APROKSIMASI SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA DENGAN METODE ITERASI PICARD (SUCCESIVE APPROXIMATION)

SKRIPSI

IRVIA
06134039

FAKULTAS TEKNIK
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2011

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini menyatakan bahwa :

Nama	: Irvia
No. Buku Pokok	: 06 134 039
Jurusan	: Matematika
Bidang	: Terapan
Judul Skripsi	:**Aproksimasi Solusi Persamaan Diferensial Biasa dengan Metode Iterasi Picard (*Successive Approximation*)**

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal 16 Januari 2012 berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing

1\.

Efendi, M.Si
NIP. 197807172002121002

2\.

Narwen, M.Si
NIP. 196704101997021001

Penguji

1\.

Budi Rudianto, M.Si
NIP. 132169920

2\.

Dr. Admi Nazra
NIP. 197303301999031002

3\.

Zulakmal, M.Si
NIP. 196711081998021001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA UNAND

Dr. Syafrizal Sy
NIP. 196708071993091001

KATA PENGANTAR

Puji Syukur kehadirat Allah SWT Yang Maha Mendengar Lagi Maha Melihat dan atas segala limpahan rahmat, taufik, serta hidayah-Nya sehingga Penulis dapat menyelesaikan Skripsi ini dengan judul **"Aproksimasi Solusi Persamaan Diferensial Biasa dengan Metode Iterasi Picard (*Successive Approximation*)"**, yang merupakan salah satu syarat untuk mendapatkan gelar sarjana pada Jurusan Metematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang. Shalawat dan salam Penulis sampaikan kepada Nabi Muhammad SAW, yang sangat kita harapkan syafaatnya di Yaumil Akhir kelak, amin.

Ucapan terima kasih yang tak terhingga Penulis sampaikan kepada kedua orang tua tercinta, uda, uni, kakek dan nenek tersayang, serta semua keluarga yang menjadi motivator dan penyemangat Penulis dalam menjalani hidup dan kehidupan ini. Selain itu, ucapan terima kasih Penulis sampaikan kepada :

1. Bapak Dr. Syafrizal Sy selaku ketua Jurusan Matematika FMIPA UNAND
2. Bapak Efendi, M.Si dan Bapak Narwen, M.Si selaku pembimbing yang telah memberikan bimbingan dan arahan dalam menyelesaikan tugas akhir ini
3. Bapak Budi Rudianto, M.Si, Bapak Dr. Admi Nazra dan Bapak Zulakmal, M.Si selaku penguji yang telah memberikan nasehat dan perbaikan dalam menyelesaikan tugas akhir ini
4. Bapak Zulakmal, M.Si selaku pembimbing akademik
5. Bapak dan Ibu dosen yang tidak dapat Penulis sebutkan satu persatu, terima kasih atas ilmu yang telah diberikan kepad Penulis selama ini

6. Mama Cun, Bu Eli, Pak Syamsir dan Ni Opi yang telah membantu setiap urusan administrasi Penulis selama ini
7. Teman seperjuangan matematika 2006, keluarga besar HIMATIKA dan FSI FMIPA UNAND
8. Keluarga besar Wisma Pelita Shalehah yang tealah bnyak memberikan motivasi dan semangat
9. Semua pihak yang telah tulus ikhlas memberikan bantuan, dukungan dan do'a yang sangat berarti bagi Penulis.

Penulis menyadari bahwa tulisan ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan tulisan ini.

Tentunya Penulis tetap berharap mudah-mudahan tulisan ini dapat memberikan manfaat dan semoga Allah SWT senantiasa memberikan petunjuk dan hidayah-Nya kepada kita semua, Amin.

Padang, Januari 2012

Penulis

ABSTRAK

Misalkan sebuah persamaan diferensial biasa dengan masalah nilai awal yang didefinisikan oleh $y' = f(t, y)$ dengan $y(t_0) = y_0$, maka persamaan diferensial di atas mempunyai solusi tunggal yang dapat dihampiri dengan sebuah metode numerik yang dikenal dengan metode iterasi Picard (*Successive Approximation*). Metode iterasi Picard merupakan metode yang proses iterasinya tidak hanya solusi aproksimasi tetapi pada fungsinya juga. Langkah awal dalam proses pengerjaan metode iterasi Picard adalah membuat terkaan awal di sebuah solusi. Penyelesaian persamaan diferensial dengan menggunakan metode iterasi Picard menghasilkan nilai yang mendekati eksak (tepat).

Kata kunci : *persamaan diferensial, masalah nilai awal, dan iterasi Picard*

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR i

ABSTRAK iii

DAFTAR ISI iv

DAFTAR GAMBAR vi

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang 1

1.2 Perumusan Masalah 2

1.3 Pembatasan Masalah 3

1.4 Tujuan Penelitian 3

1.5 Sistematika Penulisan 3

BAB II LANDASAN TEORI

2.1 Persamaan Diferensial 4

2.2 Masalah Nilai Awal (*Initial Value*) 5

2.3 Fungsi Kontinu 5

2.4 Barisan Konvergen dan Konvergen Seragam 5

2.5 Uji Rasio (Uji Perbandingan) 7

2.6 Fungsi Terbatas 7

2.7 Fungsi Lipschitz 8

2.8 Prinsip Induksi Matematika 10

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Metode Iterasi Picard 12

3.2 Aplikasi Metode Iterasi Picard dalam Menghampiri Solusi Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu 23

BAB IV **PENUTUP**

4.1 Kesimpulan 33

4.2 Saran 33

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

No Halaman

3.2.1 Kurva Iterasi Picard ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 untuk $y' = 2(y + 1)$ 5

3.2.2 Kurva iterasi Picard ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 untuk $y' = t + t^2y$ 9

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial merupakan salah satu kajian matematika yang konsep-konsepnya banyak digunakan dalam menggambarkan keadaan kehidupan nyata. Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan satu atau lebih turunan fungsi yang belum diketahui, dan atau persamaan itu mungkin juga melibatkan fungsi itu sendiri dan konstanta. Jika dalam persamaan tersebut turunan fungsi itu hanya tergantung pada satu variabel bebas, maka disebut Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan bila tergantung pada lebih dari satu variabel bebas disebut Persamaan Diferensial Parsial (PDP). [5]

Ada banyak metode untuk menentukan solusi persamaan diferensial ini, beberapa diantaranya seperti metode analitik, metode kualitatif, dan metode numerik. Pada saat sekarang metode numerik merupakan metode yang fleksibel. Metode ini berkembang sesuai dengan perkembangan komputer, dan dapat menyelesaikan persamaan diferensial dari level yang mudah sampai pada level yang kompleks. Meskipun solusi tidak diketahui secara eksplisit maupun implisit namun data yang diberikan dapat divisualisir dalam bentuk grafik sehingga dapat dianalisis dengan baik. Metode ini berdasarkan prinsip-prinsip pendekatan (aproksimasi) sehingga solusi yang diperoleh adalah solusi hampiran (solusi pendekatan).

Salah satu metode yang peranannya sangat penting di dalam menentukan solusi aproksimasi, yang mana hasilnya diharapkan dapat mendekati solusi eksak adalah metode iterasi Picard atau juga dikenal dengan Metode *successive* *approximation*. Metode iterasi Picard (*successive approximation)* pertama kali dikenalkan oleh Charles Emile Picard pada tahun 1890.

Metode iterasi Picard merupakan metode yang tanpa melalui tahap prediktor (untuk menentukan nilai awal) dan korektor (untuk menentukan nilai baru) yang sekaligus langkah akhir dari pengerjaan suatu metode, serta proses iterasi tidak hanya solusi aproksimasi tetapi pada fungsi.[6]

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian di atas, permasalahan yang akan dibahas pada penelitian ini adalah bagaimana penggunaan metode iterasi Picard (*Successive Approximation*) untuk menghampiri solusi persamaan diferensial biasa.

1.3 Pembatasan Masalah

Pada penelitian ini masalah akan dibatasi untuk mencari hampiran solusi persamaan diferensial biasa orde satu dengan diketahui nilai awal.

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah menggunakan metode iterasi Picard (*Successive Approximation)* untuk menghampiri solusi persamaan diferensial biasa dan diaplikasikan pada beberapa contoh soal.

1.4 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini terdiri dari 4 bab dan beberapa sub-bab. Bab I Pendahuluan, yang berisi: latar belakang, rumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan. Bab II Landasan Teori, yang berisi: persamaan diferensial, masalah nilai awal (*Initial Value*), fungsi kontinu, barisan konvergen dan konvergen seragam, uji rasio (uji perbandingan), fungsi terbatas, fungsi Lipschitz dan prinsip induksi matematika (PIM). Bab III Pembahasan, yang berisi: metode iterasi Picard dan aplikasi dalam menghampiri solusi persamaan diferensial orde satu. Bab IV Kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang meliputi turunan fungsi dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas. Jika dalam persamaan tersebut turunan fungsi itu hanya tergantung pada satu variabel bebas, maka disebut Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan bila tergantung pada lebih dari satu variabel bebas disebut Persamaan Diferensial Parsial (PDP). [5]

Contoh :

$\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 3x = 0$ (Persamaan diferensial biasa)

$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} + xy = 5$ (Persamaan diferensial parsial)

Definisi 2.1.1

Suatu persamaan diferensial biasa orde *n* adalah suatu persamaan diferensial yang dapat ditulis dalam bentuk

$$y^n = F\left(x; y; y'; y'', \dots; y^{(n-1)}\right)$$

dengan $y^{(j)}$ adalah turunan ke-j dari fungsi y terhadap x.

Definisi 2.1.2

Solusi dari persamaan diferensial biasa orde *n* adalah suatu fungsi $y(x)$ dengan $\in J \subseteq \mathbb{R}$, yang memenuhi persamaan diferensial tersebut.

2.2 Masalah Nilai Awal (*Initial Value*)

Definisi 2.2.1 [7]

Masalah nilai awal (MNA) adalah sebuah masalah yang melibatkan satu atau lebih fungsi yang tidak diketahui beserta turunan-turnannya dalam sebuah persamaan yang memenuhi syarat awal yang diberikan.

Persamaan diferensial orde satu secara umum dapat ditulis dengan

$$y' = \frac{dy}{dt} = f(y,t)$$

dimana f kontinu atas variabel t, y pada domain D (dalam bidang ty). Misal (t_0, y_0) adalah titik pada D, maka masalah nilai awal yang berkenaan dengan $y' = f(y,t)$ adalah masalah untuk menentukan solusi y yang memenuhi nilai awal $y(t_0) = y_0$. Dengan notasi umum sebagai berikut

$$y' = f(y,t),\ y(0) = y_0.$$

2.3 Barisan Konvergen dan Konvergen Seragam

Definisi 2.3.1 [2]

Misalkan suatu fungsi $f: A \to \mathbb{R}$. Barisan fungsi f_k dengan $k = 0,1,2,\ldots$ dikatakan konvergen ke $f(t)$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada bilangan bulat $\mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $k \geq \mathbb{N}$ berlaku $|f_k(t) - f(t)| < \varepsilon$ untuk setiap $t \in A$.

Teorema 2.3.2 [2]

Misalkan $\langle f_k \rangle$ konvergen seragam ke f pada suatu interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Jika f_k kontinu di $c \in I$ untuk tiap $k \in \mathbb{N}$, maka f juga kontinu di c.

Bukti :

Diberikan $\varepsilon > 0$, pilih $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $k \geq \mathbb{N}$ dan $t \in I$ berlaku

$$|f_k(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Karena f_K kontinu di c, maka suatu interval $I_\delta \subseteq I$ yang memuat c sedemikian sehingga untuk setiap $t \in I_\delta(t)$ berlaku

$$|f_K(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Jadi, untuk setiap $t \in I_\delta(c)$, berlaku

$$\begin{aligned} |f(t) - f(c)| &\leq |f(t) - f_K(t)| + |f_K(t) - f_K(c)| + |f_K(c) - f(c)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \blacksquare \end{aligned}$$

Ini membuktikan bahwa f kontinu di c.

Teorema 2.3.3 [2]

Misalkan $f_k(t)$ barisan fungsi kontinu pada interval [a,b] dan asumsikan $f_k(t) \to f(t)$ seragam ke fungsi f. Maka f terintegral Riemann dan

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(t)\, dt = \int_a^b \lim_{k\to\infty} f_k(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt$$

2.4 Kekontinuan Fungsi

Definisi 2.4.1 [2]

Fungsi $f(t)$ dikatakan kontinu di $c \in D_f$ jika $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0 \ni$

$$|t - c| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(c)| < \varepsilon.$$

2.5 Uji Rasio (Uji Perbandingan)

Misalkan suatu deret didefinisikan oleh $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-b)^k$ dan $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}(x-b)^{k+1}}{a_k(x-b)^k}\right| = L$, maka

1. Jika $L < 1$, deret $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-b)^k$ konvergen (mutlak)
2. Jika $L > 1$, deret $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-b)^k$ divergen. [2]

2.6 Fungsi Terbatas

Definis 2.6.1 [2]

Fungsi $f: A \to \mathbb{R}$, f dikatakan terbatas pada A jika terdapat $M > 0$ sedemikian sehingga $|f(t)| \leq M, \forall t \in A$.

Contoh

Buktikan bahwa fungsi $f(t) = \frac{1}{t}$ terbatas pada $[1, \infty]$.

Penyelesaian:

Akan dicari $M > 0$ sehingga $|f(t)| \leq M, \forall t \in A$.

Dengan memperhatikan bahwa

$$1 \leq t \leftrightarrow \frac{1}{t} \leq 1$$

$$\leftrightarrow \left|\frac{1}{t}\right| \leq 1$$

maka pilih $M = 1 \ni \left|\frac{1}{t}\right| \leq 1, \forall t \in [1, \infty]$.

Dengan demikian $f(t)$ kontinu pada $[1, \infty]$ dan terbatas pada $[1, \infty]$.■

Teorema 2.5.2 (Keterbatasan) [2]

Misalkan $|f| < M$ dan $a < b$. Maka

1. $\int_a^b f(t)\, dt \leq M(b-a)$

2. $\int_a^b f(t)\,dt \leq \left|\int_a^b f(t)\right| \leq \int_a^b |f(t)|\ dt$

Teorema 2.6.3 [2]

Misalkan $I = [a, b]$ interval tertutup terbatas dan fungsi $f: I \to \mathbb{R}$ kontinu pada I maka f terbatas pada I.

2.7 Fungsi Lipschitz

Definisi 2.7.1 [2]

Sebuah fungsi $f(t, y)$ dikatakan memenuhi kondisi Lipschitz di y pada bujur sangkar $R = \{(t, y) | a \leq t \leq b, -\infty \leq y \leq \infty\}$. Jika terdapat bilangan $K > 0$ yang disebut dengan konstanta Lipschitz, maka

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

untuk setiap t, y_1, y_2 pada bujur sangkar R.

Contoh :

Buktikan bahwa $f(t, y) = ty^2$ adalah Lipschitz pada bujur sangkar $-1 < t < 1$, $-1 < y < 1$.

Penyelesaian :

Akan dicari K sehingga

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

Untuk $f(t, y) = ty^2$, yaitu akan dibuktikan bahwa

$$|ty_1^2 - ty_2^2| \leq K|y_1 - y_2|.$$

Dengan memperhatikan bahwa

$$|ty_1^2 - ty_2^2| = |t(y_1^2 - y_2^2)| = |t(y_1 - y_2)(y_1 + y_1)|$$
$$= |t||y_1 - y_2||y_1 + y_1|$$

maka

$$|t(y_1 - y_2)(y_1 + y_1)| \leq K|y_1 - y_2|$$

$$|t||y_1 - y_2||y_1 + y_1| \leq K|y_1 - y_2|$$

$$|t||y_1 + y_1| \leq K.$$

Karena $-1 < t < 1$ dan $-1 < y < 1$, maka

$$|t||y_1 + y_1| \leq 1 \times 2 = 2.$$

Pilih $K = 2$, demikian sehingga $|ty_1^2 - ty_2^2| \leq 4|y_1 - y_2|$ untuk setiap $-1 < t < 1$, $-1 < y < 1$.

Oleh karenanya f adalah fungsi Lipschitz.■

Teorema 2.7.2 (Teorema Lipschitz)

Andaikan $f(t, y)$ terdefinisi dalam domain $D \in \mathbb{R}^2$ dan ada konstanta $K > 0$ dimana

$$\left|\frac{df}{dy}(t, y)\right| \leq K \text{ untuk semua } (t, y) \in D$$

maka f memenuhi kondisi Lipschitz.

Teorema 2.7.3

Misalkan $D = \{(t, y)|a \leq t \leq b, -\infty \leq y \leq \infty\}$ dan $f(t, y)$ adalah fungsi kontinu dalam D, kemudian bila f memenuhi syarat Lipschitz dalam variabel y maka masalah nilai awal

$$y'(t) = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \ y(a) = \alpha$$

mempunyai solusi tunggal $y(t)$ untuk $a \leq t \leq b$.

Contoh :

Misalkan $y' = 1 + t\sin(ty), 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0$. Tentukan apakah persamaan ini mempunyai mempunyai solusi tunggal.

Penyelesaian

Misalkan $y' = 1 + t\sin(ty)$, maka $f(t,y) = 1 + t\sin(ty)$. Dengan menerapkan teorema dasar kalkulus, yaitu untuk sebarang $y_1 < y_2$, maka ada bilangan $\xi \in (y_1, y_2)$ sedemikian sehingga

$$\frac{f(t,y_2) - f(t,y_1)}{y_1 - y_2} = \frac{\partial}{\partial y} f(t,\xi) = t^2\cos(t\xi)$$

Kemudian

$$\begin{aligned} f(t,y_2) - f(t,y_1) &= (y_2 - y_1)(t^2\cos(t\xi)) \\ |f(t,y_2) - f(t,y_1)| &= |(y_2 - y_1)(t^2\cos(t\xi))| \\ &\leq |y_2 - y_1||t^2\cos(t\xi)| \\ &\leq |y_2 - y_1|\left|\max_{0\leq t\leq 2} t^2\cos(t\xi)\right| \\ &= 4|y_2 - y_1| \end{aligned}$$

Dengan demikian kondisi Lipschitz terpenuhi, yaitu

$$|f(t,y_2) - f(t,y_1)| \leq 4|y_2 - y_1|,$$

dimana konstanta Lipschitznya adalah $K = 4$, berarti persamaan ini mempunyai solusi tunggal.

2.8 Prinsip Induksi Matematika

Prinsip induksi matematika merupakan suatu metode pembuktian yang digunakan untuk membuktikan proposisi perihal bilangan bulat. Prinsip induksi matematika berbunyi: Misalkan $P(n)$ adalah proposisi perihal bilangan bulat positif, dan akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n. Untuk membuktikan hal tersebut, hanya perlu ditunjukkan bahwa:

1). $P(1)$ benar, dan

2). Jika $P(n)$ benar, maka $P(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$

sehingga $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n. [5]

BAB III

APROKSIMASI SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA DENGAN METODE ITERASI PICARD (*SUCCESSIVE APPROXIMATION*)

3.1 Metode Iterasi Picard

Misalkan masalah nilai awal (MNA) didefinisikan oleh

$$y' = f(t, y) \text{ dengan } y(t_0) = y_0 \quad \text{.......................(3.1.1)}$$

maka terdapat sebuah fungsi $y = \phi(t)$ yang memenuhi MNA dan juga merupakan penyelesaian dari persamaan integral

$$\phi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \phi(s)\big)\, ds \quad \text{.......................(3.1.2)}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (3.1.2) digunakan sebuah metode numerik yang dikenal dengan metode iterasi Picard *(method of successive approximation).* Metode iterasi Picard dimulai dengan menentukan nilai awal ϕ_0 dan selanjutnya nilai awal ini akan digunakan untuk aproksimasi fungsi berikutnya. Secara lebih ringkasnya, barisan iterasi Picard dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\phi_0(t) = y_0$$

$$\phi_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \phi_0(s)\big)\, ds$$

$$\phi_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \phi_1(s)\big)\, ds$$

$$\dots$$

$$\phi_k(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \phi_{k-1}(s)\big)\, ds$$

dimana $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots$ konvergen ke fungsi $\phi(t)$ yang memenuhi persamaaan (3.1.2).

Lema 3.1.1. *Jika f adalah fungsi Lipschitz dengan konstanta K, maka fungsi $\phi_k(t)$ yang didefinisikan oleh*

$$\left.\begin{aligned} \phi_0(t) &= y_0 \\ \phi_k(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \phi_{k-1}(s)\big)\, ds \end{aligned}\right\}$$

terdefinisi pada $R = \{(t,y) \mid |t - t_0| \le a, |y - y_0| \le b,\ a, b \in \mathbb{R}^+\}$ *dan memenuhi kondisi*

$$|\phi_k(t) - y_0| \le M|t - t_0|.. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.1.1)$$

Bukti.

Untuk $k = 0$ persamaan (3.1.1.1) dapat ditulis

$$|\phi_0(t) - y_0| \le M|t - t_0|$$

$$|y_0 - y_0| \le M|t - t_0|$$

$$0 \le M|t - t_0| \text{ atau } M|t - t_0| \ge 0$$

karena $(t_0, y_0) \in R$ maka $\phi_0(t)$terdefinisi pada R.

Untuk $k > 1$ akan dibuktikan secara induktif. Asumsikan bahwa lema tersebut berlaku untuk $k = n$, dan khususnya, bahwa $\phi_n(t)$ terdefinisi pada R. Oleh karenanya $\int_{t_0}^{t} f\big(s, \phi_n(s)\big)\, ds$ ada dan kontinu untuk semua $t \in I$, dan akan ditunjukkan bahwa $|\phi_{n+1}(t) - y_0| \le M|t - t_0|$ berlaku. Perhatikan persamaan berikut

$$|\phi_{n+1}(t) - y_0| = \left| y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \phi_n(s)\big)\, ds - y_0 \right| = \left| \int_{t_0}^{t} f\big(s, \phi_n(s)\big)\, ds \right|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \left| f\left(s, \phi_n(s)\right) \right| ds \qquad \text{..................(3.1.1.2)}$$

Karena $\phi_n(t)$ terdefinisi pada R, maka titik $\left(s, \phi_n(s)\right) \in R$ untuk semua s antara t_0 dan t. Dan karena fungsi $f(t, y)$ terbatas dan dibatasi oleh M pada R, maka

$$|\phi_{n+1}(t) - y_0| \leq \int_{t_0}^{t} \left| f\left(s, \phi_n(s)\right) \right| ds \leq \int_{t_0}^{t} M\, ds = M|t - t_0| \quad \text{...(3.1.1.3)}$$

Dengan demikian persamaan (3.1.1.1) terbukti. ■

Lema 3.1.2. *Misalkan $\phi_n(t)$ barisan iterasi Picard yang didefinisikan oleh*

$$\left.\begin{aligned} \phi_0(t) &= y_0 \\ \phi_n(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, \phi_{n-1}(s)\right) ds \end{aligned}\right\}$$

dan

$$s_n(t) = [\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)] \qquad \text{..................(3.1.2.1)}$$

Maka barisan $\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \ldots$ konvergen jika dan hanya jika

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(t) \qquad \text{..................(3.1.2.2)}$$

juga konvergen.

Bukti.

Karena

$$\begin{aligned} \phi_n &= \phi_0 + (\phi_1 - \phi_0) + (\phi_2 - \phi_1) + \cdots + (\phi_n - \phi_{n-1}) \\ &= \phi_0 + \sum_{i=1}^{n} (\phi_i - \phi_{i-1}) \qquad \text{..................(3.1.2.3)} \end{aligned}$$

maka

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = \lim_{n\to\infty} \left[\phi_0 + \sum_{i=1}^{n} (\phi_i - \phi_{i-1}) \right]$$

$$= \phi_0 + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\phi_i - \phi_{i-1})$$

$$= \phi_0 + \sum_{i=1}^{\infty}(\phi_i - \phi_{i-1}) \qquad \text{..................(3.1.2.4)}$$

Dan oleh karenanya barisan $\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \ldots$ konvergen jika dan hanya jika deret

$$S = \sum_{i=1}^{\infty}(\phi_i - \phi_{i-1})$$

konvergen.■

Lema 3.1.3. *Misalkan $s_n(t) = [\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)]$, K adalah sebuah konstanta Lipschitz dan M batas atas terkecil fungsi $f(t, y)$, maka*

$$|s_n(t)| = |\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)| \le K^{n-1}M\frac{|t-t_0|^n}{n!} \qquad \text{..............(3.1.3.1)}$$

Bukti.

Bukti akan dilakukan dengan menggunakan prinsip induksi.

Untuk $n = 1$, maka persamaan (3.1.3.1) dapat ditulis

$$|\phi_1(t) - \phi_0(t)| \le K^{1-1}M\frac{|t-t_0|^1}{1!} = M|t - t_0| \qquad \text{...........(3.1.3.2)}$$

sehingga benar (mengikuti langsung dari lema 3.1.1).

Untuk $n > 1$ asumsikan bahwa

$$|\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)| \le K^{n-1}M\frac{|t-t_0|^n}{n!} \qquad \text{..................(3.1.3.3)}$$

benar, akan ditunjukkan bahwa $|\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)| \le K^n M\frac{|t-t_0|^{n+1}}{n+1!}$ terdefinisi.

Perhatikan persamaan berikut

$$|\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)| = \left|y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_n(s))\,ds - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_{n-1}(s))\,ds\right|$$

$$= \left|\int_{t_0}^{t} f(s, \phi_n(s))\,ds - \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_{n-1}(s))\,ds\right| \qquad \text{......(3.1.3.4)}$$

maka dengan menggunakan ketaksamaan segitiga dan kondisi Lipschitz didapatkan hubungan

$$|\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} [f(s, \phi_n(s)) - f(s, \phi_{n-1}(s))]\, ds\right|$$

$$\leq K \int_{t_0}^{t} |\phi_n(s) - \phi_{n-1}(s)|\, ds \quad ....(3.1.3.5)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.1.3.3) pada persamaan (3.1.3.5) didapatkan

$$|\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)| \leq K \int_{t_0}^{t} K^{n-1} M \frac{|s - t_0|^n}{n!}\, ds$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} K K^{n-1} M \frac{|s - t_0|^n}{n!} ds$$

$$= \frac{K^n M}{n!} \int_{t_0}^{t} |s - t_0|^n\, ds$$

$$= \frac{K^n M}{(n+1)!} |t - t_0|^{n+1} \quad ....(3.1.3.6)$$

Oleh karena itu, persamaan (3.1.3.1) berlaku untuk semua n.∎

Lema 3.1.4 *Andaikan $f(t, y)$ terbatas, kontinu dan memenuhi kondisi Lipschitz, dan $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)]$ konvergen, maka barisan Iterasi Picard konvergen.*

Bukti.

Berdasarkan lema 3.1.3 didapatkan

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(K^{n-1} M \frac{|t - t_0|^n}{n!}\right)$$

$$= \frac{M}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n |t - t_0|^n}{n!}$$

$$= \frac{M}{K}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{K|t-t_0|^n}{n!} - 1\right)$$

$$= \frac{M}{K}\left(e^{K|t-t_0|} - 1\right)$$

$$\leq \frac{M}{K}\exp[K|t-t_0|] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.4.1)$$

Oleh karena itu, setiap suku pada deret S dibatasi suku yang sesuai pada deret pangkat untuk $\exp[K|t-t_0|]$. Dengan demikian, menurut uji perbandingan, deret S konvergen mutlak dan karena deret S konvergen, maka barisan $\phi_k(t)$ konvergen untuk beberapa batasan yang disebut ϕ.■

Lema 3.1.5 *Fungsi* $\phi = lim_{n\to\infty} \phi_n$ *terdefinsi dan kontinu pada R.*

Bukti.

Dari lema 3.1.4 diketahui bahwa barisan iterasi Picard konvergen. Pada bagian ini, akan ditunjukkan dua hal tambahan, yaitu

1. $\phi = \lim_{n\to\infty} \phi_n$ kontinu pada I
2. $\phi(t)$ terdefinisi pada R.

Untuk membuktikan kekontinuitas perlu ditunjukkan bahwa $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ sedemikian sehingga $|t_1 - t_2| < \delta$, maka $|\phi(t_1) - \phi(t_2)| < \varepsilon$. Andaikan $t_1, t_2 \in I$, maka

$$|\phi(t_1) - \phi(t_2)| = |\phi_n(t_1) - \phi_n(t_2)|$$

$$= \left| y_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, \phi_{n-1}(s))\, ds - y_0 - \int_{t_0}^{t_2} f(s, \phi_{n-1}(s))\, ds \right|$$

$$= \left| \int_{t_0}^{t_1} f(s, \phi_{n-1}(s))\, ds - \int_{t_0}^{t_2} f(s, \phi_{n-1}(s))\, ds \right|$$

$$= \left| \int_{t_2}^{t_1} f(s, \phi_{n-1}(s))\, ds \right|$$

$$\leq \int_{t_2}^{t_1} M\, ds$$

$$= M|t_1 - t_2| \qquad \text{.................(3.1.5.1)}$$

Ambil limit $n \to \infty$, maka

$$|\phi(t_1) - \phi(t_2)| = \lim_{n\to\infty} |\phi_n(t_1) - \phi_n(t_2)| \leq M|t_1 - t_2|. \qquad \text{..........(3.1.5.2)}$$

Misalkan $\varepsilon > 0$ dan pilih $\delta = \varepsilon/M$, untuk setiap $|t_1 - t_2| < \delta$, maka

$$|\phi(t_1) - \phi(t_2)| \leq M|t_1 - t_2| \leq M\delta \leq \varepsilon \qquad \text{.................(3.1.5.3)}$$

dengan demikian $\phi(t)$ kontinu pada I.

Untuk membuktikan bahwa $\phi(t)$ terdefinisi, ganti $t_1 = t$ dan $t_2 = t_0$ pada persamaan (3.1.5.2), maka

$$|\phi(t) - \phi(t_0)| = |\phi(t) - y_0| \leq M|t - t_0| \qquad \text{.................(3.1.5.4)}$$

Oleh karenanya $\phi(t)$ terdefinisi pada R untuk setiap $t \in I$.■

Teorema 3.1.6 (*Successive Approximation* - Iterasi Picard)

Misalkan a dan b konstanta riil positif dan andaikan $f(t,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ terbatas (dengan batas atas terkecil M), kontinu dan memenuhi kondisi Lipschitz (dengan konstanta Lipshitz K) pada persegi panjang

$$R = \{(t,y): |t - t_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \qquad \text{.................(3.1.6.1)}$$

maka successive approximation yang didefinisikan oleh

$$\left.\begin{aligned} \phi_0(t) &= y_0 \\ \phi_k(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_{k-1}(s))\, ds \end{aligned}\right\} \qquad \text{.................(3.1.6.2)}$$

konvergen untuk solusi masalah nilai awal ($\frac{dy}{dt} = f(t,y), y(t_0) = y_0$) *pada interval*

$$I = \left\{t: |t - t_0| \leq a = min(a, \tfrac{b}{M})\right\}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.6.3)$$

Bukti

Dari lema 3.1.1 sampai lema 3.1.5 telah dibuktikan bahwa barisan iterasi Picard $\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \ldots$ konvergen ke sebuah fungsi kontinu $\phi(t)$ pada R. Selanjutnya yang harus ditunjukkan adalah $\phi(t)$ memenuhi masalah nilai awal, yaitu dengan menunjukkan bahwa $\phi(t)$ memenuhi persamaan integral

$$\phi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))\, ds.$$

Misalkan didefinisikan sebuah fungsi

$$F(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))\, ds \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.6.4)$$

karena $F(t_0) = y_0$, F memenuhi kondisi awal dan karena

$$F'(t) = f(t, \phi(t)) = \phi'(t)$$

maka F juga memenuhi persamaan diferensial. Dengan demikian, untuk membuktikan bahwa iterasi Picard konvergen untuk solusi dari masalah nilai awal, maka harus dibuktikan bahwa

$$\phi(t) = F(t) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.6.5)$$

dimana $\phi(t)$ didefinisikan oleh

$$\phi(t) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(t). \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.6.6)$$

Selanjutnya, persamaan (3.1.6.6) berlaku jika dan hanya jika

$$\lim_{n\to\infty} |F(t) - \phi_n(t)| = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.6.7)$$

berlaku. Persamaan (3.1.6.7) merupakan tujuan dari teorema ini.

Bukti dimulai dengan menghitung selisih dari $F(t)$ dan $\phi_{n+1}(t)$, yaitu

$$|F(t) - \phi_{n+1}(t)| = \left| y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))\, ds - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_n(s))\, ds \right|$$

$$= \left| \int_{t_0}^{t} [f(s, \phi(s)) - f(s, \phi_n(s))] ds \right|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \left| f(s, \phi(s)) - f(s, \phi_n(s)) \right| ds$$

$$\leq K \int_{t_0}^{t} |\phi(s) - \phi_n(s)| ds \qquad \text{..................(3.1.2.8)}$$

dimana langkah terakhir memenuhi kondisi lipschitz.

Dari persamaan (3.1.2.3), maka

$$\phi_n(s) = \phi_0(s) + \sum_{i=1}^{n} (\phi_i(s) - \phi_{i-1}(s)) \qquad \text{..................(3.1.6.9)}$$

$$\phi(s) = \lim_{n \to \infty} \phi_n(s) = \phi_0(s) + \sum_{i=1}^{\infty} (\phi_i(s) - \phi_{i-1}(s)) \qquad \text{.........(3.1.6.10)}$$

Selanjutnya, ambil selisih dari persamaan (3.1.6.11) dan (3.1.6.10), yaitu

$$\phi(s) - \phi_n(s) = \sum_{i=1}^{n} (\phi_i(s) - \phi_{i-1}(s)) - \sum_{i=1}^{\infty} (\phi_i(s) - \phi_{i-1}(s))$$

$$= \sum_{i=n+1}^{\infty} (\phi_i(s) - \phi_{i-1}(s))$$

$$\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} |\phi_i(s) - \phi_{i-1}(s)| \qquad \text{................(3.1.6.11)}$$

Dengan menerapkan lema 3.1.3 pada persamaan (3.1.6.11), maka didapatkan

$$|\phi_i(s) - \phi_{i-1}(s)| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \left[K^{i-1} M \frac{|s - t_0|^i}{i!} \right]$$

$$= \frac{M}{K} \sum_{i=n+1}^{\infty} \left[\frac{[K|s - t_0|]^i}{i!} \right] \qquad \text{..................(3.1.6.12)}$$

Substitusikan $j = i - n - 1$. Maka, jika $i = n + 1, j = 0$, dan jika $i \to \infty$, $j \to \infty$.

Karena $i = j + n + 1$, maka persamaan (3.1.6.12) menjadi

$$|\phi_i(s) - \phi_{i-1}(s)| \le \frac{M}{K}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{[K|s-t_0|]^{j+n+1}}{(j+n+1)!}$$

$$= \frac{M[K|(s-t_0)|]^{n+1}}{K}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{[K|(s-t_0)|]^{j}}{(j+n+1)!} \qquad \text{.............(3.1.6.13)}$$

Tulis

$$(j+n+1)! = (j+n+1)(j+n)\cdots(j+1)(j)(j-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

$$= (j+n+1)(j+n)(j+n-1)\cdots(j+3)(j+2)(j+1)j!$$

$$\ge (n+1)(n)(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot j!$$

$$= (n+1)!\,j! \qquad \text{..............................(3.1.6.14)}$$

oleh karena itu

$$\frac{1}{(j+n+1)!} \le \frac{1}{(n+1)!\,j!} \qquad \text{..............................(3.1.6.15)}$$

Substitusikan persamaan (3.1.6.15) pada (3.1.6.13)

$$|\phi_i(s) - \phi_{i-1}(s)| \le \frac{M[K|s-t_0|]^{n+1}}{K(n+1)!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{[K|s-t_0|]^{j}}{j!}$$

$$= \frac{M[K|s-t_0|]^{n+1}e^{K|s-t_0|}}{K(n+1)!} \qquad \text{................(3.1.6.16)}$$

Definisikan fungsi

$$\mathcal{E}_n(s) = \frac{[K|s-t_0|]^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{..................................(3.1.6.17)}$$

maka

$$|\phi(s) - \phi_n(s)| \le \frac{M}{K}\mathcal{E}_n(s)e^{K|s-t_0|} \qquad \text{..................(3.1.6.18)}$$

Substitusikan persamaan (3.1.6.18) pada persamaan (3.1.6.8)

$$|F(t) - \phi_{n+1}(t)| \le K\int_{t_0}^{t}|\phi(s) - \phi_n(s)|ds$$

$$\le K\int_{t_0}^{t}\frac{M}{K}\mathcal{E}_n(s)e^{K|s-t_0|}ds$$

yaitu barisan iterasi Picard $\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \dots$ konvergen untuk solusi masalah nilai awal.■

Algoritma 3.1.7 (Iterasi Picard) [12]

Misalkan masalah nilai awal didefinisikan oleh

$$y' = f(t, y) \,;\, y(t_0) = y_0.$$

maka, solusi MNA di atas diselesaikan

1. Masukkan : $f(t, y),\ t_0$ dan y_0.
2. Misal $\phi_0(t) = y_0$.
3. Untuk $i = 1, 2, \dots, n$, hitung

$$\phi_{i+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \phi_i(s)\big)\, ds$$

4. Tentukan $y(t) = \phi(t) = \lim_{n\to\infty} \phi_{n+1}(t)$ konvergen.
5. Tunjukkan bahwa $y(t)$ merupakan solusi dari persamaan diferensial biasa dan masalah nilai awal.

3.2 Aplikasi Metode Iterasi Picard Dalam Menghampiri Solusi Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu

Contoh 3.2.1

Selesaikan persamaan diferensial biasa berikut dengan menggunakan metode iterasi Picard

$$y' = 2(y + 1); \quad y(0) = 0 \qquad \dots\dots\dots\dots(3.1.2.1)$$

Penyelesaian :

Dari persamaan (3.1.2.1) diperoleh $f(t, y) = 2(y + 1), \quad t_0 = 0, \quad y_0 = 0.$

1. Akan dibuktikan $f(t,y) = 2(y+1)$ memenuhi kondisi Lipschitz.

   Untuk sebarang $y_1 < y_2$, maka ada bilangan $\xi \in (y_1, y_2)$ sedemikian sehingga

   $$\frac{f(t,y_2) - f(t,y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{\partial}{\partial y} f(t,\xi) = 2$$

   kemudian

   $$\begin{aligned} f(t,y_2) - f(t,y_1) &= (y_2 - y_1)(2) \\ |f(t,y_2) - f(t,y_1)| &= |(y_2 - y_1)(2)| \\ &\leq |y_2 - y_1||(2)| \\ &\leq |y_2 - y_1| 2 \\ &= 2|y_2 - y_1| \end{aligned}$$

   Dengan demikian sarat Lipschitz terpenuhi, yaitu $|f(t,y_2) - f(t,y_1)| \leq K|y_2 - y_1|$, dimana konstanta Lipschitznya adalah 2, berarti persamaan itu mempunyai solusi tunggal.

2. Akan dicari barisan iterasi Picard, yaitu

   $$\phi_0(t) = y_0 = 0$$

   Gunakan persamaan (3.1.1.2) untuk memperoleh barisan solusi persamaan diferensial biasa diatas, sehingga diperoleh subbarisannya

   $$\begin{aligned} \phi_k(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_{k-1}(s))\, ds \\ &= 0 + \int_0^t 2(\phi_{k-1}(s) + 1)\, ds \\ &= \int_0^t 2(\phi_{k-1}(s) + 1)\, ds \end{aligned}$$

   dan oleh karenanya didapatkan

   $$\phi_1(t) = \int_0^t 2(\phi_0(s) + 1)\, ds = \int_0^t 2(0+1)\, ds = \int_0^t 2\, ds = 2t$$

$$\phi_2(t) = \int_0^t 2(\phi_1(s) + 1)\, ds = \int_0^t 2(2s + 1)\, ds = \frac{2^2}{2!}t^2 + 2t$$

$$\phi_3(t) = \int_0^t 2(\phi_2(s) + 1)\, ds = \int_0^t 2\left(\frac{2^2}{2!}s^2 + 2s + 1\right) ds$$

$$= \frac{2^3}{3!}t^3 + \frac{2^2}{2!}t^2 + 2t$$

$$\phi_4(t) = \int_0^t 2(\phi_3(s) + 1)\, ds = \int_0^t 2\left(\frac{2^3}{3!}t^3 + \frac{2^2}{2!}t^2 + 2t + 1\right) ds$$

$$= \frac{2^4}{4!}t^4 + \frac{2^3}{3!}t^3 + \frac{2^2}{2!}t^2 + 2t$$

Maka barisan solusi persamaan diferensial adalah

$$\phi_n(t) = 2t + \frac{2^2}{2!}t^2 + \frac{2^3}{3!}t^3 + \frac{2^4}{4!}t^4 + \cdots + \frac{2^n}{n!}t^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$$

Untuk membuktikan persamaan di atas benar, maka akan dibuktikan dengan prinsip induksi matematika.

Misalkan

$$P(n) = \phi_n(t) = 2t + \frac{2^2}{2!}t^2 + \frac{2^3}{3!}t^3 + \frac{2^4}{4!}t^4 + \cdots + \frac{2^n}{n!}t^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$$

1. Untuk $n = 1$, maka $P(1) = \phi_1(t) = 2t$ dan $\frac{(2t)^1}{1!} = 2t$. Dengan demikian $P(1)$ benar.
2. Andaikan $P(n)$ benar, yaitu $\phi_n(t) = 2t + \frac{2^2}{2!}t^2 + \frac{2^3}{3!}t^3 + \frac{2^4}{4!}t^4 + \cdots + \frac{2^n}{n!}t^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$, akan dibuktikan $P(n+1)$ benar, yaitu $\phi_{n+1}(t) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(2t)^k}{k!}$.

Perhatikan persamaan berikut

$$\phi_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \phi_n(s)\big)\, ds$$

dimana

$$f\big(s, \phi_n(s)\big) = 2(\phi_n(s) + 1)$$

$$= 2\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{(2s)^k}{k!} + 1\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(2)^{k+1} s^k}{k!} + 2$$

maka

$$\phi_{n+1}(t) = \int_0^t \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(2)^{k+1} s^k}{k!} + 2\right) ds$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(2)^{k+1}}{k!}\right) \int_0^t s^k\, ds + \int_0^t 2\, ds$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(2)^{k+1}}{k!} \frac{t^{k+1}}{k+1} + 2t$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(2)^{k+1} (t)^{k+1}}{(k+1)!} + 2t$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(2)^{k+1} (t)^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{(2)^{0+1} (t)^{0+1}}{(0+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2)^{k+1} (t)^{k+1}}{(k+1)!}$$

Definisikan indeks $j = k + 1$ pada persamaan di atas, yaitu $k = j - 1$. Untuk $k = 0$, maka $j = 1$. Dan untuk $k = n$, maka $j = n + 1$. Oleh karena persamaan di atas menjadi

Keterangan :

Kurva warna merah : solusi

Kurva berwarna pink : ϕ_1

Kurva berwarna biru : ϕ_2

Kurva berwarna hitam : ϕ_3

Kurva berwarna hijau : ϕ_4

Contoh 3.2.2

Misalkan masalah nilai awal didefinisikan oleh

$$y' = t + t^2 y \text{ dengan } y(0) = 0 \qquad \text{..................(3.2.2.1)}$$

Akan ditentukan solusi dari persamaan (3.2.2.1) dengan metode iterasi Picard, yaitu sebagai berikut

Persamaan (3.2.1.1) dapat dinyatakan sebagai $f(t,y) = t + t^2 y,\ t_0 = 0$ dan $y_0 = 0$.

1. Akan dibuktikan $f(t,y) = t + t^2 y$ memenuhi kondisi Lipschitz.

   Untuk sebarang $y_1 < y_2$, maka ada bilangan $\xi \in (y_1, y_2)$ sedemikian sehingga

   $$\frac{f(t,y_2) - f(t,y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{\partial}{\partial y} f(t,\xi) = t^2$$

   Kemudian

   $$f(t,y_2) - f(t,y_1) = (y_2 - y_1)(t^2)$$

   $$\begin{aligned} |f(t,y_2) - f(t,y_1)| &= |(y_2 - y_1)(t^2)| \\ &\le |y_2 - y_1||(t^2)| \\ &\le |y_2 - y_1| \left|\max_{a \le t \le b} (t^2)\right| \end{aligned}$$

$$= b^2|y_2 - y_1|$$

Dengan demikian sarat Lipschitz terpenuhi yaitu $|f(t,y_2) - f(t,y_1)| \leq K|y_2 - y_1|$, dimana konstanta Lipschitznya adalah b^2, berarti persamaan itu mempunyai solusi tunggal.

2. Akan dicari barisan iterasi Picard, yaitu

$$\phi_0(t) = y_0 = 0.$$

Untuk memperoleh barisan solusinya maka terlebih dahulu akan ditentukan iterasi subbarisannya, yaitu

$$\phi_k(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \phi_{k-1}(s)\big)\, ds = \int_0^t \big(s + s^2\phi_{k-1}(s)\big)\, ds$$

Maka

$$\phi_1(t) = \int_0^t \big(s + s^2\phi_0(s)\big)\, ds = \int_0^t (s)\, ds = \frac{1}{2}t^2$$

$$\phi_2(t) = \int_0^t \big(s + s^2\phi_1(s)\big)\, ds = \int_0^t \left(s + s^2\left(\frac{1}{2}s^2\right)\right) ds$$

$$= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{10}t^5$$

$$\phi_3(t) = \int_0^t \big(s + s^2\phi_2(s)\big)\, ds$$

$$= \int_0^t \left(s + s^2\left(\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{10}s^5\right)\right) ds$$

$$= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{80}t^8$$

$$\phi_4(t) = \int_0^t \big(s + s^2\phi_3(s)\big)\, ds$$

$$= \int_0^t \left(s + s^2\left(\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{10}s^5 + \frac{1}{80}s^8\right)\right) ds$$

$$=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{80}t^8+\frac{1}{880}t^{11}$$

Dengan demikian, barisan fungsi dari persamaan (3.2.1.1) dapat ditulis sebagai

$$\phi_n(t)=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{80}t^8+\frac{1}{880}t^{11}+\cdots+\frac{(t)^{3n-1}}{2.5.8\ldots(3n-1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(t)^{3k-1}}{2.5.8\ldots(3k-1)}$$

Untuk membuktikan persamaan di atas benar, maka akan dibuktikan dengan prinsip induksi matematika.

Misalkan

$$P(n)=\phi_n(t)=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{80}t^8+\frac{1}{880}t^{11}+\cdots+\frac{(t)^{3n-1}}{2.5.8\ldots(3n-1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(t)^{3k-1}}{2.5.8\ldots(3k-1)}$$

1. Untuk $n=1$, maka $P(1)=\phi_1(t)=\frac{1}{2}t^2$ dan . Dengan demikian $P(1)$ benar.
2. Andaikan $P(n)$ benar, yaitu $\phi_n(t)=\frac{(t)^{3n-1}}{2.5.8\ldots(3n-1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(t)^{3k-1}}{2.5.8\ldots(3k-1)}$

   Akan dibuktikan $P(n+1)$ benar, yaitu $\phi_{n+1}(t)=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(t)^{3k-1}}{2.5.8\ldots(3k-1)}$

   Perhatikan persamaan berikut

$$\phi_{n+1}(t)=\int_0^t\left(s+s^2\phi_n(t)\right)ds$$

$$=\int_0^t\left(s+s^2\left[\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{5}s^5+\cdots+\frac{(s)^{3n-1}}{2.5.8\ldots(3n-1)}\right]\right)ds$$

$$=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{10}t^5+\frac{1}{40}t^8+\cdots+\frac{(t)^{3n+2}}{2.5.8\ldots(3n-1)(3n+2)}$$

Dengan demikian ϕ_{n+1} benar. Oleh karenanya, ϕ_n benar.

Selanjutnya, barisan iterasi Picard konvergen jika dan hanya jika deret

$$\phi(t) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(t)^{3k-1}}{2.5.8\ldots(3k-1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t)^{3k-1}}{2.5.8\ldots(3k-1)}$$

juga konvergen. Dengan menggunakan uji rasio, maka untuk setiap t,

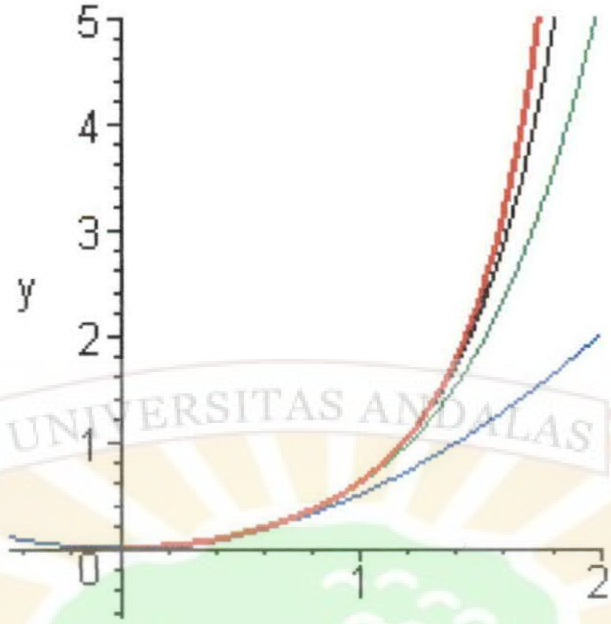
$$\left|\frac{(t)^{3k+2}}{2.5.8\ldots(3k-1)(3k+2)}\frac{2.5.8\ldots(3k-1)}{(t)^{3k-1}}\right| = \frac{t}{3k+2} \to 0, k \to \infty$$

Sehingga $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t)^{3k-1}}{2.5.8\ldots(3k-1)}$ konvergen untuk setiap t. Oleh karenanya, solusi eksak (dengan menggunakan Maple) adalah

$$\phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t)^{3k-1}}{2.5.8\ldots(3k-1)}$$

$$= \frac{e^{\left(\frac{1}{6}t^3\right)} 9^{2/3}\left(t^3\, WhittakerM\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3}t^3\right) + 5 WhittakerM\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3}t^3\right)\right)}{10t(t^3)^{1/3}}$$

Dengan menggunakan Maple 7, kurva iterasi Picard dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.2.2 Kurva iterasi Picard ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 untuk $y' = t + t^2 y$

Keterangan :

Kurva warna merah : solusi

Kurva berwarna pink : ϕ_1

Kurva berwarna biru : ϕ_2

Kurva berwarna hitam : ϕ_3

BAB IV

KESIMPULAN

4.1 Kesimpulan

Misalkan sebuah persamaan diferensial biasa dengan masalah nilai awal yang didefinisikan oleh

$$y' = f(t, y) \text{ dengan } \quad y(t_0) = y_0.$$

Maka persamaan diferensial di atas mempunyai solusi tunggal yang dapat dihampiri dengan sebuah metode numerik yang dikenal dengan metode iterasi Picard, yaitu dengan menentukan barisan aproksimasinya

$$\phi_0(t) = y_0 \text{ dan}$$

$$\phi_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \phi_n(s)\big)\, ds \text{ untuk } n \geq 0$$

dimana barisan aproksimasinya konvergen ke sebuah fungsi $\phi(t)$ yang merupakan solusi eksak yang dapat dihampiri dengan $\phi(t) = lim_{n\to\infty} \phi_n(t)$.

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya, Penulis menyarankan agar membahas metode iterasi Picard untuk menentukan aproksimasi solusi persamaan diferensial orde tinggi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Boyce, William E. dan Ricard C. Diprima. 2001. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems Edisi ke-7*. John Wiley & Sons,Inc.

[2] Bartle, Robert G dan Donald R. Sherbert. 1994. *Introduction to Real Analysis , 2nd edition*. John Wiley and Sons, New york.

[3] Chasnov. Jeffrey R. 2009. *Introduction to differential Equation*.California, USA.

[4] Finizio, N and G. Ladas. 1988. *Persamaaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern edisi ke-2*. Alih Bahasa : Dra. Widiarti Santoso. Erlangga, Jakarta.

[5] Munir, Rinaldi. 2005. *Matematika Diskrit* Edisi Ketiga. Informatika, Bandung

[6] Neves, Armando G.M. 2006. Approximating Solution of Linear Ordinary Differential Equation with Periodic Coeffecients by Exact Picard Iterates. *The mathematica Journal. 10:1*. Wolfram Media, Inc.

[7] Paul Online Notes. Elementary Solution Methods for First-Order ODEs. *http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/*. 20 Maret 2011. 08:25:45.

[8] Phillips, H.B. 1922. *Differential Equation*. Jhon Wiley and Sons, New York.

[9] Seal, David. *Method of Successive Approximations*. Math 351 Spring 2005 Revised 3/3/05.

[10] Purcell, E.J, D. Varberg dan Steven E. Rigdon. 2003. *Kalkulus Edisi ke-5 jilid 1*. Alih Bahasa : I Nyoman Susila. Erlangga, Jakarta.

LAMPIRAN

Contoh 3.2.1

```
> f := (t,y) -> 2*(y+1);
```

$$f := (t, y) \to 2\,y + 2$$

```
> DE := diff(y(t),t) = f(t,y(t));
```

$$DE := \frac{\partial}{\partial t}\,y(t) = 2\,y(t) + 2$$

```
> Y[0] := t -> 0:
> for n from 1 to 4
   do
  int(f(s,Y[n-1](s)),s=0..t):
  Y[n] := unapply(%,t):
  end do:
  unassign('n');
> for n from 0 to 4 do y[n](t) = Y[n](t) end do;
unassign('n');
```

$$y_0(t) = 0$$

$$y_1(t) = 2\,t$$

$$y_2(t) = 2\,t^2 + 2\,t$$

$$y_3(t) = \frac{4}{3}\,t^3 + 2\,t^2 + 2\,t$$

$$y_4(t) = \frac{2}{3}\,t^4 + \frac{4}{3}\,t^3 + 2\,t^2 + 2\,t$$

[Solusi Eksak]

```
> soln := dsolve( {DE, y(0)=0} );
```

$$soln := y(t) = -1 + e^{(2\,t)}$$

[Membuat Kurva Iterasi Picard]

```
> plot( [rhs(soln),Y[n](t)$n=1..4], t=-3..3, y=-2..7,
color=[red,pink,blue,black,green], thickness=[2,1$4]);
```

```
> dsolve( {DE, y(0)=0}, y(t), type=series, order=9);
```

$$y(t) = 2\,t + 2\,t^2 + \frac{4}{3}\,t^3 + \frac{2}{3}\,t^4 + \frac{4}{15}\,t^5 + O(t^6)$$

Contoh 3.2.2

```
> f := (t,y) -> t+t^2*y;
```

$$f := (t, y) \rightarrow t + t^2\, y$$

```
> DE := diff(y(t),t) = f(t,y(t));
```

$$DE := \frac{\partial}{\partial t} y(t) = t + t^2\, y(t)$$

```
> Y[0] := t -> 0:
> for n from 1 to 3
   do
 int(f(s,Y[n-1](s)), s= 0..t):
 Y[n] := unapply(%,t):
 end do:
 unassign('n');
> for n from 0 to 3 do y[n](t) = Y[n](t) end do;
unassign('n');
```

$$y_0(t) = 0$$

$$y_1(t) = \frac{1}{2} t^2$$

$$y_2(t) = \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{10} t^5$$

$$y_3(t) = \frac{1}{80} t^8 + \frac{1}{10} t^5 + \frac{1}{2} t^2$$

[Solusi Eksak]

```
> soln := dsolve( {DE, y(0)=0} );
```

$$soln := y(t) = \frac{3}{10} \frac{e^{(1/6\, t^3)}\, 3^{(1/3)} \left(\frac{1}{t^3}\right)^{(1/3)} \left(t^3\, \mathrm{WhittakerM}\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3} t^3\right) + 5\, \mathrm{WhittakerM}\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3} t^3\right)\right)}{t}$$

```
> WhittakerM(1,2,0.5);
```

$$.1606687379$$

[Membuat Kurva Iterasi Picard]

```
> plot( [rhs(soln),Y[n](t)$n=1..3], t=0..2,
y=0..5,color=[red,blue,green,black],
thickness=[2,1$3]);
```

```
> dsolve( {DE, y(0)=0}, y(t), type=series, order=7);
```

$$y(t) = \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{10} t^5 + O(t^6)$$