PELABELAN TOTAL (a,d)-SISI ANTIAJAIB SUPER PADA GRAF KIPAS $F_n, 2 < n < 6$

SKRIPSI

NOVALIA
07934023

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2012

Pelabelan Total (a,d)-Sisi Antiajaib Super

pada Graf Kipas $\mathbb{F}_n$, $2 \leq n \leq 6$

Oleh :

NOVALIA

Skripsi ini diajukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sain

pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Andalas

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

PADANG

2012

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini menyatakan bahwa :

Nama	:	Novalia
No. Buku Pokok	:	07 934 023
Jurusan	:	Matematika
Bidang	:	Kombinatorik
Judul Skripsi	:	**Pelabelan Total (a,d)-Sisi Antiajaib Super pada Graf Kipas** $F_n, 2 \leq n \leq 6$

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal 03 Agustus 2012 berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing / Penguji

1.

Dr. Lyra Yulianti
NIP. 19750706 199903 2 003

2.

Narwen, M.Si
NIP. 19670410 199702 1 001

Penguji

1.

Dr. Admi Nazra
NIP. 19730330 199903 1 002

2.

Dr. Dodi Devianto
NIP. 197712272000121002

3.

Zulakmal, M.Si
NIP. 19671181998021001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand

Dr. Syafrizal Sy
NIP.19670807 199309 1 001

الحمد لله

" Ya Allah, dengan menyebut nama mu muliakanlah dan lindungilah kedua orang tua q dimana pun mereka berada. Sayangilah mereka sebagaimana mereka menyayangi q, amin.."

<u>NoValia Moris ThANK'S To:</u>

Terutama kepada Allah S.W.T, yang mengizinkan Aq dalam menyelesaikan skripsi ini, Alhamdulillah ya Allah...

Dan kepada suritauladan umat manusia di muka bumi ini, yaitu nabi besar Muhammad S.A.W, aq yang selalu merindukan mu..

<u>My FaMiLY</u>.....................

Teruntuk papa MORIS dan mama AFRIWATI, yang selalu mengisi hari-hari q menjadi bermakna,. Setiap kata dan nasehat yang beliau berikan, seperti motivasi yang memacu aq agar menjadi anak yang lebih baik lagi. Setiap cucuran keringat yang mama dan papa keluarkan untuk menghidupi q, membuat aq ingin sekali membahagiakan mama dan papa seumur hidup q. Terima kasih Ma, terima kasih Pa, . Mama dan Papa lah nafas q...

Uni (Fitria Moris), Uda (Robert Moris), AbaNg (Anthony Moris), You Are The bEst.... Aq sangat......dan sangat beruntung memiliki kalian. Semua susah, senang, tangis dan Tawa qt lalui bersama. Menjadi dewasa dan tersenyum Bersama... Selalu BersaMa,..

Kakak2 Ipar q " Brigadir Riki Ariando dan Kak Eka" yang telah menjadi bagian terpenting dalam hidup q, terima kasih telah membahagiakan kakak2 q..juga kepada Teta, senantiasa sebar menghadapi setiap tingkah laku q yang kadang membuat orang-orang disekitar q kesal ☺

Serta Anak2 Q... " faRel aulla RamaDhan, Deva MizAn Auliya, Azka, dan RuQoyyah.." makasih ya nak..udah doain bunda.. ^_^

mY Lecturer.........................

Kepada pembimbing-pembimbing q. iBuk Dr. Lyra Yulianti Dan Pak Narwen, M.Si yang telah sabar membimbing aq dan mengajari q. (maaf ya buk,.pak. kalau pia selalu ngerepotin dan suka buat ibuk dan bapak kesal) ^^

Dan tak lupa pula kepada Bapak pembimbing akademik, Ir. Werman Kasoep, M.Kom, yang telah menjadi orang tua aq di universitas ini,. Membimbing aq, mengajari aq dan menyayangi aq seperti anak sendiri, makasih ya pak ^^

Seluruh Dosen-Dosen, khususnya buat pak syamsir, mama cun dan semua yang ada di jurusan ini. Terima kasih atas ilmu nya. Terima kasih atas kesabaran nya.. Akan selalu q ingat semua kenangan tentang qt ☺

My BeSt FrienD........................ ☺

Kalau yang bagian ini, tak ada kata-kata lagi, hanya senyuman yang dapat q kembangkan dibibir ini. Teman yang slalu membuat q marah, ngambek, nangis, takut, sedih, senang, tertawa. hehehehhe sesosok sahabat sejati dalam hidup q..Sahabat yang selalu aq banggakan, yang selalu menjadi bahu untuk q.. Spesial For UiT,..CieCie,. cimcim, Patrik, Widy, aChong, aNggUn, dan Dya.. kalian banyak mengajarkan pelajaran kehidupan buat q. makasih dah selalu menjadi teman q,.sahabat q, hidup q, belahan jiwa q.. makasih.. dan maaf kalau aq selalu dan akan selalu merepotkan kalian, makasih juga senyuman yang kalian berikan,. Itu sangat berarti bagi q..

TemaN2 seperjuangan q, mulai dari aq memasuki taman kanak-kanak dan berakhir di universitas ini, terima kasih kepada teman2 G-FoS dan MC ZovEn,.. kalian slalu dihati q. Dan kepada junior2 q, cepat Nyusul ya ☺

special in My heart............. ^^

Pada bagian ini membuat aq menjadi deq-deqan, bagian yang paling q nantikan dan gak sabar buat namanya, xixixixixi. Dia sosok yang special dihati q. special dimata q, dan special di jiwa q. Bukan hanya sebagai sosok lelaki yang tampan (xixixixi), tapi sosok sahabat, kakak, teman, adq, entah lah kenapa semua sosok seperti merangkap dalam dirinya.. Thank's to " **CRHISTIAN VADEL SIALLAGAN** " . Makasih bg jeje, yang selalu memberikan motivasi, semangat dan menyadarkan aq akan banyak hal, rasa nya tak cukup kata-kata yang akan q ungkapkan untuk mengatakan isi hati ini, tapi terima kasih telah hadir dalam hidup q, .. yang akan selalu menjadi semangat dalam hidup q.. :-*

You Are My EvErYtHinG........♥.

PELABELAN TOTAL (a,d)-SISI ANTIAJAIB SUPER PADA GRAF KIPAS $\mathbb{F}_n, 2 \leq n \leq 6$

SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA

OLEH :

NOVALIA

BP. 07934023

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

PADANG

2012

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur tiada henti-hentinya penulis ucapkan kehadirat Allah S.W.T. Atas segala kelimpahan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "***Pelabelan Total (a,d)-Sisi AntiAjaib Super pada Graf Kipas*** $\mathbb{F}_n, 2 \leq n \leq 6$ ". Salawat beriring salam kepada Nabi besar Muhammad S.A.W yang telah menjadi tauladan dan mengantarkan umat manusia dari abad kegelapan menuju abad terang dan berilmu pengetahuan sekarang ini.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, dorongan, kerjasama maupun bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Ibu Dr.Lyra Yulianti sebagai dosen Pembimbing I dan Bapak Narwen, M.Si sebagai dosen Pembimbing II yang sabar dan bersedia meluangkan waktu dan pikiran sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

2. Bapak Dr. Admi Nazra, Bapak Dr. Ahmad Iqbal Baqi, Bapak Dr. Dodi Devianto dan Bapak Zulakmal, M.Si yang telah bersedia membaca, menelaah, dan menguji naskah skripsi ini.

3. Bapak Werman kasoep, M.kom pembimbing akademik yang selalu sabar

dan perhatian, serta memarahi dan membimbing penulis seperti orang tua sendiri.

4. Semua Dosen di Fakultas Mipa Unand khususnya di Jurusan Matematika yang telah membagi ilmu kepada penulis selama masa studi.

5. Untuk B.I.D dan MC ZOVEN juga teman-teman sejurusan yang telah memberikan dorongan dan semangat untuk tetap maju, dan semua pihak yang turut membantu hingga selesainya skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan namanya satu persatu, terima kasih.

Secara khusus penulis mengucapkan terimakasih kepada semua keluarga yang tersayang khususnya yang sangat tercinta kedua orang tua Ayahanda Moris dan Ibunda Afriwati yang telah memberikan do'a motivasi dan semangat yang luar biasa dan tiada henti dalam sepanjang hidup.

Penulis sangat menyadari bahwa dalam skripsi ini masih banyak sekali kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk penyempurnaan skripsi ini.

Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan sesuatu yang bermanfaat bagi pihak yang membacanya.

Padang, Agustus 2012

Novalia

ABSTRAK

Misal terdapat graf $G = (V(G), E(G))$. Fungsi bijektif $g : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2.., |V(G)| + |E(G)|\}$ dikatakan sebagai pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib jika himpunan bobot sisi $W = \{w(xy)|w(xy) = g(x) + g(y) + g(xy), \forall xy \in E(G)\}$, dapat dituliskan sebagai

$$W = \{a, a + d, ..., a + (|E(G)| - 1)d\}.$$

Pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib g dikatakan super jika

$$g(V(G)) = \{1, 2, ..., |V(G)|\}$$

Pada skripsi ini telah dikaji bahwa graf kipas $\mathbb{F}_n$ mempunyai pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super dengan batasan pada d dan n, yaitu $2 \leq n \leq 6$ dan $d \in \{0, 1, 2\}$.

Kata kunci : Graf kipas, pelabelan total (a,d)-sisi antiajaib.

ABSTRACT

Let $G = (V(G), E(G))$. Then a bijection function from $g : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, ..., |V(G)| + |E(G)|\}$ is called an (a, d)-edge antimagic total labeling of G if the set of edge weight from of all edge of $G, W = \{w(xy)|w(xy) = g(x) + g(y) + g(xy), \forall xy \in E(G)\}$,can be denoted by

$$W = \{a, a + d, ..., a + (|E(G)| - 1)d\}$$

An (a, d)-edge antimagic total labeling g is called super if

$$g(v(G)) = \{1, 2, ..., |V(G)|\}$$

In this paper, it has been shown that a fan graph with n vertices has a super (a, d)-edge antimagic labeling with restrictions on d and $2 \leq n \leq 6$ and $d \in \{0, 1, 2\}$.
Keyword : Fan graph, Super (a, d)-edge antimagic total labeling.

DAFTAR ISI

Daftar Gambar

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum dipresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan cacah yang disebut label. Pelabelan pertama kali diperkenalkan oleh Sedlacek (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970).

Misalkan terdapat graf $G = (V, E)$, dimana V adalah himpunan titik dan E adalah himpunan sisi. Pelabelan graf pada suatu graf G adalah suatu fungsi satu-satu yang memetakan elemen-elemen graf G ke himpunan bilangan bulat non negatif yang disebut label. Elemen-elemen graf yang dipetakan dapat berupa himpunan titik atau himpunan sisi. Jika domain dari fungsi tersebut adalah himpunan titik atau himpunan sisi, maka pelabelan disebut sebagai pelabelan titik atau pelabelan sisi. Jika domain dari fungsi tersebut adalah himpunan titik dan himpunan sisi, maka pelabelan tersebut dinamakan pelabelan total.

Pada tugas akhir ini hanya dilakukan pengkajian tentang *pelabelan total*, khususnya *pelabelan total sisi antiajaib pada graf kipas* $\mathbb{F}_n$. Suatu pelabelan total sisi antiajaib pada suatu graf dengan banyaknya titik p dan banyaknya sisi q adalah pemetaan satu-satu $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2 ..., p+q\}$, sedemikian sehingga himpunan dari bobot sisi $W = \{f(x) + f(y) + f(xy), \forall xy \in E(G)\}$ dapat ditulis sebagai $W = \{a, a+d, ..., a+(q-1)\}$ untuk $a > 0$ dan $d \geq 0$. Graf siklus C_n adalah graf terhubung sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf roda W_n adalah graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu titik diluar C_n dinamakan x, kemudian menghubungkan titik tersebut dengan semua titik di C_n. Graf kipas $\mathbb{F}_n$ adalah graf yang diperoleh dengan cara menghapus satu sisi di C_n yang terdapat pada W_n.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah bagaimana cara melabeli suatu graf sehingga graf tersebut memiliki pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super, dimana a adalah bobot sisi minimum pada pelabelan dan d adalah selisih dari dua bobot sisi yang berurutan.

1.3 Pembatasan Masalah

Dalam tulisan ini permasalahan dibatasi untuk menentukan apakah graf kipas $\mathbb{F}_n, n \geq 2$ mempunyai pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan dari tugas akhir ini adalah untuk menunjukkan bahwa graf Kipas $\mathbb{F}_n$ mempunyai pelabelan total (a, d)- sisi antiajaib super untuk $2 \leq n \leq 6$ dan $d \in \{0, 1, 2\}$.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan dalam tugas akhir ini terdiri dari empat bab yang diawali dengan Bab I, yang menguraikan tentang latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan. Bab II sebagai landasan teori berisi tentang konsep dasar dari teori graf berupa definisi dan terminologi, jenis-jenis graf, pelabelan pada graf dan pelabelan anti ajaib, sedangkan pada Bab III berisi tentang pembahasan dan permasalahan. Penulisan ini diakhiri dengan kesimpulan dari pembahasan masalah.

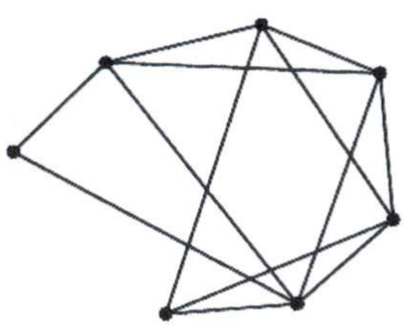
BAB II

LANDASAN TEORI

Untuk menjelaskan tentang pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super pada graf kipas, perlu adanya beberapa teori dasar untuk menunjang pembuktian dan mempermudah pemahaman. Bebarapa dasar teori meliputi definisi graf, beberapa jenis graf, pemetaan dan pelabelan graf.

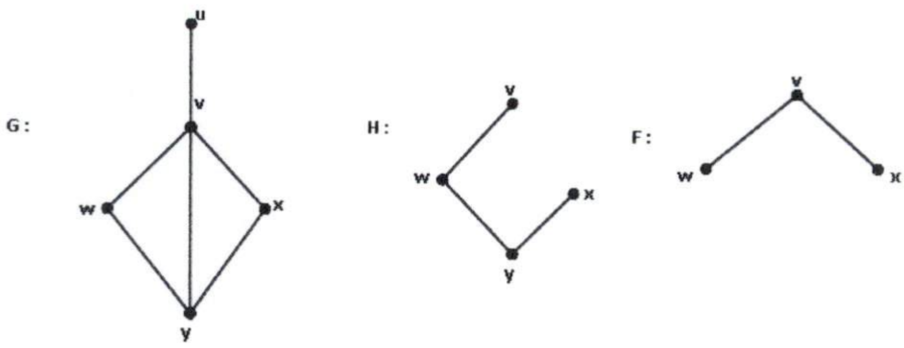
2.1 Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf

Suatu graf G [3] terdiri dari himpunan tak kosong yang berisikan himpunan V yang disebut dengan himpunan titik dan himpunan E yang berisikan elemen himpunan bagian dari V yang disebut sisi. Dapat dituliskan $G = (V(G), E(G))$. Banyaknya titik-titik dalam G disebut dengan *order* yang dinotasikan dengan $|V(G)|$ dan banyaknya sisi-sisi disebut *size* yang dinotasikan dengan $|E(G)|$. Sebagai ilustrasi perhatikan Gambar 2.1 berikut.



Gambar 2.1. Graf G dengan $|V(G)| = 7$ dan $|E(G)| = 13$.

Misal terdapat $G = (V(G), E(G))$. Maka subgraf dari graf G adalah graf H dengan $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Sebagai ilustrasi perhatikan Gambar 2.2 berikut.



Gambar 2.2. Graf G dan sub graf H dan sub graf F.

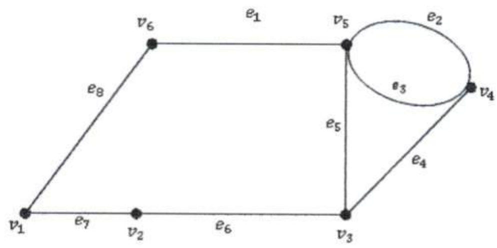
Gambar 2.2 merupakan gambar graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{w, u, v, x, y\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{wv, uv, vx, xy, wy\}$. Sedangkan subgraf H dan subgraf F , yang merupakan subgraf dari graf G.

Misal terdapat $G = (V(G), E(G))$ dengan $u, v \in V(G)$. Titik u dan v dikatakan *bertetangga (adjacent)* jika terdapat sisi $e = uv \in E(G)$. Untuk sebarang sisi $e = uv$, sisi e dikatakan *terkait (incident)* dengan titik u dan v. Derajat titik v, dinotasikan dengan $deg(v)$, adalah banyaknya sisi yang terkait dengan v.

Suatu jalan (walk) $u - v$ pada graf G [3] adalah titik-titik yang beruurutan di G, dimulai dengan u dan diakhiri di v, sedemikian sehingga titik-titik yang berurutan bertetangga. Dapat ditulis,

$$W : u = v_o, v_1, ..., v_u = v.$$

Dimana $k \geq 0$, v_i dan v_{i+1} adalah bertetangga untuk $i = 0, 1, 2, .., k-1$. Setiap titik, $v_i(0 \leq i \leq k)$ dan setiap sisi $v_i v_{i+1}(0 \leq i \leq k-1$ terletak dalam W. Suatu jalan yang setiap sisinya berbeda maka jalan disebut dengan *jejak (trail)*. Suatu jejak yang setiap titiknya berbeda dinamakan *lintasan (path)*. Sebagai ilustrasi dapat dilihat pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3. Graf G

Dari ilustrasi pada Gambar 2.2 dilihat bahwa pada graf G terdapat jalan, trail, dan lintasan sebagai berikut.

Jalan : $v_1, e_7, v_2, e_6, v_3, e_5, v_5, e_1, v_6$

Trail : $v_6, e_1, v_5, e_2, v_4, e_3, v_5, e_5, v_3, e_6, v_2$

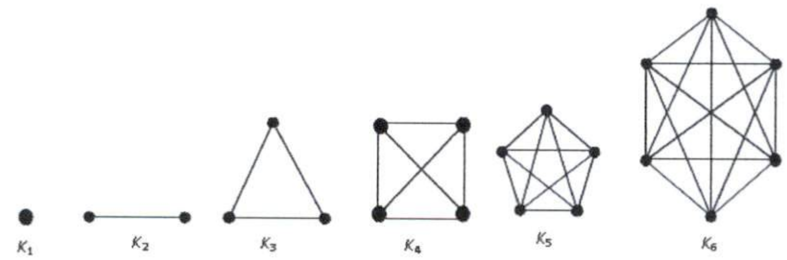
Lintasan : $v_1, e_8, v_6, e_1, v_5, e_3, v_4, e_4, v_3, e_6, v_2$

2.2 Jenis-jenis graf

Berikut diberikan beberapa jenis graf.

1. **Graf Lengkap**

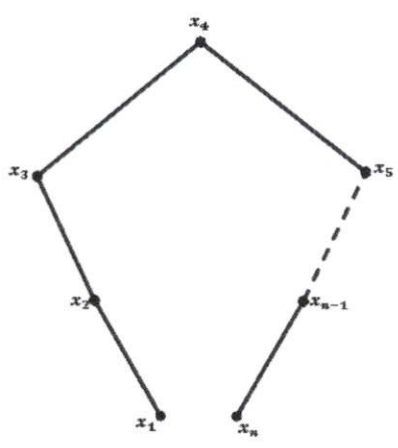
   Graf lengkap adalah graf terhubung yang setiap titiknya mempunyai sisi ke semua titik lainnya. Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n. Pada Gambar 2.4 diperlihatkan contoh graf lengkap.



Gambar 2.4. Graf lengkap K_n dengan $1 \leq n \leq 6$.

2. **Graf Lintasan**

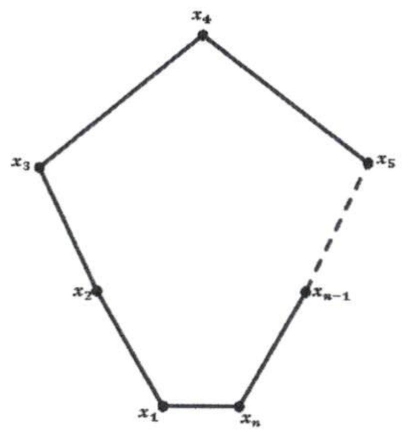
Graf lintasan adalah graf dengan dua titik ujung berderajat satu dan $n-2$ titik berderajat dua, dinotasikan dengan P_n. Pada Gambar 2.5 terdapat ilustrasi dari graf lintasan P_n.



Gambar 2.5. Graf Lintasan P_n.

3. **Graf Siklus**

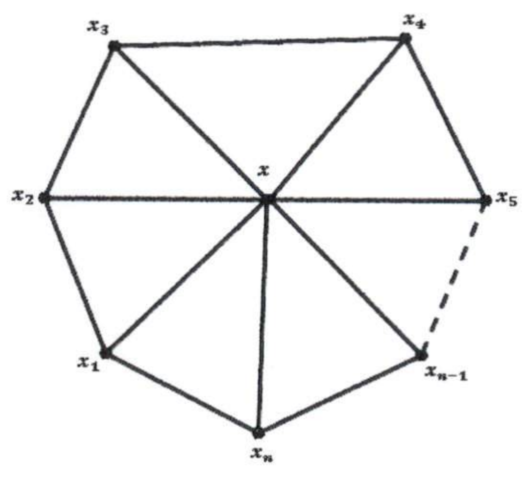
Graf siklus adalah graf terhubung sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf siklus dengan n titik dilambangkan dengan C_n. Pada Gambar 2.6 diperlihatkan contoh graf siklus C_n.



Gambar 2.6. Graf Siklus C_n.

4. **Graf Roda**

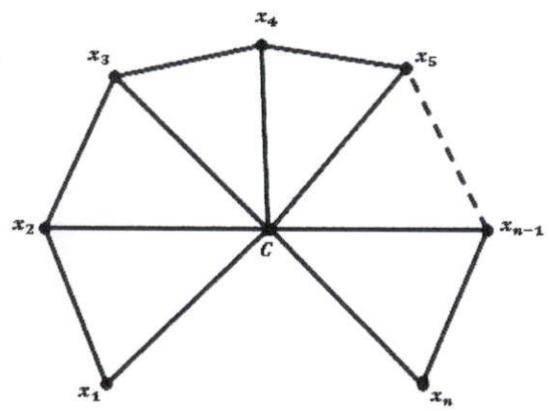
Misal terdapat graf C_n. Graf W_n diperoleh dengan cara menambahkan satu titik diluar C_n, dinotasikan dengan x dan menambahkan sebanyak n sisi yang menghubungkan x dengan semua titik di C_n. Pada Gambar 2.7 diperlihatkan contoh graf Roda W_n.



Gambar 2.7. Graf Roda W_n.

5. **Graf Kipas (Fan)**

Graf kipas $\mathbb{F}_n$, $n \geq 2$ adalah graf yang diperoleh dengan cara menghapus satu sisi di C_n yang terdapat pada graf W_n. Pada gambar 2.8 diperlihatkan contoh dari graf kipas $\mathbb{F}_n$.



Gambar 2.8. Graf Kipas $\mathbb{F}_n$

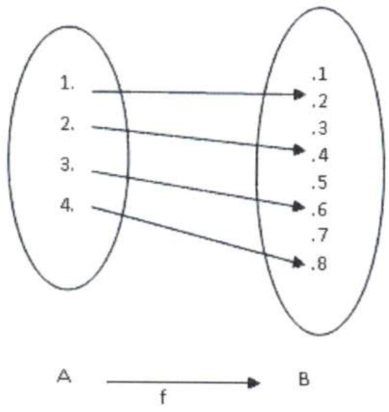
2.3 Pemetaan

Pemetaan [5] adalah suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi yang memasangkan setiap elemen dari A secara tunggal dengan elemen pada B. Ditulis $f : A \rightarrow B$, yang mana A adalah daerah asal (domain) dan B adalah daerah kawan (kodomain). Apabila f memetakan suatu elemen $x \in A$ ke suatu $y \in B$, dikatakan bahwa y adalah peta dari x oleh f dinotasikan $f(x)$, sedangkan x biasanya disebut prapeta dari $f(x)$.

Pemetaan yang dibahas pada tugas akhir ini adalah,

1. **Pemetaan Satu-Satu (injektif)**

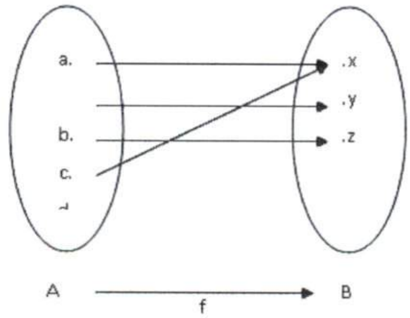
Misalkan fungsi f menyatakan A ke B maka fungsi f disebut suatu fungsi satu-satu (injektif), apabila setiap dua elemen yang berlainan di A akan dipetakan pada dua elemen yang berada di B. Dapat dikatakan bahwa $f : A \to B$ adalah fungsi injektif apabila $f(a) \neq f(a')$ atau ekuivalen jika $f(a) = f(a')$ berakibat $a = a'$.



Gambar 2.9. contoh gambar pemetaan satu-satu (injektif)

2. **Pemetaan Pada**

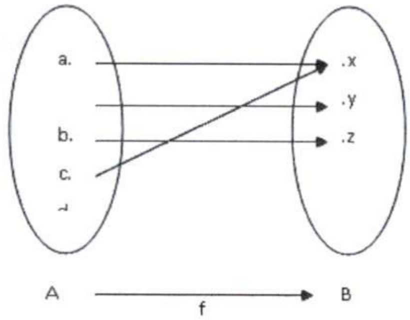
Misalkan suatu fungsi f memetakan A ke B maka daerah hasil $f(A)$ dari fungsi f adalah himpunan bagian dari B atau $f(A) \subset B$, fungsi ini dikenal dengan fungsi into (kedalam). Jika $f(A) = B$, yang berarti setiap elemen di B pasti merupakan peta dari sekurang-kurangnya satu elemen di A, maka dikatakan f adalah suatu fungsi surjektif.



Gambar 2.10. contoh gambar pemetaan pada (surjektif)

3. **Pemetaan Korespondensi Satu-Satu**

   Suatu pemetaan $f : A \to B$ sedemikian serupa sehingga f merupakan fungsi yang injektif dan surjektif sekaligus .



Gambar 2.11. contoh gambar pemetaan korespondensi satu-satu (bijektif)

2.4 Pelabelan Pada Graf

Pelabelan pada suatu graf [6] adalah pemetaan (fungsi) bijektif yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan bulat. Jika domain dari fungsi adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik. Jika domain adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi, dan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut pelabelan total.

Pada tahun 1963, Sedlacek [1] memberikan beberapa tipe pelabelan graf sebagai berikut.

- Pelabelan Ajaib

  Pelabelan ajaib adalah pemetaan terhadap himpunan sisi pada graf ke himpunan bilangan riil non negatif, sehingga jumlah label sisi disekitar titik dalam graf G adalah sama.

- Pelabelan Antiajaib

  Jika pemberian label pada sebuah graf memberikan nilai yang merupakan deret aritmatika dengan nilai awal a dan beda b.

Pada [4], diberikan beberapa jenis pelabelan antiajaib pada suatu graf sebagai berikut.

- Pelabelan sisi (a, d)-titik anti ajaib

  Graf G dikatakan mempunyai pelabelan sisi (a, d)-titik anti ajaib jika terdapat bilangan bulat $a > 0, d \geq 0$ dan $f_1 : E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., q\}$, sedemikian sehingga himpunan bobot titik dari semua titik di G, yang dinotasikan dengan $W_1 = \{w(x)|w(x) = \sum f_1(xy), x \in V(G)\}$, dapat ditulis sebagai $W_1 = \{a, a + d, a + 2d, ..., a + (p - 1)d\}$.

- Pelabelan titik (a,d)-sisi anti ajaib

  Graf G dikatakan mempunyai pelabelan titik (a, d)-sisi anti ajaib jika terdapat bilangan bulat $a > 0, d \geq 0$ dan $f_2 : V(G) \rightarrow \{1, 2, ..., p\}$, sedemikian sehingga himpunan bobot sisi dari semua sisi di G, yang dinotasikan dengan $W_2 = w(xy)|w(xy) = f_2(x) + f_2(y), xy \in E(G)$, dapat ditulis sebagai $W_2 = a, a + d, a + 2d, ..., a + (q-1)d$.

- Pelabelan total (a, d)-titik anti ajaib.

  Sebuah fungsi bijeksi $f_3 : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., p+q\}$ dikatakan pelabelan total (a, d)-titik anti ajaib pada graf G jika himpunan bobot titik untuk semua titik di G yang dinotasikan dengan $W_3 = \{w(x)|w(x) = f_3(x) + \sum f_2(xy), xy \in E(G)\}$, dapat ditulis sebagai $W_3 = \{a, a+d, a+2d, ..., a+(p-1)d\}$ untuk suatu $a > 0$ dan $d \geq 0$.

- Pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib.

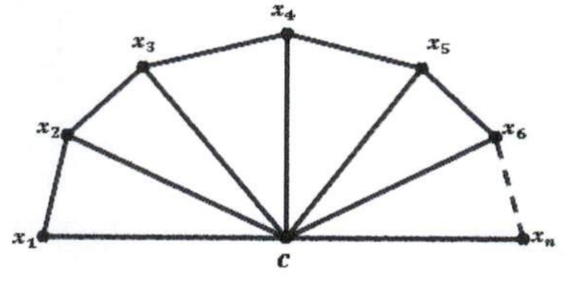
  Sebuah fungsi bijeksi $f_4 : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., p+q\}$ dikatakan pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib pada graf G jika himpunan bobot sisi untuk semua sisi di G yang dinotasikan dengan $W_4 = \{w(xy)|w(xy) = f_4(x) + f_4(xy) + f_4(y), xy \in E(G)\}$, dapat ditulis sebagai $W_4 = \{a, a+d, a+2d, , a+(q-1)d\}$ untuk suatu $a > 0$ dan $d \geq 0$.

Suatu pelabelan total dikatakan super jika $g(V) = \{1, 2, ..., p\}$ dan $g(E) = \{p+1, p+2, ..., p+q\}$.

BAB III

PELABELAN TOTAL (a,d)-SISI ANTIAJAIB SUPER PADA GRAF KIPAS $\mathbb{F}_n$

Dalam Bab III akan dibahas langkah-langkah dalam mengkonstruksi pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib super pada graf $\mathbb{F}_n$. Himpunan titik dari graf $\mathbb{F}_n$ adalah $V(\mathbb{F}_n) = \{c, x_1, x_2, ..., x_n\}$ dan himpunan sisi $E(\mathbb{F}_n) = \{cx_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_ix_i + 1|1 \leq i \leq n-1\}$. Banyaknya titik dan sisi dari $\mathbb{F}_n$ adalah $|V(\mathbb{F}_n)| = n + 1$ dan $|E(\mathbb{F}_n)| = 2n - 1$, sehingga $|V(\mathbb{F}_n) \cup E(\mathbb{F}_n)| = 3n$. Ilustrasi graf kipas $\mathbb{F}_n$ dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3.1. Graf kipas $\mathbb{F}_n$

Teorema 3.1. *[2] Jika graf kipas $\mathbb{F}_n$, $n \geq 2$ adalah graf dengan pelabelan total (a, d)- sisi antiajaib maka $d < 3$.*

Bukti.

Misalkan bahwa graf kipas $\mathbb{F}_n$, $n \geq 2$ mempunyai pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib super $f : V(\mathbb{F}_n) \cup E(\mathbb{F}_n) \longrightarrow \{1, 2, ..., 3n\}$. Himpunan bobot sisi dari

$\mathbb{F}_n$ dapat ditulis sebagai berikut.

$$\begin{aligned} W &= \{w(uv)|w(uv) = f(u) + f(uv) + f(v), \forall uv \in E(\mathbb{F}_n)\} \\ &= \{a, a+d, a+2d, ..., a+(q-1)d\} \\ &= \{a, a+d, a+2d, ..., a+(2n-1)-1d\} \\ &= \{a, a+d, a+2d, ..., a+(2n-2)d\} \end{aligned}$$

Jumlah bobot sisi dari $\mathbb{F}_n$ adalah :

$$\begin{aligned} \sum_{xy \in E(\mathbb{F}_n)} w(xy) &= a + (a+d) + (a+2d) + ... + (a+(2n-2)d) \\ &= (2n-1)a + (1+2+3+...+(2n-2))d \\ &= (2n-1)a + d.\frac{1}{2}(2n-2).(2n-2+1)d \\ &= (2n-1)a + d.\frac{1}{2}(2n-2)(2n-1)d \\ &= (2n-1)a + (n-1)(2n-1)d \qquad (3.1) \end{aligned}$$

Pada penjumlahan dari bobot sisi pada graf $\mathbb{F}_n$ seperti Gambar 3.1, label titik pusat digunakan sebanyak n kali, label titik x_1 dan x_n digunakan dua kali, dan label titik-titik pada $\{x_i|2 \leq i \leq n-1\}$ digunakan sebanyak tiga kali. Maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \sum_{xy \in E(\mathbb{F}_n)} w(xy) &= nf(c) + 2f(x_1) + 3f(x_2) + ... + 3f(x_n - 1) + 2f(x_n) \\ &\quad + \sum_{uv \in E(\mathbb{F}_n)} f(uv) \\ &= nf(c) + 2(f(x_1 + f(x_n)) + 3(f(x_2) + ... + f(x_n - 1)) \\ &\quad + \sum_{uv \in E(\mathbb{F}_n)} f(uv) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= nf(c)+2(f(x_1+f(x_n))+3\sum_{i=2}^{n-1}f(x_i)+\sum_{uv\in E(\mathbb{F}_n)}f(uv)\\
&= nf(c)+2(f(x_1)+f(x_n))+3\sum_{j=1}^{n}f(x_j)-3(f(x_1)+f(x_n)+f(c))\\
&\quad+\sum_{uv\in E(\mathbb{F}_n)}f(uv)\\
&= (n-3)f(c)-(f(x_1)+f(x_n))+3\sum_{j=1}^{n}f(x_j)+\sum_{uv\in E(\mathbb{F}_n)}f(uv)\\
&= 3\sum_{j=1}^{n}f(x_j)+\sum_{uv\in E(\mathbb{F}_n)}f(uv)+(n-3)f(c)-f(x_1)-f(x_n). \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

Karena

$$3\sum_{j=1}^{n}f(x_j)=\frac{8n^2-2}{2} \qquad (3.3)$$

dan

$$\sum_{uv\in E(\mathbb{F}_n)}f(uv)=\frac{6+9n+n^2}{2} \qquad (3.4)$$

maka diperoleh

$$\frac{8n^2-2}{2}+\frac{6+9n+n^2}{2}=\frac{1}{2}(11n^2+9n+4). \qquad (3.5)$$

Sehingga (3.2) menjadi

$$
\begin{aligned}
\sum_{xy\in E(\mathbb{F}_n)}w(xy) &= 3\sum_{j=1}^{n}f(x_j)+\sum_{uv\in E(\mathbb{F}_n)}f(uv)+(n-3)f(c)-f(x_1)-f(x_n)\\
&= \frac{1}{2}(11n^2+9n+4)+(n-3)f(c)-f(x_1)-f(x_n) \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

Dari (3.1) dan (3.6) didapatkan :

$$\frac{1}{2}(11n^2+9n+4)+(n-3)f(c)-f(x_1)-f(x_n)=(2n-1)a+d(2n-1)(n-1) \quad (3.7)$$

Bobot sisi minimum yang mungkin adalah $a=1+2+n+2$. Selanjutnya, karena banyaknya titik pada graf kipas $\mathbb{F}_n$ adalah $n+1$ maka nilai $f(c)\leq n+1$

dan $f(x_1) + f(x_n) \geq 3$. Akan diperoleh batas atas dari parameter d, yaitu :

$$\begin{aligned} d(2n-1)(n-1) &= \frac{1}{2}(11n^2+9n+4)+(n-3)f(c)-f(x_1)-f(x_n)-(2n-1)a \\ d &= \frac{(11n^2+9n+4)+2(n-3)f(c)-2(f(x_1)-f(x_n))-(2n-1)a}{2(2n-1)(n-1)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Jika $f(c) = n+1$ dan $f(x_1)+f(x_n) = 3$, maka bobot sisi minimum adalah $5+n \leq a$. Subsitusikan nilai-nilai tersebut kedalam persamaan (3.8),maka diperoleh batas atas untuk d:

$$d \leq \frac{9n^2-13n+2}{2(2n-1)(n-1)}.$$

Karena $n \geq 2$, maka jelas bahwa

$$\begin{aligned} d &\leq \frac{9.2^2-13.2+2}{2(2.2-1)(2-1)} \\ &= \frac{36-26+2}{2.3.1} = 2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Akibatnya $d \leq 2$ atau dapat ditulis $d < 3$ untuk $n \geq 2$. ■

Lema 3.2. *[2] Graf kipas $\mathbb{F}_n$ mempunyai pelabelan titik $(3,1)$-sisi antiajaib jika dan hanya jika $2 \leq n \leq 6$.*

Bukti. ($\Leftarrow$) Misal $2 \leq n \leq 6$. Akan dibuktikan $\mathbb{F}_n$ mempunyai pelabelan titik (3.1)-sisi antiajaib.

Misalkan $f : V(F_n) \to \{1, 2, ..., n+1\}$ adalah pelabelan titik $(a,1)$-sisi anti ajaib. Nilai minimum dari bobot sisi dalam pelabelan titik $(a,1)$- sisi anti ajaib adalah $1+2$. Sehingga haruslah $a \geq 3$. Bobot nilai maksimumnya dari bobot sisi adalah $n+(n+1) = 2n+1$. Maka haruslah :

$$a + (q-1)d \leq 2n+1$$

Karena $d = 1$, maka

$$a + (q-1) \leq 2n + 1.$$

Karena $|E(G)| = 2n - 1$, maka

$$\begin{aligned} a + (2n-2) &\leq 2n + 1 \\ a &\leq 3. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Karena $a \geq 3$ dan $a \leq 3$ haruslah $a = 3$. Selanjutnya akan dilihat tiga kasus untuk nilai $f(c)$.

Kasus 1.

Berdasarkan Gambar 3.1 dapat dilihat jika $f(c) = 1$, maka himpunan bobot sisi untuk himpunan sisi $\{cx_i, 1 \leq i \leq n\}$ adalah $\{3, 4, 5, ..., n+2\}$ dan himpunan bobot sisi untuk sisi $\{x_i x_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$, adalah $\{n+3, n+4, ..., 2n+1\}$. Pada penjumlahan bobot sisi $\{n+3, n+4, ..., 2n+1\}$, label titik x_1 dan x_n digunakan satu kali, dan label dari titik lainnya $x_i, 2 \leq i \leq n-1$ digunakan dua kali.

$$\begin{aligned}
(n+3) + ... + (2n+1) &= f(x_1) + 2(f(x_2) + ... + f(x_{n-1}) + f(x_n) \\
(n+3) + ... + (2n+1) &= f(x_1) + 2(f(x_2) + ... + f(x_{n-1})) + f(x_n) \\
(n+3) + ... + (2n+1) &= f(x_1) + 2\sum_{i=2}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \\
(n+3) + ... + (2n+1) &= f(x_1) + f(x_n) + 2\sum_{j=1}^{n} f(x_j) - 2(f(x_1) + f(x_n)) \\
(n+3) + ... + (2n+1) &= -f(x_1) - f(x_n) + 2\sum_{j=1}^{n} (j+1)
\end{aligned}$$

$$f(x_1) + f(x_n) = 2\sum_{j=1}^{n} (j+1) - [(n+3) + ... + (2n+1)]. \tag{3.11}$$

Karena

$$2\sum_{i=1}^{n}(i+1) = n^2 + 3n \tag{3.12}$$

dan

$$(n+3) + (n+4) + ... + (2n+1) = \frac{3n^2+n-4}{2} \tag{3.13}$$

maka diperoleh:

$$\begin{aligned} f(x_1) + f(x_n) &= n^2 + 3n + \frac{3n^2+n-4}{2} \\ &= \frac{4+5n-n^2}{2}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Karena bobot sisi minimum 5 dan bobot maksimum $2n+1$, maka $5 \leq f(x_1) + f(x_n) \leq 2n+1$. Berdasarkan asumsi bahwa $2 \leq n \leq 6$, maka dari (3.12) dilakukan pengujian untuk nilai $f(x_1) + f(x_n)$ dengan $2 \leq n \leq 6$.

1. Jika $n = 2$, maka diperoleh

$$f(x_1) + f(x_2) = 5$$

2. Jika $n = 3$, maka diperoleh

$$f(x_1) + f(x_3) = 5$$

3. Jika $n = 4$, maka diperoleh

$$f(x_1) + f(x_4) = 4$$

4. Jika $n = 5$, maka diperoleh

$$f(x_1) + f(x_5) = 2$$

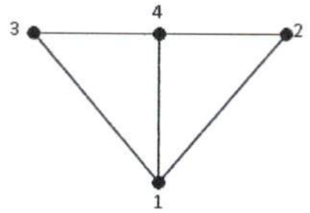
5. Jika $n = 6$, maka diperoleh

$$f(x_1) + f(x_6) = -1$$

Dapat dilihat bahwa nilai $5 \leq f(x_1) + f(x_n) \leq 2n + 1$ terpenuhi untuk $n = 2$ dan $n = 3$. Sementara untuk $n \in \{4, 5, 6\}$ nilai $f(x_1) + f(x_n)$ berada diluar selang $[5, 2n + 1]$.

Jika $n = 2$, maka $f_1(c) = 1, f_1(x_1) = 2, f_1(x_2) = 3$, dan untuk $n = 3$, kita labeli $f_2(c) = 1, f_2(x_1) = 3, f_2(x_2) = 4, f_2(x_3) = 2$.

Gambar 3.2. Pelabelan titik (3,1)-sisi antiajaib pada $\mathbb{F}_2$.



Gambar 3.3. Pelabelan titik (3,1)-sisi antiajaib pada $\mathbb{F}_3$.

Diperoleh bahwa pelabelan titik f_1 dan f_2 adalah pelabelan titik $(3, 1)$-sisi anti ajaib untuk $n = 2$ atau $n = 3$, dengan $f(c) = 1$. Gambar untuk pelabelan $f(x_1)$ dan $f(x_2)$ dapat dilihat pada Gambar 3.2 dan Gambar 3.3.

Kasus 2.

Jika $f(c) = n + 1$ maka himpunan bobot sisi dari sisi $\{cx_i | 1 \leq i \leq n\}$ adalah $\{n+2, n+3, ..., 2n+1\}$ dan himpunan bobot sisi dari sisi $\{x_i x_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$ adalah $\{3, 4, ..., n+1\}$. Bobot-bobot sisi $3, 4, ..., n+1$ diperoleh dari hasil penjumlahan dua label titik yang berbeda dalam $\{1, 2, ..., n\}$, dimana label titik x_i, $2 \leq i \leq n-1$ digunakan dua kali, sementara label titik x_1 dan x_n digunakan satu kali.

$$\begin{aligned} f(x_1) + 2(f(x_2) + f(x_3) + ... + f(x_{n-1})) + f(x_n) &= 3 + 4 + ... + (n+1) \\ f(x_1) + f(x_n) + 2\sum_{i=2}^{n} i - 2(f(x_1) + f(x_n)) &= 3 + 4 + ... + (n+1) \\ 2\sum_{j=1}^{n} j - (3 + 4 + ... + (n+1)) &= f(x_1) + f(x_n) \qquad (3.15) \end{aligned}$$

karena

$$2\sum_{j=1}^{n} j = n^2 + n \qquad (3.16)$$

dan

$$3 + 4 + ... + (n+1) = \frac{n^2 + 3n - 4}{2} \qquad (3.17)$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_1) + f(x_n) &= n^2 + n - \frac{n^2 + 3n - 4}{2} \\ &= \frac{2n + 2n^2 - n^2 - 3n + 4}{2} \\ &= \frac{n^2 - n + 4}{2}. \qquad (3.18) \end{aligned}$$

Karena bobot sisi minimum adalah 3 dan bobot sisi maksimum adalah $n + (n-1) = 2n - 1$, maka diperoleh batas untuk nilai $f(x_1) + f(x_n)$, yaitu

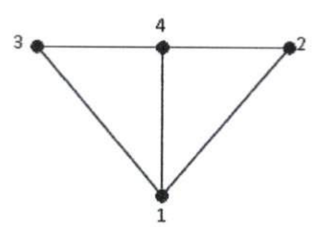
$$3 \leq f(x_1) + f(x_n) \leq 2n - 1 \qquad (3.19)$$

Berdasarkan asumsi $2 \leq n \leq 6$ maka berdasarkan (3.19), dilakukan pengujian untuk nilai $f(x_1) + f(x_n), 2 \leq n \leq 6$.

1. Jika $n = 2$, maka diperoleh
$$f(x_1) + f(x_2) = 3$$
2. Jika $n = 3$, maka diperoleh
$$f(x_1) + f(x_3) = 5$$
3. Jika $n = 4$, maka diperoleh
$$f(x_1) + f(x_4) = 6$$
4. Jika $n = 5$, maka diperoleh
$$f(x_1) + f(x_5) = 12$$
5. Jika $n = 6$, maka diperoleh
$$f(x_1) + f(x_6) = 17.$$

Dapat dilihat bahwa nilai $3 \leq f(x_1) + f(x_n) \leq 2n - 1$ terpenuhi untuk $n = 2$ dan $n = 3$. Sementara untuk $n \in \{4, 5, 6\}$ nilai $f(x_1) + f(x_n)$ berada di luar selang $[3, 2n - 1]$.

Gambar 3.4. Pelabelan titik (3,1)-sisi antiajaib pada $\mathbb{F}_2$.



Gambar 3.5. Pelabelan titik (3,1)-sisi antiajaib pada $\mathbb{F}_3$.

Kasus 3.

Jika $f(c) = k, 1 < k < n+1$, maka label himpunan titik $\{x_i | 1 \leq i \leq n\}$, dapat dipartisi ke dalam dua himpunan yang saling lepas yaitu $S_1 = \{1, 2, ..., k-1\}$ dan $S_2 = \{k+1, k+2, ..., n+1\}$. Dengan demikian terdapat salah satu sisi $x_i x_{i+1}$ sedemikian sehingga bobot sisinya adalah $w(x_i x_{i+1}) = 2k = s_1 + s_2$, dimana $s_1 \in S_1$ dan $s_2 \in S_2$.

Tulis himpunan bobot sisi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} W_1 &= \{3, 4, ..., k\} \\ W_2 &= \{n+k+2, n+k+3, ..., 2n+1\} \\ W_3 &= \{w(cx_i) : 1 \leq i \leq n\} = \{k+1, k+2, ..., n+k+1\}/\{2k\} \end{aligned}$$

Pada penjumlahan dari seluruh nilai dalam himpunan S_1, nilai s_1 dan $f(x_1)$ digunakan satu kali, sementara nilai lainnya digunakan dua kali. Hasil ini adalah sama dengan hasil penjumlahan dari bobot sisi dalam himpunan W_1, yaitu

$$\begin{aligned} 2[(1+2, ..., +k-1)] + f(x_1) + s_1 &= 3 + 4 + ... + k \\ 2\sum_{i=3}^{k-1} i + f(x_1) + s_1 &= \sum_{j=3}^{k} j \\ \sum_{j=3}^{k} j &= 2\sum_{i=1}^{k-1} i + f(x_1) + s_1 - 2(f(x_1) + s_1) \\ \sum_{j=3}^{k} j &= 2\sum_{i=1}^{k-1} i - f(x_1) - s_1. \end{aligned}$$

Maka diperoleh

$$f(x_1) + s_1 = 2\sum_{i=1}^{k-1} i - \sum_{j=3}^{k} j \qquad (3.20)$$

Karena

$$2\sum_{i=1}^{k-1} i = k(k-1) \tag{3.21}$$

dan

$$2\sum_{j=3}^{k} j = \frac{k^2+k-6}{2} \tag{3.22}$$

maka diperoleh

$$f(x_1)+s_1 = k(k-1) - \frac{k^2+k-6}{2} = \frac{k^2-3k+6}{2}. \tag{3.23}$$

Diketahui bobot sisi minimum adalah 3 dan bobot sisi maksimum adalah $(k-2)+(k-1)=2k-3$. Maka $3 \leq f(x_1)+s_1 \leq 2k-3$. Dari persamaan (3.20), dilakukan pengujian untuk $2 \leq k \leq 6$ dimana k adalah bilangan bulat.

1. Jika $k=2$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_1)+s_1 &= \frac{k^2-3k+6}{2} \\ &= \frac{2^2-3.2+6}{2} \\ &= \frac{4}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

2. Jika $k=3$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_1)+s_1 &= \frac{k^2-3k+6}{2} \\ &= \frac{3^2-3.3+6}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

3. Jika $k = 4$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_1) + s_1 &= \frac{k^2 - 3k + 6}{2} \\ &= \frac{4^2 - 3.4 + 6}{2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

4. Jika $k = 5$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_1) + s_1 &= \frac{k^2 - 3k + 6}{2} \\ &= \frac{5^2 - 3.5 + 6}{2} \\ &= 8 \end{aligned}$$

5. Jika $k = 6$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_1) + s_1 &= \frac{k^2 - 3k + 6}{2} \\ &= \frac{6^2 - 3.6 + 6}{2} \\ &= 12. \end{aligned}$$

Untuk $k = 3$ atau $k = 4$, nilai $f(x_1) + s_1$ termasuk ke dalam selang $f(x_1) + s_1 \leq 2k - 3$, sementara untuk $k \in \{2, 5, 6\}$, nilai $f(x_1) + s_1$ tidak termasuk kedalam selang $f(x_1) + s_1 \leq 2k - 3$. Dengan demikian nilai k yang memenuhi dari persamaan (3.23) adalah $k = 3$ dan $k = 4$.

Pada penjumlahan semua titik dalam himpunan S_2, nilai s_2 dan $f(x_n)$ digunakan satu kali dan nilai lainnya digunakan dua kali. Hasilnya akan sama dengan penjumlahan bobot sisi dalam himpunan W_2, yaitu

$$\begin{aligned} 2[(k+1)+(k+2)+...+(n+1) &= -s_2 - f(x_n) + (n+k+2) + ... + (2n+1) \\ 2\sum_{i=k+1}^{n+1} i - [(n+k+2)+...+(2n+1)] &= s_2 + f(x_n) \end{aligned}$$

maka diperoleh

$$s_2 + f(x_n) = 2\sum_{i=k+1}^{n+1} i - (n+k+2) + ... + (2n+1). \tag{3.24}$$

Karena

$$2[(k+1)+(k+2)+...+(n+1)] = (n-k+1)(n+k+2) \tag{3.25}$$

dan

$$(n+k+2)+(n+k+3)+...+(2n+1) = \frac{n-k}{2}(3n+k+3) \tag{3.26}$$

maka diperoleh

$$s_2 + f(x_n) = (n-k+1)(n+k+2) - (\frac{(3n+k+3)(n-k)}{2}). \tag{3.27}$$

Karena bobot sisi minimum adalah $k+1+k+2 = 2k+3$, dan bobot maksimum adalah $n+(n+1) = 2n+1$, maka diperoleh

$$2k+3 \leq s_2 + f(x_n) \leq 2n+1. \tag{3.28}$$

Dari Persamaan (3.24), diperoleh $k = 3$ atau $k = 4$. Maka dilakukan pengujian untuk nilai n yang memenuhi $(3, 28)$.

Uji untuk $k = 3$, sehingga diperoleh

$$s_2 + f(x_n) = (n+5)(n-2) - \frac{(3n+6)(n-3)}{2} \tag{3.29}$$

1. Jika $n = 2$, maka diperoleh

   $s_2 + f(x_2) = 6$

2. Jika $n = 3$, maka diperoleh

   $s_2 + f(x_3) = 9$

3. Jika $n = 4$, maka diperoleh

   $s_2 + f(x_4) = 9$

4. Jika $n = 5$, maka diperoleh

   $s_2 + f(x_5) = 9$

5. Jika $n = 6$, maka diperoleh

   $s_2 + f(x_6) = 8$

Untuk $n \in \{2, 3, 6\}$, nilai $s_2 + f(x_n)$ tidak termasuk kedalam selang $[2k + 3, 2n + 1]$ sedangkan untuk $n \in \{4, 5\}$, nilai $s_2 + f(x_n)$ termasuk kedalam $[2k + 3, 2n + 1]$. Dengan demikian nilai n yang memenuhi adalah $n = 4$ atau $n = 5$.

Uji untuk $k = 4$ dan $2 \leq n \leq 6$, dengan selang $2k + 3 \leq s_2 + f(x_n) \leq 2n + 1$, diperoleh

$$s_2 + f(x_n) = (n + 6)(n - 3) - \frac{(3n + 7)(n - 4)}{2} \qquad (3.30)$$

dengan selang $2k + 3 \leq s_2 + f(x_2) \leq 2n + 1$

untuk $n = 2$, diperoleh

$$s_2 + f(x_2) = 5$$

untuk $n = 3$, diperoleh

$$s_2 + f(x_3) = 8$$

untuk $n = 4$, diperoleh

$$s_2 + f(x_4) \quad = \quad 10$$

untuk $n = 5$, diperoleh

$$s_2 + f(x_5) \quad = \quad 11$$

untuk $n = 6$, diperoleh

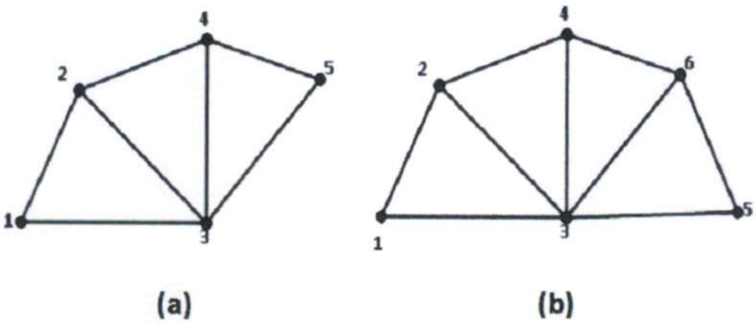
$$s_2 + f(x_6) \quad = \quad 11$$

Nilai $s_2 + f(x_n)$ untuk $n \in \{2, 3, 4\}$ tidak berada dalam selang $[2k+3, 2n+1]$, sedangkan untuk $n \in \{5, 6\}$ berada dalam selang $[2k+3, 2n+1]$. Dengan demikian nilai n yang memenuhi adalah $n = 5$ atau $n = 6$.

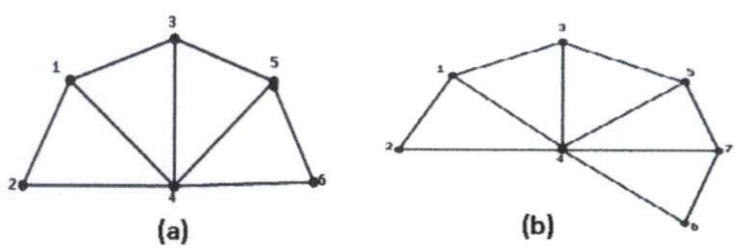
($\Rightarrow$) Misal $\mathbb{F}_n$ mempunyai pelabelan titik (3.1)-sisi antiajaib. Akan dibuktikan $2 \leq n \leq 6$.

Untuk $k = 3, n = 4$ dan $n = 5$, dapat dikonstruksikan pelabelan titik $(3, 1)$-sisi antiajaib f_3 dan f_4. Untuk $k = 4, n = 5$ dan $n = 6$, dapat pula dituliskan pelabelan titik $(3, 1)$-sisi antiajaib f_5 dan f_6, seperti pada Gambar (3.6) dan (3.7) dibawah ini.

Dari persamaan Gambar 3.6 dan 3.7, dapat dilihat $f_3(c) = f_4(c) = 3$, $f_3(x_1) = f_4(x_1) = 1$, $f_3(x_2) = f_4(x_2) = 2$, $f_3(x_3) = f_4(x_3) = 4$, $f_3(x_4) = 5$, $f_4(x_4) = 6$, $f_4(x_5) = 5$, $f_5(c) = f_6(c) = 4$, $f_5(x_1) = f_6(x_1) = 2$, $f_5(x_2) = f_6(x_2) = 1$, $f_5(x_3) = f_6(x_3) = 3$, $f_5(x_4) = f_6(x_4) = 5$, $f_5(x_5) = 6$,$f_6(x_5) = 7$, $f_6(x_6) = 6$. ■



Gambar 3.6. Pelabelan titik $(3,1)$-sisi antiajaib pada $\mathbb{F}_4$ dan $\mathbb{F}_5$ dengan $k = 3$.



Gambar 3.7. Pelabelan titik $(3,1)$-sisi antiajaib pada $\mathbb{F}_5$ dan $\mathbb{F}_6$ dengan $k = 4$.

Figueroa-Centeno et al [7] telah menunjukkan bahwa graf kipas $\mathbb{F}_n$ adalah pelabelan sisi ajaib super (pelabelan (a,0)-sisi antiajaib super) jika dan hanya jika $2 \leq n \leq 6$. Maka berdasarkan Lema 3.2 dan fakta bahwa $\mathbb{F}_n$ adalah graf sisi ajaib untuk $2 \leq n \leq 6$, diperoleh Teorema berikut.

Teorema 3.3. *[2] Graf kipas $\mathbb{F}_n$, $n \geq 2$ memuat pelabelan total (a,d)-sisi antiajaib super jika $2 \leq n \leq 6$ dan $d \in \{0,1,2\}$.*

Bukti.

Dari Lema 3.2 sebelumnya telah diperoleh bahwa graf kipas $\mathbb{F}_n, 2 \leq n \leq 6$ mempunyai pelabelan titik $(3,1)$-sisi anti ajaib. Misalkan $g : V(\mathbb{F}_n) \rightarrow \{1,2,...,n+1\}$ adalah pelabelan titik $(3,1)$-sisi anti ajaib pada graf kipas $\mathbb{F}_n, 2 \leq n \leq 6$ dan $W_g = \{w_g(e_i) = 2+i, 1 \leq i \leq 2n-1\}$ adalah himpunan bobot sisi dari sisi $e_i \in E(\mathbb{F}_n)$.

Definisikan pelabelan g_j dengan $g_j : E(\mathbb{F}_n) \rightarrow \{n+2, n+3, ..., 3n\}$ menjadi pelabelan sisi dari graf kipas $\mathbb{F}_n$ untuk $j \in \{1,2,3\}$ dan $2 \leq n \leq 6$. Dalam hal ini

$$g_1(e_i) = 3n+1-i, \text{ jika } 1 \leq i \leq 2n-1$$

$$g_2(e_i) = \begin{cases} 2n+2-\frac{i+1}{2}, & \text{jika } i \text{ adalah ganjil } 1 \leq i \leq 2n-1; \\ 3n+1-\frac{i}{2}, & \text{jika } i \text{ adalah genap } 2 \leq i \leq 2n-2. \end{cases}$$

$$g_3(e_i) = n+1+i, \text{jika } 1 \leq i \leq 2n-1$$

Dengan menggabungkan pelabelan titik g dan pelabelan sisi $g_j, j \in \{1,2,3\}$, maka diperoleh pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib super dengan $d = j-1$, dimana $W_j = \{w_g(e_i) + g_j(e_i) : 1 \leq i \leq 2n-1\}, j \in \{1,2,3\}$ adalah himpunan bobot sisi.

Karena $1 \leq i \leq 2n-1$, maka diperoleh $W_g = \{2+i, 1 \leq i \leq 2n-1\}$ dapat ditulis sebagai $W_g = \{3, 4, ..., 2n+1\}$. Akan dihitung $g_1(e_i)$,$g_2(e_i)$, dan $g_3(e_i)$.

$g_1(e_i) = 3n+1-1$, untuk $1 \leq i \leq 2n-1$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} g_1(e_1) &= 3n \\ g_1(e_2) &= 3n-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1(e_3) &= 3n-2 \\ &\vdots \\ g_1(e_{2n-2}) &= n+3 \\ g_1(e_{2n-1}) &= n+2 \end{aligned}$$

Diperoleh himpunan $W_1 = \{n+2, n+3, ..., 3n-1, 3n\}$

$$g_2(e_i) = \begin{cases} 2n+2-\frac{i+1}{2}, & \text{jika } i \text{ adalah ganjil, } 1 \leq i \leq 2n-1 \\ 3n+1-\frac{i}{2}, & \text{jika } i \text{ adalah genap, } 2 \leq i \leq 2n-2. \end{cases}$$

1. jika i adalah ganjil, $1 \leq i \leq 2n-1$.

$$\begin{aligned} g_2(e_1) &= 2n+1 \\ g_2(e_3) &= 2n \\ &\vdots \\ g_2(e_{2n-1}) &= n+2 \end{aligned}$$

2. jika i adalah genap , $2 \leq i \leq 2n-2$.

$$\begin{aligned} g_2(e_2) &= 3n \\ g_2(e_4) &= 3n-1 \\ &\vdots \\ g_2(e_{2n-2}) &= 2n+2 \end{aligned}$$

diperoleh himpunan

$$\begin{aligned} W_2 &= \{n+2,...,2n+1\} \cup \{2n+2,...,3n\} \\ &= \{n+2,...,2n+1,2n+2,...,3n\} \end{aligned}$$

$g_3(e_1) = n+1+i$ jika $1 \leq i \leq 2n-1$.

$$\begin{aligned} g_3(e_1) &= n+2 \\ g_3(e_2) &= n+3 \\ &\vdots \\ g_3(e_{2n-1}) &= 3n \end{aligned}$$

diperoleh himpunan $W_3 = \{n+2, n+3, ..., 3n\}$.

Kemudian disubstitusikan ke $W_j = \{w_g(e_i) + g_j(e_i) : 1 \leq i \leq 2n-1\}$

1. Untuk $g_1(e_i)$

$$\begin{aligned} W_1 &= \{w_g(e_i) + g_1(e_i) : 1 \leq i \leq 2n-1\} \\ &= \{w_g(e_1) + g_1(e_1), w_g(e_2) + g_1(e_2)...w_g(e_{2n-1}) + g_1(e_{2n-1})\} \\ &= \{3+3n, 4+3n-1, 5+3n-2, ..., 2n+1+n+2\} \\ &= \{3n+3, 3n+3, 3n+3, ..., 3n+3\} \end{aligned}$$

Didapatkan $\{3n+3, 3n+3, ..., 3n+3\}$, sehingga diperoleh nilai $a = 3n+3$ dan $d = 0$.

2. Untuk $g_2(e_i)$

$$\begin{aligned} W_2 &= \{w_g(e_i) + g_2(e_i) : 1 \leq i \leq 2n-1\} \\ &= \{w_g(e_1) + g_2(e_1), w_g(e_2) + g_2(e_2), w_g(e_3) + g_2(e_3) ... w_g(e_{2n-2}) + g_2(e_{2n-2}), \\ &\quad w_g(e2n-1) + g_2(e_{2n-1})\} \\ &= \{2n+4, 3n+4, 2n+5, 3n+5, ..., 4n+2, 3n+3\} \\ &= \{2n+4, 2n+5, ..., 3n+3, 3n+4, 3n+5, ..., 4n+2\} \end{aligned}$$

Didapatkan $\{2n+4, 2n+5, ..., 3n+3, 3n+4, 3n+5, ..., 4n+2\}$, sehingga diperoleh $a = 2n+4$ dan $d = 1$.

3. Untuk $g_3(e_i)$

$$\begin{aligned} W_3 &= \{w_g(e_i) + g_3(e_i) : 1 \leq i \leq 2n-1\} \\ &= \{w_g(e_1) + g_3(e_1), w_g(e_2) + g_3(e_2), w_g(e_3) + g_3(e_3) ... w_g(e_{2n-1}) + g_3(e_{2n-1})\} \\ &= \{n+5, n+7, n+9, ..., 5n+1\} \end{aligned}$$

Didapatkan $\{n+5, n+7, n+9 ..., 5n+1\}$, sehingga diperoleh $a = n+5$ dan $d = 2$.

Dari hasil di atas dapat disimpulkan bahwa

1. jika $j = 1$, maka untuk pelabelan total $(a, j-1)$-sisi anti ajaib super diperoleh $d = j-1 = 1-1 = 0$. Sehingga didapatkan pelabelan total $(a, 0)$-sisi anti ajaib super dengan $a = 3n+3$.

2. Jika $j = 2$, maka untuk pelabelan total $(a, j-1)$-sisi anti ajaib super diperoleh $d = j-1 = 2-1 = 1$. Sehingga didapatkan pelabelan total $(a, 1)$-sisi

anti ajaib super dengan $a = 2n + 4$.

3. Jika $j = 3$, maka untuk pelabelan total $(a, j - 1)$-sisi anti ajaib super diperoleh $d = j - 1 = 3 - 1 = 2$. Sehingga didapatkan pelabelan total $(a, 2)$-sisi anti ajaib super $a = n + 5$.

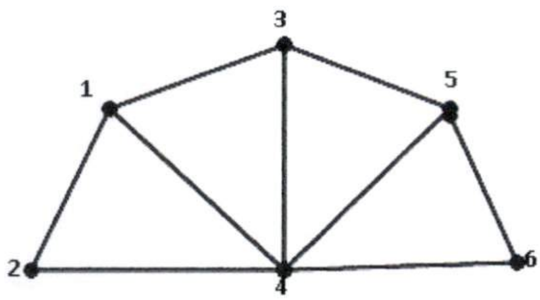
Diperoleh bahwa graf kipas $\mathbb{F}_n$ mempunyai pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib super jika $2 \leq n \leq 6$ dan $d \in \{0, 1, 2\}$. ■

Berikut adalah ilustrasi dari Teorema 3.3, yaitu:

Ilustrasi 3.1

Akan ditunjukkan bahwa graf kipas $\mathbb{F}_5$ mempunyai pelabelan total $(a, 1)$-sisi anti ajaib super dengan langkah-langkah berikut.

1. Menurut Lema 3.2, terdapat pemetaan $g : V(\mathbb{F}_5) \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ yang merupakan pelabelan titik $(3, 1)$-sisi antiajaib.



Gambar 3.8. Pelabelan titik $(3, 1)$-sisi antiajaib pada $\mathbb{F}_5$.

2. Cari himpunan bobot sisi pada pelabelan titik $(3, 1)$-sisi anti ajaib.

   Menurut Teorema 3.3 himpunan bobot sisi adalah $W_g(e_i) = \{2 + i, 1 \leq i \leq$

$2n-1\}$. Karena $n=5$, maka $1 \leq i \leq 9$.

$$\begin{aligned} w_g(e_1) &= 3, w_g(e_2)=4, w_g(e_3)=5, w_g(e_4)=6, w_g(e_5)=7, \\ w_g(e_6) &= 8w_g(e_7)=9, w_g(e_8)=10, w_g(e_9)=11 \end{aligned}$$

3. Karena $d=1$, maka menurut Teorema 3.3, maka label sisi didefinisikan sebagai berikut :

$$g_2(e_i)=\begin{cases} 2n+2-\frac{i+1}{2}, & \text{untuk } i \text{ ganjil, } 1 \leq i \leq 9 \\ 3n+1-\frac{i}{2}, & \text{untuk } i \text{ genap, } 2 \leq i \leq 8. \end{cases}$$

4. Labeli sisi berdasarkan definisi $g_2(e_i)$. Sehingga diperoleh:

   (a) Untuk i ganjil, $1 \leq i \leq 9$

$$\begin{aligned} g_2(e_1) &= 2.5+2-\frac{1+1}{2}=11 \\ g_2(e_3) &= 2.3+2-\frac{3+1}{2}=10 \\ g_2(e_5) &= 2.5+2-\frac{5+1}{2}=9 \\ g_2(e_7) &= 2.7+2-\frac{7+1}{2}=8 \\ g_2(e_9) &= 2.9+2-\frac{9+1}{2}=7 \end{aligned}$$

   (b) Untuk i genap, $2 \leq i \leq 8$

$$\begin{aligned} g_2(e_2) &= 3.2+1-\frac{2}{2}=15 \\ g_2(e_4) &= 3.4+1-\frac{4}{2}=14 \end{aligned}$$

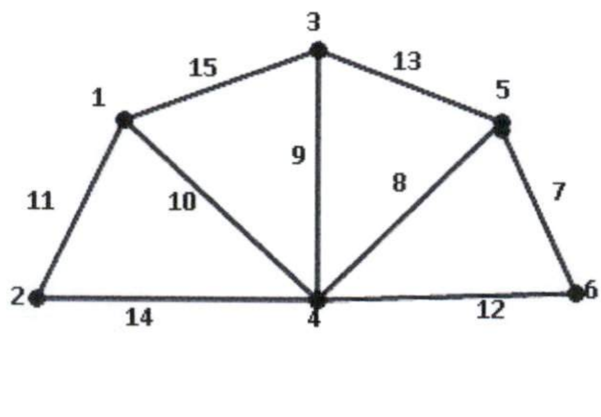
$$\begin{aligned} g_2(e_6) &= 3.6+1-\frac{6}{2}=13 \\ g_2(e_8) &= 3.8+1-\frac{8}{2}=12 \end{aligned}$$

Sehingga $g_2(e_i) = \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

5. Himpunan bobot sisi pada pelabelan (a, d)-sisi anti ajaib super adalah $W_j = \{w_g(e_i) + g_j(e_i) : 1 \leq i \leq 2n - 1\}$ dimana $d = j - 1, d = 2 - 1 = 1$. Karena $d = 1$, maka diperoleh pelabelan total $(a, 1)$-sisi anti ajaib super.

$$\begin{aligned} W_2 &= \{w_g(e_1) + g_2(e_1), w_g(e_2) + g_2(e_2), w_g(e_3) + g_2(e_3), w_g(e_4) + g_2(e_4), \\ &\quad w_g(e_5) + g_2(e_5), w_g(e_6) + g_2(e_6), w_g(e_7) + g_2(e_7), w_g(e_8) + g_2(e_8), \\ &\quad w_g(e_9) + g_2(e_9)\} \\ &= \{3 + 11, 4 + 15.5 + 10, 6 + 14, 7 + 9, 8 + 13, 9 + 8, 10 + 12, 11 + 7\} \\ &= \{14, 19, 15, 20, 16, 21, 17, 22, 18\} \\ &= \{14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22\} \end{aligned}$$

Dapat dilihat pada gambar dibawah ini pelabelan total (a,d)-sisi antiajaib super pada graf $\mathbb{F}_5$



Gambar 3.9. Pelabelan total (14,1)-sisi antiajaib super pada $\mathbb{F}_5$.

Jadi himpunan bobot sisi adalah $\{14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22\}$. Dapat dilihat bahwa $a = 14$ dan $d = 1$.

BAB IV

KESIMPULAN

4.1 Kesimpulan

Misal $G = (V, E)$ dengan $|V(G)| = p$ dan $|E(G)| = q$. Suatu pelabelan $g : V \cup E \rightarrow \{1, 2, ..., p + q\}$ dikatakan total (a, d)-sisi antiajaib jika himpunan bobot sisi $W = \{w(xy)|w(xy) = g(x) + g(y) + g(xy), \forall xy \in E(G)\}$ dapat ditulis sebagai $W = \{a, a + d, a + 2d, ..., a + (e - 1)d\}$. Suatu pelabelan total dikatakan super jika

$$g(V) = \{1, 2, ..., p\}$$

$$g(E) = \{v + 1, ..., p + q\}$$

Graf Kipas $\mathbb{F}_n$ adalah graf yang diperoleh dari penghapusan satu sisi di siklus yang ada pada graf Roda. Banyaknya titik pada $\mathbb{F}_n$ adalah $n + 1$ dan banyaknya sisi $2n - 1$.

Pada tulisan ini telah ditunjukkan bahwa graf kipas $\mathbb{F}_n$ mempunyai pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super jika $2 \leq n \leq 6$ dan $d \in \{0, 1, 2\}$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Baca, M. dan Miler, M.2008. *Super Edge Antimagic Graph.* Brown Walker Press, Boca Raton-Florida.

[2] Baca. M. Y.Lin, M.Miller, M.Z. Yousief. Edge-antimagic graphs. *Discrete Mathematics.* 307 (2007). 1232-1224.

[3] Chartrand Gary. dan Ping Zhang., Introduction to Graph Theory. McGraw. Hill International Edition.

[4] Dafik. *Structural Properties and Labeling of Graph. Ph.D.* University of Ballarat. Australia, (2007) unpublished.

[5] Markaban. *Fungsi, Persamaan, dan Pertidaksamaan.* Widyaiswara PPPG Matematika Yogyakarta. 2008.

[6] Miller, Mirka. 2000. *Open Problem in Graph Theory:Labeling and Extremal Grpah.*Prosiding Konferensi Nasional Himpunan Matematika Indonesia X di Institut Teknologi Bandung, 17-20 Juli.

[7] R.M, Figueroa-Centeno. R. Inchishima, F.A. Muntaner-Batle, The Place of Super Edge-Magic Labeling among Other Classes of Labelings, *Discete Math.* 231 (2001) 153-168.

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Novalia, dilahirkan di Padang pada tanggal 25 Maret 1989 dari pasangan Moris dan Afriwati. Penulis menamatkan pendidikan Sekolah Dasar di SD Negeri 08 Surau Gadang Nanggalo pada tahun 2001, MTsN Model Padang pada tahun 2004, dan SMA Adabiah Padang pada tahun 2007. Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa jurusan Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur Mandiri.

Selama menjadi mahasiswa di jurusan Matematika FMIPA Unand, penulis pernah mengikuti magang di UKM Genta Andalas Padang dan juga pernah tergabung dalam Bakti Sosial BEM KM UNAND pasca gempa tahun 2009. Penulis juga pernah mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Jorong Kayubajaja dan Padang Laweh Kecamatan Luak Kabupaten 50 Kota, serta sempat menjadi tenaga pengajar ekstrakulikuler dalam persiapan olimpiade tingkat SD di Kecamatan Luak Kabupaten 50 Kota pada tahun 2010. Kuliah Kerja Nyata ini merupakan salah satu mata kuliah wajib di fakultas.