METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN LAPLACE

SKRIPSI

NURUL ARIFIN NST
07134015

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2012

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa:

Nama	:	NURUL ARIFIN NST
No. Buku Pokok	:	07 134 015
Jurusan	:	Matematika
Bidang	:	Matematika Terapan
Judul Skripsi	:	**Metode Dekomposisi Adomian untuk Menyelesaikan Persamaan Laplace**

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal **6 Januari 2012** berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing,

1.

Dr. Muhafzan
NIP. 19670602 199302 1 001

2.

Dr. Lyra Yulianti
NIP. 19750706 199903 2 003

Penguji,

1.

Budi Rudianto, M.si
NIP. 132 169 920

2.

Narwen, M.si
NIP. 19670410 199702 1 001

3.

Zulakmal, M.Si
NIP. 19671108 199802 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand

Dr. Syafrizal Sy
NIP. 19670807 199309 1 001

Allah, tidak ada Tuhan (yang berhak disembah) melainkan dia

yang hidup kekal lagi terus menerus mengurus (makhluk-Nya); tidak mengantuk dan tidak tidur.

Kepunyaan-Nya apa yang di langit dan di bumi.

tiada yang dapat memberi syafa'at di sisi Allah tanpa izin-Nya?

Allah mengetahui apa-apa yang di hadapan mereka dan di belakang mereka,

dan mereka tidak mengetahui apa-apa dari ilmu Allah melainkan apa yang dikehendaki-Nya.

Kursi Allah meliputi langit dan bumi. dan Allah tidak merasa berat memelihara keduanya,*

dan Allah Maha Tinggi lagi Maha besar (Qs.Al - Baqarah: 255)

Subhanallah, *Maha Suci Allah SWT yang telah memberikan nikmat-Nya sehingga saya dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Shalawat dan salam senantiasa dicurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah membawa umatnya dari alam kebodohan ke alam yang penuh dengan ilmu pengetahuan.*

Berjuta-juta terima kasih *yang tak hingga kepada yang sangat berjiwa besar Papa, yang terkasih Mama, yang telah memberikan pengertian dan pengorbanan tak terhingga, pa, ma iin tamat juga,,,, dan Adik-adik-q tersayang(pasukan ranger) Ratna(ibu bidan), aSwan(pak guru), haBib(calon pak dokter, amin), n ridWan(calon pak arsitek, amin), semgat ya ndung,,,,,,*

Keluarga besar q *nenek(iin dah S.si nek, in berhasil jadi boru panggoaran ma pahoppu panggoaran nek),uwak,bou,uda,makasi untuk semua dukungannyaselama ini. Satulagi buat uwak sidakal, makasi y wak dahsabar obati n terapi iin selama iin sakit, Alhamdulillah sekarang kaki iin dah normal wak...*

DosenPembimbing *Bapak Dr.Muhafzan dan Ibu Dr.Lyra, beribu terimakasih atas bimbingan, saran dan waktunya dalam membimbing nurul selamamenyelesaikan tugas akhir ni,,,,hehehehehe.*

DosenPenguji, *Bapak Budi rudianto,M.Si, Bapak Narwen, M.Si, dan Bapak Zulakmal,M.Si ataspengarahandan saran dalampenyelesaiantugasakhirini.*

Dosen-dosen Jurusan Matematika,*Pak Syafrizal, Pak Werman, Pak Made, Pak Dodi, Pak Yudi, Pak Jon, Pak Syafruddin, Pak Efendi, Pak Admi, Pak Iqbal, Bu Yozza, Bu, Gema, Bu Ayu, Bu Iza, Bu Monik, Bu Sil, Bu Nova, Bu Riri, dan Bu Maiyastri. Terima kasih atas ilmunya yang berharga.*

Staf dan Pegawai Jurusan Matematika, *Mama Cun, Bu Eli, Pak Syamsir, kak opi, Ibu pustaka dan ibu CS.*

Asisten Laboratorium Statistika dan Komputasi, *Winda,S.si, Icut,S.si, Melis,S.si, Revi,S.si, Novri,S.si, Aulia, Puput,S.si, Dedet, Iin, Kevan, Nela, Hime, Yul,S.si i, Et, Hasan, Mimi, Maul, Ami, Azmi, Rendi, dan Devis. Terima kasih atas kerjasamanya. Serta terima kasih kepada Pak Budi Rahmadya selaku koordinator Labor.*

Teman-teman Jobar q Lili n zwai (ibu guru matematika),,, temin dah tamat q,,, klian doma,,,,nida n linda (ibu bidan)ayo temin bagi2 gaji bidan

PTTnya, hahahahahaha,,,,,kemek2 qta ni, frisca(ibu dokter) koq makin sombong kw temin? Ntah lah,,,

Keluarga besar HIMATIKA, *semangat dan perjuangan bersama-sama selalu menjadi kenangan di kemudian hari yang tak terhingga nilainya. Selalu bangga menjadi bagian dari kalian.*

Teman-teman kos gG. saKinah tikungan, nisa(teman sekamar q)makasih untuk kebersamaannya selama ni, maaf ya bule' ningsih klu bule' nurun cerewetin bule' ja,,,, hehehehe,, finnong ga si nulur nama q fin tp Nurul begei,,, yanti (sehat dope etek kan?)

Kel. Besar BP 015 , *da angga, da Q-donk, ni Fatma, ni ade(Hardes), ni Fanum, ni Citra, ni Yose, sobep revi, rahmi, bey, n vivi. Hahahaaa.... seperti tak ada dunia tanpa kalian....terima kasih atas kekompakannya, semoga kita bisa sama-sama lagi dalam keadaan sukses.*

Teman-teman angkatan 2007 McZoven, Wewes,S.si, Desma,S.si, Lia,S.si, Dian K,S.si, Puput,S.si , Agustia,S.si(aq S.si juga bu..... hehehehe), Lina,S.si, Winda,S.si (maminya qta semua, ibu Bni), Meri,S.si, Dian A(doenk,,, kama lw? Manga menghilang?), Resti,S.si, Putri Hime(semangat hime,,,,), Yulian S.Si (calon M.si, cieeeee), Sobri,S.si, Yona H., Ririn S.Si, Jessi,S.si, Vivi S.Si, Novri,S.si (semanagt aku,,,,), Melisa,S.si (suik jan berang2 jo lai, takuik urang caliaknyo, heheheheheh), Yona M,S.si, Imel S.Si (ibu Bni), Legi,S.si, Icut,S.si(Ibu Mandiri, undangan angga ma icut ditunggu ya,,, hehehehe), Tika S.Si (ibu Bri), Aulia, Ayu,S.si (selalu ceria, hahahhaaaa), Ferdi ,k' Oja,Newton , Joko, Dian ciap, Rahmi, Novi,S.si, Meli,S.si, Fitria,S.si, Revi,S.si(sobep) , Asita (cepat sembuh),Rida,S.si(sdr sebimbingan), Ami,S.si, isnaini, Riri, Dya,S.si, Widya, Anggun, Ipat, Ane(sabar saying,,,, hanya menunggu waktu), Pia, acha,S.si.

Uda-uda dan Uni-uni senior Matematika, terimakasih atas pengalaman n berbagi ilmunya selama ni da ni,,, uni fani05, ni vani06, uni lusi, uni rahma, da danil, da irsal, da jonk, semua2nya makasih y uda, uni q…..

Adik-adik junior Matematika, *Erik, Tama, Lindo, Bayu, Yolwi, Virza,S.si(sdr sebimbingan), Elza, cipi,S.si, Mezi, Eris, Ana,ica(capek la cha,,, karajoan TA tu lai,,,), Zaki, Anggi, Rahmat,Lucky, Suci(bu sekretaris,, semangat PSB nya y ci,,,),panzul,rina, catrin dkk, n masih banyak maaf tidak bisa disebutkan satu persatu. Terima kasih atas semangatnya.*

Dan Terakhir *buat seseorang yang terindah yang selalu menemani q baik dalam senang maupun susah, Mas q* ***Ridho Iki****. Terima kasih atas segala pengorbanan dan curahan segenap jiwa dan raga. Walaupun qta jauh semangat yg mas berikan sangat berarti bt iin(semangat ndung....).*

terimaKasih semunya

Nurul Arifin Nst

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

Alhamdulillah, puji syukur penulis sampaikan kehadirat Allah SWT karena berkat ridho dan izin-Nya jualah penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul **"Metode Dekomposisi Adomian untuk Menyelesaikan Persamaan Laplace"**. Salawat dan salam tidak lupa penulis kirimkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW yang telah membawa umat manusia dari zaman kebodohan ke zaman yang penuh ilmu pengetahuan. Skripsi ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang.

Selanjutnya, penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini, terutama kepada :

1. Bapak Dr.Muhafzan selaku Pembimbing I yang telah membantu mengarahkan penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Serta ilmu, ide, saran dan nasihat yang telah diberikan selama proses bimbingan tugas akhir maupun selama penulis menjalani perkuliahan.

2. Ibu Dr.Lyra Yulianti selaku Pembimbing II yang telah membantu penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.

3. Bapak Budi Rudianto,M.si, Bapak Narwen,M.si, dan Bapak Zulakmal,M.si selaku penguji yang telah membaca, memberi masukan dan saran kepada penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.

4. Bapak Prof.Dr.I Made Arnawa selaku Pembimbing Akademik yang telah membantu penulis dalam urusan akademik terutama dalam merancang studi agar dapat selesai pada waktunya. Serta nasihat dan ilmu yang telah diberikan selama penulis menjalani proses studi.

5. Bapak Dr. Syafrizal Sy selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang.

6. Bapak/Ibu dosen dan karyawan/i Jurusan Matematika FMIPA UNAND yang telah membagi ilmunya kepada penulis dan membantu penulis selama perkuliahan.

7. Sahabat-sahabatku mahasiswa angkatan 2007 Fmipa Unand, Tia, Doenk, Lisuik, Etha, Cimut, dan semua yang tidak dapat disebutkan satu persatu, tetap semangat.

8. Anggota HIMATIKA, terimakasih untuk semua hal yang mampu membentuk sikap dan kepribadian penulis selama menjalani kehidupan kampus.

9. Semua pihak yang turut membantu hingga selesainya skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Terima kasih kepada ayahanda Muhammad Arifin Nst dan ibunda Minarni Caniago di padangsidimpuan, karena dengan kasih sayang, doa, dorongan dan semangat beliau, penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini tepat pada waktunya. Untuk adikku Ratna Sari Nst, Muhammad Aswan Nst, Ahmad Habibun Nst, dan Ridwan Sabilih Nst terima kasih untuk segala hal yang telah kita lalui bersama, tetap semangat.

Akhir kata, semoga skripsi ini bermanfaat untuk sivitas akademik Universitas Andalas khususnya dan masyarakat umumnya. Amin.

Padang, Januari 2012

Penulis

ABSTRAK

Persamaan Laplace merupakan suatu persamaan diferensial parsial yang diberikan oleh $u_{xx} + u_{yy} = 0,\ a < x,\ y > b$. Metode dekomposisi Adomian merupakan suatu metode yang mendekomposisikan fungsi yang tidak diketahui u(x,y) ke dalam sejumlah tak hingga komponen yang didefinisikan oleh deret $u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y)$, dimana himpunan $u_n(x,y), n \geq 0$ adalah fungsi yang akan ditentukan. Penyelesaian persamaan Laplace dapat ditentukan dengan metode dekomposisi Adomian, yaitu dengan menggunakan operator diferensial dan invers, substitusikan kondisi batas, dan uraikan fungsi tersebut ke dalam dekomposisi Adomian. Hasil yang diperoleh adalah solusi dalam bentuk fungsi eksplisit.

Kata kunci: *Persamaan Laplace, Metode Dekomposisi Adomian.*

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Metode dekomposisi Adomian merupakan suatu teknik yang digunakan untuk mengaproksimasikan suatu fungsi dengan menggunakan suatu bentuk deret tak hingga. Dalam [3] dikatakan bahwa metode dekomposisi Adomian dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial biasa atau parsial baik linear maupun nonlinear, serta persamaan integral linear dan nonlinear. Dalam skripsi ini akan didiskusikan tentang penggunaan metode dekomposisi Adomian dalam menyelesaikan persamaan Laplace, khususnya dimensi dua. Suatu persamaan Laplace dimensi dua diberikan oleh

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 < x < a,\ 0 < y < b, \tag{1.1}$$

dimana $u_{xx} = \frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$, $u_{yy} = \frac{\partial^2 y}{\partial y^2}$. Jika syarat batas yang bersesuaian diberikan pada persamaan (1.1), maka solusi eksplisit dari (1.1) dapat ditentukan dengan metode Adomian.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka perumusan masalah tugas akhir ini adalah bagaimana menyelesaikan persamaan Laplace dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian.

1.3 Pembatasan Masalah

Pada tugas akhir ini permasalahan dibatasi pada penyelesaian persamaan Laplace berdimensi dua dengan syarat batas Dirichlet, Neumann, dan Robin.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menyelesaikan persamaan Laplace dengan kondisi batas Dirichlet, Neumann, dan Robin serta menentukan solusinya dengan menggunakan Metode Dekomposisi Adomian.

1.5 Sistematika Penelitian

Sistematika penulisan tugas akhir ini terdiri dari Bab I, Bab II, Bab III, dan Bab IV. Bab I Pendahuluan berisi latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan. Bab II Landasan Teori berisi teori-teori yang digunakan dalam Bab III Pembahasan. Bab III berisi pembahasan dan hasil dari penelitian ini. Tugas akhir ini diakhiri dengan kesimpulan yang termuat dalam Bab IV Penutup.

BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam bab ini diberikan teori-teori yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan Laplace orde dua dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian.

2.1 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial dimana fungsi yang tak diketahui tergantung kepada beberapa variabel bebas, sehingga turunannya merupakan turunan parsial. Bentuk umum dari persamaan diferensial parsial adalah

$$F(\mathbf{x}, u, u_1, u_2, ..., u_n, u_{x_1x_2}, ..., u_{x_i...x_k}) = 0, \tag{2.1}$$

dimana $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ adalah variabel bebas, $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ adalah variabel tak bebas, $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ dan $u_{x_ix_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, dengan $i = 1, 2, 3, \cdots$, $j = 1, 2, 3, \cdots$.

Persamaan diferensial parsial dikatakan linier jika semua variabel tak bebas dan setiap turunan parsial memiliki polinomial berderajat satu, serta koefisien dari variabel tak bebas dan koefisien setiap turunan parsial adalah konstan atau variabel bebas.

Persamaan diferensial parsial dikatakan homogen jika setiap suku dari persamaan diferensial parsial memuat variabel tak bebas u atau salah satu dari turunannya. Dalam hal sebaliknya jika setiap suku dari persamaan diferensial parsial tidak memuat variabel tak bebas u atau salah satu dari turunannya maka persamaan tersebut dikatakan persamaan diferensial parsial nonhomogen.

2.2 Persamaan Laplace

Persamaan Laplace merupakan suatu bentuk khusus dari persamaan differensial parsial linier homogen orde dua, yang berbentuk sebagai berikut:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \ 0 < x < a, \ 0 < y < b. \tag{2.2}$$

Dalam [3] disebutkan bahwa terdapat tiga syarat batas yang mungkin terjadi untuk persamaan Laplace (2.2), yaitu:

1. Syarat batas Dirichlet, yaitu kondisi batas yang menspesifikasikan fungsi $u(x, y)$ pada batas.

2. Syarat batas Neumann, yaitu kondisi batas yang menspesifikasikan turunan $u(x, y)$ terhadap batas.

3. Syarat batas Robin, yaitu kondisi batas yang menspesifikasikan hubungan linier antara $u(x, y)$ dan turunan $u(x, y)$ terhadap batas.

2.3 Metode Dekomposisi Adomian

Metode dekomposisi Adomian pertama kali diperkenalkan oleh George Adomian. Metode dekomposisi Adomian merupakan suatu teknik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan fungsi dalam bentuk $u(x, y)$ yang diuraikan ke dalam suatu bentuk deret tak hingga ke dalam komponen $u_n(x, y)$, yang didefinisikan oleh

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y), \tag{2.3}$$

dimana komponen $u_n(x, y), n \geq 0$ merupakan fungsi yang akan ditentukan. Penentuan dapat dilakukan melalui relasi rekursif yang biasanya melibatkan integral sederhana.

Diberikan suatu persamaan diferensial parsial dalam bentuk operator linier sebagai berikut

$$L_x u + L_y u = g, \tag{2.4}$$

dimana

$$L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad dan \quad L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{2.5}$$

Selanjutnya misalkan

$$\begin{aligned} L_x^{-1}(.) &= \int_0^x \int_0^x (.)dxdx \\ L_y^{-1}(.) &= \int_0^y \int_0^y (.)dydy \end{aligned} \tag{2.6}$$

menyatakan operator integral linier. Dengan menggunakan operator integral linier terhadap kedua sisi pada (2.4), maka diperoleh

$$u = f - L_x^{-1}(L_y u), \tag{2.7}$$

dimana f merupakan suatu fungsi yang muncul akibat pengintegralan suku nonhomogen. Dengan mensubstitusikan (2.3) ke dalam (2.7), maka diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = f - L_x^{-1}(L_y \sum_{n=0}^{\infty} u_n). \tag{2.8}$$

Persamaan (2.8) dapat ditulis dalam bentuk

$$
\begin{aligned}
u_0 + u_1 + u_2 + \cdots &= f - L_x^{-1}(L_y(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots)) \\
&= f - L_x^{-1}L_y(u_0) - L_x^{-1}L_y(u_1) - \cdots .
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Untuk mengkonstruksi hubungan rekursif yang diperlukan dalam menentukan komponen-komponen $u_0, u_1, u_2, \cdots$, metode dekomposisi Adomian menyarankan bahwa komponen ke nol u_0, didefinisikan oleh fungsi f yang muncul pada persamaan (2.7). Secara formal hubungan rekursif didefinisikan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
u_0 &= f, \\
u_{k+1} &= -L_x^{-1}(L_y(u_k)), \quad k \geq 0,
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

yang ekuivalen dengan

$$
\begin{aligned}
u_0 &= f, \\
u_1 &= -L_x^{-1}(L_y(u_0)), \\
u_2 &= -L_x^{-1}(L_y(u_1)), \\
&\vdots \\
u_n &= -L_x^{-1}(L_y(u_{n-1})), \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Dengan mensubsitusikan (2.11) ke dalam (2.3), maka diperoleh solusi dari masalah (2.4) dalam bentuk deret. Dalam [6] dikatakan bahwa jika terdapat suatu solusi eksak untuk masalah (2.4), maka deret (2.3) konvergen ke solusi eksak tersebut.

2.4 Deret Taylor

Misalkan f dan semua turunannya, f', f'', f''', $\cdots$, berada pada selang $[a, b]$ dan $x_0 \in [a, b]$, maka untuk nilai-nilai x di sekitar x_0 dan $x \in [a, b]$, $f(x)$ dapat diekspansi ke dalam deret Taylor :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{2!} f^{(n)}(x_0) + \cdots. \tag{2.12}$$

Jika fungsi diperluas di sekitar $x_0 = 0$, maka deret tersebut dinamakan deret Maclaurin yang merupakan deret Taylor baku.

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

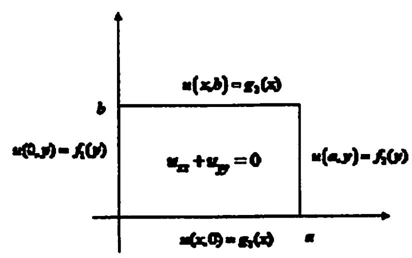
Pada bab ini akan diuraikan mengenai penentuan solusi persamaan Laplace dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian.

3.1 Metode Dekomposisi Adomian untuk Menyelesaikan Persamaan Laplace Orde Dua

Diberikan suatu sistem persamaan Laplace dua dimensi pada daerah persegi panjang dengan syarat batas Dirichlet sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ & \text{dengan} \\ & u(0, y) = f_1(y), \quad u(a, y) = f_2(y), \\ & u(x, 0) = g_1(x), \quad u(x, b) = g_2(x). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Situasi permasalahan di atas dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar III.1. Syarat batas persamaan Laplace

Tulis persamaan (3.1) dalam bentuk operator linier, yaitu:

$$L_y u(x,y) = -L_x u(x,y), \tag{3.2}$$

dimana

$$L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad dan \quad L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{3.3}$$

Invers dari operator (3.2) adalah integral lipat dua berikut

$$\begin{aligned} L_x^{-1}(.) &= \int_0^x \int_0^x (.)dxdx \\ L_y^{-1}(.) &= \int_0^y \int_0^y (.)dydy. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dengan menerapkan operator invers L_y^{-1} ke dalam persamaan (3.2) maka

$$L_y^{-1} L_y u(x,y) = -L_y^{-1} L_x u(x,y), \tag{3.5}$$

dimana

$$\begin{aligned} L_y^{-1} L_y u(x,y) &= \int_0^y \int_0^y \frac{\partial^2}{\partial y^2} dydy \\ &= \int_0^y u(x,y) - u_y(x,0)dy \\ &= u(x,y) - u(x,0) - yu_y(x,0), \end{aligned} \tag{3.6}$$

sehingga persamaan (3.5) menjadi

$$\begin{aligned} L_y^{-1} L_y u(x,y) &= -L_y^{-1} L_x u(x,y) \\ u(x,y) - u(x,0) - yu_y(x,0) &= -L_y^{-1} L_x u(x,y) \\ u(x,y) &= u(x,0) + yu_y(x,0) - L_y^{-1} L_x u(x,y). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dengan menggunakan syarat batas pada persamaan (3.7) maka diperoleh

$$u(x,y) = g_1(y) + yh(x) - L_y^{-1} L_x u(x,y), \tag{3.8}$$

dimana

$$h(x) = u_y(x,0) \tag{3.9}$$

adalah syarat batas yang akan ditentukan.

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, metode Adomian mendefinisikan solusi u sebagai deret tak hingga dari komponen-komponen

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y). \tag{3.10}$$

Substitusikan (3.10) ke dalam persamaan (3.8), diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y) = g_1(y) + yh(x) - L_y^{-1}L_x(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y)). \tag{3.11}$$

Dengan mengekspansi persamaan (3.11) diperoleh

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 + \cdots &= g_1(y) + yh(x) - L_y^{-1}L_x(u_0(x,y) + u_1(x,y) + \cdots), \\ &= g_1(y) + yh(x) - L_y^{-1}L_x(u_0) - L_y^{-1}L_x(u_1) - \cdots . \end{aligned} \tag{3.12}$$

Untuk mengkonstruksi hubungan rekursif dalam menentukan $u_0, u_1, u_2, \cdots$, perlu diperhatikan bahwa dalam metode dekomposisi Adomian, suku ke u_0 diperoleh dari fungsi yang muncul dari kondisi batas. Komponen lain dari $u(x,y)$ ditentukan dengan cara rekursif sedemikian sehingga masing-masing komponen ditentukan dengan menggunakan komponen sebelumnya. Dengan demikian, untuk menentukan komponen $u_n(x,y), n \geq 0$, himpunan skema pengulangannya adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} u_0 &= g_1(y) + yh(x), \\ u_{k+1} &= -L_y^{-1}L_x(u_k), \quad k \geq 0, \end{aligned} \tag{3.13}$$

yang ekuivalen dengan

$$
\begin{aligned}
u_0(x,y) &= g_1(y) + yh(x), \\
u_1(x,y) &= -L_y^{-1}L_x(u_0) = -\frac{1}{3!}y^3h''(x), \\
u_2(x,y) &= -L_y^{-1}L_x(u_1) = \frac{1}{5!}y^5h^{(4)}(x), \\
&\vdots \\
u_n(x,y) &= -L_y^{-1}L_x(u_{n-1}) = (-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}y^{2n+1}h^{(2n)}(x), \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Persamaan (3.14) dapat ditulis kembali ke dalam bentuk

$$
\begin{aligned}
u(x,y) =& g_1(y) + yh(x) - \frac{1}{3!}y^3h''(x) + \frac{1}{5!}y^5h^{(4)}(x) - \cdots \\
&+ (-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}y^{2n+1}h^{(2n)}(x).
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Solusi dari (3.15) diperoleh dengan menggunanakan kondisi batas yang nonhomogen. Untuk persamaan Laplace dua dimensi pada daerah persegi panjang dengan syarat batas Neumann dan Robin, dimana syarat batas memuat turunan terhadap x atau y, maka (3.15) diturunkan terhadap x atau terhadap y tergantung kepada syarat batas yang diberikan.

Berikut ini diberikan beberapa contoh penggunaan metode Dekomposisi Adomian untuk menyelesaikan persamaan Laplace dengan syarat batas Dirichlet, Neumann, dan Robin.

Contoh 1

Diberikan persamaan Laplace homogen dua dimensi dengan syarat batas Dirichlet sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
& u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x, \quad y < \pi, \\
\text{dengan} & \\
& u(0,y) = \sin y, \quad u(\pi, y) = \cosh \pi \sin y, \\
& u(x,0) = 0, \quad u(x,\pi) = 0.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Persamaan (3.16) dapat ditulis ke dalam bentuk

$$L_x u(x,y) = -L_y u(x,y), \tag{3.17}$$

dimana $L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ dan $L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Dengan menerapkan invers L_x^{-1} ke dalam (3.17) dan menggunakan syarat batas maka diperoleh

$$u(x,y) = \sin y + xg(y) - L_x^{-1} L_y u(x,y), \tag{3.18}$$

dimana

$$g(y) = u_x(0,y). \tag{3.19}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.10) ke dalam persamaan (3.18), maka diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y) = \sin y + xg(y) - L_x^{-1} L_y (\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y)), \tag{3.20}$$

sehingga diperoleh hubungan rekursif sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
u_0(x,y) &= \sin y + xg(y), \\
u_1(x,y) &= -L_x^{-1} L_y(u_0) = \frac{1}{2!} x^2 \sin y - \frac{1}{3!} x^3 g''(y), \\
u_2(x,y) &= -L_x^{-1} L_y(u_1) = \frac{1}{4!} x^4 \sin y + \frac{1}{5!} x^5 g^{(4)}(y),
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

untuk suku-suku u_n berikutnya

$$u_n(x,y) = \frac{1}{(2n)!}x^{2n}\sin y + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}g^{(2n)}(y). \tag{3.22}$$

Substitusikan persamaan (3.21) ke persamaan (3.20) sehingga diperoleh solusi dalam bentuk deret sebagai berikut

$$u(x,y) = \sin y(1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots)+xg(y)-\frac{1}{3!}x^3g''(y)+\frac{1}{5!}x^5g^{(4)}(y)-\cdots, \tag{3.23}$$

yang ekuivalen dengan

$$u(x,y) = \cosh x\sin y + xg(y) - \frac{1}{3!}x^3g''(y) + \frac{1}{5!}x^5g^{(4)}(y) - \cdots. \tag{3.24}$$

Untuk menentukan $g(y)$, gunakan syarat batas $u(\pi,y) = \cosh\pi\sin y$ ke dalam persamaan (3.24), sehingga diperoleh

$$g(y) = 0, \tag{3.25}$$

dengan demikian

$$u(x,y) = \cosh x\sin y. \tag{3.26}$$

Contoh 2

Diberikan persamaan Laplace nonhomogen dua dimensi dengan syarat batas Dirichlet sebagai berikut

$$u_{xx} + u_{yy} = 2, \quad 0 < x, \quad y < \pi,$$

dengan

$$\begin{aligned} &u(0,y) = \cosh y, \quad u(\pi,y) = -\cosh y, \\ &u(x,0) = \cos x, \quad u(x,\pi) = \cosh\pi. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Persamaan (3.27) dapat ditulis ke dalam bentuk

$$L_x u(x,y) = -L_y u(x,y), \tag{3.28}$$

dimana $L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ dan $L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Dengan menerapkan invers L_x^{-1} ke dalam (3.28) dan menggunakan syarat batas maka diperoleh

$$u(x,y) = \cosh y + xg(y) - L_x^{-1}(L_y u(x,y) - 2), \tag{3.29}$$

dimana

$$g(y) = u_x(0,y). \tag{3.30}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.10) ke dalam persamaan (3.29), maka diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y) = \cosh y + xg(y) + L_x^{-1}2 - L_x^{-1}L_y(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y)), \tag{3.31}$$

sehingga diperoleh hubungan rekursif sebagai berikut

$$\begin{aligned} u_0(x,y) &= \cosh y + xg(y) + x^2, \\ u_1(x,y) &= -L_x^{-1}L_y(u_0) = -\frac{1}{2!}x^2\cosh y - \frac{1}{3!}x^3 g''(y), \\ u_2(x,y) &= -L_x^{-1}L_y(u_1) = \frac{1}{4!}x^4\cosh y + \frac{1}{5!}x^5 g^{(4)}(y), \end{aligned} \tag{3.32}$$

untuk suku-suku u_n berikutnya

$$u_n(x,y) = (-1)^n[\frac{1}{(2n)!}x^{2n}\cosh y + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}g^{(2n)}(y)]. \tag{3.33}$$

Substitusikan persamaan (3.32) ke persamaan (3.31) sehingga diperoleh solusi dalam bentuk deret sebagai berikut

$$u(x,y) = \cosh y(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots)+x^2+xg(y)-\frac{1}{3!}x^3g''(y)+\frac{1}{5!}x^5g^{(4)}(y)-\cdots, \tag{3.34}$$

yang ekuivalen dengan

$$u(x,y) = \cosh y \cos x + x^2 + xg(y) - \frac{1}{3!}x^3 g''(y) + \frac{1}{5!}x^5 g^{(4)}(y) - \cdots . \tag{3.35}$$

Untuk menentukan $g(y)$, gunakan syarat batas $u(\pi, y) = \cosh \pi \cos x$ ke dalam persamaan (3.35), sehingga diperoleh

$$g(y) = 0, \tag{3.36}$$

dengan demikian

$$u(x,y) = \cos x \cosh y. \tag{3.37}$$

Contoh 3

Diberikan persamaan Laplace homogen dua dimensi dengan syarat batas Neumann sebagai berikut

$$\begin{gathered} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x, \quad y < \pi, \\ \text{dengan} \\ u_x(0,y) = \cosh y, \quad u_x(\pi, y) = -\cosh y, \\ u_y(x,0) = 0, \quad u_y(x,\pi) = \sinh \pi \sin x. \end{gathered} \tag{3.38}$$

Persamaan (3.38) dapat ditulis ke dalam bentuk

$$L_x u(x,y) = -L_y u(x,y), \tag{3.39}$$

dimana $L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ dan $L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Dengan menerapkan invers L_x^{-1} ke dalam persamaan (3.39) dan menggunakan syarat batas maka diperoleh

$$u(x,y) = g(y) + x \cosh y - L_x^{-1} L_y u(x,y), \tag{3.40}$$

dimana

$$g(y) = u(0,y). \tag{3.41}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.10) ke dalam persamaan (3.40), maka diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y) = g(y) + x\cosh y - L_x^{-1}L_y(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y)), \tag{3.42}$$

sehingga diperoleh hubungan rekursif sebagai berikut

$$\begin{aligned} u_0(x,y) &= g(y) + x\cosh y, \\ u_1(x,y) &= -L_x^{-1}L_y(u_0) = -\frac{1}{2!}x^2 g''(y) - \frac{1}{3!}x^3\cosh y, \\ u_2(x,y) &= -L_x^{-1}L_y(u_1) = \frac{1}{4!}x^4 g^{(4)}(y) + \frac{1}{5!}x^5\cosh y, \end{aligned} \tag{3.43}$$

untuk suku-suku u_n berikutnya

$$u_n(x,y) = (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n}g^{(2n)}(y) + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}\cosh y. \tag{3.44}$$

Substitusikan persamaan (3.43) ke persamaan (3.42) sehingga diperoleh solusi dalam bentuk deret sebagai berikut

$$u(x,y) = \cosh y(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots) + g(y) - \frac{1}{2!}x^2 g''(y) + \frac{1}{4!}x^4 g^{(4)}(y) - \cdots, \tag{3.45}$$

yang ekuivalen dengan

$$u(x,y) = \cosh y \sin x + g(y) - \frac{1}{2!}x^2 g''(y) + \frac{1}{4!}x^4 g^{(4)}(y) - \cdots. \tag{3.46}$$

Untuk menentukan $g(y)$, gunakan syarat batas $u_y(x,\pi) = \sinh\pi\sin x$ ke dalam persamaan (3.46), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} u_y(x,\pi) &= \sinh\pi\sin x + g'(\pi) - \frac{1}{2!}x^2 g'''(\pi) + \frac{1}{4!}x^4 g^{(5)}(\pi) - \ldots \\ &= \sinh\pi\sin x. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Dengan demikian, hal ini menunjukkan bahwa

$$g(y) = 0, \tag{3.48}$$

sehingga diperoleh

$$u(x,y) = \sin x \cosh y. \tag{3.49}$$

Karena kondisi batas yang digunakan pada penentuan solusi $u(x,y)$ adalah turunan u terhadap y, maka terdapat suatu C_0 pada solusi dari permasalahan (3.38), sehingga

$$u(x,y) = C_0 + \sin x \cosh y. \tag{3.50}$$

Contoh 4

Diberikan persamaan Laplace nonhomogen dua dimensi dengan syarat batas Neumann sebagai berikut

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = \cos x, \quad 0 < x, \quad y < \pi, \\ &\text{dengan} \\ &u_x(0,y) = 0, \quad u_x(\pi,y) = 0, \\ &u_y(x,0) = \cos x, \quad u_y(x,\pi) = e^y \cos x. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Persamaan (3.51) dapat ditulis ke dalam bentuk

$$L_y u(x,y) = \cos x - L_x u(x,y), \tag{3.52}$$

dimana $L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ dan $L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Dengan menerapkan invers L_y^{-1} ke dalam persamaan (3.52) dan menggunakan syarat batas maka diperoleh

$$u(x,y) = f(x) + y \cos x + L_y^{-1} \cos x - L_y^{-1} L_x u(x,y), \tag{3.53}$$

dimana

$$f(x) = u(x,0). \tag{3.54}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.10) ke dalam persamaan (3.53), maka diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y) = f(x) + y\cos x + L_y^{-1}\cos x - L_y^{-1}L_x(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y)), \tag{3.55}$$

sehingga diperoleh hubungan rekursif sebagai berikut

$$\begin{aligned} u_0(x,y) &= f(x) + y\cos x + \frac{1}{2!}y^2\cos x, \\ u_1(x,y) &= -L_y^{-1}L_x(u_0) = -\frac{1}{2!}y^2 f''(x) + \frac{1}{3!}y^3\cos x + \frac{1}{4!}y^4\cos x, \\ u_2(x,y) &= -L_y^{-1}L_x(u_1) = \frac{1}{4!}y^4 f^{(4)}(x) + \frac{1}{5!}y^5\cos x + \frac{1}{6!}y^6\cos x, \end{aligned} \tag{3.56}$$

untuk suku-suku u_n berikutnya

$$u_n(x,y) = (-1)^n\frac{1}{(2n)!}y^{2n}f^{(2n)}(x) + \frac{1}{(2n+1)!}y^{2n+1}\cos x + \frac{1}{(2n+2)!}y^{2n+2}\cos x. \tag{3.57}$$

Substitusikan persamaan (3.56) ke persamaan (3.55) sehingga diperoleh solusi dalam bentuk deret sebagai berikut

$$\begin{aligned} u(x,y) =& f(x) + y\cos x + \frac{1}{2!}y^2\cos x - \frac{1}{2!}y^2 f''(x) + \frac{1}{3!}y^3\cos x + \frac{1}{4!}y^4\cos x \\ &+ \frac{1}{4!}y^4 f^{(4)}(x) + \frac{1}{5!}y^5\cos x + \frac{1}{6!}y^6\cos x + \cdots . \end{aligned} \tag{3.58}$$

Untuk menentukan $f(x)$, gunakan syarat batas $u_y(x,\pi) = \cos xe^y$ ke dalam persamaan (3.58), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} u_y(x,\pi) &= \cos x(1 + \pi + \frac{1}{2!}\pi^2 + \frac{1}{3!}\pi^3 + ...) + \pi f''(x) + \frac{1}{3!}\pi^3 f^{(4)}(x) + ... \\ &= \cos xe^{\pi}, \end{aligned} \tag{3.59}$$

dengan demikian, hal ini menunjukkan bahwa

$$f(x) = 0, \tag{3.60}$$

sehingga diperoleh

$$u(x,y) = \cos xe^y. \tag{3.61}$$

Karena kondisi batas yang digunakan pada penentuan solusi $u(x, y)$ adalah turunan u terhadap y, maka terdapat suatu C_0 pada solusi dari permasalahan (3.51), sehingga

$$u(x, y) = C_0 + \cos x e^y. \tag{3.62}$$

Contoh 5

Diberikan persamaan Laplace homogen dua dimensi dengan syarat batas Robin sebagai berikut

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x, \quad y < \pi, \\ &\text{dengan} \\ &u_x(0, y) = \cos y, \quad u_x(\pi, y) = \cosh \pi \cos y, \\ &u(x, 0) = \sinh x, \quad u(x, \pi) = -\sinh x. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Persamaan (3.63) dapat ditulis ke dalam bentuk

$$L_x u(x, y) = -L_y u(x, y), \tag{3.64}$$

dimana $L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ dan $L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Dengan menerapkan invers L_x^{-1} ke dalam persamaan (3.64) dan menggunakan syarat batas maka diperoleh

$$u(x, y) = g(y) + x \cos y - L_x^{-1} L_y u(x, y), \tag{3.65}$$

dimana

$$g(y) = u(0, y). \tag{3.66}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.10) ke dalam persamaan (3.65), maka diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) = g(y) + x \cos y - L_x^{-1} L_y (\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y)), \tag{3.67}$$

sehingga diperoleh hubungan rekursif sebagai berikut

$$\begin{aligned} u_0(x,y) &= g(y) + x\cos y, \\ u_1(x,y) &= -L_x^{-1}L_y(u_0) = -\frac{1}{2!}x^2g''(y) - \frac{1}{3!}x^3\cos y, \\ u_2(x,y) &= -L_x^{-1}L_y(u_1) = \frac{1}{4!}x^4g^{(4)}(y) + \frac{1}{5!}x^5\cos y, \end{aligned} \tag{3.68}$$

untuk suku-suku u_n berikutnya

$$u_n(x,y) = (-1)^n[\frac{1}{(2n)!}x^{2n}g^{(2n)}(y) + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}\cos y]. \tag{3.69}$$

Substitusikan persamaan (3.68) ke persamaan (3.67) sehingga diperoleh solusi dalam bentuk deret sebagai berikut

$$u(x,y) = \cos y(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ...) + g(y) - \frac{1}{2!}x^2g''(y) + \frac{1}{4!}x^4g^{(4)}(y) - \cdots, \tag{3.70}$$

yang ekuivalen dengan

$$u(x,y) = \cos y \sin x + g(y) - \frac{1}{2!}x^2g''(y) + \frac{1}{4!}x^4g^{(4)}(y) - \cdots. \tag{3.71}$$

Untuk menentukan $g(y)$, gunakan syarat batas $u_y(x,\pi) = \sin\pi\sin x$ ke dalam persamaan(3.71) , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} u_y(x,\pi) &= \sin\pi\sin x + g'(\pi) - \frac{1}{2!}x^2g'''(\pi) + \frac{1}{4!}x^4g^{(5)}(\pi) - ... \\ &= \sin\pi\sin x, \end{aligned} \tag{3.72}$$

dengan demikian, hal ini menunjukkan bahwa

$$g(y) = 0, \tag{3.73}$$

sehingga diperoleh

$$u(x,y) = \sin x\cos y. \tag{3.74}$$

Karena kondisi batas yang digunakan pada penentuan solusi $u(x,y)$ adalah turunan u terhadap y, maka terdapat suatu C_0 pada solusi dari permasalahan (3.60), sehingga

$$u(x,y) = C_0 + \sin x \cos y. \tag{3.75}$$

Contoh 6

Diberikan persamaan Laplace nonhomogen dua dimensi dengan syarat batas Robin sebagai berikut

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = \cos x, \quad 0 < x, \quad y < \pi, \\ &\text{dengan} \\ &u_x(0,y) = \cosh y, \quad u_x(\pi,y) = -\cosh y, \\ &u(x,0) = \sin x, \quad u(x,\pi) = \cosh \pi \sin x. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Persamaan (3.76)dapat ditulis ke dalam bentuk

$$L_x u(x,y) = \cos x - L_y u(x,y), \tag{3.77}$$

dimana $L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ dan $L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Dengan menerapkan invers L_x^{-1} ke dalam persamaan (3.77) dan menggunakan syarat batas maka diperoleh

$$u(x,y) = g(y) + x \cosh y - \cos x - L_x^{-1} L_y u(x,y), \tag{3.78}$$

dimana

$$g(y) = u(0,y). \tag{3.79}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.10) ke dalam persamaan (3.78), maka diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y) = g(y) + x \cosh y - \cos x - L_x^{-1} L_y (\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y)), \tag{3.80}$$

sehingga diperoleh hubungan rekursif sebagai berikut

$$\begin{aligned} u_0(x,y) &= g(y) + x\cosh y - \cos x, \\ u_1(x,y) &= -L_x^{-1}L_y(u_0) = -\frac{1}{2!}x^2 g''(y) - \frac{1}{3!}x^3\cosh y, \\ u_2(x,y) &= -L_x^{-1}L_y(u_1) = \frac{1}{4!}x^4 g^{(4)}(y) + \frac{1}{5!}x^5\cosh y, \end{aligned} \tag{3.81}$$

untuk suku-suku u_n berikutnya

$$u_n(x,y) = (-1)^n[\frac{1}{(2n)!}x^{2n}g^{(2n)}(y) + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}\cosh y]. \tag{3.82}$$

Substitusikan persamaan (3.81) ke persamaan (3.80) sehingga diperoleh solusi dalam bentuk deret sebagai berikut

$$u(x,y) = \cosh y(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots) + g(y) - \cos x - \frac{1}{2!}x^2 g''(y) + \frac{1}{4!}x^4 g^{(4)}(y) - \cdots, \tag{3.83}$$

yang ekuivalen dengan

$$u(x,y) = \cosh y \sin x + g(y) - \cos x - \frac{1}{2!}x^2 g''(y) + \frac{1}{4!}x^4 g^{(4)}(y) - \cdots. \tag{3.84}$$

Untuk menentukan $g(y)$, gunakan syarat batas $u(x,\pi) = \cosh\pi\sin x$ ke dalam persamaan (3.84), diperoleh

$$\begin{aligned} u(x,\pi) &= \cosh\pi\sin x + g(\pi) - \cos x - \frac{1}{2!}x^2 g''(\pi) + \frac{1}{4!}x^4 g^{(4)}(\pi) - \cdots \\ &= \cosh\pi\sin x \end{aligned} \tag{3.85}$$

sehingga

$$g(y) = 0, \tag{3.86}$$

dengan demikian

$$u(x,y) = \sin x\cosh y. \tag{3.87}$$

BAB IV

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh pada bab pembahasan sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa langkah-langkah untuk menyelesaikan persamaan Laplace dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian adalah sebagai berikut:

1. Ubah bentuk persamaan diferensial parsial pada persamaan Laplace ke dalam bentuk operator diferensial.

2. Gunakan invers dari operator tersebut pada kedua sisi persamaan diferensial parsial yang telah ditulis dalam bentuk operator.

3. Subsitusi kondisi batas ke persamaan diferensial yg telah diproses pada langkah dua.

4. Definisikan fungsi $u(x, y)$ yang tidak diketahui menjadi jumlah komponen tak hingga yang ditulis dengan

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) \tag{4.1}$$

   Substitusikan persamaan (4.1) ke dalam hasil persamaan yang diperoleh dari langkah 3.

5. Tentukan komponen $u_0(x, y)$ dari kondisi awal yang diberikan dan hasil integral dari fungsi yang diberikan.

6. Tentukan komponen-komponen $u_{k+1}, k \geq 0$ dengan menggunakan hubungan rekursif sedemikian sehingga masing-masing komponen ditentukan dengan menggunakan komponen sebelumnya
7. Substitusikan hasil komponen-komponen tersebut ke dalam persamaan (4.1).
8. Dari hasil langkah tujuh diperoleh fungsi u(x,y) dalam bentuk deret,gunakan ekspansi Taylor untuk menyederhanakan solusi dari persamaan Laplace.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Asmar, N. 2005. **Partial Differential Equations**. Prentice Hall, New Jersey.

[2] M.S. Gockenbach. 2002. *Partial Differential Equations*, SIAM. Philadelphia.

[3] Wazwaz, A.M. 2009. **Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory**. Higher Education Press, Beijing.

[4] Wazwaz, A.M. 2000. A New Algorithm for Calculating Adomian Polynomials fot Nonlinear Operators. *Applied Mathematics and Computation* 111: 53-69.

[5] Zhu,Younggui. Chang,Q. 2005. A New Algorithm for Calculating Adomian Polynomials. *Applied Mathematics and Computation* 169: 402-416.

[6] Abdelrazec,Ahmed. H. M. 2008. Adomian Decomposisi Method: Convergence Analysis and Numerical Approximation. Tesis-S2, tidak diterbitkan.

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis dilahirkan pada tanggal 22 Januari 1989 di Padangsidimpuan, Sumatera Utara sebagai anak pertama dari lima bersaudara dari ayah bernama Muhammad Arifin Nst dengan ibu bernama Minarni Caniago. Penulis menamatkan pendidikan Sekolah Dasar pada tahun 2001 di SD N 15 Padangsidimpuan, SMP N 1 Padangsidimpuan pada tahun 2004 dan SMA N 1 Padangsidimpuan pada tahun 2007. Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang melalui jalur Penelusuran Minat dan Kompetensi (PMDK).

Selama menjadi mahasiswa di Jurusan Matematika FMIPA Unand, penulis pernah mengikuti kegiatan magang di UKM FSI FMIPA, pernah menduduki jabatan sebagai Staff. Humas FSI FMIPA Unand periode 2008/2009, dan pernah menjadi koordinator asisten Pemrograman Komputer I di Laboratorium Statistika dan Komputasi FMIPA Unand. Selama menjadi anggota Himpunan Mahasiswa Matematika(HIMATIKA) Unand, penulis pernah menjadi koordinator bidang Pendidikan dan Penalaran HIMATIKA periode 2009/2010, penulis juga aktif dalam beberapa kepanitiaan, diantaranya menduduki jabatan sebagai koordinator tim soal Lomba Cepat Tepat Pekan Seni Bermatematika (PSB) VII, paniatia tim soal Lomba Cepat Tepat Pekan Seni Bermatematika (PSB) VIII. Selain itu penulis juga pernah mengikuti Olimpiade Sains Nasional (OSN) yang diadakan oleh Pertamina pada tahun 2009 dan 2010.