



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar Unand.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Unand.

KAJIAN BILANGAN RAMSEY SISI UNTUK KOMBINASI GRAF LINTASAN P3 DAN GRAF PERTEMANAN Ct_3

SKRIPSI



**ANGGUN DINIE HARY. D
07 934 022**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2012**

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT, Tuhan Pencipta alam semesta yang telah memberikan rahmat, hidayah dan kekuatan-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Kajian Bilangan Ramsey Sisi Untuk Kombinasi Graf Lintasan P_3 Dan Graf Pertemanan C_3^t** ". Shalawat dan salam kepada Nabi Muhammaad SAW. Penulisan Skripsi ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Andalas.

Secara khusus penulis mengucapkan terimakasih kepada Ayahanda **Darwin Akmal** yang sangat berjiwa besar, ibunda **Elma Chandra** yang tercinta, yang selalu memberikan nasehat yang sangat berguna. Serta sumber motivasi, abang **David Darwin**, adik-adik tersayang **Elsa Angraini Darwin** dan **Rizka Mutia Darwin** yang telah memberikan do'a motivasi, semangat dan dorongan yang luar biasa dan tiada henti. Tidak lupa pula penulis mengucapkan terimakasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penulisan

1. Ibu **Dr. Lyra Yulianti** selaku pembimbing yang dengan sabar telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, petunjuk, masukan dan motivasi selama penyusunan skripsi ini.
2. Bapak **Dr. Syafrizal Sy**, bapak **Dr. Admi Nazra** dan Bapak **Efendi, M. Si** selaku penguji yang telah bersedia membaca, menelaah dan menguji naskah skripsi ini serta memberikan pengarahan, kritik dan saran untuk perbaikan penulisan skripsi ini.

ABSTRAK

Misal diberikan graf G dan H . Notasi $F \rightarrow (G, H)$ menyatakan sebarang 2 pewarnaan (misalkan merah dan biru) pada semua sisi graf F akan mengakibatkan F memuat subgraf G merah atau memuat subgraf H biru. Bilangan Ramsey sisi $\hat{r}(G, H)$ adalah minimum dari banyaknya sisi graf F yang bersifat $F \rightarrow (G, H)$ dan $F - e \rightarrow (G, H)$ untuk setiap sisi e di F . Dalam skripsi ini akan dibahas Bilangan Ramsey $\hat{r}(P_3, C_3^t)$ dimana P_3 adalah lintasan dengan tiga titik dan C_3^t adalah graf pertemanan dengan $3t$ sisi untuk $t \geq 1$.

Kata kunci : *Graf Ramsey sisi, graf lintasan, graf pertemanan.*



DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	ii
ABSTRAK	iv
DAFTAR ISI	v
DAFTAR GAMBAR	vii
PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	3
1.3 Pembatasan Masalah	4
1.4 Tujuan Penelitian	4
1.5 Sistematika Penulisan	4
LANDASAN TEORI	5
2.1 Definisi dan Terminologi Graf	5
2.2 Lintasan	7
2.3 Graf Isomorfik	8
2.4 Pengertian Bilangan Ramsey	8
2.5 Beberapa Jenis Graf	9
KAJIAN BILANGAN RAMSEY SISI UNTUK PASANGAN GRAF LINTASAN P_3 DAN GRAF PERTEMANAN C_3^t	12

3.1	Batas Atas $\hat{r}(P_3, C_3^t)$ untuk $t \geq 1$	12
3.2	Anggota $\mathfrak{R}(P_3, C_3^t)$ untuk $t \geq 1$	15
	KESIMPULAN	20
4.1	Kesimpulan	20
	DAFTAR PUSTAKA	21



DAFTAR GAMBAR

2.1.1	Ilustrasi graf	6
2.1.2	Graf loop dan sisi paralel	6
2.2.3	$v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_4$ merupakan suatu lintasan	7
2.3.4	G_1 isomorfik dengan G_2 , tetapi G_1 tidak isomorfik dengan G_3 karena tidak memenuhi tiga syarat graf isomorfik	8
2.5.5	Graf lengkap	10
2.5.6	(a)Graf pertemanan C_3^3 , (b) Graf siklus C_4 , (C) Graf roda W_6 , (d) Graf kipas f_7	11
3.1.1	G_1 graf W_{3t+1} dengan satu sisi merah di E_1 , G_2 graf W_{3t+1} dengan semua sisi merah hanya ada di E_2	13
3.1.2	(a) C_3^4 biru pada W_{13} (b) Graf roda W_{13}	15
3.2.3	G_3 adalah graf $F \cong W_{3t+1} - e$ dimana $e \in E_1$, G_2 adalah graf $F \cong W_{3t+1} - e$ dimana $e \in E_2$	17
3.2.4	Graf $F \cong W_{13} - e$	18
3.2.5	Graf $F \cong W_{13} - e$	19

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada tahun 1930, Frank Plumpton Ramsey menyatakan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif n terdapat bilangan bulat positif $R(n)$ sedemikian sehingga jika sisi-sisi dari graf lengkap dengan $R(n)$ titik diwarnai dengan warna merah atau warna biru, maka senantiasa terdapat graf lengkap K_n merah atau graf lengkap K_n biru sebagai subgraf. Bilangan $R(n)$ ini kemudian dikenal sebagai bilangan Ramsey klasik.

Pada tahun 1935, Erdos dan Szekeres mengkaji dan mengaplikasikan teorema Ramsey ke dalam teori graf yang menghasilkan Teorema Ramsey untuk graf lengkap (lihat Surahmat, 2003). Dalam hal ini, jika yang dikaji adalah graf sebarang, maka teorema ini disebut dengan *Teorema Ramsey Graf*, dan bilangan Ramsey Graf tersebut dinotasikan sebagai $R(G, H)$ untuk sebarang graf G dan H .

Berikut adalah tabel yang menampilkan batas atas dan batas bawah serta nilai eksak dari bilangan Ramsey klasik.

n_1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n_2													
3	6	9	14	18	23	28	36	40	46	52	59	66	73
								43	51	59	69	78	88
4		18	25	35	49	56	69	92	97	128	133	141	153
				41	61	84	115	149	191	238	291	349	417
5			43	58	80	101	121	141	157	181	205	239	265
			49	87	143	216	316	442				1461	1878
6				102	111	127	169	178	253	262	317		401
				165	298	495	780	1171				5033	6911
7					205	216	232		405	416	511		
					240	1031	1713	2826				15263	22116

Tabel 1.1.1.

Batas atas dan batas bawah serta nilai eksak bilangan Ramsey .(Stanislaw P.

Radziszowski,2011)

Pewarnaan merah-biru pada graf G adalah pewarnaan semua sisi di G dengan warna merah dan biru .Misalkan diberikan graf G dan H . Notasi $F \rightarrow (G, H)$ menyatakan bahwa sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F mengakibatkan F memuat subgraf merah yang isomorfik dengan G atau subgraf biru yang isomorfik dengan H . Suatu pewarnaan (G, H) didefinisikan sebagai pewarnaan merah biru terhadap sisi-sisi graf F sedemikian sehingga F tidak memuat subgraf G dan subgraf biru H .

Dengan menggunakan notasi panah di atas dapat didefinisikan beberapa bilangan Ramsey berikut . Bilangan Ramsey graf $R(G, H)$ didefinisikan sebagai banyaknya titik minimum dari graf lengkap K_n yang memenuhi $K_n \rightarrow (G, H)$. Sementara bilangan Ramsey sisi didefinisikan sebagai banyaknya sisi minimum graf F yang memenuhi $F \rightarrow (G, H)$ dan $F - e \not\rightarrow (G, H)$ untuk sebarang sisi e di F . Selanjutnya didefinisikan kelas graf Ramsey minimal $\mathfrak{R}(G, H)$ sebagai himpunan dari semua graf F yang memenuhi $F \rightarrow (G, H)$, dan $F - e \not\rightarrow (G, H)$ untuk setiap sisi di F . Jika banyaknya sisi di graf F dinotasikan dengan $q(F)$, maka bilangan Ramsey sisi $\hat{r}(G, H) = \min\{q(F) | F \rightarrow (G, H) \text{ dan } F - e \not\rightarrow (G, H)\}$

Jika dibandingkan dengan bilangan Ramsey graf dan bilangan Ramsey klasik, kajian bilangan Ramsey sisi belum begitu banyak dilakukan orang. Walaupun demikian beberapa hasil telah diperoleh, antara lain yang ditemukan oleh Gorgol yaitu batas bawah bilangan Ramsey sisi untuk graf tripartit lengkap, yaitu :

$$\hat{r}(K_{n,n,n}, K_{n,n,n}) > \frac{1}{6}n^2 2^{\frac{3n}{2}}$$

dengan $K_{n,n,n}$ graf tripartit lengkap. Untuk sebarang graf G dengan n titik yang berderajat maksimum 3, V.Rodl dan E.Szemerdi membuktikan bahwa :

$$\hat{r}(G, G) \geq cn(\log n)^\alpha$$

dengan α dan c bilangan positif konstan.

1.2 Perumusan Masalah

Masalah yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah tentang penentuan bilangan Ramsey sisi untuk pasangan dua graf G dan H , serta penentuan anggota

kelas graf Ramsey minimal untuk pasangan dua graf G dan H tersebut.

1.3 Pembatasan Masalah

Permasalahan dalam tugas akhir ini dibatasi pada pembahasan tentang bilangan Ramsey sisi untuk pasangan graf P_3 dan C_3^t . Sementara pembahasan tentang graf Ramsey minimal dibatasi pada menunjukkan salah satu anggota dari $\mathfrak{R}(P_3, C_3^t)$, di mana P_3 adalah graf lintasan dengan tiga titik dan C_3^t adalah graf pertemanan dengan $2t + 1$ titik.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan batas atas $\widehat{r}(P_3, C_3^t)$ dan menunjukkan bahwa W_{3t+1} adalah anggota dari kelas Ramsey minimal $\mathfrak{R}(P_3, C_3^t)$.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini disajikan dalam empat bab. Bab I berisikan pendahuluan yang di dalamnya tercakup latar belakang, permasalahan, pembatasan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan skripsi ini. Konsep dasar dari teori graf berupa definisi dan teori Ramsey disajikan pada Bab II sebagai landasan teori. Kemudian, pembahasan dari permasalahan tersebut akan diuraikan pada Bab III diuraikan tentang kajian bilangan Ramsey sisi untuk kombinasi graf lintasan P_3 dan graf pertemanan C_3^t . Penulisan skripsi ini diakhiri dengan bagian kesimpulan yang disajikan pada Bab IV.

BAB II

LANDASAN TEORI

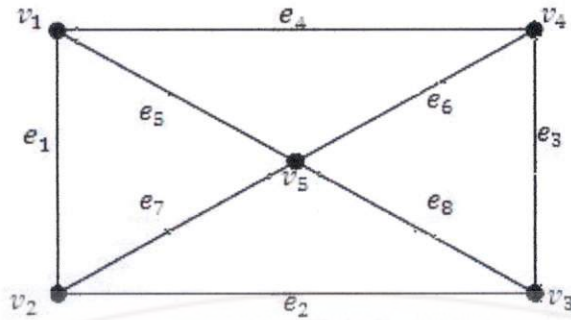
Pada bab ini diberikan beberapa konsep dasar dari teori graf yang digunakan dalam pembahasan. Selanjutnya dijelaskan tentang kajian bilangan Ramsey sisi untuk kombinasi graf lintasan P_3 dan graf pertemanan C_3^t .

2.1 Definisi dan Terminologi Graf

Suatu graf $G = (V(G), E(G)) = (V, E)$ dinyatakan sebagai himpunan pasangan dari himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Anggota $V(G)$ adalah titik-titik pada graf G , sementara anggota $E(G)$ adalah sisi-sisi yang menghubungkan dua titik. Banyak titik yang ada pada graf G adalah $|V(G)| = p(G) = p$ dan disebut **orde** dari G , sedangkan banyak sisi pada graf G adalah $|E(G)| = q(G) = q$ dan disebut **ukuran** dari G .

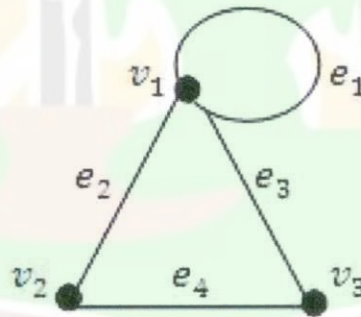
Pada suatu graf, dua titik dikatakan **bertetangga (adjacent)** jika keduanya dihubungkan oleh suatu sisi. Untuk sebarang sisi $e = uv$, sisi e dikatakan **terkait** dengan titik u dan titik v . Dalam hal ini u dan v dikatakan titik ujung dari e .

Misal pada suatu graf terdapat beberapa sisi berbeda yang menghubungkan pasangan titik yang sama. Maka graf yang demikian dikatakan mempunyai **sisi**



Gambar 2.1.1. Ilustrasi graf

ganda (multiple edge) disebut juga dengan **sisi paralel**. Sisi yang menghubungkan titik yang sama disebut sebagai **gelang (loop)**. Graf yang tidak mengandung sisi ganda dan loop disebut **graf sederhana**.



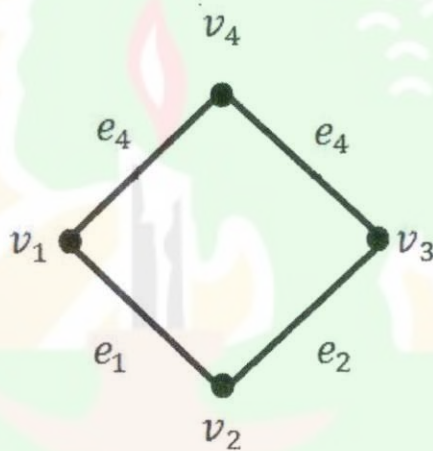
Gambar 2.1.2. Graf loop dan sisi paralel

Derajat (degree) dari titik v pada graf G adalah banyaknya titik yang bertetangga dengan v . Jika titik v berderajat nol, yang berarti v tidak bertetangga dengan semua titik di G , maka v disebut titik **terisolasi (isolated vertex)**. Derajat terkecil dari suatu graf G dinyatakan dengan $\delta = \delta(G) = \min_{v \in V} d(v)$ dan derajat terbesar dinyatakan sebagai $\Delta = \Delta(G) = \max_{v \in V} d(v)$. Jika $\delta = \Delta = r$, maka

graf G disebut sebagai **graf reguler berderajat r** (r -regular graph).

2.2 Lintasan

Dalam suatu graf $G = (V, E)$, lintasan (*path*) dengan panjang n dari titik v_0 menuju titik v_n adalah deretan berselang seling antara $n + 1$ buah titik dan n buah sisi yang berawal dari titik v_0 dan berakhir dengan titik v_n . Lintasan tersebut dapat dituliskan sebagai $v_0e_1v_1e_2v_2 \dots, v_{(n-1)}e_nv_n$. dimana sisi e_i terkait dengan titik v_{i-1} dan v_i untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

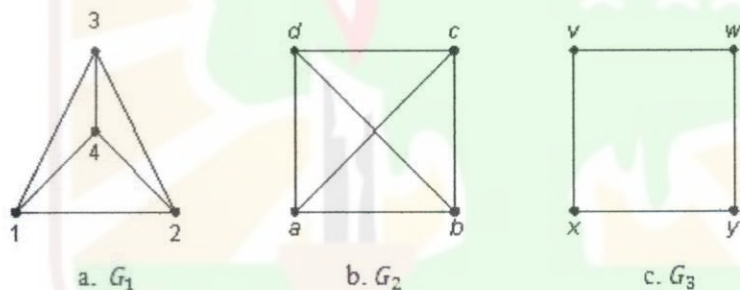


Gambar 2.2.3. $v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_4$ merupakan suatu lintasan

Lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut **lintasan tertutup** (*closed path*). Sedangkan lintasan yang tidak berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut **lintasan terbuka** (*open path*). **Panjang lintasan** adalah banyaknya sisi dalam lintasan tersebut. Suatu graf yang terdiri dari satu lintasan disebut graf lintasan. Untuk selanjutnya, graf lintasan disebut lintasan saja, dinotasikan P_n , yaitu lintasan dengan n titik.

2.3 Graf Isomorfik

Misalkan terdapat dua buah graf G_1 dan G_2 . Graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik jika terdapat korespondensi satu-satu antara himpunan titik-titik dan himpunan sisi-sisi keduanya. Misalkan sisi e bertetangga dengan titik u dan v di G_1 , maka sisi e' yang berkorespondensi di G_2 harus bertetangga dengan u' dan v' yang di G_2 . Dari definisi graf isomorfik dapat dikemukakan bahwa dua graf isomorfik memenuhi ketiga syarat berikut. Mempunyai jumlah titik yang sama, mempunyai banyak sisi yang sama dan mempunyai banyak titik yang sama berderajat tertentu.



Gambar 2.3.4. G_1 isomorfik dengan G_2 , tetapi G_1 tidak isomorfik dengan G_3 karena tidak memenuhi tiga syarat graf isomorfik

2.4 Pengertian Bilangan Ramsey

Salah satu kajian dalam matematika kombinatorika yang mendasari munculnya teori Ramsey adalah *Prinsip Pigeonhole*. Jika $k + 1$ objek termuat dalam k kotak, maka akan terdapat paling sedikit satu kotak yang memuat dua objek atau lebih. Keterkaitan prinsip ini dapat diilustrasikan dengan contoh sebagai berikut.

Jika sebuah grup terdiri dari atas enam orang dan setiap orang dalam grup tersebut mempunyai teman dan musuh, maka akan selalu terdapat tiga orang yang saling berteman atau tiga orang yang saling bermusuhan tetapi tidak sekaligus keduanya.

Pada perkembangan selanjutnya, penentuan bilangan Ramsey ini tidak hanya diperuntukkan untuk graf lengkap, tetapi dapat diperumum untuk graf yang lain. Adapun definisi bilangan Ramsey secara umum adalah sebagai berikut:

Definisi 2.4.1. Diberikan dua graf G dan H . Bilangan Ramsey graf $R(G, H)$ adalah bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga setiap graf F dengan n titik akan memuat G atau \bar{F} memuat H .

Definisi 2.4.2. Diberikan graf G dan H . Bilangan Ramsey sisi $\hat{r}(G, H)$ didefinisikan sebagai $\hat{r}(G, H) = \min\{q(F) \mid F \rightarrow (G, H) \text{ dan } F - e \not\rightarrow (G, H)\}$.

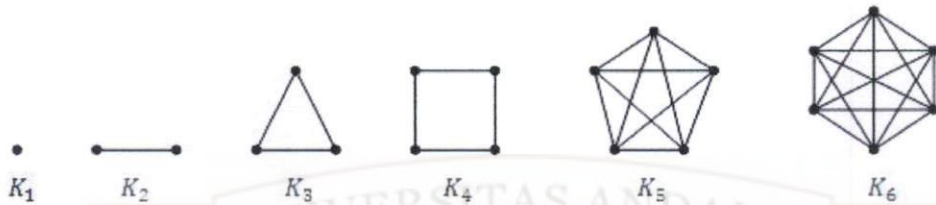
Definisi 2.4.3. Diberikan graf G dan H . Graf F dikatakan sebagai graf Ramsey (G, H) minimal jika :

1. $F \rightarrow (G, H)$
2. $F - e \not\rightarrow (G, H)$ untuk sebarang sisi e di F .

2.5 Beberapa Jenis Graf

Graf Lengkap K_n adalah suatu graf dengan n titik dimana setiap dua titiknya bertetangga. Graf lengkap dengan $n = 3$ disebut segitiga. Graf pette-

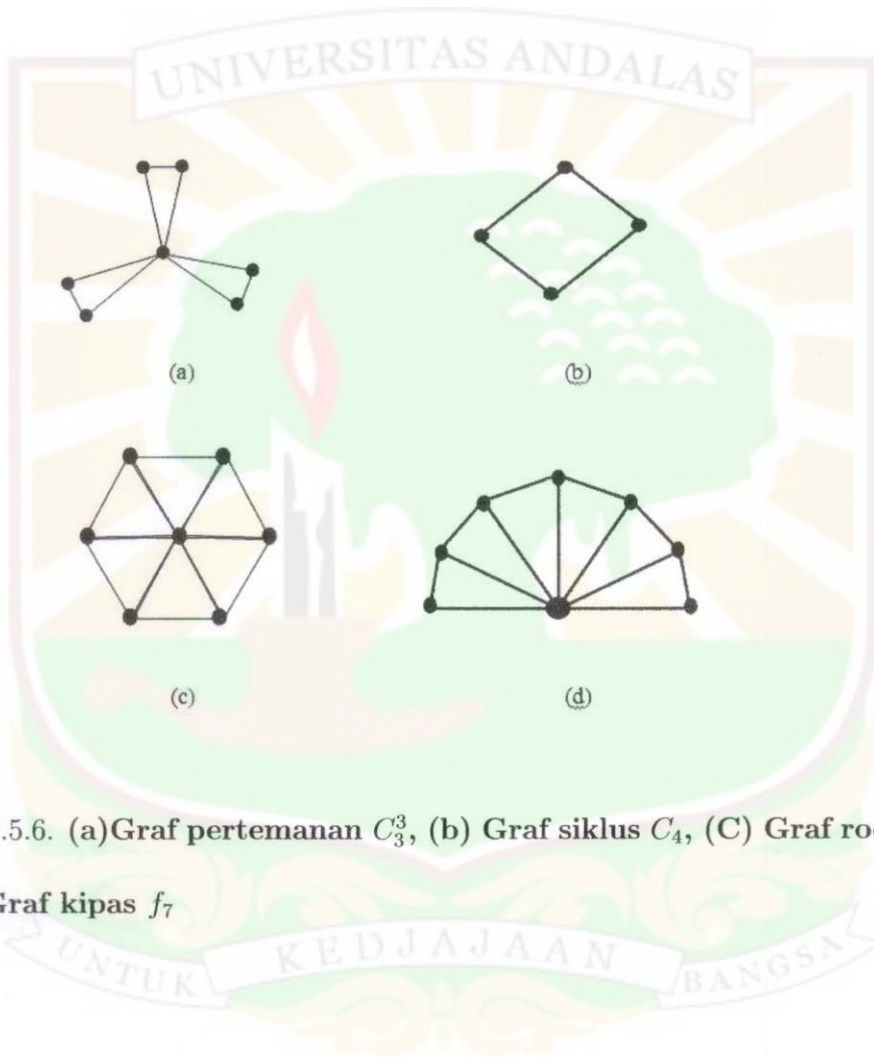
manan C_3^t adalah graf yang didapatkan dari t segitiga dengan tepat satu titik persekutuan.



Gambar 2.5.5. Graf lengkap

Graf siklus C_n adalah suatu graf terhubung dengan n titik dimana setiap titiknya berderajat dua. Graf roda W_n , $n \geq 3$ dapat dilihat sebagai graf $K_1 + C_n$ atau $x + C_n$. Titik x tersebut disebut titik pusat graf roda. Jadi W_n mempunyai $n + 1$ titik dan $2n$ sisi. Definisi $+$ pada operasi ini adalah menghubungkan graf pertama yaitu K_1 dengan graf yang kedua yaitu C_n .

Graf kipas f_n , $n \geq 2$, adalah graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik dari graf lintasan P_n dengan satu titik c yang bukan anggota dari $V(P_n)$ disebut sebagai *titik pusat*. Dengan kata lain, dapat dituliskan $f_n = K_1 + P_n$. Jadi f_n terdiri dari $n + 1$ titik dan $2n - 1$ sisi.



Gambar 2.5.6. (a)Graf pertemanan C_3^3 , (b) Graf siklus C_4 , (C) Graf roda W_6 , (d) Graf kipas f_7

BAB III

KAJIAN BILANGAN RAMSEY SISI

UNTUK PASANGAN GRAF LINTASAN P_3

DAN GRAF PERTEMANAN C_3^t

Pada Subbab 3.1 ini akan ditunjukkan bahwa bilangan **Ramsey sisi** untuk pasangan graf lintasan P_3 dan graf pertemanan C_3^t tidak akan melebihi $6t + 2$. Selanjutnya pada Subbab 3.2 akan ditunjukkan bahwa W_{3t+1} adalah anggota dari $\mathfrak{R}(P_3, C_3^t)$

3.1 Batas Atas $\widehat{r}(P_3, C_3^t)$ untuk $t \geq 1$

Teorema 3.1.1. *Untuk setiap $t \geq 1$, $\widehat{r}(P_3, C_3^t) \leq 6t + 2$.*

Bukti.

Perhatikan pewarnaan merah biru sebarang pada sisi dari graf roda W_{3t+1} yang mempunyai $6t + 2$ sisi. Misalkan W_{3t+1} adalah graf roda dengan jari-jari sebanyak $3t + 1$, dimana

$$V(W_{3t+1}) = \{c\} \cup \{v_i | 1 \leq i \leq 3t + 1\}$$

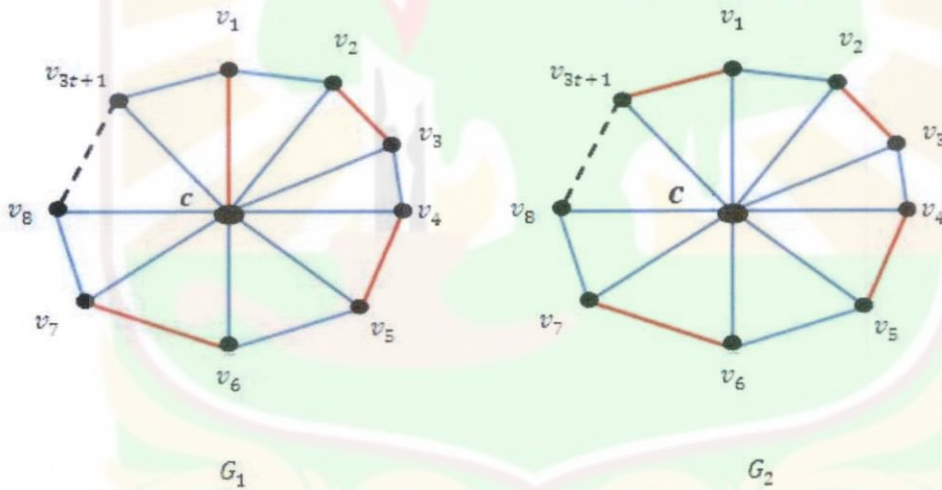
$$E(W_{3t+1}) = E_1 \cup E_2$$

di mana $E_1 = \{cv_i | 1 \leq i \leq 3t + 1\}$ dan $E_2 = \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq 3t + 1\} \cup \{v_{3t+1} v_1\}$. Misalkan X adalah 2-pewarnaan sebarang terhadap W_{3t+1} se-

hingga pewarnaan tersebut tidak memuat P_3 merah. Akan ditunjukkan bahwa X memuat C_3^t biru. Untuk membuktikannya, perhatikan dua kasus di bawah ini.

1. Terdapat satu sisi merah di E_1 .

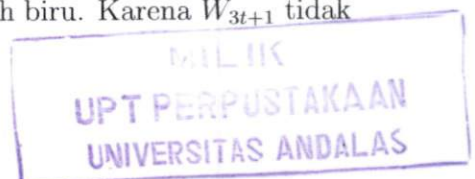
Tanpa mengurangi perumuman, misalkan cv_1 pada E_1 berwarna merah. Akibatnya tidak ada sisi lain di E_1 yang berwarna merah (sesuai pengandaian bahwa tidak ada P_3 merah). Perhatikan subgraf $W_{3t+1} - v_1$. Maka subgraf tersebut adalah graf kipas $\{c\} + P_{3t}$. Pada E_2 terdapat paling banyak $\lfloor \frac{3t}{2} \rfloor$ sisi merah. Maka akan didapatkan paling sedikit t buah sisi biru di E_2 . Akibatnya W_{3t+1} memuat C_3^t biru.



Gambar 3.1.1. G_1 graf W_{3t+1} dengan satu sisi merah di E_1 , G_2 graf W_{3t+1} dengan semua sisi merah hanya ada di E_2

2. Tidak terdapat sisi merah di E_1 .

Jika sisi merah hanya terdapat pada E_2 , maka terdapat paling banyak $\lfloor \frac{3(t)+1}{2} \rfloor$ sisi merah sementara sisi lainnya pastilah biru. Karena W_{3t+1} tidak



memuat P_3 merah, maka berapapun sisi merah yang ada di E_2 mengakibatkan W_{3t+1} memuat C_3^t biru.

Maka dari kedua kasus tersebut diperoleh bahwa $\hat{r}(P_3, C_3^t) \leq 6t + 2$, untuk semua $t \geq 1$ ■

Berikut akan diberikan beberapa contoh dari Teorema 3.1.1 untuk nilai t tertentu.

Contoh 1.

Misalkan $t = 4$, maka graf roda W_{3t+1} menjadi graf roda W_{13} . Misalkan :

$$V(W_{13}) = \{c\} \cup \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{13}\} \text{ dan}$$

$$E(W_{13}) = E_1 \cup E_2 \text{ dengan}$$

$$E_1 = \{cv_1, cv_2, cv_3, \dots, cv_{13}\} \text{ dan}$$

$$E_2 = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{13}v_1\}$$

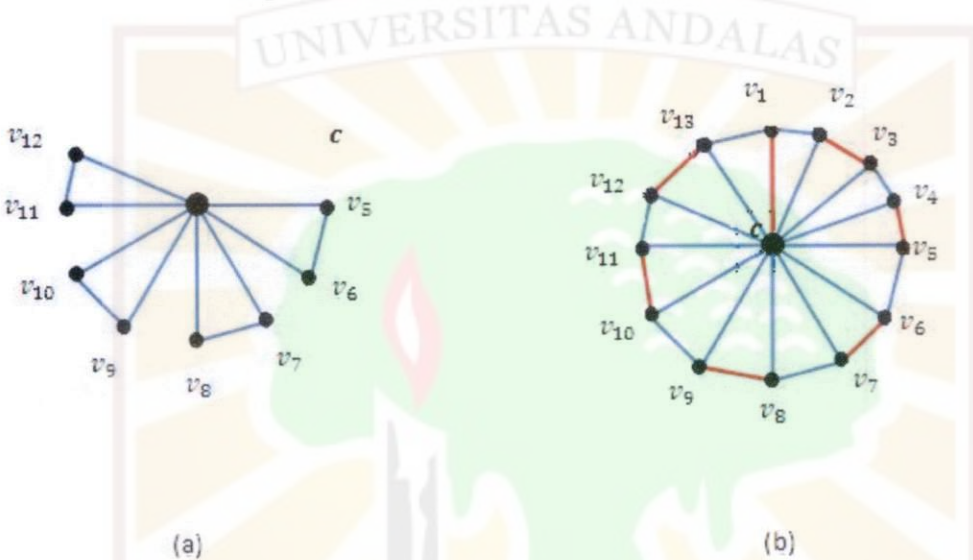
Akan ditunjukkan bahwa $W_{13} \rightarrow (P_3, C_4^3)$, dengan melakukan pewarnaan sebarang terhadap sisi-sisi di W_{13} . Misal terdapat P_3 merah pada pewarnaan tersebut. Lihat dua kasus berikut.

1. Misal terdapat sisi merah di jari-jari W_{13} . Tanpa mengurangi perumuman, misal $e = cv_1$ berwarna merah. Maka sisi-sisi lain di E_1 haruslah berwarna biru. Selanjutnya sisi-sisi di W_{13} diwarnai sedemikian sehingga terdapat C_3^4 biru dalam pewarnaan tersebut.
2. Selanjutnya misalkan tidak ada sisi merah di jari-jari W_{13} . Maka

$$E_1 = \{cv_1, cv_2, \dots, cv_{13}\}$$

$$E_2 = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{13}v_1\}$$

Maka banyaknya sisi biru pada pewarnaan takkan lebih dari 4, dan banyaknya sisi merah $\lfloor \frac{3(4)}{2} \rfloor = 6$, dan W_{13} memuat C_3^4 biru.



Gambar 3.1.2. (a) C_3^4 biru pada W_{13} (b) Graf roda W_{13}

3.2 Anggota $\mathfrak{R}(P_3, C_3^t)$ untuk $t \geq 1$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa graf roda W_{3t+1} dengan $6t + 2$ sisi berada dalam kelas graf Ramsey minimal untuk pasangan (P_3, C_3^t) . Sesuai dengan Definisi 2.4.3, karena pada Syarat 1 bahwa $W_{3t+1} \rightarrow (P_3, C_3^t)$ sudah terbukti di Teorema 3.1, maka pada bagian 3.2 ini cukup dibuktikan syarat 2, yaitu bahwa :

Teorema 3.2.2. Untuk setiap $t \geq 1$, W_{3t+1} berada pada $\mathfrak{R}(P_3, C_3^t)$

Bukti.

Akan ditunjukkan untuk setiap sisi di $E(W_{3t+1}-e)$ terdapat 2-pewarnaan sebarang graf terhadap $F \cong W_{3t+1} - e$, sehingga graf F tersebut tidak memuat P_3 merah dan C_3^t biru. Sebelum menghapus sisi e beri label pada titik dan sisi graf W_{3t+1} seperti pada teorema sebelumnya. Perhatikan dua kasus berikut:

1. $e \in E_1$

Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $e = cv_1$. Jika $t = 1$, warnai sisi cv_3 dengan warna merah dan sisi lain dengan warna biru. Sehingga $W_4 \setminus cv_1$ tidak memuat P_3 merah dan C_3^t biru. Jika $t \geq 2$, misalkan :

$$E_3 = \{v_{3t+1}v_1, v_1v_2, v_3v_4, v_4v_5, v_{3t-1}v_{3t}\} \cup \{E_1 \setminus cv_4\}$$

$$E_4 = \{cv_4, v_{3t}v_{3t+1}, v_2v_3\}$$

dan

$$E_5 = \{E(F) \setminus (E_3 \cup E_4)\}$$

Warnai sisi-sisi pada E_3 dengan warna biru dan sisi-sisi pada E_4 dengan warna merah. Kemudian sisi-sisi pada E_5 diwarnai dengan dua biru dan satu merah berurutan. Sehingga pada dua pewarnaan ini, graf F tidak memuat P_3 merah dan C_3^t biru.

2. $e \in E_2$

Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $e = v_1v_2$. Pada kasus ini, graf F adalah graf kipas $\{c\} + P_{3t+1}$. Misalkan :

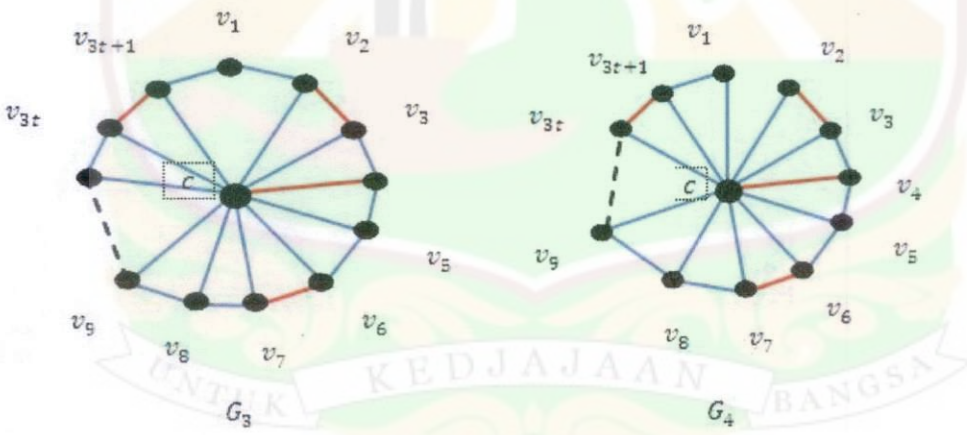
$$E_6 = \{v_{3t+1}v_1, cv_3\}$$

$$E_7 = \{v_2v_3, v_3v_4\} \cup \{E_1 \setminus cv_3\}$$

dan

$$E_8 = E(F) \setminus (E_6 \cup E_7)$$

Warnai sisi-sisi pada E_6 dengan warna merah dan sisi-sisi pada E_7 dengan warna biru. Kemudian warnai sisi-sisi pada E_8 dengan dua biru dan satu merah berurutan mulai dari sisi $v_{3t+1}v_{3t}$. Akibatnya graf kipas F tidak mengandung P_3 merah dan C_3^t biru.



Gambar 3.2.3. G_3 adalah graf $F \cong W_{3t+1} - e$ dimana $e \in E_1$, G_2 adalah graf $F \cong W_{3t+1} - e$ dimana $e \in E_2$

Maka diperoleh bahwa graf F tidak memuat P_3 merah dan C_3^t biru. ■

Dengan menggunakan Teorema 3.1.1 dan 3.2.2 akan diberikan contoh bahwa graf $W_{13} \in \mathfrak{A}(P_3, C_3^4)$.

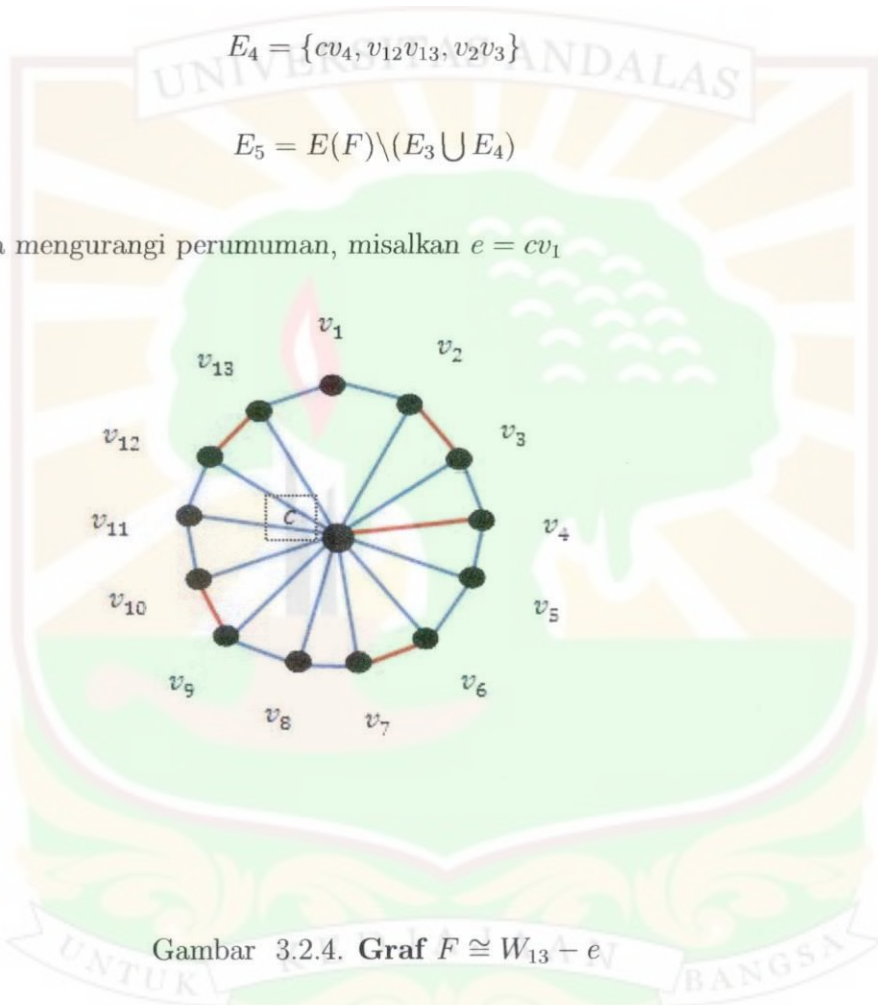
Karena $t = 4$, maka graf F menjadi graf $F \cong W_{13} - e$. Misalkan:

$$E_3 = \{v_{13}v_1, v_1v_2, v_3v_4, v_4v_5, v_{11}v_{12}\} \cup (E_1 \setminus cv_4)$$

$$E_4 = \{cv_4, v_{12}v_{13}, v_2v_3\}$$

$$E_5 = E(F) \setminus (E_3 \cup E_4)$$

Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $e = cv_1$



Gambar 3.2.4. Graf $F \cong W_{13} - e$

Warnai E_3 dengan warna biru, E_4 dengan merah dan semua sisi di E_5 diwarnai dengan dua biru dan satu merah secara berurutan. Dari gambar diatas terbukti bahwa F tidak memuat P_3 merah atau C_3^4 biru.

Berikut akan diberikan contoh dari Teorema 3.2.2 untuk nilai t tertentu.

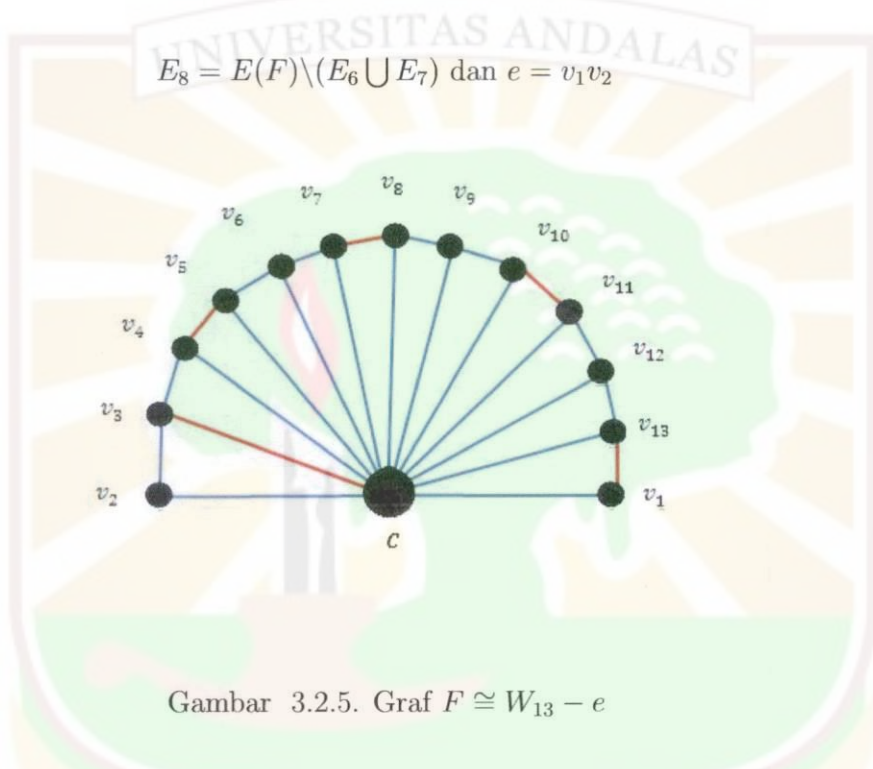
Contoh 2.

Misalkan $t = 4$, graf F adalah graf $F \cong W_{3t+1} - e$. Karena $t = 4$ maka graf F menjadi graf $F \cong W_{13} - e$ dan misalkan :

$$E_6 = \{v_{13}v_1, cv_3\}$$

$$E_7 = \{v_2v_3, v_3v_4\} \cup \{E_1 \setminus cv_3\}$$

$$E_8 = E(F) \setminus (E_6 \cup E_7) \text{ dan } e = v_1v_2$$



Gambar 3.2.5. Graf $F \cong W_{13} - e$

Kemudian warnai E_6 dengan warna merah, E_7 dengan warna biru dan E_8 dimulai dari sisi $v_{13}v_{12}$ dengan warna dua biru dan satu merah secara berurutan. Dari gambar diatas diperoleh bahwa graf F tidak memuat P_3 merah dan juga C_3^4 biru.

BAB IV

KESIMPULAN

4.1 Kesimpulan

Bilangan Ramsey sisi yang dinotasikan dengan $\widehat{r}(G, H)$ didefinisikan sebagai banyaknya sisi minimum graf F yang memenuhi $F \rightarrow (G, H)$ dan $F - e \not\rightarrow (G, H)$ untuk sebarang sisi e di F . Graf P_3 adalah graf lintasan dengan tiga titik. Graf C_3^t dapat dilihat sebagai graf yang didapatkan dari t segitiga yang mempunyai satu titik persekutuan.

Dari pembahasan yang telah dibahas pada Bab III, diperoleh bahwa untuk setiap $t \geq 1$, $\widehat{r}(P_3, C_3^t)$ terbatas di atas oleh $6t + 2$. Selanjutnya kita memperoleh batas atas untuk $\widehat{r}(P_3, C_3^t)$ yaitu $6t + 2$. Selanjutnya juga diperoleh bahwa untuk setiap $t \geq 1$, W_{3t+1} berada pada $\mathfrak{R}(P_3, C_3^t)$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] E.T Baskoro, A.A.G, Ngurah and Y. Nuraeni.2006. Upper bound for the size Ramsey numbers for P_3 versus C_3^t or P_n . *Journal of Prime research in Mathematics Vol.2(2006),141-146*.
- [2] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. 1976. Graph Theory with Applications. London: The Macmillan Press Ltd.
- [3] Radziszowski, P. Stanislaw.2011. Small Ramsey Number. The Electronical Journal of Combinatorics, DS 1, versi 13.
- [4] Surahmat,2003, Bilangan Ramsey untuk Graf Roda. Disertasi,tidak diterbitkan, ITB Bandung.
- [4] Hasnawati, 2007. Bilangan Ramsey untuk Graf Gabungan Bintang,tidak diterbitkan, ITB Bandung.

Riwayat Penulis



Penulis dilahirkan di BukitTinggi pada tanggal 20 Juli 1988 dari ayah Darwin Akmal dan Ibu Elma Candra. Penulis merupakan putri kedua dari empat bersaudara Tahun 2007 Penulis lulus dari SMA Negeri 4 Bukittinggi dan pada tahun yang sama pula lulus seleksi masuk UNAND melalui jalur reguler mandiri. Penulis memilih Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

Selama mengikuti perkuliahan, penulis pernah mengikuti magang di UKM KSR PMI UNAND dan juga pernah tergabung dalam Bakti Sosial BEM KM UNAND pasca Gempa tahun 2009. Penulis juga pernah mengikuti Kuliah Kerja Nyata di jorong Sawah Gadang, kecamatan Tanjung Gadang Kabupaten Sijunjung pada tahun 2010.

