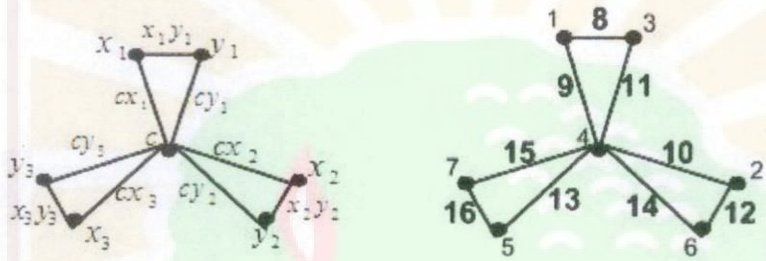
Gambar 3.3.14. Pelabelan total $(a, 0)$-sisi antiajaib super pada F_7

Untuk F_1 diperoleh pelabelan total $(9, 0)$-sisi antiajaib super, untuk F_3 diperoleh pelabelan total $(20, 0)$-sisi antiajaib super, untuk F_4 diperoleh pelabelan total $(26, 0)$-sisi antiajaib super, untuk F_5 diperoleh pelabelan total $(30, 0)$-sisi antiajaib super dan untuk F_7 diperoleh pelabelan total $(42, 0)$-sisi antiajaib super.

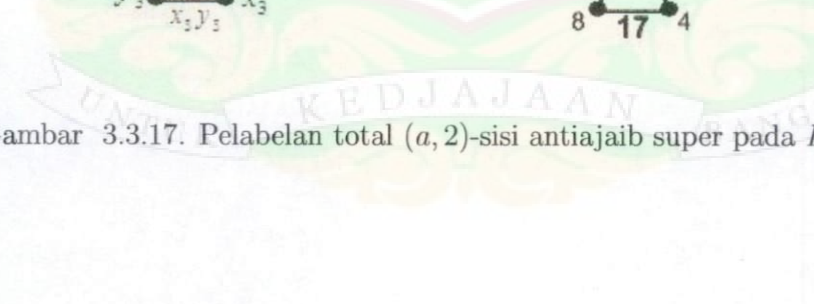
- Untuk $d = 2$



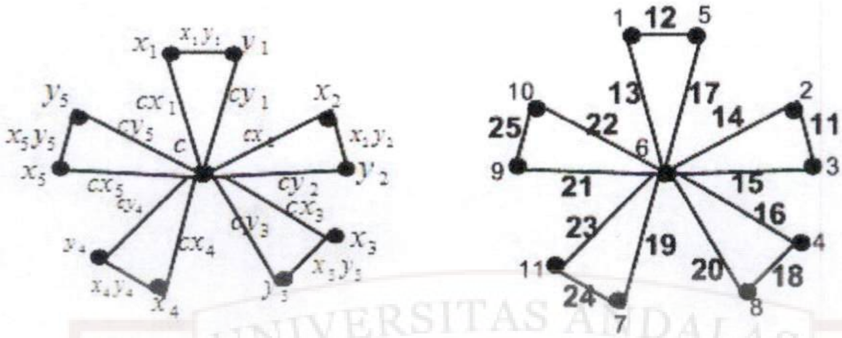
Gambar 3.3.15. Pelabelan total $(a, 2)$-sisi antiajaib super pada F_1



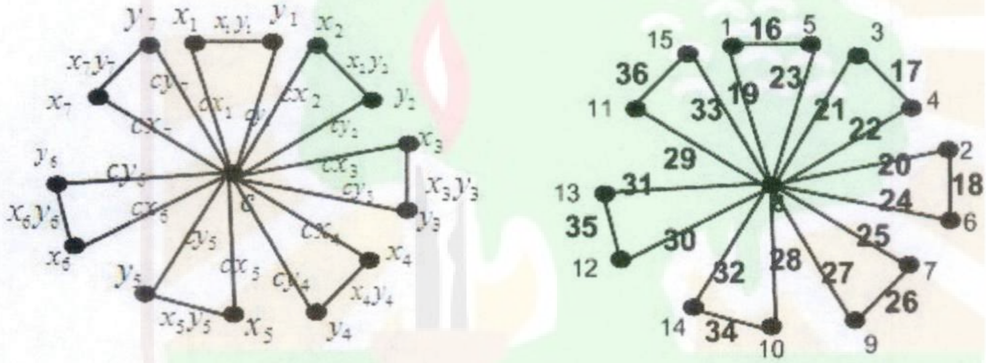
Gambar 3.3.16. Pelabelan total $(a, 2)$-sisi antiajaib super pada F_3



Gambar 3.3.17. Pelabelan total $(a, 2)$-sisi antiajaib super pada F_4



Gambar 3.3.18. Pelabelan total $(a, 2)$-sisi antiajaib super pada F_5



Gambar 3.3.19. Pelabelan total $(a, 2)$-sisi antiajaib super pada F_7

Untuk F_1 diperoleh pelabelan total $(7, 2)$-sisi antiajaib super dengan $W = \{7, 9, 11\}$, untuk F_3 diperoleh pelabelan total $(12, 2)$-sisi antiajaib super dengan $W = \{12, 14, \ldots, 28\}$, untuk F_4 diperoleh pelabelan total $(15, 2)$-sisi antiajaib super dengan $W = \{15, 17, \ldots, 37\}$, untuk F_5 diperoleh pelabelan total $(16, 2)$-sisi antiajaib super dengan $W = \{16, 18, \ldots, 34\}$ dan untuk F_7 diperoleh pelabelan total $(22, 2)$-sisi antiajaib super dengan $W = \{22, 24, \ldots, 62\}$.

Jadi terbukti bahwa untuk $n \in \{1, 3, 4, 5, 7\}$, graf pertemanan F_n memiliki pelabelan total $(a, 0)$-sisi antiajaib super dan pelabelan total $(a, 2)$-sisi antiajaib super. □

Teorema 3.3.4. *Untuk $n \geq 1$, maka Graf Pertemanan F_n memiliki pelabelan total $(a, 1)$-sisi antiajaib super.*

Bukti. Didefinisikan pelabelan titik $g_6 : V(F_n) \to \{1, 2, \ldots, 2n+1\}$ dan pelabelan sisi $g_7 : E(F_n) \to \{2n+2, 2n+3, \ldots, 5n+1\}$ sebagai berikut :

$g_6(c) = n + 1$, $g_6(x_i) = i$ dan $g_6(y_i) = 2n + 2 - i$ untuk $1 \leq i \leq n$.

$$g_7(x_ic) = \begin{cases} 3n + 3 - \frac{i+1}{2}, & \textit{jika } i \text{ ganjil;} \\ 4n + 3 - \frac{i}{2}, & \textit{jika } i \text{ genap.} \end{cases}$$

$$g_7(y_ic) = \begin{cases} 2n + 1 + \frac{i+1}{2}, & \textit{jika } i \text{ ganjil;} \\ 3n + 2 + \frac{i}{2}, & \textit{jika } i \text{ genap.} \end{cases}$$

$$g_7(x_iy_i) = \begin{cases} 4n + 2 + i, & \textit{jika } 1 \leq i \leq n - 1; \\ \frac{7n+5}{2}, & \textit{jika } i = n \text{ dan } n \text{ ganjil;} \\ \frac{5n+4}{2}, & \textit{jika } i = n \text{ dan } n \text{ genap.} \end{cases}$$

Dengan menggunakan pelabelan titik dan sisi dari F_n dengan g_6 dan g_7, akan ditunjukkan bahwa himpunan bobot sisi dari F_n membentuk himpunan bilangan bulat terurut dengan $d = 1$.

Untuk $1 \leq i \leq n$, diperoleh pelabelan titik sebagai berikut:

$g_6(c) = n + 1$

$g_6(x_1) = 1, \quad g_6(x_2) = 2, \quad \cdots, \quad g_6(x_n) = n$

$g_6(y_1) = 2n + 1, \quad g_6(y_2) = 2n, \quad \cdots, \quad g_6(y_n) = n + 2$

$$g_7(x_1c) = 3n + 2, \quad g_7(x_2c) = 4n + 2, \quad \cdots, \quad g_7(x_nc) = \begin{cases} \frac{5n+5}{2}, & \textit{jika } n \text{ ganjil;} \\ \frac{7n+6}{2}, & \textit{jika } n \text{ genap.} \end{cases}$$

$$g_7(y_1c) = 2n + 2, \quad g_7(y_2c) = 4n + 2, \quad \cdots, \quad g_7(y_nc) = \begin{cases} \frac{5n+3}{2}, & \textit{jika } n \text{ ganjil;} \\ \frac{7n+4}{2}, & \textit{jika } n \text{ genap.} \end{cases}$$

$$g_7(x_1y_1) = 4n + 3, \quad g_7(x_2y_2) = 4n + 4, \quad \cdots, \quad g_7(x_{n-1}y_{n-1}) = 4n + 2 + n - 1 = 5n + 1$$

$$g_7(x_ny_n) = \begin{cases} \frac{7n+5}{2}, & \textit{jika } n \text{ ganjil;} \\ \frac{5n+4}{2}, & \textit{jika } n \text{ genap.} \end{cases}$$

Selanjutnya, dari pelabelan titik g_6 dan g_7 diperoleh bobot sisi graf pertemanan F_n sebagai berikut:

Untuk $w(x_ic)$ dengan $1 \leq i \leq n$, bobotnya adalah:

$$\begin{aligned} w(x_1c) &= g(x_1) + g(c) + g(x_1c) \\ &= 1 + (n + 1) + (3n + 2) \\ &= 4n + 4 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
w(x_2c) &= g(x_2) + g(c) + g(x_2c) \\
&= 2 + (n+1) + (4n+2) \\
&= 5n+5 \\
&\vdots \\
w(x_nc) &= g(x_n) + g(c) + g(x_nc) \\
w(x_nc) &= \begin{cases} \frac{9n+5}{2}, & \textit{jika } n \text{ ganjil;} \\ \frac{11n+8}{2}, & \textit{jika } n \text{ genap.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Untuk $w(y_ic)$ dengan $1 \leq i \leq n$, bobotnya adalah:

$$
\begin{aligned}
w(y_1c) &= g(y_1) + g(c) + g(y_1c) \\
&= (2n+1) + (n+1) + (2n+2) \\
&= 5n+4 \\
w(y_2c) &= g(y_2) + g(c) + g(y_2c) \\
&= 2n + (n+1) + (3n+3) \\
&= 6n+4 \\
&\vdots \\
w(y_nc) &= g(y_n) + g(c) + g(y_nc) \\
w(y_nc) &= \begin{cases} \frac{9n+9}{2}, & \textit{jika } n \text{ ganjil;} \\ \frac{11n+10}{2}, & \textit{jika } n \text{ genap.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Untuk $w(x_iy_i)$ dengan $1 \leq i \leq n$, bobotnya adalah:

$$
\begin{aligned}
w(x_1y_1) &= g(x_1) + g(y_1) + g(x_1y_1) \\
&= 1 + (2n+1) + (4n+3) \\
&= 6n + 5 \\
w(x_2y_2) &= g(x_2) + g(y_2) + g(x_2y_2) \\
&= 2 + 2n + (4n+4) \\
&= 6n + 6 \\
&\vdots \\
w(x_{n-1}y_{n-1}) &= g(x_{n-1}) + g(y_{n-1}) + g(x_{n-1}y_{n-1}) \\
&= (n-1) + (n+3)(5n+1) \\
&= 7n + 3 \\
w(x_ny_n) &= \begin{cases} \frac{7n+5}{2}, & \textit{jika } n \text{ ganjil;} \\ \frac{5n+4}{2}, & \textit{jika } n \text{ genap.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Bobot sisi total untuk graf F_n diperoleh dari gabungan $w(x_ic)$, $w(y_ic)$ dan $w(x_iy_i)$ dengan bobot terkecil $w(x_1c) = 4n+4$ dan bobot terbesar $w(x_{n-1}y_{n-1}) = 7n+3$. Jadi terbukti bahwa graf F_n memiliki pelabelan total $(a, 1)$-sisi antiajaib super dengan bobot total $W = \{4n+4, 4n+5, \ldots, 7n+3\}$. □

BAB IV

PENUTUP

KESIMPULAN

Misalkan terdapat graf pertemanan F_n dengan $2n+1$ titik, dimana $|V(G)| = p$ dan $|E(G)| = q$. Suatu graf dikatakan mempunyai **pelabelan total** (a, d)**-sisi antiajaib** jika himpunan bobot sisinya dapat ditulis sebagai $W = \{a, a+d, a+2d, \ldots, a+(q-1)d\}$ untuk suatu $a > 0$ dan $d \geq 0$. Dan graf pertemanan F_n dikatakan **super** jika $g(V(F_n)) = \{1, 2, ..., v\}$ dan $g(E(F_n)) = \{v+1, v+2, ..., v+e\}$. Pada tulisan ini telah dikaji bahwa graf F_n memiliki pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super dengan batas $d < 3$. Selanjutnya telah dikaji pula bahwa untuk $n \in \{1, 3, 4, 5, 7\}$, graf F_n mempunyai pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super dengan $d \in \{0, 1, 2\}$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] D.B. West, **An Introduction to Graph Theory**, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.

[2] H. Enomoto, A.S. Lladó, T. Nakamigawa, G. Ringel, Super edge-magic graph, *SUT J. Math.* 34 (1998) 105-109.

[3] M. Baca, Y. Lin, M. Miller, M.Z. Youssef, Edge-antimagic graphs, *Discrete Mathematics.* 307 (2007) 1232-1244.

[4] M. Baca, Y. Lin, M. Miller, R. Simanjuntak, New construction of magic and antimagic graph labelings, *Utilitas Math.* 60 (2001) 229-239.

[5] R. Simanjuntak, F. Bertault, M. Miller, Two new (a, d)-antimagic graph labelings, in: *Proceedings of the 11th Australian Workshop of Combinatorial Algorithm* (2000) pp, 179-189.

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis dilahirkan sebagai anak pertama dari dua bersaudara dari ayah bernama Aprikal dan ibu bernama Nelma, pada tanggal 10 Oktober 1989 di Muara Lembu, Kecamatan Singingi Kabupaten Kuantan Singingi. Penulis menamatkan SDN 02 Muara Lembu pada tahun 2001, SLTP Negeri 2 Lintau Buo pada tahun 2004, SMK Negeri 1 Teluk Kuantan pada tahun 2007. Pada tahun 2007, penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur Seleksi Penerimaan Mahasiswa Baru Mandiri(SPMBM).

Selama menjadi mahasiswa di Jurusan Matematika FMIPA Unand, penulis pernah menjadi ketua acara Himatika Goes To School IV yang dilaksanakan di Painan, Kabupaten Pesisir Selatan dan pernah menjadi ketua pengurus HIMATIKA seksi Bidang Olahraga dan Kesejahteraan Anggota periode tahun 2010/2011, serta merupakan anggota Himpunan Mahasiswa Matematika (Himatika) yang terlibat dalam kepanitiaan kegiatan HIMATIKA lainnya. Penulis juga pernah malaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Jorong Silangkung Kenagarian Lurah Ampalu, Pariaman sebagai salah satu mata kuliah dalam bentuk pengabdian kepada masyarakat.