



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar Unand.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Unand.

# **METODE ITERASI GAUSS SEIDEL DAN PERUMUMANNYA DALAM PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIEAR**

## **SKRIPSI**



**ROZIE YUSZALLY AKHMAD**  
**081043021**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**  
**UNIVERSITAS ANDALAS**  
**PADANG**  
**2012**

## TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa:

Nama : Rozie Yuszally Akhmad  
No. Buku Pokok : 0810432021  
Jurusan : Matematika  
Bidang : Terapan  
Judul Skripsi : Metode Iterasi Gauss Seidel dan Perumumannya

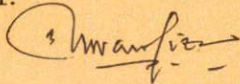
**dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Linier**

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal

**13 April 2012** berdasarkan ketentuan yang berlaku.

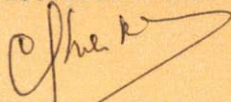
Pembimbing,

1.



Nova Naliza B, M.Si  
NIP. 19631104 199203 2 002

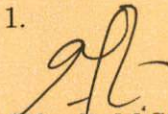
2.



Dr. Susila Bahri  
NIP. 19680303 199302 2 001

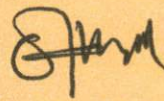
Penguji,

1.



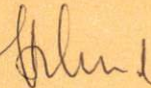
Efendi, M.Si  
NIP. 19780717 200212 1 002

2.



Dr. Syafrizal Sy  
NIP. 19670807 199309 1 001

3.



Dr. Admi Nazra  
NIP. 19730330 199903 1 002

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand



  
Dr. Syafrizal Sy

NIP. 19670807 199309 1 001

## UCAPAN TERIMA KASIH

**Syukur Alhamdulillah** atas semua nikmat yang telah ALLAH SWT berikan kepada saya, sehingga saya bisa menyelesaikan Skripsi ini dengan baik. Shalawat dan salam selalu tercurah kepada junjungan umat, nabi besar MUHAMMAD SAW yang telah membawa kita manusia keluar dari alam jahiliyah ke alam yang dipenuhi dengan ilmu pengetahuan alam.

**Terima kasih** Kepada kedua orangtuaku yang telah memberikan begitu banyak pengorbanan yang tidak akan mampu digantikan oleh apapun. Kepada abang, kakak, dan adik-adikku : Randy yuszally akhmad, SE, Rissa Yuszally Akhmad, S.Si, Randa yuszally akhmad dan Rayhan yuszally akhmad (insyaAllah juga akan menjadi sarjana).

**Dosen pembimbing**, Ibuk Nova Noliza Bakar, M.Si dan Ibuk Dr. Susila Bahri, beribu terima kasih atas bimbingan, saran dan waktunya Buk.

**Dosen penguji**, Bapak Efendi, M.Si, Bapak Dr. Admi Nazra, dan Bapak Dr. Syafrizal Sy, terima kasih atas pengarahan dan saran dalam penyelesaian tugas akhir ini.

**Dosen-dosen jurusan Matematika**, Pak Budi, Pak Werman, Pak Made, Pak Iqbal, Pak Yudi, Pak Jon, Pak Zulakmal, Pak Syafruddin, Bu Lyra, Bu Yozza, Bu Gema, Bu Ayu, Bu Iza, Bu Monik, Bu Riri, dan Bu Maiyastri. Terima kasih atas ilmunya yang berharga.

**Staf dan pegawai jurusan Matematika**, Mama Cun, Bu Eli, Pak Syamsir, Bu Dona, Bu Opi, Ibu pustaka dan ibu CS, terima kasih karena telah membantu selama penulis melaksanakan studi di jurusan Matematika Universitas Andalas.

**Keluarga besar HIMATIKA**, Keluarga di Matematika. Uda Fajar wisga ( terima kasih untuk ilmunya, saran, dan arahannya yang sangat bermanfaat..makasih uda :)), Uda santri ( ma yang uda janji tu ?? ndk sampai2 kamari), Uda Berkah,

Uni Rilla( lama tak jumpa uni cantikk), mulia( adiak bepe yang suko barandam di minyak tanah :D) dan yang lain maaf tidak bisa disebutkan satu per satu.

**Keluarga besar Genta Andalas**, Disini semua penuh senyum, tawa, canda, bahkan tangis... Banyak sekali pelajaran yang saya dapatkan di rumah kecil ini. Semua yang tidak diajarkan dibangku kuliah, saya temukan disini. Sangat sangat beruntung telah menjadi bagian dari UKM yang paling disenangi pejabat2 Unand ,hahaha... ada eji yang imut dan sangat budiman (tidak pernah bosan mendengarkan semua keluh kesah saya :-\*), pote yang putih, bang arga yang seksi, david yang ganteng :-\*, Ora yang super pamaniang, ijah yang pandai masak, yusran(manusia sejarah), ilham yang menggebu-gebu, ivan yang sedang bingung memutuskan mau pilih ira atau ririn, PU nanda yang emosian :D (capek gaek beko da), dini, elin, bang rian( makasih buku dan jalan2 ke tekniknya ya bang,hehe), bang nandes (bilo bang nikah?, eh wisuda bang.. :p), vita si manusia sala, lalu gerombolan anak baru yang galau : ririn, ayi, ici, dewi, dan ulfa, dua sejoli febi dan osa, taufik yang telah meminjamkan buku, rian, kak intan, kak feni, kak eni, bang cecep, bang dion, bang erik, kak zi..dan masih banyak lagi manusia-manusia aneh tapi pintar lainnya yang berkumpul di rumah itu 'GENTA ANDALAS'.

**HaHa.com** Terima kasih untuk kisah yang indah selama 4 tahun ini... mimi alias D alias Y (teman pertama disini, bahkan sejak masih ospek...gosip,main,belajar waktu ujian,selalu bersama-sama...lebih mesra dari sepasang kekasih..hahaha), cinta alias fitri alis listrik yang selalu heboh sendiri dengan kehebatannya :p, tresa alias tere alias echa alias jeleq (akhirnya bandung lagi :D), ana alias fuad yang cengeng (stek2 manangih :p), dan bintang utama kita, mezi alias syahmezi yang selalu tampil memukau (silau)...tapi seaneh apapun kalian, kalian tetap teman-teman terbaik disini..hahaha ..

**Teman-teman angkatan 2008 O'Laplace**, Ivone (hutang pulsa dulu ya von,hehe), Liza(hei sanakk), Via , Virza(rempong :p ), Nurma , Vebby(jan pacaran ka pacaran juo lai bii :p ), Elza(kapan - kapan temankan aku ke pasar LA ya jak,yang elit itu loh,,haha), Iin (makasih buat pinjaman laptopnya iin), Tika

Y, Ed, Ica, Rere (kita pernah hidup bersama dalam suka dan duka di kos2an aneh..hahaha,bahkan waktu gempa kita juga cuma berdua re,ingat?), Elin, Tika K, Manda, Kak Su, Anggi, Ichel(seperjuangan dalam meniti hidup ini,haha), Erik, Shanda, Kak Ade, Hasan, Welly (pernah pulang pergi kuliah bersama,romantisnya..:D), Desi, Helcy, Lindo, Yuli dan Dini(selalu direpotkan saat musim ujian tiba,makasih yaa suhu :)), Opa , Mia, Wili, Enid, Elvi, Cesa, Dina Irawati, Ririn, Meta, Rika, Dina Yelni, Uthe, Wiwiek, Kak Nini, Eris, Ciphie, Sarti, Bayu, Oni, Tama, Neli, Putri, Rara, Lia, dan Yolwi. Terima kasih untuk semua pengalaman yang kita lewati sejak tahun pertama..

**Keluarga Besar Komplek Perumahan Mandiri** Keluarga yang sangat menyenangkan. Terima kasih yang tak terhingga untuk kak anda dan keluarga, yang telah memberikan kami tumpangan rumah gratis dengan fasilitas yang sangat lengkap dan makanan yang terjamin,hehehe...makasih kakak. Terima kasih untuk Maharani Hazar untuk pinjaman laptop, modem, dan barang-barang lainnya, walaupun sering membuat kesal tapi semua bisa dimaafkan dengan semua bantuannya dibidang teknologi (terpaksa sedikit memuji :D). Kepada Mbak E dan kak icha yang entah dimana keberadaannya sampai sekarang.

**Kamu** Ya kamu, Nanda Bismar...Terima kasih atas kebaikan, perhatian dan semua yang telah dikorbankan selama ini. Terima kasih untuk hari-hari yang indah ditahun-tahun terakhir kuliah. Terima kasih untuk Bebenya. Terima kasih untuk motivasi, kritik pedas tapi membangun, dan saran yang selalu diberikan. Terima kasih atas kesabarannya selama ini. Terima Kasih untuk tanggal 26 nya. Semoga yang terbaik selalu diberikanNYA kepada kita,amin... (Selalu ada cara :)).

**Untuk semua yang tidak bisa disebutkan satu per satu,** terimakasih untuk semua kebaikan yang pernah diberikan. Semoga Allah SWT membalas dengan kebaikan pula, amin ya rabbal alamin..

**Rozie Yuszally Akhmad**

## KATA PENGANTAR

Syukur alhamdulillah, segala puji Penulis haturkan atas kehadiran Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul "Metode Iterasi Gauss Seidel dan Perumannya dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Linier". Shalawat dan salam semoga selalu tercurahkan kepada Baginda Rasulullah SAW yang telah menebarkan ilmu dan iman dalam cahaya Islam yang beliau bawa. Penulis menyampaikan ungkapan terima kasih dan penghargaan yang tulus kepada yang terhormat :

1. Ibuk Nova Noliza Bakar, M.Si serta Ibuk Dr. Susila Bahri yang telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, pengarahan, dan saran kepada penulis sampai selesainya skripsi ini.
2. Bapak Efendi, M.Si, Bapak Dr. Admi Nazra, dan Bapak Dr. Syafrizal Sy sebagai penguji yang telah memberikan pengarahan dan saran untuk perbaikan penulisan skripsi ini.
3. Bapak Narwen, M.Si selaku pembimbing akademis penulis.
4. Seluruh staf pengajar jurusan Matematika Universitas Andalas yang telah banyak memberikan ilmu yang bermanfaat bagi penulis dan seluruh staf tata usaha jurusan Matematika yang telah banyak membantu selama penulis melaksanakan studi di jurusan Matematika Universitas Andalas.
5. Semua pihak yang telah membantu penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Selesainya skripsi ini tidak lepas dari do'a yang tulus, motivasi, dorongan semangat, dan bantuan yang senantiasa diberikan oleh kedua orang tua, ayahanda Drs. Yusrizal dan ibunda Yusnelli, S.pd, serta seluruh keluarga besar penulis.

Penulis menyadari penulisan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis mengharapkan kritik dan saran

agar kedepannya diperoleh hasil yang lebih baik. Penulis berharap agar skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkannya. Amin.

Padang, April 2012

**Rozie Yuszally Akhmad**

## ABSTRAK

Misal diberikan suatu sistem persamaan linier  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , dengan  $A$  matriks  $n \times n$  yang dominan diagonal secara tepat. Pada tulisan ini dijelaskan bagaimana mencari solusi sistem persamaan linier di atas dengan menggunakan Metode iterasi Gauss Seidel dan Gauss Seidel Diperumum. Kemudian dari beberapa contoh sistem persamaan linier, diperoleh bahwa Metode Gauss Seidel Diperumum lebih cepat konvergen (efisien) daripada Metode Gauss Seidel.

Kata kunci : *Sistem persamaan linier, Dominan diagonal secara tepat, Gauss Seidel, Gauss Seidel Diperumum.*

# DAFTAR ISI

|                                                                    |          |
|--------------------------------------------------------------------|----------|
| KATA PENGANTAR                                                     | vi       |
| ABSTRAK                                                            | ii       |
| DAFTAR ISI                                                         | iii      |
| DAFTAR GAMBAR                                                      | v        |
| DAFTAR TABEL                                                       | vi       |
| <b>I PENDAHULUAN</b>                                               | <b>1</b> |
| 1.1 Latar Belakang Masalah . . . . .                               | 1        |
| 1.2 Perumusan Masalah . . . . .                                    | 2        |
| 1.3 Pembatasan Masalah . . . . .                                   | 2        |
| 1.4 Tujuan Penulisan . . . . .                                     | 2        |
| 1.5 Sistematika Penulisan . . . . .                                | 2        |
| <b>II LANDASAN TEORI</b>                                           | <b>4</b> |
| 2.1 Sistem Persamaan Linier . . . . .                              | 4        |
| 2.2 Determinan . . . . .                                           | 5        |
| 2.3 Singularitas Matriks . . . . .                                 | 7        |
| 2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen . . . . .                         | 7        |
| 2.5 Lingkaran Georshgorin ( <i>Georshgorin's discs</i> ) . . . . . | 8        |
| 2.6 Matriks Dominan Diagonal Secara Tepat . . . . .                | 11       |

|                                                             |                                                                                    |           |
|-------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.7                                                         | Limit Barisan . . . . .                                                            | 13        |
| 2.8                                                         | Ruang vektor . . . . .                                                             | 14        |
| 2.9                                                         | Norm Vektor . . . . .                                                              | 15        |
| 2.10                                                        | Konvergensi Metode Iterasi . . . . .                                               | 15        |
| <br><b>III METODE ITERASI GAUSS SEIDEL DAN PERUMUMANNYA</b> |                                                                                    |           |
| <b>DALAM PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER</b>           |                                                                                    | <b>18</b> |
| 3.1                                                         | Metode Gauss Seidel dan Perumumannya . . . . .                                     | 18        |
| 3.2                                                         | Kekonvergenan Metode Gauss Seidel dan Metode Gauss Seidel Dipe-<br>rumum . . . . . | 31        |
| 3.3                                                         | Contoh . . . . .                                                                   | 36        |
| <br><b>IV PENUTUP</b>                                       |                                                                                    | <b>55</b> |
| 4.1                                                         | Kesimpulan . . . . .                                                               | 55        |
| 4.2                                                         | Saran . . . . .                                                                    | 56        |
| <br><b>DAFTAR PUSTAKA</b>                                   |                                                                                    | <b>57</b> |
| <br><b>LAMPIRAN</b>                                         |                                                                                    | <b>58</b> |

## DAFTAR GAMBAR

|       |                                   |    |
|-------|-----------------------------------|----|
| 2.5.1 | Lingkaran Gerschgorin's . . . . . | 11 |
|-------|-----------------------------------|----|

## DAFTAR TABEL

|       |                                                              |    |
|-------|--------------------------------------------------------------|----|
| 3.1.1 | Hasil iterasi contoh . . . . .                               | 22 |
| 3.3.2 | Hasil contoh 1 dengan iterasi Gauss Seidel . . . . .         | 37 |
| 3.3.3 | Hasil contoh 1 dengan Iterasi Gauss Seidel Diperumum . . . . | 39 |
| 3.3.4 | Hasil contoh 2 dengan iterasi Gauss Seidel . . . . .         | 41 |
| 3.3.5 | Hasil contoh 2 dengan iterasi Gauss Seidel Diperumum . . . . | 43 |
| 3.3.6 | Hasil contoh 2 dengan iterasi Gauss Seidel Diperumum . . . . | 44 |
| 3.3.7 | Hasil contoh 3 dengan iterasi Gauss Seidel . . . . .         | 50 |
| 3.3.8 | Hasil contoh 3 dengan iterasi Gauss Seidel Diperumum . . . . | 54 |

# I PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang Masalah

Misal diberikan suatu Sistem Persamaan Linier (SPL)

$$Ax = b$$

dengan  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  dan  $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ . SPL di atas dapat dicari solusinya dengan menggunakan metode langsung dan dengan metode tak langsung atau metode iterasi. Metode iterasi dimulai dengan terkaan awal dan kemudian diulangi sampai mendapatkan taksiran solusi mendekati/terbaik, sesuai dengan batas galat yang diperbolehkan. Dengan kata lain, besar galat akan dikendalikan sampai batas yang bisa diterima. Salah satu metode iterasi tersebut adalah Metode Gauss Seidel.

Metode Gauss Seidel dikenalkan oleh Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) dan Philipp Ludwig von Seidel (1821 - 1896). Metode ini merupakan modifikasi dari Metode iterasi Jacobi dan konvergensinya lebih cepat untuk terkaan awal dan error yang sama.

Dalam penelitian ini Metode Gauss Seidel akan diperumum dengan memperumum matriks- matriks yang terlibat dalam persamaan berdasarkan suatu parameter. Dengan pemilihan nilai parameter tertentu, akan diperoleh iterasi yang bentuknya analog dengan Metode Gauss Seidel namun memiliki konvergensi

yang lebih cepat daripada Metode Gauss Seidel. Proses iterasi dikerjakan dengan menggunakan Matlab.

## **1.2 Perumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang di atas, yang menjadi masalah dalam penulisan ini adalah bagaimana keefesienan Metode Gauss Seidel diperumum dibanding Metode Gauss Seidel dalam penyelesaian sistem persamaan linier.

## **1.3 Pembatasan Masalah**

SPL yang akan ditinjau dalam permasalahan ini adalah  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  untuk  $A$  bersifat dominan diagonal secara tepat (DDST).

## **1.4 Tujuan Penulisan**

Penelitian ini bertujuan untuk menunjukkan keefisienan Metode Gauss Seidel diperumum dibanding Metode Gauss Seidel dari beberapa contoh yang diberikan.

## **1.5 Sistematika Penulisan**

Adapun sistematika penulisan skripsi ini yaitu Bab I merupakan pendahuluan yang berisikan: latar belakang masalah, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan. Bab II merupakan landasan teori yang akan digunakan dalam menyelesaikan permasalahan pada skripsi ini. Bab III

merupakan pembahasan yang berisi : Metode Gauss Seidel, perumuman Metode Gauss Seidel, analisis konvergensinya, dan contoh untuk membandingkan Metode Gauss Seidel dengan Metode Gauss Seidel Diperumum. Bab IV merupakan penutup yang berisi kesimpulan dari pembahasan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

## II LANDASAN TEORI

Berikut adalah beberapa definisi dan teorema yang akan digunakan dalam bab Pembahasan.

### 2.1 Sistem Persamaan Linier

**Definisi 2.1.1.** [1]

*Sistem persamaan linier adalah suatu himpunan berhingga dari persamaan-persamaan linier dalam peubah  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , bukan merupakan hasil kali atau akar peubah dan bukan sebagai argument fungsi trigonometri, fungsi logaritma atau fungsi eksponensial.*

Bentuk umum sistem persamaan linier ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n &= b_3 \\&\vdots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n.\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

Dengan memisalkan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

maka (2.1.1) dapat ditulis menjadi

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (2.1.2)$$

## 2.2 Determinan

### Definisi 2.2.2. [1]

*Permutasi himpunan bilangan-bilangan bulat  $1, 2, \dots, n$  adalah susunan bilangan - bilangan bulat ini menurut suatu aturan tanpa menghilangkan atau mengulangi bilangan - bilangan tersebut. Sebuah invers dikatakan terjadi dalam permutasi  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  ketika sebuah bilangan bulat yang lebih besar mendahului sebuah bilangan bulat yang lebih kecil.*

### Definisi 2.2.3. [1]

*Sebuah permutasi dinamakan genap jika jumlah invers seluruhnya adalah sebuah bilangan bulat yang genap dan dinamakan ganjil jika jumlah invers seluruhnya adalah sebuah bilangan bulat yang ganjil.*

Hasil kali elementer  $A$  adalah setiap hasil kali  $n$  entri  $A$  yang tidak berasal dari baris atau kolom yang sama, sedangkan hasil kali elementer bertanda  $A$

adalah hasil kali elementer  $a_{ij_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$  dikalikan dengan  $+1$  atau  $-1$ . Tanda  $+$  digunakan jika  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  adalah permutasi genap dan tanda  $-$  jika  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  adalah permutasi ganjil.

**Definisi 2.2.4. [1]**

Misalkan  $A$  adalah matriks  $n \times n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Fungsi determinan dinyatakan oleh  $\det$ , dan didefinisikan  $\det(A)$  sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari  $A$ . Jumlah  $\det(A)$  kita namakan determinan  $A$ .

Sifat-sifat determinan :

- $\det(kA) = k^n \det(A)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ .

**Teorema 2.2.5. [1]**

Jika  $A$  adalah matriks segitiga segitiga  $n \times n$ , maka  $\det(A)$  adalah hasil kali entri-entri pada diagonal utama, yakni  $\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ .

Untuk matriks segitiga bawah yaitu matriks kuadrat yang semua entri di atas diagonal utamanya adalah nol,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

maka

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}. \quad (2.2.1)$$

## 2.3 Singularitas Matriks

**Teorema 2.3.6.** [1]

*Misal  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .  $A$  non singular jika dan hanya jika  $\det(A) \neq 0$ .*

## 2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

**Definisi 2.4.7.** [1]

*Jika  $A$  matriks  $n \times n$ , maka vektor tak nol  $\mathbf{x}$  di dalam  $\mathbb{R}^n$  dinamakan vektor eigen dari  $A$  jika  $A\mathbf{x}$  adalah kelipatan skalar dari  $\mathbf{x}$ ; yakni,*

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

*untuk suatu skalar  $\lambda$ . Skalar  $\lambda$  dinamakan nilai eigen dari  $A$  dan  $\mathbf{x}$  dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda$ .*

Nilai eigen dari matriks  $A$  adalah solusi dari persamaan karakteristik atau akar dari polinomial karakteristik. Polinomial karakteristik dari  $A$  adalah

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0 = (\lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + \dots + C_n). \quad (2.4.1)$$

Misalkan  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$  merupakan akar-akar polinomial karakteristik, maka  $P(\lambda)$  dapat ditulis sebagai

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n). \quad (2.4.2)$$

Dari Persamaan (2.4.1) dan (2.4.2) diperoleh

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n),$$

selanjutnya jika dimisalkan  $\lambda = 0$  dan

$$P(0) = (-\lambda_1)(-\lambda_2) \cdots (-\lambda_n) = \det(-A)$$

$$(-\lambda_1)(-\lambda_2) \cdots (-\lambda_n) = (-1)^n \det(A)$$

$$(-1)^n (\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n) = (-1)^n \det(A).$$

karena  $(-1)^n \neq 0$ , sehingga

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i. \quad (2.4.3)$$

Dari Persamaan (2.4.3) diperoleh bahwa A singular jika dan hanya jika  $\det(A)=0$ .

**Definisi 2.4.8.** [8]

*Himpunan dari semua nilai eigen dari A disebut spektrum dari A, dan ditulis  $\sigma(A)$ .*

**Definisi 2.4.9.** [8]

*Misalkan A adalah matriks  $n \times n$ . Spektral radius dari A didefinisikan sebagai  $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ .*

## 2.5 Lingkaran Georshgorin (*Georshgorin's discs*)

Misal A matriks  $n \times n$ .  $r_i$  didefinisikan sebagai  $\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$  dan  $R_i$  menunjukkan koleksi titik-titik pada bidang komplek yang jaraknya ke  $a_{ii}$  paling banyak adalah  $r_i$ . Georshgorin mengamati bahwa nilai eigen dari A terletak dalam gabungan dari lingkaran  $R_i$ .

**Teorema 2.5.10. [10]**

Sebarang nilai eigen dari suatu matriks  $A$  terletak dalam satu dari lingkaran-lingkaran tertutup pada bidang kompleks dengan pusat  $a_{ii}$  dan jari-jari  $r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$ . Dengan kata lain,  $\forall \lambda \in \sigma(A), \exists i$  sedemikian sehingga  $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$ .

**Bukti.**

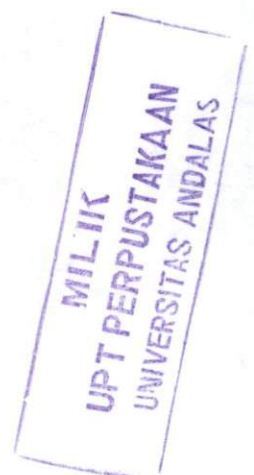
Misal  $(\lambda, \mathbf{x})$  adalah sebarang pasangan eigen dari  $A$ , dan misalkan  $x_m$  merupakan komponen dari  $\mathbf{x}$  dengan jarak terbesar.

Perhatikan persamaan  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}$$



dapat ditulis menjadi  $\lambda x_m = \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j$ .

Perhatikan bahwa,

$$\lambda x_m = \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j$$

$$\lambda x_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{m(m-1)}x_{m-1} + a_{mm}x_m + \cdots + a_{mn}x_n$$

$$(\lambda - a_{mm})x_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{m(m-1)}x_{m-1} + \cdots + a_{mn}x_n$$

$$(\lambda - a_{mm})x_m = \sum_{j=1, j \neq m}^n a_{mj} x_j.$$

karena  $x_m \neq 0$ , maka

$$(\lambda - a_{mm}) = \sum_{j=1, j \neq m}^n a_{mj} \frac{x_j}{x_m}.$$

Berdasarkan ketaksamaan segitiga diperoleh

$$|(\lambda - a_{mm})| \leq \sum_{j=1, j \neq m}^n |a_{mj}| \left| \frac{x_j}{x_m} \right|. \quad (2.5.1)$$

Karena  $x_m =$  komponen dari  $\mathbf{x}$  dengan jarak terbesar, sehingga  $|x_j| \leq |x_m|$ , maka  $\left| \frac{x_j}{x_m} \right| \leq 1$  untuk tiap  $j$ . Akibatnya dari (2.5.1) diperoleh

$$|(\lambda - a_{mm})| \leq \sum_{j=1, j \neq m}^n |a_{mj}|, \quad (2.5.2)$$

atau

$$|(\lambda - a_{mm})| \leq r_m.$$

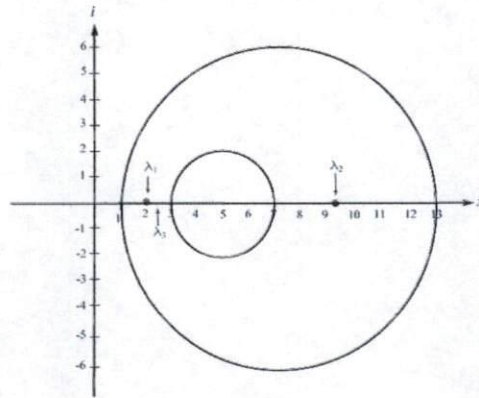
Dengan kata lain  $\lambda$  terletak pada lingkaran  $R_m$ . Jika  $\lambda$  terletak dalam satu dari lingkaran-lingkaran, berarti  $\lambda$  terletak dalam gabungan lingkaran-lingkaran. ■

**Contoh 2.5.1** Misal matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

maka lingkaran Georshgorin yang bersesuaian adalah :  $L(2,0)$ , yaitu lingkaran dengan pusat  $a_{11} = 2$  dan jari-jari sama dengan 0,  $L(5,2)$ , yaitu lingkaran dengan pusat di  $a_{22} = 5$  dan jari-jari sama dengan 2, dan  $L(7,6)$ , yaitu lingkaran dengan pusat di  $a_{33} = 7$  dan jari-jari sama dengan 6.

Nilai-nilai eigen dari matriks  $A$  tersebut akan berada dalam lingkaran-lingkaran Georshgorin seperti yang terlihat dalam Gambar 2.5.1 dengan nilai eigennya  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 9,315$ , dan  $\lambda_3 = 2,685$ .



Gambar 2.5.1. Lingkaran Gerschgorin's

## 2.6 Matriks Dominan Diagonal Secara Tepat

**Definisi 2.6.11.** [1]

*Sebuah matriks kuadrat  $A$  dinamakan dominan diagonal secara tepat jika*

nilai mutlak masing-masing entri pada diagonal, lebih besar dari jumlah nilai mutlak entri yang selebihnya pada baris yang sama , yaitu :

$$\begin{aligned} |a_{11}| &> |a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}| \\ |a_{22}| &> |a_{21}| + |a_{23}| + \cdots + |a_{2n}| \\ &\vdots \\ |a_{nn}| &> |a_{n1}| + |a_{n2}| + \cdots + |a_{n,n-1}|. \end{aligned}$$

atau dapat ditulis

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|. \quad (2.6.1)$$

**Contoh 2.6.1.**  $A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 11 \end{bmatrix}$

karena

$$|10| > |2| + |5|$$

$$|7| > |3| + |3|$$

$$|11| > |4| + |5|,$$

maka A adalah matriks DDST.

**Teorema 2.6.12.** [2]

*Jika matriks A dominan diagonal secara tepat, maka matriks A adalah non singular.*

### Bukti.

$A$  adalah matriks DDST, sehingga dari Persamaan (2.6.1) diperoleh bahwa jari-jari dari lingkaran Gerschgorin ke- $i$  lebih kecil dari nilai mutlak pusatnya :  $r_i < |a_{ii}|$ . Hal ini berarti lingkaran tidak akan mengandung 0 atau  $\lambda = 0$  tidak menjadi nilai eigen dari  $A$ , sehingga dari Persamaan (2.4.3) diperoleh  $\det(A) \neq 0$  atau berarti  $A$  adalah matriks non singular. ■

## 2.7 Limit Barisan

### Definisi 2.7.13. [3]

Misalkan  $X = (x_n)$  suatu barisan bilangan riil. Suatu bilangan  $x$  dikatakan sebagai limit dari barisan  $(x_n)$  jika untuk setiap  $\epsilon > 0$  terdapat suatu bilangan asli  $K(\epsilon)$  sedemikian sehingga untuk semua  $n \geq K(\epsilon)$  berlaku  $|x_n - x| < \epsilon$ . Jika  $x$  merupakan limit dari barisan  $(x_n)$ , maka barisan tersebut dikatakan konvergen ke  $x$  atau memiliki limit  $x$ . Jika barisan tersebut tidak memiliki limit maka barisan tersebut dikatakan divergen.

### Teorema 2.7.14. [3]

Misalkan  $A = (a_n)$  dan  $X = (x_n)$  dua barisan bilangan riil dan  $x \in \mathbb{R}$ . Jika untuk suatu  $C > 0$  dan semua  $n \in \mathbb{N}$  berlaku  $|x_n - x| \leq C|a_n|$  untuk  $n \geq m$  dan jika  $\lim (a_n) = 0$  maka  $\lim (x_n) = x$ .

- Jika  $0 < b < 1$ , maka  $\lim (b^n) = 0$ .



## 2.8 Ruang vektor

**Definisi 2.8.15.** [5]

*Ruang vektor  $V$  atas lapangan  $F$  adalah suatu himpunan  $V$ , yang elemen - elemennya disebut vektor, bersama operasi penjumlahan yang disebut penjumlahan vektor dan perkalian skalar dari vektor-vektor dengan elemen  $F$  yang memenuhi kondisi-kondisi berikut :*

- Untuk semua  $u, v, w \in \mathbb{V}$

1.  $u + v \in \mathbb{V}$

2.  $\mathbf{0} + v = v$

3.  $u + v = v + u$

4.  $u + (v + w) = (u + v) + w.$

- Untuk semua  $u, v \in \mathbb{V}$  dan  $r, s \in \mathbb{F}$

1.  $rv \in \mathbb{V}$

2.  $1v = v$

3.  $0v = \mathbf{0}$

4.  $r(u + v) = ru + rv$

5.  $(r + s)v = rv + sv$

6.  $(rs)v = r(sv).$

$\mathbf{0}$  disebut vektor nol.

## 2.9 Norm Vektor

**Definisi 2.9.16.** [8]

Misalkan  $V$  adalah ruang vektor di  $\mathbb{R}$ . Sebuah fungsi  $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$  adalah norm vektor jika untuk semua  $x, y \in V$ ,

1.  $\|x\| \geq 0$ .
2.  $\|x\| = 0$  jika dan hanya jika  $x = 0$ .
3.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  untuk skalar  $\alpha$ .
4.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**Definisi 2.9.17.** [8]

Misalkan  $V$  adalah ruang vektor di  $\mathbb{R}$  dan  $\|\cdot\|$  adalah norm vektor dari  $V$ . Maka barisan  $x^{(k)}$  dari  $V$  akan konvergen ke  $x$  jika dan hanya jika  $\|x^{(k)} - x\| \rightarrow 0$  pada  $k \rightarrow \infty$ .

## 2.10 Konvergensi Metode Iterasi

**Teorema 2.10.18.** [6]

Misal  $A = M - N \in \mathbb{R}^{n \times n}$  suatu matriks yang non singular dan  $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ . Jika  $M$  non singular dan jari-jari spektral dari  $M^{-1}N$  memenuhi ketaksamaan  $\rho(M^{-1}N) < 1$ , maka iterasi  $x^{(k)}$  yang didefinisikan oleh  $Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$  konvergen ke  $x = A^{-1}b$  untuk sebarang terkaan awal  $x^{(0)}$ .

**Bukti.**

Misalkan  $e^{(k)} = x^{(k)} - x$  menunjukkan error dalam iterasi ke  $k$ .

Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned}
 M\mathbf{x}^{(k+1)} &= N\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \\
 &= N\mathbf{x}^{(k)} + A\mathbf{x} \\
 &= N\mathbf{x}^{(k)} + (M - N)\mathbf{x} \\
 &= N\mathbf{x}^{(k)} + M\mathbf{x} - N\mathbf{x} \\
 M\mathbf{x}^{(k+1)} - M\mathbf{x} &= N\mathbf{x}^{(k)} - N\mathbf{x} \\
 M(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}) &= N(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}) \\
 M\mathbf{e}^{(k+1)} &= N\mathbf{e}^{(k)} \\
 \mathbf{e}^{(k+1)} &= (M^{-1}N)\mathbf{e}^{(k)}. \tag{2.10.1}
 \end{aligned}$$

Dari (2.10.1) diperoleh

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}^{(1)} &= (M^{-1}N)\mathbf{e}^{(0)} \\
 \mathbf{e}^{(2)} &= (M^{-1}N)\mathbf{e}^{(1)} \\
 &= (M^{-1}N)(M^{-1}N)\mathbf{e}^{(0)} \\
 \mathbf{e}^{(3)} &= (M^{-1}N)\mathbf{e}^{(2)} \\
 &= (M^{-1}N)(M^{-1}N)(M^{-1}N)\mathbf{e}^{(0)},
 \end{aligned}$$

sehingga  $\mathbf{e}^{(k+1)} = (M^{-1}N)^{k+1}\mathbf{e}^{(0)}$  atau

$$\mathbf{e}^{(k)} = (M^{-1}N)^k \mathbf{e}^{(0)}. \tag{2.10.2}$$

- Untuk kasus  $\mathbf{e}^{(0)} = 0$ ,  $\mathbf{e}^{(k)}$  konvergen ke 0.
- Untuk  $\mathbf{e}^{(0)} \neq 0$ ,

$$e^{(k)} = (M^{-1}N)^k e^{(0)}.$$

Misalkan  $B = M^{-1}N$ , maka

$$e^{(k)} = B^k e^{(0)}. \quad (2.10.3)$$

Misalkan  $\lambda$  adalah nilai eigen dari  $B$  sedemikian sehingga  $B\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \neq 0$ . Maka dari (2.10.3) diperoleh  $\mathbf{e}^{(k)} = \lambda^k \mathbf{e}^{(0)}$ .

Dari sifat norm vektor diperoleh :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}^{(k)}\| &= \|\lambda^k \mathbf{e}^{(0)}\| \\ &= |\lambda^k| \|\mathbf{e}^{(0)}\|. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa : jika  $k \rightarrow \infty$  dan  $0 < \lambda < 1$  maka  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^k = 0$ .

Akibatnya  $|\lambda^k| \rightarrow 0$  sehingga  $\|\mathbf{e}^{(k)}\| \rightarrow 0$  dan iterasi  $x^{(k)}$  akan konvergen ke  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$  untuk sebarang terkaan awal  $x^{(0)}$ . ■

### III METODE ITERASI GAUSS SEIDEL DAN PERUMUMANNYA DALAM PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER

Dalam bab ini akan dipelajari tentang Metode iterasi Gauss Seidel dan konvergensinya, serta perumuman Metode Gauss Seidel dan konvergensinya.

#### 3.1 Metode Gauss Seidel dan Perumumannya

Sebelumnya telah dijelaskan Metode Gauss Seidel digunakan untuk mencari solusi suatu SPL (2.1.2) dengan  $A$  adalah matriks DDST. Adapun algoritma Metode Gauss Seidel tersebut adalah sebagai berikut:

1. Tulis kembali SPL (2.1.1) menjadi

$$x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n)}{a_{11}} \quad (3.1.1)$$

$$x_2 = \frac{b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n)}{a_{22}} \quad (3.1.2)$$

$$x_3 = \frac{b_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n)}{a_{33}} \quad (3.1.3)$$

$\vdots$

$$x_n = \frac{b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)}{a_{nn}}. \quad (3.1.4)$$

2. Tetapkan error  $\varepsilon$ .

3. Pilih terkaan awal  $x_1 = x_1^{(0)}, x_2 = x_2^{(0)}, \dots, x_n = x_n^{(0)}$ .

4. Substitusi terkaan awal

Substitusi terkaan awal  $x_2 = x_2^{(0)}, x_3 = x_3^{(0)}, \dots, x_n = x_n^{(0)}$  ke persamaan (3.1.1) untuk memperoleh  $x_1^{(1)}$ .

Substitusi  $x_1^{(1)}$  dan terkaan awal  $x_3 = x_3^{(0)}, \dots, x_n = x_n^{(0)}$  ke persamaan (3.1.2) untuk memperoleh  $x_2^{(1)}$ .

Substitusi  $x_1^{(1)}, x_2^{(2)}$ , dan terkaan awal  $x_4 = x_4^{(0)}, \dots, x_n = x_n^{(0)}$  ke persamaan (3.1.3) untuk memperoleh  $x_3^{(1)}$ .

Begitu selanjutnya sampai diperoleh  $x_n^{(1)}$  dengan mensubstitusi  $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{(n-1)}^{(1)}$ .

Iterasi 1

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{b_1 - (a_{12}x_2^{(0)} + a_{13}x_3^{(0)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(0)})}{a_{11}} \\ x_2^{(1)} &= \frac{b_2 - (a_{21}x_1^{(1)} + a_{23}x_3^{(0)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(0)})}{a_{22}} \\ &\vdots \\ x_n^{(1)} &= \frac{b_n - (a_{n1}x_1^{(1)} + a_{n2}x_2^{(1)} + a_{n3}x_3^{(1)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(1)})}{a_{nn}}. \end{aligned}$$

5. Ulangi langkah 4 dengan menggunakan terkaan awal  $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$ .

Iterasi 2

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= \frac{b_1 - (a_{12}x_2^{(1)} + a_{13}x_3^{(1)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(1)})}{a_{11}} \\x_2^{(2)} &= \frac{b_2 - (a_{21}x_1^{(2)} + a_{23}x_3^{(1)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(1)})}{a_{22}} \\&\vdots \\x_n^{(2)} &= \frac{b_n - (a_{n1}x_1^{(2)} + a_{n2}x_2^{(2)} + a_{n3}x_3^{(2)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(2)})}{a_{nn}}.\end{aligned}$$

Sampai Iterasi ke- n

$$\begin{aligned}x_1^{(n)} &= \frac{b_1 - (a_{12}x_2^{(n-1)} + a_{13}x_3^{(n-1)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(n-1)})}{a_{11}} \\x_2^{(n)} &= \frac{b_2 - (a_{21}x_1^{(n)} + a_{23}x_3^{(n-1)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(n-1)})}{a_{22}} \\&\vdots \\x_n^{(n)} &= \frac{b_n - (a_{n1}x_1^{(n)} + a_{n2}x_2^{(n)} + a_{n3}x_3^{(n)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(n)})}{a_{nn}}.\end{aligned}$$

6. Proses iterasi terus dilakukan sampai memenuhi  $|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon$ .

Proses iterasi Gauss Seidel dinyatakan sebagai berikut

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}. \quad (3.1.5)$$

**Contoh 3.1.2.** Diberikan SPL sebagai berikut:

$$4x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 9$$

$$-x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2.$$

Akan dicari solusi SPL di atas dengan menggunakan Metode Gauss Seidel.

1. SPL di atas ditulis menjadi

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{4}(4 + x_2 - x_3) \\x_2 &= \frac{1}{6}(9 - x_1 - 2x_3) \\x_3 &= \frac{1}{5}(2 + x_1 + 2x_2).\end{aligned}$$

2. Tetapkan galat = 0,0002.

3. Tentukan terkaan awal :  $x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0, x_3^{(0)} = 0$ .

4. Dari (3.1.5) diperoleh

- untuk  $k = 0$

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= \frac{1}{4}(4 + x_2^{(0)} - x_3^{(0)}) = \frac{1}{4}(4 + 0 - 0) = 1. \\x_2^{(1)} &= \frac{1}{6}(9 - x_1^{(1)} - 2x_3^{(0)}) = \frac{1}{6}(9 - 1 - 0) = 4/3. \\x_3^{(1)} &= \frac{1}{5}(2 + x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)}) = \frac{1}{5}(2 + 1 + 8/3) = 17/15.\end{aligned}$$

- untuk  $k = 1$

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= \frac{1}{4}(4 + x_2^{(1)} - x_3^{(1)}) = \frac{1}{4}(4 + 4/3 - 17/15) = 63/60. \\x_2^{(2)} &= \frac{1}{6}(9 - x_1^{(2)} - 2x_3^{(1)}) = \frac{1}{6}(9 - 63/60 - 34/15) = 0,9473. \\x_3^{(2)} &= \frac{1}{5}(2 + x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)}) = \frac{1}{5}(2 + 63/60 + 0,9473) = 0,9889.\end{aligned}$$

begitu seterusnya sampai berlaku  $|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < 0,0002$ , sehingga proses iterasi dihentikan sampai iterasi ke 6 untuk  $i = 1, 2$ , dan 3. (lihat Tabel 3.1.1).

| $k$ | $x_1$                | $x_2$                | $x_3$                |
|-----|----------------------|----------------------|----------------------|
| 0   | 0                    | 0                    | 0                    |
| 1   | $0,1000 \times 10^1$ | $0,1333 \times 10^1$ | $0,1133 \times 10^1$ |
| 2   | $0,1050 \times 10^1$ | $0,9473 \times 10^0$ | $0,9889 \times 10^0$ |
| 3   | $0,9896 \times 10^1$ | $0,1005 \times 10^1$ | $0,9999 \times 10^0$ |
| 4   | $0,1001 \times 10^1$ | $0,9999 \times 10^0$ | $0,1000 \times 10^1$ |
| 5   | $0,1000 \times 10^1$ | $0,1000 \times 10^1$ | $0,1000 \times 10^1$ |

Tabel 3.1.1. Hasil iterasi contoh

Selanjutnya matriks  $A$  pada (2.1.2) dapat diubah dalam bentuk

$$A = D_A - (L_A + U_A), \quad (3.1.6)$$

dimana  $D_A$  adalah matriks diagonal,  $L_A$  adalah matriks segitiga bawah, dan  $U_A$  adalah matriks segitiga atas yang berturut-turut dapat dinyatakan sebagai :

$$D_A = d_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i=j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}, \quad D_A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

$$L_A = l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & i > j; \\ 0, & i \leq j. \end{cases}, \quad L_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

$$U_A = u_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & i < j; \\ 0, & i \geq j. \end{cases}, U_A = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & -a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya dari (3.1.5) diperoleh

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)})}{a_{11}} \\ \frac{b_2 - (a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)})}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n - (a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)})}{a_{nn}} \end{bmatrix}. \quad (3.1.7)$$

Kedua ruas dari (3.1.7) dikalikan dengan  $a_{ii}$  sehingga diperoleh :

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1^{(k+1)} \\ a_{22}x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ a_{nn}x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)}) \\ b_2 - (a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ b_n - (a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)}) \\ b_2 - (a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)}) - a_{21}x_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ b_{n-1} - (a_{n-1,n}x_n^{(k)}) - (a_{n-1}x_1^{(k+1)} + a_{n-1}x_2^{(k+1)} + \cdots + a_{n-1}x_{n-2}^{(k+1)}) \\ b_n - (a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)}) \\ b_2 - (a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ b_{n-1} - (a_{n-1,n}x_n^{(k)}) \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 \\ a_{21}x_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ (a_{n-1}x_1^{(k+1)} + a_{n-1}x_2^{(k+1)} + \cdots + a_{n-1}x_{n-2}^{(k+1)}) \\ (a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}) \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1^{(k+1)} \\ a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \dots + a_{nn}x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}) + b_1 \\ (-a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}) + b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Metode iterasi Gauss Seidel dalam bentuk matriks dan vektor kemudian dapat dinyatakan sebagai berikut

$$(D_A - L_A)x_i^{(k+1)} = U_A x_i^{(k)} + b_i,$$

selanjutnya dapat ditulis menjadi :

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= (D_A - L_A)^{-1}(U_A x^{(k)} + b) \\ &= (D_A - L_A)^{-1}b + (D_A - L_A)^{-1}U_A x^{(k)}. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Dari (3.1.8), matriks

$$G_A = (D_A - L_A)^{-1}U_A \quad (3.1.9)$$

disebut matriks iterasi Gauss Seidel.

Dalam memperumum Metode Gauss Seidel, matriks  $A$  ditulis menjadi:

$$A = D_A(m) - L_A(m) - U_A(m), \quad (3.1.10)$$

dengan  $0 \leq m \leq n - 1$  dan entri-entri matriks :

$$D_A(m) = d_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & |i - j| \leq m; \\ 0, & \text{i,j lainnya.} \end{cases}$$

$$U_A(m) = u_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & i - j < m; \\ 0, & \text{i,j lainnya.} \end{cases}$$

$$L_A(m) = l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & i - j > m; \\ 0, & \text{i,j lainnya.} \end{cases}$$

dimana matriksnya:

$$D_A(m) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} & a_{1,m+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} & a_{2,m+1} & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,m} & & & & \ddots & 0 \\ a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & & & \ddots & & & a_{n-m,m-1} & a_{n-m,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & & & a_{n-m+1,n-m+1} & \cdots & a_{n-m+1,n-1} & a_{n-m+1,n} \\ 0 & 0 & \ddots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & & & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n,n-m} & a_{n,n-m+1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

$$U_A(m) = \begin{bmatrix} 0 & -a_{1,m+2} & \cdots & -a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -a_{n-m-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$L_A(m) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{m+2,1} & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ -a_{n,1} & \cdots & -a_{n,n-m-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

**Contoh 3.1.3.** Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 10 & 16 & 3 \\ 4 & -2 & -3 & 12 \end{bmatrix},$$

dengan pemilihan parameter  $0 \leq m \leq n - 1$  maka  $0 \leq m \leq 3$ .

- untuk  $m = 0$ ,

$$D_A(0) = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}, \quad L_A(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -10 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$U_A(0) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- untuk  $m = 1$

$$D_A(1) = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 16 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 12 \end{bmatrix}, \quad L_A(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$U_A(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- untuk  $m = 2$

$$D_A(2) = \begin{bmatrix} 11 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 10 & 16 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & 12 \end{bmatrix}, \quad L_A(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$U_A(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- untuk  $m = 3$

$$D_A(3) = \begin{bmatrix} 11 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 10 & 16 & 3 \\ 4 & -2 & -3 & 12 \end{bmatrix}, L_A(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, U_A(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dari pemilihan parameter  $0 \leq m \leq n-1$  dapat dilihat :

1. Jika  $m=0$ , maka diperoleh hasil yang sama dengan Metode Gauss Seidel awal dengan :

$$D_A(0) = \text{matriks diagonal.}$$

$$L_A(0) = \text{matriks segitiga bawah.}$$

$$U_A(0) = \text{matriks segitiga atas.}$$

2. Jika  $m = n-1$ , maka

$$\begin{aligned} A &= D_A(m) - (L_A(m) + U_A(m)) \\ &= D_A(m) - L_A(m) - U_A(m) \\ &= (D_A(m) - L_A(m)) - U_A(m). \end{aligned}$$

dengan  $L_A(m)$  dan  $U_A(m)$  adalah matriks nol,

sehingga

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ &= (D_A(m) - L_A(m))^{-1}\mathbf{b} \\ &= D_A(m)^{-1}\mathbf{b}, \end{aligned}$$

dimana  $A = D_A(m)$ .

3. Secara umum jika  $0 < m < n - 1$ , prosedur yang digunakan sama dengan Metode Gauss Seidel, perbedaannya terletak pada jumlah iterasi yang berbeda karena matriks-matriks yang terlibat pada proses iterasi bersifat umum. Metode ini yang dinamakan sebagai Gauss Seidel Diperumum dengan persamaan iterasinya adalah

$$x^{(k+1)} = (D_A(m) - L_A(m))b + (D_A(m) - L_A(m))^{-1}x^{(k)}, \quad (3.1.11)$$

dengan matriks

$$G_A(m) = (D_A(m) - L_A(m))^{-1}U_A$$

disebut matriks Gauss Seidel Diperumum.

### 3.2 Kekonvergenan Metode Gauss Seidel dan Metode Gauss Seidel Diperumum

Menurut Teorema (2.10.18), Misal  $A = M - N \in \mathbb{R}^{n \times n}$  adalah matriks non singular. Jika  $M$  adalah matriks non singular dan jari-jari spektral dari  $M^{-1}N$  memenuhi ketaksamaan  $\rho(M^{-1}N) < 1$ , maka iterasi  $\mathbf{x}^{(k)}$  konvergen ke  $\mathbf{x} = A^{-1}b$  untuk sebarang terkaan awal  $\mathbf{x}^{(0)}$ .

Dalam Metode Gauss Seidel  $M = (D_A - L_A)$  dan  $N = U_A$ , dengan  $(D_A - L_A)$  adalah matriks non singular dan  $\rho(D_A - L_A)^{(-1)}U_A < 1$ , maka iterasi  $x^{(k)}$  pada Metode Gauss Seidel akan konvergen ke  $\mathbf{x} = A^{(-1)}\mathbf{b}$  untuk sebarang terkaan awal.

**Lema 3.2.1. [2]**

Untuk setiap  $\lambda \in \mathbb{R}$  dengan  $|\lambda| \geq 1$ , jika  $A$  adalah matriks DDST, maka  $A_G(\lambda)$  juga DDST.

**Bukti.**

Misalkan  $A$  adalah matriks DDST, maka  $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$ , jika  $|\lambda| \geq 1$ , maka untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, n$ .

$$\begin{aligned} |\lambda a_{ii}| &= |\lambda| |a_{ii}| > |\lambda| \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \\ &= |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + |\lambda| \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \\ &\geq |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} |\lambda a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \\ &> \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \\ &> \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|. \end{aligned}$$

maka  $A_G(\lambda)$  juga matriks DDST. ■

**Teorema 3.2.2. [2]**

Misalkan  $A = D_A - L_A - U_A$  dan misalkan  $G_A = (D_A - L_A)^{(-1)} U_A$  matriks iterasi Gauss Seidel. Jika  $A$  matriks DDST, maka :

1.  $D_A - L_A$  adalah matriks non singular.
2.  $\rho(D_A - L_A)^{(-1)} U_A < 1$  atau  $\rho(G_A) < 1$ .

**Bukti.**

Misalkan  $A = D_A - L_A - U_A$  dan  $G_A = (D_A - L_A)^{(-1)}U_A$ .

1. Misal  $A$  adalah matriks DDST. Akan ditunjukkan  $D_A - L_A$  adalah matriks non singular.

Perhatikan bahwa

$$D_A - L_A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dari persamaan (2.2.1) diperoleh  $\det(D_A - L_A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$ . Karena  $A$  matriks DDST, maka  $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$ . Akibatnya  $\det(D_A - L_A) \neq 0$ , sehingga dari Teorema (2.3.6)  $(D_A - L_A)$  adalah matriks non singular.

2. Misal  $A$  adalah matriks DDST. Akan ditunjukkan  $\rho(G_A) < 1$ .

Untuk menunjukkan  $\rho(G) < 1$ , terlebih dahulu definisikan matriks  $A_G(\lambda)$ , dengan

$$A_G(\lambda) = \lambda(D_A - L_A) - U_A.$$

Misalkan  $\lambda$  nilai eigen dari matriks  $G$ , maka  $\lambda$  memenuhi persamaan  $G\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  dan  $\det(\lambda I - G) = 0$ .

Perhatikan Bahwa :

$$\begin{aligned}
 \det(\lambda I - G) &= \det(\lambda I - (D_A - L_A)^{-1}U_A) \\
 &= \det(\lambda((D_A - L_A)^{-1})(D_A - L_A) - (D_A - L_A)^{-1}U_A) \\
 &= \det((D_A - L_A)^{-1}(\lambda(D_A - L_A) - U_A)) \\
 &= \det((D_A - L_A)^{-1})\det(\lambda(D_A - L_A) - U_A) \\
 &= \det((D_A - L_A)^{-1})\det(A_G(\lambda)) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Karena  $(D_A - L_A)$  adalah matriks non singular, maka ada  $(D_A - L_A)^{(-1)}$  dengan  $\det(D_A - L_A)^{(-1)} \neq 0$ . Agar  $\det(\lambda I - G) = 0$ , maka haruslah  $\det(A_G(\lambda)) = 0$  atau  $A_G(\lambda)$  adalah matriks singular.

Karena matriks  $A$  adalah matriks DDST, maka menurut Lemma (3.2.1), jika  $|\lambda| \geq 1$ , matriks  $A_G(\lambda)$  juga bersifat DDST, dan menurut Teorema (2.6.12),  $A_G(\lambda)$  adalah matriks non singular. Oleh karena itu dalam hal  $A_G(\lambda)$  bersifat singular maka haruslah  $|\lambda| < 1$  yang menyebabkan  $\rho(G) < 1$ . Karena  $\rho(G) < 1$ , maka Metode Gauss Seidel konvergen ke solusi  $\mathbf{x} = A^{(-1)}\mathbf{b}$  untuk sebarang terkaan awal. ■

**Teorema 3.2.3.** Misalkan  $A = D_A(m) - L_A(m) - U_A(m)$  dan misalkan  $G_A(m) = ((D_A(m)) - L_A(m))^{-1}U_A(m)$  merupakan matriks iterasi Gauss Seidel Diperumum. Jika  $A$  matriks DDST, maka  $(D_A(m) - L_A(m))$  nonsingular dan  $\rho(G(m)) < 1$ .

**Bukti.**

$A$  adalah matriks DDST dengan  $a_{ii} \neq 0$ , sehingga  $\det(D_A(m) - L_A(m)) \neq 0$  dan  $(D_A(m) - L_A(m))$  adalah matriks nonsingular. Selanjutnya misalkan  $\lambda^*$  adalah

nilai eigen dari matriks iterasi Gauss Seidel Diperumum, maka  $\lambda^*$  memenuhi persamaan

$$G_A(m)\mathbf{x} = \lambda^*\mathbf{x},$$

sehingga  $\det(\lambda^*I - G_A(m)) = 0$ .

Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned} \det(\lambda^*I - G_A(m)) &= \det(\lambda^*I - (D_A(m) - L_A(m))^{-1}U_A(m)) \\ &= \det((D_A(m) - L_A(m))^{-1}(\lambda^*(D_A(m) - L_A(m)) - U_A(m))) \\ &= \det((D_A(m) - L_A(m))^{-1})\det(\lambda^*(D_A(m) - L_A(m)) - U_A(m)) \\ &= \det((D_A(m) - L_A(m)))^{-1}\det(A_G(m)(\lambda^*)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa  $A_G(m)(\lambda^*) = \lambda^*(D_A(m) - L_A(m)) - U_A(m)$ , sehingga

$$\begin{aligned} \lambda^*a_{11} &> \lambda^*a_{12} + \cdots + \lambda^*a_{1m} + \lambda^*a_{1,m+1} + a_{1,m+2} + \cdots + a_{1,n-1} + a_{1n} \\ \lambda^*a_{22} &> \lambda^*a_{21} + \cdots + \lambda^*a_{2m} + \lambda^*a_{2,m+1} + a_{2,m+2} + \cdots + a_{2,n-1} + a_{2n} \\ &\vdots \\ \lambda^*a_{nn} &> \lambda^*a_{n1} + \cdots + \lambda^*a_{nm} + \lambda^*a_{n,n-m-1} + \cdots + \lambda^*a_{n,n-1} + \lambda^*a_{nn} \end{aligned}$$

Karena  $A$  adalah matriks DDST, maka menurut Lemma (3.2.1)  $A_G(m)(\lambda^*)$  juga DDST dan berdasarkan Teorema (2.6.12)  $A_G(m)(\lambda^*)$  adalah matriks non singular.

Karena  $D_A(m) - L_A(m)$  adalah matriks non singular, maka ada  $(D_A(m) - L_A(m))^{-1}$  dengan  $\det(D_A(m) - L_A(m))^{-1} \neq 0$ . Agar  $\det(\lambda^*I - G_A(m)) = 0$ , maka haruslah  $\det(A_G(m)(\lambda^*)) = 0$  atau  $A_G(m)(\lambda^*)$  singular. Karena dalam hal ini  $A_G(m)(\lambda^*)$  bersifat singular maka  $|\lambda| < 1$  yang menyebabkan  $\rho(G(m)) < 1$ .

Karena  $\rho(G(m)) < 1$ , maka Metode Gauss Seidel Diperumum juga konvergen ke solusi  $\mathbf{x} = A^{(-1)}\mathbf{b}$  untuk sebarang terkaan awal. ■

### 3.3 Contoh

Berikut akan diberikan contoh untuk membandingkan Metode Gauss Seidel biasa dengan Metode Gauss Seidel Diperumum dengan tetapan error dan terkaan awal yang sama untuk memperlihatkan keefisienan dari Metode Gauss Seidel Diperumum.

**Contoh 3.3.4.** Misal diberikan suatu SPL sebagai berikut

$$10x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

$$x_1 + 5x_2 + x_3 = 14$$

$$x_1 + x_2 + 6x_3 = 21.$$

Sistem di atas akan dicari solusinya dengan menggunakan Metode Gauss Seidel dan Metode Gauss Seidel Diperumum dengan error 0,0002 dan terkaan

awal yang sama yakni 
$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian :

1. Dengan metode Gauss Seidel :

SPL diatas dapat ditulis kedalam bentuk  $Ax = b$  dengan

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 15 \\ 14 \\ 21 \end{bmatrix}.$$

Dengan menulis  $A = D_A - L_A - U_A$ , diperoleh :

$$D_A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad L_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(D_A - L_A)^{-1}b = \begin{bmatrix} 1.5000 \\ 2.5000 \\ 2.8333 \end{bmatrix}, \quad (D_A - L_A)^{-1}U_A = \begin{bmatrix} 0 & -0.1000 & -0.1000 \\ 0 & 0.0200 & -0.1800 \\ 0 & 0.0133 & 0.0467 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan Persamaan (3.1.8) diperoleh solusi dari SPL (lihat Tabel 3.3.2)

| k | $x_1$  | $x_2$  | $x_3$  |
|---|--------|--------|--------|
| 0 | 1.2000 | 2.1600 | 2.9400 |
| 1 | 0.9900 | 2.0140 | 2.9993 |
| 2 | 0.9987 | 2.0004 | 3.0002 |
| 3 | 0.9999 | 2.0000 | 3.0000 |
| 4 | 1.0000 | 2.0000 | 3.0000 |

Tabel 3.3.2. Hasil contoh 1 dengan iterasi Gauss Seidel

Karena  $|x_i^{(5)} - x_i^{(4)}| < 0.0002, i = 1, 2, 3$  maka proses iterasi dihentikan setelah iterasi sebanyak 5 kali.

## 2. Dengan Gauss Seidel Diperumum

Sesuai dengan syarat  $0 < m < n - 1$  maka  $m=1$ . Dengan menulis  $A = D_A(1) - L_A(1) - U_A(1)$  diperoleh

$$D_A(1) = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 11 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad L_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(D_A(1) - L_A(1))^{-1}b = \begin{bmatrix} 1.3053 \\ 1.9474 \\ 2.9579 \end{bmatrix},$$

$$(D_A(1) - L_A(1))^{-1}U_A(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.1018 \\ 0 & 0 & 0.0175 \\ 0 & 0 & 0.0140 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan Persamaan (3.1.11) diperoleh solusi SPL (lihat Tabel 3.3.3)

Karena  $|x_i^{(3)} - x_i^{(2)}| < 0.0002, i = 1, 2, 3$  maka proses iterasi dihentikan setelah iterasi sebanyak 4 kali.

Analisa Contoh : Dari contoh diatas terlihat bahwa proses iterasi dengan Metode Gauss Seidel sebanyak 5 kali dapat diturunkan menjadi 4 kali dengan

| k | $x_1$  | $x_2$  | $x_3$  |
|---|--------|--------|--------|
| 0 | 1.1018 | 1.9825 | 2.9860 |
| 1 | 1.0014 | 1.9998 | 2.9998 |
| 2 | 1.0000 | 2.0000 | 3.0000 |
| 3 | 1.0000 | 2.0000 | 3.0000 |

Tabel 3.3.3. Hasil contoh 1 dengan Iterasi Gauss Seidel Diperumum

menggunakan Metode Gauss Seidel Diperumum dimana error serta terkaan awal yang digunakan sama.

**Contoh 3.3.5.** Misal diberikan suatu SPL sebagai berikut

$$7x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3$$

$$2x_1 + 8x_2 + 3x_3 + x_4 = -2$$

$$-x_1 + 5x_3 + 2x_4 = 5$$

$$2x_2 - x_3 + x_4 = 4.$$

Sistem di atas akan dicari solusinya dengan menggunakan Metode Gauss Seidel dan Metode Gauss Seidel Diperumum dengan error 0,0002 dan terkaan

awal yang sama yakni

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ x_4^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian :

1. Dengan Metode Gauss Seidel

SPL diatas dapat ditulis kedalam bentuk  $Ax = b$  dengan

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Dengan menulis  $A = D_A - L_A - U_A$ , diperoleh :

$$D_A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad L_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(D_A - L_A)^{-1}b = \begin{bmatrix} 0.4286 \\ -0.3571 \\ 1.0857 \\ 1.4500 \end{bmatrix},$$

$$(D_A - L_A)^{-1}U_A = \begin{bmatrix} 0 & 0.2857 & -0.1429 & -0.2857 \\ 0 & -0.0714 & -0.3393 & -0.0536 \\ 0 & 0.0571 & -0.0286 & -0.4571 \\ 0 & 0.0500 & 0.1625 & -0.0875 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan Persamaan (3.1.8) diperoleh solusi SPL (lihat Tabel 3.3.4)

| k | $x_1$   | $x_2$   | $x_3$  | $x_4$  |
|---|---------|---------|--------|--------|
| 0 | 0.4286  | -0.3571 | 1.0857 | 1.4500 |
| 1 | -0.2429 | -0.7777 | 0.3714 | 1.4817 |
| 2 | -0.2700 | -0.5070 | 0.3533 | 1.3418 |
| 3 | -0.1501 | -0.5127 | 0.4332 | 1.3647 |
| 4 | -0.1697 | -0.5406 | 0.4202 | 1.3754 |
| 5 | -0.1789 | -0.5348 | 0.4141 | 1.3709 |
| 6 | -0.1751 | -0.5329 | 0.4166 | 1.3706 |
| 7 | -0.1748 | -0.5339 | 0.4168 | 1.3711 |
| 8 | -0.1753 | -0.5339 | 0.4165 | 1.3711 |
| 9 | -0.1752 | -0.5338 | 0.4165 | 1.3710 |

Tabel 3.3.4. Hasil contoh 2 dengan iterasi Gauss Seidel

Karena  $|x_i^{(10)} - x_i^{(9)}| < 0.0002, i = 1, 2, 3$  maka proses iterasi dihentikan setelah iterasi sebanyak 10 kali.

## 2. Dengan Metode Gauss Seidel Diperumum

Sesuai dengan syarat  $0 < m < n - 1$  dapat dipilih  $m=1$  dan  $m=2$ .

- Dengan menulis  $A = D_A(1) - L_A(1) - U_A(1)$  diperoleh

$$D_A(1) = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad L_A(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$U_A(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(D_A(1) - L_A(1))^{-1}b = \begin{bmatrix} 0.2829 \\ -0.5098 \\ 0.5042 \\ 1.3810 \end{bmatrix},$$

$$(D_A(1) - L_A(1))^{-1}U_A(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.1317 & -0.2941 \\ 0 & 0 & 0.0392 & -0.0294 \\ 0 & 0 & -0.0168 & -0.0588 \\ 0 & 0 & -0.0238 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan Persamaan (3.1.11) diperoleh solusi SPL (lihat Tabel 3.3.5).

| k | $x_1$   | $x_2$   | $x_3$  | $x_4$  |
|---|---------|---------|--------|--------|
| 0 | 0.2829  | -0.5098 | 0.5042 | 1.3810 |
| 1 | -0.1896 | -0.5306 | 0.4145 | 1.3689 |
| 2 | -0.1743 | -0.5338 | 0.4167 | 1.3711 |
| 3 | -0.1752 | -0.5338 | 0.4165 | 1.3710 |
| 4 | -0.1752 | -0.5338 | 0.4166 | 1.3710 |

Tabel 3.3.5. Hasil contoh 2 dengan iterasi Gauss Seidel Diperumum

Karena  $|x_i^{(5)} - x_i^{(4)}| < 0.0002, i = 1, 2, 3$  maka proses iterasi dihentikan setelah iterasi sebanyak 5 kali.

- Dengan menulis  $A = D_A(2) - L_A(2) - U_A(2)$  diperoleh

$$D_A(2) = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad L_A(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$U_A(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(D_A(2) - L_A(2))^{-1}b = \begin{bmatrix} 0.1780 \\ -0.6469 \\ 0.4602 \\ 1.4385 \end{bmatrix},$$

$$(D_A(2) - L_A(2))^{-1}U_A(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.2576 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0825 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0318 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0492 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan Persamaan (3.3.2) diperoleh solusi SPL (lihat Tabel 3.3.6)

| k | $x_1$   | $x_2$   | $x_3$  | $x_4$  |
|---|---------|---------|--------|--------|
| 0 | 0.1780  | -0.6469 | 0.4602 | 1.4385 |
| 1 | -0.1926 | -0.5282 | 0.4144 | 1.3677 |
| 2 | -0.1743 | -0.5341 | 0.4167 | 1.3712 |
| 3 | -0.1752 | -0.5338 | 0.4165 | 1.3710 |
| 4 | -0.1752 | -0.5338 | 0.4166 | 1.3710 |

Tabel 3.3.6. Hasil contoh 2 dengan iterasi Gauss Seidel Diperumum

Karena  $|x_i^{(5)} - x_i^{(4)}| < 0.0002, i = 1, 2, 3$  maka proses iterasi dihentikan setelah iterasi sebanyak 5 kali.

Analisa Contoh : Dari contoh diatas terlihat bahwa proses iterasi dengan Metode Gauss Seidel sebanyak 10 kali dapat diturunkan menjadi 5 kali de-

ngan menggunakan Metode Gauss Seidel Diperumum dengan pemilihan parameter  $m=1$  dan  $m=2$  dan dengan menggunakan error serta terkaan awal yang sama.

**Contoh 3.3.6.** [Perhitungan Distribusi Suhu]. Perhatikan pelat datar dengan sisi-sisi pelat dijaga pada suhu tetap  $0^\circ \text{ C}$  dan  $100^\circ \text{ C}$ . Distribusi suhu di dalam pelat dapat diaproksimasikan pada sembilan titik simpul internal dengan memakai persamaan Laplace pada setiap titik simpul. Hasil ini ditaruh dalam kumpulan persamaan yang dinyatakan dalam bentuk matriks  $Ax = b$  :

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{21} \\ T_{22} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{32} \\ T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ -100 \\ -200 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix}.$$

Sistem di atas akan dicari solusinya dengan menggunakan Metode Gauss Seidel dan Metode Gauss Seidel Diperumum dengan error 0,0005 dan terkaan awal yang sama yakni

$$\begin{bmatrix} T_{11}^{(0)} \\ T_{12}^{(0)} \\ T_{13}^{(0)} \\ T_{21}^{(0)} \\ T_{22}^{(0)} \\ T_{23}^{(0)} \\ T_{31}^{(0)} \\ T_{32}^{(0)} \\ T_{33}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian :

Terlihat bahwa sistem resultan dari persamaan-persamaan adalah dominan diagonal secara tepat dan oleh sebab itu kompatibel dengan Metode Gauss Seidel. Dalam hal ini konvergensinya terjamin karena persamaan (2.6.1) terpenuhi.

#### 1. Dengan Metode Gauss Seidel

Dengan menulis  $A = D_A - (L_A + U_A)$ , diperoleh

$$D_A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

$$L_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$U_A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

selanjutnya

$$(D_A - LA)^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0625 & -0.2500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0156 & -0.0625 & -0.2500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0625 & 0 & 0 & -0.2500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0313 & -0.0625 & 0 & -0.0625 & -0.2500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0117 & -0.0313 & -0.0625 & -0.0156 & -0.0625 & -0.2500 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0156 & 0 & 0 & -0.0625 & 0 & 0 & -0.2500 & 0 & 0 \\ -0.0117 & -0.0156 & 0 & -0.0313 & -0.0625 & 0 & -0.0625 & -0.2500 & 0 \\ -0.0059 & -0.0117 & -0.0156 & -0.0117 & -0.0313 & -0.0625 & -0.0156 & -0.0625 & -0.2500 \end{bmatrix}$$

$$(D_A - L_A)^{-1}U_A = \begin{bmatrix} 0 & 0.2500 & 0 & 0.2500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0625 & 0.2500 & 0.0625 & 0.2500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0156 & 0.0625 & 0.0156 & 0.0625 & 0.2500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0625 & 0 & 0.0625 & 0.2500 & 0 & 0.2500 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0313 & 0.0625 & 0.0313 & 0.1250 & 0.2500 & 0.0625 & 0.2500 & 0 \\ 0 & 0.0117 & 0.0313 & 0.0117 & 0.0469 & 0.1250 & 0.0156 & 0.0625 & 0.2500 \\ 0 & 0.0156 & 0 & 0.0156 & 0.0625 & 0 & 0.0625 & 0.2500 & 0 \\ 0 & 0.0117 & 0.0156 & 0.0117 & 0.0469 & 0.0625 & 0.0313 & 0.1250 & 0.2500 \\ 0 & 0.0059 & 0.0117 & 0.0059 & 0.0234 & 0.0469 & 0.0117 & 0.0469 & 0.1250 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan Persamaan (3.1.8) maka diperoleh solusi SPL (lihat Tabel 3.3.7).

Karena  $|x_i^{(19)} - x_i^{(18)}| < 0,0005, i = 1, 2, 3, \dots, 9$ , maka proses iterasi dihentikan setelah iterasi sebanyak 19 kali.

## 2. Dengan Metode Gauss Seidel Diperumum

Dengan menulis  $A = D_A(2) - (L_A(2) + U_A(2))$ , diperoleh

| $k$ | $T_{11}$ | $T_{12}$ | $T_{13}$ | $T_{21}$ | $T_{22}$ | $T_{23}$ | $T_{31}$ | $T_{32}$ | $T_{33}$ |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0   | 25.0000  | 31.2500  | 57.8125  | 6.2500   | 9.3750   | 41.7969  | 1.5625   | 2.7344   | 36.1328  |
| 1   | 34.3750  | 50.3906  | 73.0469  | 11.3281  | 26.5625  | 58.9355  | 3.5156   | 16.5527  | 43.8721  |
| 2   | 40.4297  | 60.0098  | 79.7363  | 17.6270  | 38.2813  | 65.4724  | 8.5449   | 22.6746  | 47.0367  |
| 3   | 44.4092  | 65.6067  | 82.7698  | 22.8088  | 44.1406  | 68.4868  | 11.3708  | 25.6371  | 48.5310  |
| 4   | 47.1039  | 68.5036  | 84.2476  | 25.6538  | 47.0703  | 69.9622  | 12.8227  | 27.1060  | 49.2671  |
| 5   | 48.5394  | 69.9643  | 84.9816  | 27.1081  | 48.5352  | 70.6960  | 13.5535  | 27.8389  | 49.6337  |
| 6   | 49.2681  | 70.6962  | 85.3480  | 27.8392  | 49.2676  | 71.0623  | 13.9195  | 28.2052  | 49.8169  |
| 7   | 49.6339  | 71.0624  | 85.5312  | 28.2052  | 49.6338  | 71.2455  | 14.1026  | 28.3883  | 49.9084  |
| 8   | 49.8169  | 71.2455  | 85.6227  | 28.3883  | 49.8169  | 71.3370  | 14.1942  | 28.4799  | 49.9542  |
| 9   | 49.9084  | 71.3370  | 85.6685  | 28.4799  | 49.9084  | 71.3828  | 14.2399  | 28.5257  | 49.9771  |
| 10  | 49.9542  | 71.3828  | 85.6914  | 28.5257  | 49.9542  | 71.4057  | 14.2628  | 28.5485  | 49.9886  |
| 11  | 49.9771  | 71.4057  | 85.7028  | 28.5485  | 49.9771  | 71.4171  | 14.2743  | 28.5600  | 49.9943  |
| 12  | 49.9886  | 71.4171  | 85.7086  | 28.5600  | 49.9886  | 71.4228  | 14.2800  | 28.5657  | 49.9971  |
| 13  | 49.9943  | 71.4228  | 85.7114  | 28.5657  | 49.9943  | 71.4257  | 14.2829  | 28.5686  | 49.9986  |
| 14  | 49.9971  | 71.4257  | 85.7129  | 28.5686  | 49.9971  | 71.4271  | 14.2843  | 28.5700  | 49.9993  |
| 15  | 49.9986  | 71.4271  | 85.7136  | 28.5700  | 49.9986  | 71.4279  | 14.2850  | 28.5707  | 49.9996  |
| 16  | 49.9993  | 71.4279  | 85.7139  | 28.5707  | 49.9993  | 71.4282  | 14.2854  | 28.5711  | 49.9998  |
| 17  | 49.9996  | 71.4282  | 85.7141  | 28.5711  | 49.9996  | 71.4284  | 14.2855  | 28.5712  | 49.9999  |
| 18  | 49.9998  | 71.4284  | 85.7142  | 28.5712  | 49.9998  | 71.4285  | 14.2856  | 28.5713  | 50.0000  |

Tabel 3.3.7. Hasil contoh 3 dengan iterasi Gauss Seidel

$$D_A(2) = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix},$$

$$L_A(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$U_A(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

selanjutnya

$$(D_A(2) - LA(2))^{-1}b = \begin{bmatrix} 37.5000 \\ 50.0000 \\ 62.5000 \\ 16.5179 \\ 28.5714 \\ 47.7679 \\ 9.1040 \\ 19.8980 \\ 41.9165 \end{bmatrix},$$

$$(D_A(2)-L_A(2))^{-1}U_A(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.2679 & 0.0714 & 0.0179 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0714 & 0.2857 & 0.0714 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0179 & 0.0714 & 0.2679 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0772 & 0.0408 & 0.0147 & 0.2679 & 0.0714 & 0.0179 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0408 & 0.0918 & 0.0408 & 0.0714 & 0.2857 & 0.0714 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0147 & 0.0408 & 0.0772 & 0.0179 & 0.0714 & 0.2679 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0238 & 0.0182 & 0.0082 & 0.0772 & 0.0408 & 0.0147 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0182 & 0.0321 & 0.0182 & 0.0408 & 0.0918 & 0.0408 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0082 & 0.0182 & 0.0238 & 0.0147 & 0.0408 & 0.0772 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan Persamaan (3.1.11) diperoleh solusi SPL (lihat Tabel 3.3.8)

Karena  $|x_i^{(12)} - x_i^{(11)}| < 0,0005, i = 1, 2, 3, \dots, 9$ , maka proses iterasi dihentikan setelah iterasi sebanyak 12 kali.

Analisa Contoh : Dari contoh diatas terlihat bahwa proses iterasi dengan Metode Gauss Seidel sebanyak 19 kali dapat diturunkan menjadi 12 kali dengan menggunakan Metode Gauss Seidel Diperumum dengan pemilihan parameter  $m=2$  dan dengan menggunakan error serta terkaan awal yang sama.

| $k$ | $T_{11}$ | $T_{12}$ | $T_{13}$ | $T_{21}$ | $T_{22}$ | $T_{23}$ | $T_{31}$ | $T_{32}$ | $T_{33}$ |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0   | 37.5000  | 50.0000  | 62.5000  | 16.5179  | 28.5714  | 47.7679  | 9.1040   | 19.8980  | 41.9165  |
| 1   | 44.8182  | 62.7551  | 77.6307  | 24.2677  | 43.1487  | 65.6740  | 12.5408  | 25.8955  | 47.8924  |
| 2   | 48.2551  | 68.7526  | 83.6066  | 27.1791  | 47.9205  | 69.8549  | 13.7361  | 27.7654  | 49.4051  |
| 3   | 49.4504  | 70.6226  | 85.1194  | 28.1406  | 49.3759  | 70.9751  | 14.1176  | 28.3300  | 49.8263  |
| 4   | 49.8319  | 71.1871  | 85.5405  | 28.4407  | 49.8132  | 71.2950  | 14.2350  | 28.4992  | 49.9485  |
| 5   | 49.9493  | 71.3563  | 85.6628  | 28.5321  | 49.9441  | 71.3889  | 14.2705  | 28.5498  | 49.9847  |
| 6   | 49.9848  | 71.4070  | 85.6990  | 28.5596  | 49.9833  | 71.4167  | 14.2811  | 28.5650  | 49.9954  |
| 7   | 49.9954  | 71.4221  | 85.7097  | 28.5679  | 49.9950  | 71.4250  | 14.2843  | 28.5695  | 49.9986  |
| 8   | 49.9986  | 71.4266  | 85.7129  | 28.5704  | 49.9985  | 71.4275  | 14.2853  | 28.5709  | 49.9996  |
| 9   | 49.9996  | 71.4280  | 85.7139  | 28.5711  | 49.9996  | 71.4283  | 14.2856  | 28.5713  | 49.9999  |
| 10  | 49.9999  | 71.4284  | 85.7142  | 28.5713  | 49.9999  | 71.4285  | 14.2857  | 28.5714  | 50.0000  |
| 11  | 50.0000  | 71.4285  | 85.7142  | 28.5714  | 50.0000  | 71.4285  | 14.2857  | 28.5714  | 50.0000  |

Tabel 3.3.8. Hasil contoh 3 dengan iterasi Gauss Seidel Diperumum

## IV PENUTUP

### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian dari Bab III, dapat diberikan kesimpulan sebagai berikut. Misal diberikan sistem persamaan linier  $Ax = b$  dengan  $A$  bersifat diagonal dominan secara tepat maka :

1. Iterasi Gauss Seidel konvergen untuk sebarang terkaan awal dengan syarat jari-jari spektral matriks iterasi Gauss Seidel lebih kecil dari 1.
2. Matriks-matriks yang terlibat dalam metode iterasi Gauss Seidel dapat Diperumum berdasarkan parameter  $0 < m < n - 1$ . Metode iterasi Gauss Seidel yang demikian dinamakan Metode Gauss Seidel Diperumum.
3. Iterasi Metode Gauss Seidel Diperumum juga konvergen kesebarang terkaan awal  $x$  dengan syarat jari-jari spektralnya lebih kecil dari 1.
4. Beberapa contoh yang telah diberikan menunjukkan bahwa dengan pemilihan parameter yang sesuai, iterasi Gauss Seidel Diperumum lebih efisien daripada iterasi Gauss Seidel dengan penetapan error dan terkaan awal yang sama untuk kedua metode.

## 4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya penulis menyarankan untuk meneliti iterasi Gauss Seidel dengan matriks  $A$  yang simetrik definit positif, karena jika  $A$  matriks simetrik definit positif, maka iterasi Gauss Seidel juga akan konvergen dengan sebarang terkaan awal. Dan juga disarankan untuk menyelidiki tentang pemilihan parameter  $m$  agar diperoleh iterasi Gauss Seidel yang lebih efisien.



## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anton, H. 1988. *Elementary Linear Algebra. fifth Edition*. Drexel University
- [2] Bagnara, R. 1995. A unified proof for the convergence of jacobi and gauss seidel methods. *Soc. For Industrial and App.Math.* **37(1)**: 93-97
- [3] Bartle, R.G. 1994. *Introduction to Real Analysis Second Edition*. John Willey and Sons. Singapore
- [4] Dojodiharjo, H. 2000. *Metode Numerik*. Gramedia Pustaka Umum, Jakarta
- [5] Jacob, B. 1990. *Linear Algebra*. W.H Freeman and company, New York
- [6] Golub, G.H. 1989. *Matrix computation* . The John Hopkins University Press, London
- [7] Hager, W.W. 1988. *Applied Numerical Linear Algebra*. Prentice Hall
- [8] Horn, R.A and C.R. Johnson. 1985. *Matrix Analysis*. Cambriedge University Press, Australia
- [9] Munir, R. 2003. *Metode Numerik*. Informatika Bandung, Bandung
- [10] Saad, Y. 2000. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. PWS Press, New York
- [11] Salkuyeh, D. 2007. Generalized Jacobi and Gauss Seidel Methods for Solving Linear System of Equations. *Numerical Mathematics*. Vol.16:164-170

## LAMPIRAN

Lampiran ini berisikan langkah – langkah pengerjaan semua contoh yang terdapat didalam Bab Pembahasan dengan menggunakan Matlab.

### 1. Contoh 1

- Langkah – langkah pengerjaan dengan Metode Gauss Seidel

$$\gg A = [10 \ 1 \ 1 ; 1 \ 5 \ 1; 1 \ 1 \ 6]$$

$$\gg Da = [10 \ 0 \ 0 ; 0 \ 5 \ 0; 0 \ 0 \ 6]$$

$$\gg La = [0 \ 0 \ 0; -1 \ 0 \ 0; -1 \ -1 \ 0]$$

$$\gg Ua = [ \ 0 \ -1 \ -1; 0 \ 0 \ -1; 0 \ 0 \ 0]$$

$$\gg b = [15 \ 14 \ 21]$$

$$\gg x = [0 \ 1 \ 2]$$

$$\gg (Da - La)^{-1} * b'$$

$$\gg (Da - La)^{-1} * Ua$$

$$\gg x1 = (Da - La)^{-1} * b' + (Da - La)^{-1} * Ua * x'$$

$$x1 = 1.2000$$

$$2.1600$$

$$2.9400$$

$$\gg x2 = (Da - La)^{-1} * b' + (Da - La)^{-1} * Ua * x1$$

$$x2 = 0.9900$$

$$2.0140$$

$$2.9993$$

$$\gg x3 = (Da - La)^{-1} * b' + (Da - La)^{-1} * Ua * x2$$

$$x3 = 0.9987$$

$$2.0004$$

$$3.0002$$

$$\gg x4 = (Da - La)^{-1} * b' + (Da - La)^{-1} * Ua * x3$$

$$x4 = 0.9999$$

2.0000

3.0000

$$\gg x5 = (Da - La)^{-1} \cdot b' + (Da - La)^{-1} \cdot Ua \cdot x4$$

$$x5 = 1.0000$$

2.0000

3.0000

- Langkah – langkah pengerjaan dengan Metode Gauss Seidel Diperumum

$$\gg D1 = [10 \ 1 \ 0; 1 \ 5 \ 1; 0 \ 1 \ 6]$$

$$\gg L1 = [0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0; -1 \ 0 \ 0]$$

$$\gg U1 = [0 \ 0 \ -1; 0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0]$$

$$\gg b = [15 \ 14 \ 21]$$

$$\gg x = [0 \ 1 \ 2]$$

$$\gg (D1 - L1)^{-1} \cdot b'$$

$$\gg (D1 - L1)^{-1} \cdot U1$$

$$\gg x1 = (D1 - L1)^{-1} \cdot b' + (D1 - L1)^{-1} \cdot Ua \cdot x'$$

$$x1 = 1.1018$$

1.9825

2.9860

$$\gg x2 = (D1 - L1)^{-1} \cdot b' + (D1 - L1)^{-1} \cdot Ua \cdot x1$$

$$x2 = 1.0014$$

1.9998

2.9998

$$\gg x3 = (D1 - L1)^{-1} \cdot b' + (D1 - L1)^{-1} \cdot Ua \cdot x2$$

$$x3 = 1.0000$$

2.0000

3.0000

$$\gg x4 = (D1 - L1)^{-1} \cdot b' + (D1 - L1)^{-1} \cdot Ua \cdot x3$$

$$x_4 = 1.0000$$

$$2.0000$$

$$3.0000$$

## 2. Contoh 2

- Langkah – langkah pengerjaan dengan Metode Gauss Seidel

$$\gg A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\gg b = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\gg x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\gg D_a = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\gg U_a = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gg L_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gg (D_a - L_a)^{-1} \cdot b'$$

$$\gg (D_a - L_a)^{-1} \cdot U_a$$

$$\gg x_1 = (D_a - L_a)^{-1} \cdot b' + (D_a - L_a)^{-1} \cdot U_a \cdot x'$$

$$x_1 = 0.4286$$

$$-0.3571$$

$$1.0857$$

$$1.4500$$

$$\gg x_2 = (D_a - L_a)^{-1} \cdot b' + (D_a - L_a)^{-1} \cdot U_a \cdot x_1$$

$$x_2 = -0.2429$$

$$-0.7777$$

$$0.3714$$

$$1.4817$$

$$\gg x_3 = (D_a - L_a)^{-1} \cdot b' + (D_a - L_a)^{-1} \cdot U_a \cdot x_2$$

$$x_3 = -0.2700$$

$$-0.5070$$

$$0.3533$$

1.3418

$$\gg x4 = (Da - La)^{-1} \cdot b' + (Da - La)^{-1} \cdot Ua \cdot x3$$

$$x4 = -0.1501$$

$$-0.5127$$

$$0.4332$$

$$1.3647$$

$$\gg x5 = (Da - La)^{-1} \cdot b' + (Da - La)^{-1} \cdot Ua \cdot x4$$

$$x5 = -0.1697$$

$$-0.5406$$

$$0.4202$$

$$1.3754$$

$$\gg x6 = (Da - La)^{-1} \cdot b' + (Da - La)^{-1} \cdot Ua \cdot x5$$

$$x6 = -0.1789$$

$$-0.5348$$

$$0.4141$$

$$1.3709$$

$$\gg x7 = (Da - La)^{-1} \cdot b' + (Da - La)^{-1} \cdot Ua \cdot x6$$

$$x7 = -0.1751$$

$$-0.5329$$

$$0.4166$$

$$1.3706$$

$$\gg x8 = (Da - La)^{-1} \cdot b' + (Da - La)^{-1} \cdot Ua \cdot x7$$

$$x8 = -0.1748$$

$$-0.5339$$

$$0.4168$$

$$1.3711$$

$$\gg x_9 = (Da - La)^{-1} \cdot b' + (Da - La)^{-1} \cdot Ua \cdot x_8$$

$$x_9 =$$

$$-0.1753$$

$$-0.5339$$

$$0.4165$$

$$1.3711$$

$$\gg x_{10} = (Da - La)^{-1} \cdot b' + (Da - La)^{-1} \cdot Ua \cdot x_9$$

$$x_{10} =$$

$$-0.1752$$

$$-0.5338$$

$$0.4165$$

$$1.3710$$

- Langkah – langkah pengerjaan dengan Metode Gauss Seidel Diperumum

$$\gg D1 = [7 \ -2 \ 0 \ 0; 2 \ 8 \ 3 \ 0; 0 \ 0 \ 5 \ 2; 0 \ 0 \ -1 \ 4]$$

$$\gg L1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 0; 1 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ -2 \ 0 \ 0]$$

$$\gg U1 = [0 \ 0 \ -1 \ -2; 0 \ 0 \ 0 \ -1; 0 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\gg x = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\gg b = [3 \ -2 \ 5 \ 4]$$

$$\gg (D1 - L1)^{-1} \cdot b'$$

$$\gg (D1 - L1)^{-1} \cdot U1$$

$$\gg x1 = (D1 - L1)^{-1} \cdot b' + (D1 - L1)^{-1} \cdot U1 \cdot x'$$

$$x1 =$$

$$0.2829$$

$$-0.5098$$

$$0.5042$$

$$1.3810$$

$$\gg x2 = \gg x1 = (D1 - L1)^{-1} \cdot b' + (D1 - L1)^{-1} \cdot U1 \cdot x1$$

$$x2 =$$

$$-0.1896$$

$$-0.5306$$

$$0.4145$$

$$x_2 = -0.1896$$

$$-0.5306$$

$$0.4145$$

$$1.3689$$

$$\gg x_3 = \gg x_1 = (D_1 - L_1)^{-1} \cdot b' + (D_1 - L_1)^{-1} \cdot U_1 \cdot x_2$$

$$x_3 = -0.1743$$

$$-0.5338$$

$$0.4167$$

$$1.3711$$

$$\gg x_4 = \gg x_1 = (D_1 - L_1)^{-1} \cdot b' + (D_1 - L_1)^{-1} \cdot U_1 \cdot x_3$$

$$x_4 = -0.1752$$

$$-0.5338$$

$$0.4165$$

$$1.3710$$

$$\gg x_5 = \gg x_1 = (D_1 - L_1)^{-1} \cdot b' + (D_1 - L_1)^{-1} \cdot U_1 \cdot x_4$$

$$x_5 = -0.1752$$

$$-0.5338$$

$$0.4166$$

$$1.3710$$

### 3. Contoh 3

- Langkah – langkah pengerjaan dengan Metode Gauss Seidel

$$\gg Da = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\gg La = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gg Ua = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gg b = [-100 \ -100 \ -200 \ 0 \ 0 \ -100 \ 0 \ 0 \ -100]$$

$$\gg x = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\gg (Da - La)^{-1} * b'$$

$$\gg (Da - La)^{-1} * Ua$$

$$\gg x1 = (Da - La)^{-1} * b' + (Da - La)^{-1} * Ua * x'$$

$$x1 =$$

25.0000

31.2500

57.8125

6.2500

9.3750

41.7969

1.5625

2.7344

36.1328

$$\gg x2 = (Da - La)^{-1} * b' + (Da - La)^{-1} * Ua * x1$$

$$X2 =$$

34.3750

50.3906

73.0469

11.3281

26.5625

58.9355

3.5156

16.5527

43.8721

$$\gg x3 = (Da - La)^{-1} * b' + (Da - La)^{-1} * Ua * x2$$

$$x3 =$$

40.4297

60.0098

79.7363

17.6270

38.2813

65.4724

8.5449

22.6746

47.0367

$$\gg x4 = (Da - La)^{-1} * b' + (Da - La)^{-1} * Ua * x3$$

$$x4 =$$

44.4092  
65.6067  
82.7698  
22.8088  
44.1406  
68.4868  
11.3708  
25.6371  
48.5310

$$\gg x5 = (Da - La)^{-1*}b' + (Da - La)^{-1*}Ua*x4$$

x5 =

47.1039  
68.5036  
84.2476  
25.6538  
47.0703  
69.9622  
12.8227  
27.1060  
49.2671

$$\gg x6 = (Da - La)^{-1*}b' + (Da - La)^{-1*}Ua*x5$$

x6 =

48.5394  
69.9643  
84.9816  
27.1081  
48.5352  
70.6960  
13.5535  
27.8389  
49.6337

$$\gg x7 = (Da - La)^{-1*}b' + (Da - La)^{-1*}Ua*x6$$

x7 =

49.2681  
70.6962  
85.3480  
27.8392  
49.2676  
71.0623

13.9195  
28.2052  
49.8169

$$\gg x8 = (Da - La)^{-1*}b' + (Da - La)^{-1*}Ua*x7$$

x8 =

49.6339  
71.0624  
85.5312  
28.2052  
49.6338  
71.2455  
14.1026  
28.3883  
49.9084

$$\gg x9 = (Da - La)^{-1*}b' + (Da - La)^{-1*}Ua*x8$$

x9 =

49.8169  
71.2455  
85.6227  
28.3883  
49.8169  
71.3370  
14.1942  
28.4799  
49.9542

$$\gg x10 = (Da - La)^{-1*}b' + (Da - La)^{-1*}Ua*x9$$

x10 =

49.9084  
71.3370  
85.6685  
28.4799  
49.9084  
71.3828  
14.2399  
28.5257  
49.9771

$$\gg x11 = (Da - La)^{-1*}b' + (Da - La)^{-1*}Ua*x10$$

x11 =

49.9542  
71.3828  
85.6914  
28.5257  
49.9542  
71.4057  
14.2628  
28.5485  
49.9886

$$\gg x12 = (Da - La)^{-1*}b' + (Da - La)^{-1*}Ua*x11$$

x12 =

49.9771  
71.4057  
85.7028  
28.5485  
49.9771  
71.4171  
14.2743  
28.5600  
49.9943

$$\gg x13 = (Da - La)^{-1*}b' + (Da - La)^{-1*}Ua*x12$$

x13 =

49.9886  
71.4171  
85.7086  
28.5600  
49.9886  
71.4228  
14.2800  
28.5657  
49.9971

$$\gg x14 = (Da - La)^{-1*}b' + (Da - La)^{-1*}Ua*x13$$

x14 =

49.9943  
71.4228  
85.7114  
28.5657  
49.9943  
71.4257

14.2829  
28.5686  
49.9986

$$\gg x15 = (Da - La)^{-1*}b' + (Da - La)^{-1*}Ua*x14$$

x15 =

49.9971  
71.4257  
85.7129  
28.5686  
49.9971  
71.4271  
14.2843  
28.5700  
49.9993

$$\gg x16 = (Da - La)^{-1*}b' + (Da - La)^{-1*}Ua*x15$$

x16 =

49.9986  
71.4271  
85.7136  
28.5700  
49.9986  
71.4279  
14.2850  
28.5707  
49.9996

$$\gg x17 = (Da - La)^{-1*}b' + (Da - La)^{-1*}Ua*x16$$

x17 =

49.9993  
71.4279  
85.7139  
28.5707  
49.9993  
71.4282  
14.2854  
28.5711  
49.9998

$$\gg x18 = (Da - La)^{-1*}b' + (Da - La)^{-1*}Ua*x17$$

x18 =

49.9996  
 71.4282  
 85.7141  
 28.5711  
 49.9996  
 71.4284  
 14.2855  
 28.5712  
 49.9999

$$\gg x_{19} = (D_a - L_a)^{-1} \cdot b' + (D_a - L_a)^{-1} \cdot U_a \cdot x_{18}$$

$x_{19} =$

49.9998  
 71.4284  
 85.7142  
 28.5712  
 49.9998  
 71.4285  
 14.2856  
 28.5713  
 50.0000

- Langkah – langkah pengerjaan dengan Metode Gauss Seidel Diperumum

$$\gg D_2 = [-4 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \ 1 \ -4 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 1 \ -4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ -4 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -4 \ 1 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -4 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -4 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -4 \ 1 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -4 \ 1; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -4]$$

$$\gg U_2 = [0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\gg L_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0]$$

$$\gg b = [-100 \ -100 \ -200 \ 0 \ 0 \ -100 \ 0 \ 0 \ -100]$$

$$\gg x = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\gg (D_2 - L_2)^{-1} \cdot b'$$

$$\gg (D_2 - L_2)^{-1} \cdot U_2$$

$$\gg x_1 = (D_2 - L_2)^{-1} \cdot b' + (D_2 - L_2)^{-1} \cdot U_2 \cdot x'$$

$x_1 =$

37.5000  
 50.0000

62.5000  
16.5179  
28.5714  
47.7679  
9.1040  
19.8980  
41.9165

$$\gg x2 = (D2 - L2)^{-1}b' + (D2 - L2)^{-1}U2*x1$$

x2 =

44.8182  
62.7551  
77.6307  
24.2677  
43.1487  
65.6740  
12.5408  
25.8955  
47.8924

$$\gg x3 = (D2 - L2)^{-1}b' + (D2 - L2)^{-1}U2*x2$$

x3 =

48.2551  
68.7526  
83.6066  
27.1791  
47.9205  
69.8549  
13.7361  
27.7654  
49.4051

$$\gg x4 = (D2 - L2)^{-1}b' + (D2 - L2)^{-1}U2*x3$$

x4 =

49.4504  
70.6226  
85.1194  
28.1406  
49.3759  
70.9751  
14.1176  
28.3300  
49.8263

$$\gg x5 = (D2 - L2)^{-1}b' + (D2 - L2)^{-1}U2*x5$$

x5 =

49.8319  
71.1871  
85.5405  
28.4407  
49.8132  
71.2950  
14.2350  
28.4992  
49.9485

$$\gg x6 = (D2 - L2)^{-1}b' + (D2 - L2)^{-1}U2*x5$$

x6 =

49.9493  
71.3563  
85.6628  
28.5321  
49.9441  
71.3889  
14.2705  
28.5498  
49.9847

$$\gg x7 = (D2 - L2)^{-1}b' + (D2 - L2)^{-1}U2*x6$$

x7 =

49.9848  
71.4070  
85.6990  
28.5596  
49.9833  
71.4167  
14.2811  
28.5650  
49.9954

$$\gg x8 = (D2 - L2)^{-1}b' + (D2 - L2)^{-1}U2*x7$$

x8 =

49.9954  
71.4221

85.7097  
28.5679  
49.9950  
71.4250  
14.2843  
28.5695  
49.9986

$$\gg x9 = (D2 - L2)^{-1}b' + (D2 - L2)^{-1}U2*x8$$

x9 =

49.9986  
71.4266  
85.7129  
28.5704  
49.9985  
71.4275  
14.2853  
28.5709  
49.9996

$$\gg x10 = (D2 - L2)^{-1}b' + (D2 - L2)^{-1}U2*x9$$

x10 =

49.9996  
71.4280  
85.7139  
28.5711  
49.9996  
71.4283  
14.2856  
28.5713  
49.9999

$$\gg x11 = (D2 - L2)^{-1}b' + (D2 - L2)^{-1}U2*x10$$

x11 =

49.9999  
71.4284  
85.7142  
28.5713  
49.9999  
71.4285  
14.2857  
28.5714  
50.0000

## RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Rozie Yuszally Akhmad, dilahirkan di Bukittinggi pada tanggal 18 Mei 1990 dari pasangan Drs. Yusrizal dan Yusnelly, S.pd. Penulis adalah anak ketiga dari lima bersaudara. Penulis menamatkan pendidikan Sekolah Dasar di SDN 01 Koto Tuo pada tahun 2002, MTsN 1 Bukittinggi pada tahun 2005, dan SMA Negeri 1 Bukittinggi pada tahun 2008. Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur SNMPTN (Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Nasional).

Selama menjadi mahasiswa di jurusan Matematika FMIPA Unand, penulis aktif dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA), UKPM Genta Andalas Universitas Andalas, dan pengajar privat mata pelajaran Matematika. Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) pada tahun 2011 di Kampung Gurun Panjang, Bayang, Kabupaten Pesisir Selatan dalam rangka menyelesaikan salah satu mata kuliah wajib fakultas.