



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar Unand.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Unand.

# **PENERAPAN METODE GRAF MULTI-TRANSFORMASI PADA PENYELESAIAN SIRKUIT ELEKTRONIK**

**SKRIPSI**



**FITRI ANDRIYANI  
080432023**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS ANDALAS  
PADANG  
2012**

## TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

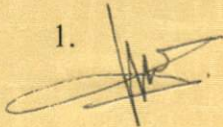
Dengan ini menyatakan bahwa :

Nama : Fitri Andriyani  
No. Buku Pokok : 0810432023  
Jurusan : Matematika  
Bidang : Terapan  
Judul Skripsi : **Penerapan Metode Graf Multi-Transformasi  
pada Penyelesaian Sirkuit Elektronik.**

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal 31 Januari 2012 berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing / Penguji

1.



Narwen, M.Si

NIP. 19670410 199702 1 001

2.

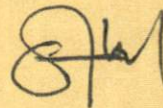


Budi Rudianto, M.Si

NIP. 132 169 920

Penguji

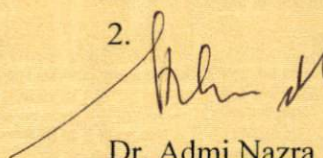
1.



Dr. Syafrizal Sy

NIP.19670807 199309 1 001

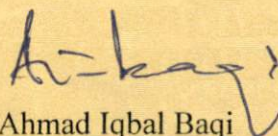
2.



Dr. Admi Nazra

NIP. 19730330 199903 1 002

3.

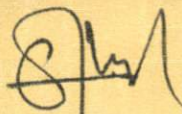


Dr. Ahmad Iqbal Baqi

NIP. 19671012 199402 1 001

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand



Dr. Syafrizal Sy

NIP.19670807 199309 1 001

## KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur tiada henti-hentinya penulis panjatkan kehadirat Allah S.W.T. atas segala kelimpahan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "*Penerapan Metode Graf Multi-Transformasi pada Penyelesaian Sirkuit Elektronik*" ini. Salawat serta beriring salam bagi kekasih Allah, Muhammad Rasulullah SAW yang telah menjadi tauladan dan mengantarkan umat manusia dari abad kegelapan menuju abad terang dan berilmu pengetahuan.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, dorongan, kerjasama maupun bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Narwen, M.Si sebagai dosen Pembimbing I yang telah sabar dan bersedia meluangkan waktu dan pikiran sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini, dan juga sebagai dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan pengarahan, nasehat, ilmu, motivasi, dan merancang penyelesaian studi selama penulis menjalani studi di Jurusan Matematika FMIPA UNAND.
2. Bapak Budi Rudianto, M.Si sebagai dosen Pembimbing II yang telah sabar dan bersedia meluangkan pikiran dan waktu sehingga akhirnya penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini.

3. Bapak Dr. Syafrizal Sy, Bapak Dr. Ahmad Iqbal Baqi, dan Bapak Dr. Admi Nazra yang telah bersedia membaca, menelaah, dan menguji naskah skripsi ini.
4. Semua Dosen di Fakultas MIPA UNAND khususnya di Jurusan Matematika yang telah membagi ilmu kepada penulis selama studi.
5. Teman-teman di Jurusan Matematika, terutama hahadotcom, dds, dan teman-teman olaplace08 yang telah memberikan dorongan dan semangat untuk tetap maju, dan semua pihak yang turut membantu hingga selesainya skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan namanya satu persatu, terima kasih.

Secara khusus penulis mengucapkan terimakasih kepada yang mulia Ayahanda Firdaus dan yang tercinta Ibunda Marni yang telah memberikan do'a motivasi, semangat dan dorongan yang luarbiasa dan tiada henti.

Penulis sangat menyadari bahwa dalam skripsi ini masih banyak sekali kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk penyempurnaan skripsi ini. Kritik dan saran tersebut dapat disampaikan melalui e-mail di **andriyanifitri90@gmail.com**.

Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan sesuatu yang bermanfaat bagi pihak yang membacanya.

Padang, Januari 2012

Penulis

**Fitri Andriyani**

## ABSTRAK

Sirkuit elektronik (*electrical circuit*) merupakan kumpulan dari unsur elektronik yang saling berhubungan, seperti resistor, kapasitor, induktor, dioda, transistor, tabung elektron, saklar, aki, trafo, *delay line*, *power source* dan lain sebagainya. Skripsi ini membahas mengenai penerapan metode graf multi-transformasi pada penyelesaian sirkuit elektronik. Dalam tulisan ini masalah aliran listrik dari sirkuit elektronik diselesaikan dengan metode graf multi-transformasi dan di evaluasi dengan *Mason's gain formula*. Untuk melengkapi pemahaman mengenai graf transformasi dan rumus Mason, diberikan beberapa contoh sebagai ilustrasi.

**Kata kunci :** *Mason's gain formula, metode graf transformasi, sirkuit elektronik, Coates gain formula, MC-graph.*

# DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	ii
ABSTRAK	iv
DAFTAR ISI	v
DAFTAR GAMBAR	vii
DAFTAR TABEL	viii
<b>PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang Masalah . . . . .	1
1.2 Perumusan Masalah . . . . .	2
1.3 Pembatasan Masalah . . . . .	2
1.4 Tujuan Penelitian . . . . .	3
1.5 Sistematika Penulisan . . . . .	3
<b>LANDASAN TEORI</b>	<b>4</b>
2.1 Teori Graf . . . . .	4
2.2 Matriks Keterkaitan dan Matriks Ketetanggaan . . . . .	6
2.3 Graf Coates ( <i>Coates flow graph</i> ) . . . . .	9
2.4 Sirkuit Elektronik . . . . .	13
2.5 <i>Signal Flow Graph</i> . . . . .	14

<b>PENERAPAN METODE GRAF MULTI-TRANSFORMASI PADA</b>	
<b>PENYELESAIAN SIRKUIT ELEKTRONIK</b>	<b>16</b>
3.1 Transformasi Graf . . . . .	16
3.2 <i>Coates' Gain Formula</i> dan <i>Mason's Gain Formula</i> . . . . .	18
3.3 Graf Multi-Transformasi pada Sirkuit Elektronik . . . . .	32
<b>PENUTUP</b>	<b>35</b>
4.1 Kesimpulan . . . . .	35
4.2 Saran . . . . .	35
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	<b>36</b>

## DAFTAR GAMBAR

2.1.1	<i>walk</i> dan <i>path</i> pada graf $G$ . . . . .	5
2.2.2	Graf berarah . . . . .	8
2.2.3	Tiga buah <i>1-factor</i> dari graf $G$ . . . . .	9
2.3.4	<i>Coates graph</i> $G_C(A')$ . . . . .	10
2.3.5	<i>Coates graph</i> $G_C(A)$ . . . . .	10
2.3.6	<i>1-factorial connection</i> $H_{4,3}$ pada graf $G_C(A')$ . . . . .	12
2.4.7	Komponen elektrik dan representasinya dalam graf . . . . .	13
2.4.8	Simbol <i>operational amplifier</i> ( <i>op-amp</i> ) . . . . .	15
2.5.9	Sirkuit elektronik dan representasinya dalam <i>signal flow graf</i> .	15
3.1.1	Aturan transformasi pada <i>signal flow graph</i> . . . . .	17
3.1.2	Transformasi graf dari <i>op-amp</i> . . . . .	18
3.2.3	<i>Mason graph</i> $G_m(A)$ . . . . .	29
3.2.4	<i>Mason graph</i> $G_m(A')$ . . . . .	30
3.3.5	Diagram sirkuit elektronik . . . . .	32
3.3.6	<i>MC-graph</i> . . . . .	32
3.3.7	Proses transformasi dan graf hasil transformasi . . . . .	33



## DAFTAR TABEL

3.2.1	<i>1-factor</i> dari graf $G_C(A)$ . . . . .	24
3.2.2	<i>1-factorial connection</i> dari graf $G_C(A')$ . . . . .	25
3.2.3	Sirkuit berarah dan bobotnya pada <i>Mason Graph</i> $G_m(A)$ . . .	30
3.2.4	<i>Forward path</i> dari $x_4$ ke $x_2$ pada graf $G_m(A')$ . . . . .	31

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf muncul pertama kali pada tahun 1736 ketika Euler menyelesaikan kasus jembatan Konigsberg. Meskipun pada awalnya graf diciptakan untuk diterapkan dalam penyelesaian masalah rute terpendek, namun graf telah mengalami perkembangan yang sangat luas di dalam teori graf itu sendiri. Permasalahan yang melibatkan teori graf kemudian banyak muncul dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan seperti dalam bidang rekayasa (*engineering*), bidang komputasi, fisika, kimia, ekonomi, dan bahkan pada bidang sosial.

Salah satu aplikasi teori graf adalah dibidang rekayasa, diantaranya dibidang listrik. Aplikasi makro pada pengembangan jaringan listrik, sedangkan dibidang mikro pada komponen-komponen elektronika. Pada tahun 1847, G. R. Kirchhoff (1824-1887) mengembangkan teori aplikasi *tree* pada jaringan listrik (*electrical network*) dan dikembangkan oleh Maxwell, pada tahun 1892. Kemudian dengan memperluas metode Kirchhoff dan Maxwell, W.S. Percival berhasil mengembangkan analisis graf teoritik pada *electrical network*.

Pengasosiasian graf dengan sistem persamaan linier pertama kali diperkenalkan oleh Mason pada tahun 1953, graf ini kemudian dikenal dengan nama *signal flow graph*. Alternatif lain dari pengasosiasian ini kemudian dijelaskan

oleh Coates pada tahun 1959.

*Electrical circuit* dapat direpresentasikan dengan menggunakan teori graf atau lebih tepatnya dengan menggunakan graf aliran sinyal (*signal flow graph*). *Signal flow graph* terdiri dari beberapa *loop* dan satu atau lebih lintasan (*path*) yang menghubungkan masukan dan keluaran.

Pada aplikasi di bidang mikro, *electrical network* atau lebih dikenal sebagai *electrical circuit*, sebuah titik *vertex* akan mewakili *node* dan sebuah sisi *edge* akan mewakili *branch*. *Electrical circuit* merupakan kumpulan dari unsur elektronik yang saling berhubungan, seperti resistor, kapasitor, induktor, dioda, transistor, tabung elektron, saklar, aki, trafo, *delay line*, *power source* dan lain sebagainya.

Penyederhanaan *electrical circuit* dengan menggunakan perubahan bentuk *signal flow graf* dikenal sebagai metode graf transformasi, penyederhanaan ini menjadi lebih menarik ketika dapat digunakan dalam rancangan diagram sirkuit yang nilai alirnya dapat ditentukan dengan penerapan teori graf.

## 1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, permasalahan yang dibahas dalam tugas akhir ini adalah bagaimana peranan dan proses penerapan metode graf transformasi untuk menyelesaikan aliran sirkuit elektronik.

## 1.3 Pembatasan Masalah

Dalam pembahasan tugas akhir ini permasalahannya terbatas pada peranan dan proses penerapan metode graf multi-transformasi untuk menyelesaikan

aliran sirkuit elektronik, yang dievaluasi dengan menggunakan *Mason's gain formula*.

#### 1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penulisan ini adalah untuk mengetahui dan memahami penggunaan, peranan dan penerapan metode graf multi-transformasi untuk menyelesaikan sirkuit elektronik, serta memahami penerapan *Mason's gain formula*.

#### 1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan ini dibagi menjadi empat bab. Bab I berisi latar belakang masalah, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian dan sistematika penulisan. Pada Bab II dijelaskan mengenai definisi dan terminologi dalam teori graf, matriks keterkaitan dan matriks ketetanggaan pada graf berarah dan berbobot, serta konsep tentang sirkuit elektronik dan *signal flow graph*. Bab III memuat pembahasan mengenai penerapan metode graf multi-transformasi pada penyelesaian sirkuit elektronik. Kemudian diakhiri dengan Bab IV yang berisi kesimpulan dan saran bagi peneliti berikutnya.

## BAB II

# LANDASAN TEORI

Pada bab ini dikemukakan beberapa konsep dan dasar-dasar teori yang berkaitan dengan permasalahan yang terkandung dalam Bab I. Definisi dan terminologi dalam teori graf disajikan pada Subbab 2.1. Matriks keterkaitan dan matriks ketetanggaan pada graf berarah dan berbobot diuraikan pada Subbab 2.2. Pada Subbab 2.3 diuraikan mengenai graf Coates. Kemudian, konsep tentang teori dasar mengenai sirkuit elektronik dan terminologinya disajikan pada Subbab 2.4. dan pada Subbab 2.5 dikemukakan teori mengenai *signal flow graph*.

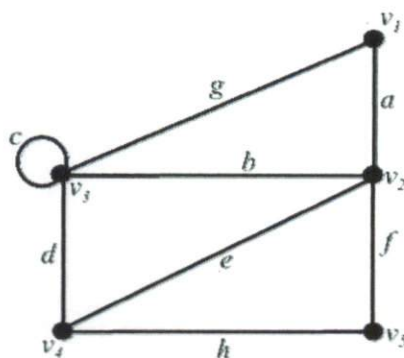
### 2.1 Teori Graf

Suatu graf  $G$  didefinisikan sebagai pasangan terurut  $(V(G), E(G))$ , dengan  $V(G)$  adalah himpunan tak kosong titik-titik (simpul atau *vertices* atau *node*) dan  $E(G)$  adalah himpunan tak kosong sisi-sisi (*edges*) yang menghubungkan titik-titik pada  $G$ . Suatu sisi pada graf  $G$  yang titik ujungnya sama atau berimpit disebut *self loop* atau *loop*. Graf  $H$  dikatakan subgraf dari  $G$  (ditulis  $H \subseteq G$ ) jika  $V(H) \subseteq V(G)$  dan  $E(H) \subseteq E(G)$ . Jika  $H$  merupakan *subgraph* dari  $G$ , maka  $G$  disebut *supergraph* dari  $H$ . *Spanning subgraph*  $H$  dari graf  $G$  adalah suatu subgraf dari graf  $G$  dengan  $V(H) = V(G)$ .

Derajat (*degree*) dari suatu titik  $v$  di  $G$  adalah banyak sisi yang terkait

dengan  $v$  di  $G$  dan dinotasikan dengan  $d_G(v)$ , setiap *loop* dihitung sebagai dua sisi. Suatu graf  $G$  dikatakan  $k$ -*regular* jika  $d_G(v) = k$  untuk setiap  $v \in V(G)$ . Derajat keluar *Out-degree* dari suatu titik  $v$  di  $G$  adalah banyak sisi dengan *tail*  $v$  atau banyak sisi yang menempel pada titik  $v$  dengan arah keluar (*edge incident out*) dinotasikan dengan  $d^+(v)$ . Derajat masuk (*in-degree*) adalah banyak sisi dengan *head*  $v$  atau banyak sisi yang menempel pada titik  $v$  dengan arah masuk (*edge incident into*) dan dinotasikan dengan  $d^-(v)$ .

Suatu jalan (*walk*) pada graf  $G$  didefinisikan sebagai barisan bergantian terbatas titi-titik dan sisi-sisi yang diawali dan diakhiri dengan titik, sedemikian sehingga setiap sisi berkaitan dengan titik sebelum dan sesudahnya. Pada *walk* tidak terdapat sisi yang muncul dua kali baik yang melalui maupun mengakhiri *walk*, namun suatu titik boleh muncul lebih dari satu kali. Sebagai contoh,  $v_1 a v_2 b v_3 c v_3 d v_4 e v_2 f v_5$  merupakan *walk* yang ditunjukkan oleh garis tebal pada Gambar 2.1.1.



Gambar 2.1.1. *walk* dan *path* pada graf  $G$

Titik yang merupakan awal dan akhir dari suatu *walk* disebut titik terminal (*terminal vertices*). Titik  $v_1$  dan  $v_5$  merupakan titik terminal dari *walk* yang

terdapat pada Gambar 2.1.1. Suatu *walk* boleh jadi diawali dan berakhir pada titik yang sama, dan disebut *walk* tertutup (*closed walk*). Suatu *Walk* dikatakan tidak tertutup (*open walk*) apabila memiliki titik terminal yang berbeda. *Open walk* yang tidak memuat titik yang muncul lebih dari satu kali disebut lintasan (*path* atau *simple path* atau *elementary path*). panjang dari suatu *path* (*length of path*) menyatakan banyaknya sisi pada suatu *path*, sehingga suatu sisi yang bukan merupakan *self-loop* disebut *path* yang memiliki panjang 1 sisi.

Pada teori graf, suatu sirkuit (*circuit*) adalah *closed walk* yang tidak memuat titik yang muncul lebih dari satu kali, kecuali titik awal (*initial vertex*) dan titik akhir (*final vertex*), atau sirkuit dapat dikatakan sebagai suatu *walk* tertutup tak beririsan. Graf berarah (*directed graph* atau *digraph*)  $G$  adalah suatu pasangan terurut  $(V(G), A(G))$ , dengan  $V(G)$  adalah himpunan tak kosong titik-titik pada graf berarah  $G$  dan  $E(G)$  adalah himpunan tak kosong sisi-sisi berarah pada  $G$ .

## 2.2 Matriks Keterkaitan dan Matriks Ketetangaan

Suatu graf  $G$  dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks. Salah satu bentuk representasi matriks dari graf adalah matriks keterkaitan (*incidence matrix*).

**Definisi 2.2.1.** Misalkan graf  $G$  mempunyai  $n$  buah titik  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  dan  $m$  buah sisi  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_m$ , untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  dan  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ , maka matriks keterkaitan dari graf  $G$  ditulis  $M(G) = [m_{ij}]$ , dengan

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } e_j \text{ terkait dengan } v_i \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Untuk suatu graf berarah  $G$ , matriks keterkaitannya didefinisikan sebagai berikut.

**Definisi 2.2.2.** Misalkan graf berarah  $G$  mempunyai  $n$  buah titik  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  dan  $m$  buah sisi  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_m$ , dan misalkan graf  $G$  tidak memuat self loop, maka untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  dan  $j = 1, 2, 3, \dots, m$  matriks keterkaitan dari graf berarah  $G$  ditulis  $M(G) = [m_{ij}]$ , dengan

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } e_j \text{ incidence out dengan } v_i; \\ -1, & \text{jika } e_j \text{ incidence into dengan } v_i; \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

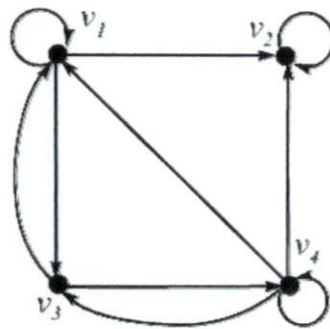
Bentuk matriks lainnya yang digunakan untuk merepresentasikan graf ataupun graf berarah adalah matriks ketetanggaan (*adjacency matrix*), adapun matriks ketetanggaan dari graf  $G$  dapat didefinisikan sebagai berikut.

**Definisi 2.2.3.** Misalkan graf  $G = (V(G), E(G))$  merupakan graf berarah, misalkan  $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ . Matriks ketetanggaan dari graf  $G$  adalah suatu matriks berukuran  $n \times n$  yang didefinisikan sebagai  $A(G) = [a_{ij}]$ , untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  dan  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ , dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Matriks ketetanggaan pada graf berarah dari Gambar 2.2.1 adalah





Gambar 2.2.2. Graf berarah

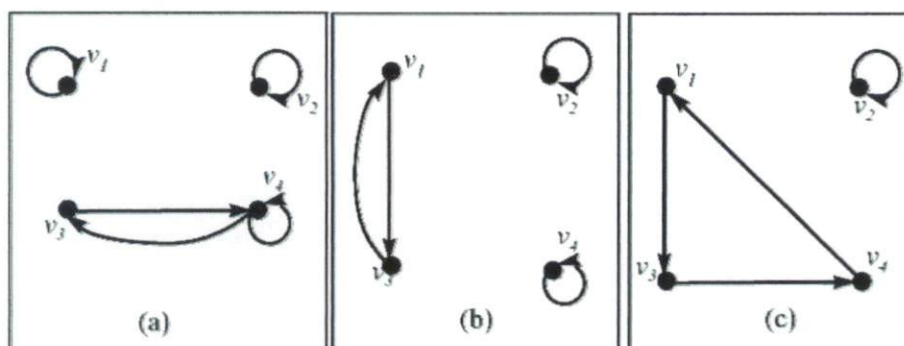
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Definisi 2.2.4.** Suatu 1-factor dari graf berarah  $G$  adalah spanning subgraph dari graf  $G$  yang setiap titiknya mempunyai in-degree dan out-degree yang bernilai 1.

Suatu *self-loop* pada suatu titik akan mempunyai *in-degree* dan *out-degree* yang bernilai 1. Suatu 1-factor pada graf  $G$  dapat memuat beberapa *self-loop*. Sebagai contoh, perhatikan Gambar 2.2.3 berikut yang menunjukkan tiga bentuk 1-factors yang terdapat pada graf  $G$  pada Gambar 2.2.2.

Misalkan graf berarah dan berbobot  $G$  adalah graf berarah yang setiap sisinya yaitu  $(v_i, v_j)$  mempunyai bobot  $w_{ij}$ , sehingga matriks ketetanggaan dari graf  $G$  didefinisikan sebagai  $A = [a_{ij}]$ , dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & \text{jika } w_{ij} = (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

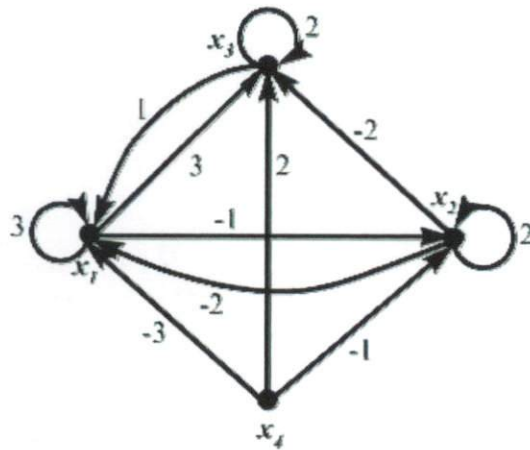
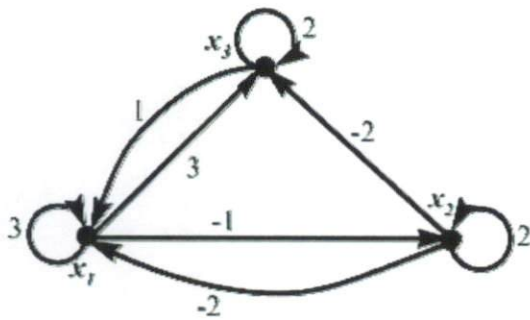


Gambar 2.2.3. Tiga buah 1-factor dari graf  $G$

### 2.3 Graf Coates (*Coates flow graph*)

Diketahui suatu persamaan linier  $Ax = bx_{n+1}$ . Vektor  $x$  merupakan vektor kolom yang memuat variabel-variabel tak diketahui yaitu  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , vektor  $b$  adalah vektor kolom yang elemen-elemennya adalah  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ , dan  $x_{n+1}$  merupakan variabel input.

Graf Coates (*Coates flow graph*)  $G_C(A')$  yang diasosiasikan dengan matriks  $A'$  merupakan graf berarah dan berbobot yang matriks ketetanggaannya adalah transpos dari matriks  $A'$ , dengan  $A'$  diperoleh dengan menambahkan  $-b$  pada bagian kanan  $A$  dan menambahkan satu baris nol pada bagian bawah matriks hasil. Dalam hal ini  $G_C(A')$  mempunyai  $n + 1$  titik, yaitu titik-titik  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$ . Jika  $a_{ji} \neq 0$ , maka  $G_C(A')$  mempunyai sisi berarah dari  $x_i$  ke  $x_j$  yang berbobot  $a_{ji}$ . Dengan demikian, graf Coates  $G_C(A)$  merupakan graf berarah dan berbobot yang diasosiasikan dengan matriks  $A$  dan dapat diperoleh dari graf  $G_C(A')$  dengan menghapus titik  $x_{n+1}$ .

Gambar 2.3.4. Coates graph  $G_C(A')$ Gambar 2.3.5. Coates graph  $G_C(A)$

Matriks  $A$  dan matriks transposnya, yaitu  $A'$  yang merupakan representasi dari graf  $G_C(A)$  memiliki determinan yang sama dan  $A$  adalah transpos dari matriks ketetanggaan graf  $G_C(A')$ .

**Teorema 2.3.5.** *Jika  $A$  adalah matriks nonsingular, maka*

$$\det(A) = (-1)^n \sum_H (-1)^{L_H} w(H) \quad (2.3.1)$$

dengan  $H$  adalah 1-factor dari  $G_C(A)$ ,  $w(H)$  adalah bobot dari  $H$  dan  $L_H$  adalah banyak sirkuit berarah pada  $H$ .

**Bukti.**

Misalkan  $A$  adalah matriks ketetanggaan dari  $G_C(A)$ , dan misalkan  $A$  adalah matriks nonsingular, sehingga  $\det(A) \neq 0$ ,  $A$  dapat dibalik. Sehingga berdasarkan definisi fungsi determinan dari suatu matriks buursangkar  $A$  yang menyatakan bahwa,  $\det(A)$  didefinisikan sebagai jumlah dari semua hasilkali elementer bertanda dari  $A$ , diperoleh

$$\det(A) = \sum \pm a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n}$$

Bentuk  $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n}$  sama dengan himpunan sisi

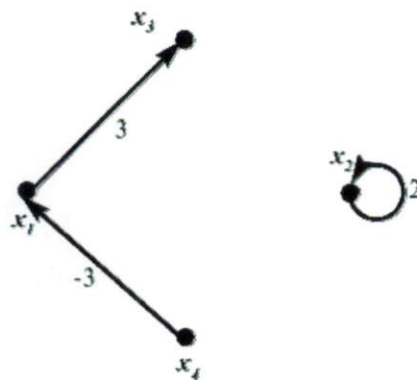
$$(v_1, v_{j_1}), (v_2, v_{j_2}), (v_3, v_{j_3}), \dots, (v_n, v_{j_n})$$

Pada himpunan ini setiap titik muncul tepat dua kali, yaitu sebagai titik awal dan titik akhir dari suatu pasangan sisi. Oleh karena itu, setiap titik pada 1-factor dari graf  $G_C(A)$  mempunyai *in-degree* dan *out-degree* yang masing-masing bernilai 1, sehingga 1-factor dari graf  $G_C(A)$  sama dengan bentuk taknol dari

$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n}$  yang mempunyai  $L$  sirkuit berarah. Misalkan  $w(H)$  adalah hasil perkalian dari bobot-bobot semua sisi pada  $H$  ( $1$ -factor dari graf  $G_C(A)$ ), sehingga

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_H (-1)^{n+L_H} w(H) \\ &= \sum_H (-1)^n (-1)^{L_H} w(H) \\ &= (-1)^n \sum_H (-1)^{L_H} w(H). \blacksquare \end{aligned}$$

Suatu  $1$ -factorial connection  $H_{ij}$  dari titik  $x_i$  ke  $x_j$  pada graf  $G_C(A)$  didefinisikan sebagai suatu *spanning subgraph* dari  $G$  yang memuat lintasan berarah  $P$  dari titik  $x_i$  ke  $x_j$ . Gambar 2.3.6 berikut ini menunjukkan  $1$ -factorial connection yang terdapat pada graf  $G_C(A')$  yang memuat lintasan berarah dari titik  $x_4$  ke  $x_3$ .



Gambar 2.3.6.  $1$ -factorial connection  $H_{4,3}$  pada graf  $G_C(A')$

## 2.4 Sirkuit Elektronik

Sirkuit elektronik (*electrical circuit* atau *electrical network*) merupakan kumpulan dari unsur elektronik yang saling berhubungan, seperti resistor, kapasitor, induktor, dioda, transistor, tabung elektron, saklar, aki, trafo, *delay line*, *power source* dan lain sebagainya. Sirkuit elektronik dapat direpresentasikan dengan graf (*signal flow graph*). Suatu komponen elektrik (*electrical element*) pada sirkuit elektronik direpresentasikan dengan suatu sisi dan terminal direpresentasikan dengan titik pada graf.

Suatu sirkuit elektronik pada graf adalah graf berarah  $G$  yang setiap sisinya ditandai dengan dua komponen, yaitu  $v_m(s)$  dan  $i_m(s)$ , dengan  $s$  adalah variabel bebas yang diasosiasikan dengan setiap sisi dari graf  $G$ .  $v_m(s)$  disebut sebagai *branch voltage* yang menyatakan tegangan dan dipandang sebagai *cross variable* karena berada di titik-titik pada kedua ujung sisi.  $i_m(s)$  disebut sebagai *branch current* yang menyatakan arus yang mengalir. Gambar 2.4.7 berikut menunjukkan komponen elektrik dan representasinya sebagai suatu sisi pada graf berarah, dengan tegangan positif selalu berada pada ekor dari anak panah aliran arus.



Gambar 2.4.7. Komponen elektrik dan representasinya dalam graf

Misalkan graf berarah mempunyai titik dan sisi. Nilai dari arus yang men-

galir melalui sisi-sisi tersebut direpresentasikan dengan vektor kolom yang disebut sebagai vektor arus cabang (*branch current vector*), yaitu

$$i(s) = \begin{bmatrix} i_1(s) \\ i_2(s) \\ \vdots \\ i_m(s) \end{bmatrix}$$

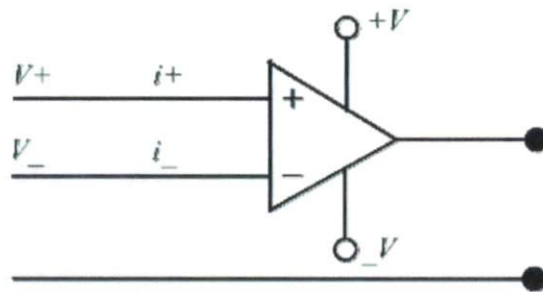
dan nilai tegangan pada sisi-sisi tersebut dipresentasikan dengan vektor kolom yang disebut vektor tegangan cabang (*branch voltage vector*), yaitu

$$v(s) = \begin{bmatrix} v_1(s) \\ v_2(s) \\ \vdots \\ v_m(s) \end{bmatrix}$$

*Operational amplifier (op-amp)* adalah suatu sirkuit rumit yang memuat resistor, kapasitor, dan transistor, yang sering digunakan dalam rangkaian penguat sensor. Dalam analisis suatu sirkuit yang memuat *op-amp*, suatu *op-amp* dipandang sebagai komponen tunggal yang menghubungkan tegangan pada *output terminal* ke tegangan pada *input terminal*.

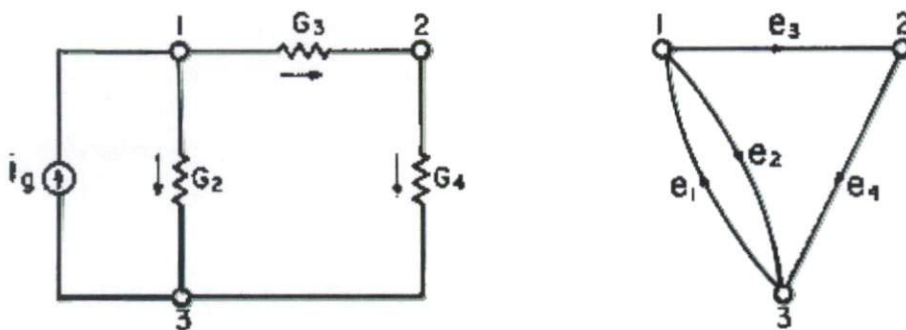
## 2.5 *Signal Flow Graph*

*Signal flow graph* merupakan graf terhubung, berarah dan berbobot yang terdiri dari beberapa *loop* dan satu atau lebih lintasan (*path*) yang menghubungkan masukan dan keluaran. Pada *signal flow graph*, titik-titik yang meny-



Gambar 2.4.8. Simbol *operational amplifier (op-amp)*

jikan variabel atau sinyal disebut juga simpul atau *node*, sedangkan sisi yang merupakan segmen garis yang menghubungkan dua simpul disebut cabang (*branch*). *Loop* merupakan lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama. Lintasan dari simpul masukan ke simpul keluaran dan tidak melalui lebih dari satu simpul disebut lintasan maju (*forward path*). Sirkuit elektronik (*electrical circuit*) dapat direpresentasikan dalam *signal flow graph*. Gambar 2.5.9 berikut menunjukkan representasi sirkuit elektronik dalam *signal flow graph*.



Gambar 2.5.9. Sirkuit elektronik dan representasinya dalam *signal flow graf*



# BAB III

## PENERAPAN METODE GRAF MULTI-TRANSFORMASI PADA PENYELESAIAN SIRKUIT ELEKTRONIK

Sebelum membahas mengenai penerapan metode graf multi-transformasi pada penyelesaian sirkuit elektronik, terlebih dahulu akan dibahas mengenai aturan transformasi graf dan teorema-teorema mengenai *Coates' gain formula* dan *Mason's gain formula* yang digunakan untuk mengevaluasi nilai alir transfer voltase pada sirkuit elektronik.

### 3.1 Transformasi Graf

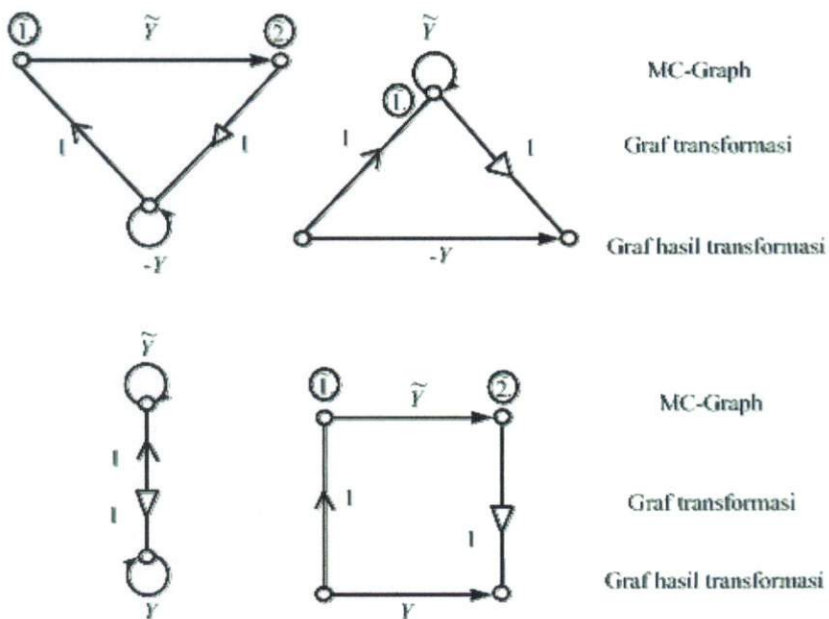
Pada bagian ini transformasi graf digunakan untuk menyederhanakan *signal flow graf* guna mendapatkan representasi dan nilai dari aliran sinyal *electrical circuit*. Aturan dari transformasi graf pada *electrical circuit* yang terdiri dari gabungan komponen elektronik yang saling berhubungan dan memiliki aliran arus dan tegangan, dinyatakan dalam definisi berikut.

**Definisi 3.1.1.** Misalkan  $a^V$  adalah cabang dari transfer tegangan,  $a^I$  adalah cabang dari transfer arus,  $V$  adalah tegangan dan  $I$  adalah arus, maka nilai dari hasil transformasi  $Y$ , dapat ditulis

$$Y = \alpha \cdot a^V \cdot \tilde{Y} \cdot a^I$$

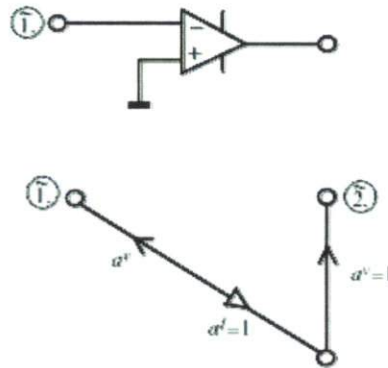
dengan  $\alpha = \pm 1$ . Jika branch ditransformasikan ke branch atau loop ditransformasikan ke loop, maka  $\alpha = 1$ . Jika loop ditransformasikan ke branch atau branch ditransformasikan ke loop, maka  $\alpha = -1$ .

Gambar 3.1.1 berikut menunjukkan penggunaan dari aturan transformasi graf pada *signal flow graph* dari sirkuit sederhana.



Gambar 3.1.1. Aturan transformasi pada *signal flow graph*

Untuk suatu sirkuit yang memuat *operational amplifier (op-amp)*, transformasi graf dari *op-amp* digambarkan pada gambar 3.1.2 berikut.

Gambar 3.1.2. Transformasi graf dari *op-amp*

### 3.2 Coates' Gain Formula dan Mason's Gain Formula

Pada pembahasan ini, *Mason's gain formula* dapat digunakan untuk menghitung nilai transfer voltase dan transfer arus dari *final graph* atau graf hasil dari transformasi *signal flow graph* yang berbentuk *MC-graph* (*Mason Coates graph*). Oleh karena itu, pada subbab ini terlebih dahulu membahas mengenai *coates gain formula* dan *mason's gain formula* serta aplikasinya dalam menghitung nilai alir dari lintasan berarah dari titik  $x_{n+1}$  ke titik  $x_k$ .

**Teorema 3.2.2.** *Jika matriks  $A$  adalah matriks nonsingular, maka solusi dari*

$Ax = bx_{n+1}$  *adalah*

$$\frac{x_k}{x_{n+1}} = \frac{\sum_{H_{n+1,k}} (-1)^{L'_H} w(H_{n+1,k})}{\sum_H (-1)^{L_H} w(H)}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.2.1)$$

dengan  $H_{n+1,k}$  adalah *1-factorial connection* dari graf  $G_C(A')$  dari titik  $x_{n+1}$  ke titik  $x_k$ ,  $H$  adalah *1-factor* dari graf  $G_C(A)$ ,  $L'_H$  adalah banyak sirkuit berarah pada  $H_{n+1,k}$ , dan  $L_H$  adalah banyak sirkuit berarah pada  $H$ .

**Bukti.**

Misalkan matriks  $A$  adalah matriks nonsingular, akan dibuktikan bahwa solusi dari  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}x_{n+1}$  adalah

$$\frac{x_k}{x_{n+1}} = \frac{\sum_{H_{n+1,k}} (-1)^{L'_H} w(H_{n+1,k})}{\sum_H (-1)^{L_H} w(H)}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

dengan menunjukkan bahwa :

1. solusi dari  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}x_{n+1}$  adalah

$$\frac{x_k}{x_{n+1}} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i \Delta_{ik}}{\det(A)} \quad (3.2.2)$$

2.  $\det(A) = (-1)^n \sum_H (-1)^{L_H} w(H)$ .

3.  $\sum_{i=1}^n b_i \Delta_{ik} = (-1)^n \sum_{H_{n+1,k}} (-1)^{L'_H} w(H_{n+1,k})$

### Bukti 1

Perhatikan sistem linier  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}x_{n+1}$ . Vektor  $\mathbf{x}$  merupakan vektor kolom yang memuat variabel-variabel tak diketahui  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , vektor  $\mathbf{b}$  adalah vektor kolom yang elemen-elemennya adalah  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ , dan  $x_{n+1}$  merupakan variabel input, sehingga

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} x_{n+1}$$

Karena  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}x_{n+1}$  merupakan sistem dari  $n$  persamaan linier dengan  $n$  variabel tak diketahui dan karena  $A$  matriks nonsingular sedemikian sehingga  $\det(A) \neq 0$ ,  $A$  dapat dibalik, sehingga berdasarkan aturan Creamer, berlaku

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \cdot x_{n+1}$$

dengan  $A_j$  adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti entri-entri pada kolom ke  $j$  dari  $A$  dengan entri-entri pada

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

sehingga dapat ditulis

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-2} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-n} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

karena perbedaan  $A_j$  dengan  $A$  hanya pada kolom ke  $j$ , maka kofaktor-kofaktor dari entri  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$  pada  $A_j$  adalah sama dengan kofaktor-kofaktor dari entri-entri yang bersesuaian pada kolom ke  $j$  dari  $A$ . Oleh karena itu ekspansi kofaktor dari  $\det(A_j)$  sepanjang kolom ke  $j$  adalah

$$\det(A_j) = b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + b_3 C_{3j} + \cdots + b_n C_{nj}$$

dengan mensubstitusikan hasil ini ke dalam  $x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \cdot x_{n+1}$ , diperoleh

$$x_j = \frac{b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + b_3 C_{3j} + \cdots + b_n C_{nj}}{\det(A)} x_{n+1}$$

untuk suatu  $\Delta_{ik}$  yang merupakan  $(i, k)$  kofaktor dari entri  $a_{ik}$  pada matriks  $A$ , diperoleh

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{b_1 C_{1k} + b_2 C_{2k} + b_3 C_{3k} + \cdots + b_n C_{nk}}{\det(A)} \cdot x_{n+1} \\ &= \frac{b_1 \Delta_{1k} + b_2 \Delta_{2k} + b_3 \Delta_{3k} + \cdots + b_n \Delta_{nk}}{\det(A)} \cdot x_{n+1} \end{aligned}$$

Karena  $x_{n+1}$  adalah suatu variabel input, sehingga dapat ditunjukkan bahwa

$$\frac{x_k}{x_{n+1}} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i \Delta_{ik}}{\det(A)}$$

### Bukti 2

akan ditunjukkan bahwa  $\det(A) = (-1)^n \sum_H (-1)^{L_H} w(H)$

karena  $A$  adalah matriks nonsingular, berdasarkan **Teorema 2.3.4**, berlaku

$$\det(A) = (-1)^n \sum_H (-1)^{L_H} w(H)$$

### Bukti 3

akan ditunjukkan  $\sum_{i=1}^n b_i \Delta_{ik} = (-1)^n \sum_{H_{n+1,k}} (-1)^{L_H} w(H_{n+1,k})$ . Dengan menunjukkan bahwa  $\sum_{i=1}^n b_i \Delta_{ik}$  dapat dinyatakan dalam bentuk *1-factorial connection*  $H_{ij}$  pada graf  $G_C(A')$ .

Misalkan  $A_\alpha$  menunjukkan matriks yang diperoleh dari  $A$  dengan mengganti entri-entri kolom ke  $j$  dengan nol dan entri baris ke  $i$  kolom ke  $j$  dengan 1, sehingga berlaku

$$\Delta_{ij} = \det(A_\alpha)$$

Hal ini berarti bahwa graf  $G_C(A_\alpha)$  diperoleh dari  $G_C(A)$  dengan menghapus atau menghilangkan semua sisi yang menempel pada titik  $x_j$  dengan arah keluar (*edge incident out*) dan menambahkan suatu sisi berarah dari  $x_j$  ke  $x_i$  yang berbobot 1, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\Delta_{ij} &= \det(A_\alpha) \\ &= (-1)^n \sum_{H_\alpha} (-1)^{L_\alpha} w(H_\alpha)\end{aligned}\tag{3.2.3}$$

Perhatikan *1-factor*  $H_\alpha$  pada graf  $G_C(A_\alpha)$ . Misalkan  $C$  adalah sirkuit berarah dari  $H_\alpha$  yang memuat titik  $x_i$ . Karena pada  $G_C(A_\alpha)$ , sisi  $(x_j, x_i)$  merupakan satu-satunya sisi yang menempel pada titik  $x_j$  dengan arah keluar, maka  $x_j$  juga berada pada  $C$ . Sehingga, jika sisi  $(x_j, x_i)$  dihapus dari  $H_\alpha$ , akan diperoleh suatu *1-factorial connection* yaitu  $H_{ij}$ . Kemudian, karena sisi  $(x_j, x_i)$  memiliki bobot sama dengan 1, akibatnya untuk setiap  $H_\alpha$  yang berkoresponden dengan  $H_{ij}$  pada graf  $G_C(A_\alpha)$ , berlaku  $w(H_\alpha) = w(H_{ij})$  dan  $L'_H = L_\alpha - 1$ .

Dengan mensubstitusikan  $w(H_\alpha) = w(H_{ij})$  dan  $L'_H = L_\alpha - 1$  kedalam persamaan (3.2.3), maka diperoleh

$$\Delta_{ij} = (-1)^{n-1} \sum_{H_{ij}} (-1)^{L'_H} w(H_{ij}), \quad i \neq j\tag{3.2.4}$$

Perhatikan bahwa, penambahan sisi  $(x_{n+1}, x_i)$  pada  $H_{ik}$  menghasilkan *1-factorial connection*  $H_{n+1,k}$ , dengan  $w(H_{n+1,k}) = -b_i w(H_{ik})$  dan  $H_{n+1,k}$  akan memiliki banyak sirkuit berarah yang sama dengan  $(H_{ik})$ .

Sebaliknya, setiap  $H_{n+1,k}$  memuat sisi  $(x_{n+1}, x_i)$  yang membentuk *1-factorial connection*  $H_{ik}$  dan memenuhi  $w(H_{n+1,k}) = -b_i w(H_{ik})$ , dan  $H_{n+1,k}$  mempunyai

banyaknya sirkuit berarah yang sama dengan  $H_{ik}$ . Dengan demikian, untuk setiap  $H_{n+1,k}$  dan  $H_{ik}$  yang mempunyai banyak sirkuit berarah yang sama dan memenuhi  $w(H_{n+1,k}) = -b_i w(H_{ik})$ , berlaku

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n b_i \Delta_{ik} &= \sum_{i=1}^n b_i \left[ (-1)^{n-1} \sum_{H_{ij}} (-1)^{L'_H} \frac{w(H_{n+1,k})}{-b_i} \right] \\ &= (-1)^n \sum_{H_{n+1,k}} (-1)^{L'_H} w(H_{n+1,k}) \end{aligned}$$

Jadi, dari (1),(2), dan (3) dapat dibuktikan bahwa solusi dari  $Ax = bx_{n+1}$  adalah

$$\begin{aligned} \frac{x_k}{x_{n+1}} &= \frac{\sum_{i=1}^n b_i \Delta_{ik}}{\det(A)} = \frac{(-1)^n \sum_{H_{n+1,k}} (-1)^{L'_H} w(H_{n+1,k})}{(-1)^n \sum_H (-1)^{L_H} w(H)} \\ &= \frac{\sum_{H_{n+1,k}} (-1)^{L'_H} w(H_{n+1,k})}{\sum_H (-1)^{L_H} w(H)}, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Persamaan  $\frac{x_k}{x_{n+1}} = \frac{\sum_{H_{n+1,k}} (-1)^{L'_H} w(H_{n+1,k})}{\sum_H (-1)^{L_H} w(H)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  disebut sebagai **Coates gain formula**. ■

### Aplikasi Kasus 1.

Berikut ini akan diilustrasikan penerapan metode Coates dalam menyelesaikan sistem persamaan

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} x_4 \quad (3.2.5)$$

untuk

$$\frac{x_2}{x_4}$$



Sistem di atas dapat ditulis sebagai  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}x_{n+1}$ , dengan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \text{dan } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Graf Coates  $G_C(A)$  dari matriks ketetanggaan tersebut adalah graf Coates yang ditunjukkan pada Gambar 2.3.5.

Karena  $A$  adalah matriks nonsingular, maka sesuai dengan **Teorema 3.2.2** berlaku

$$\frac{x_2}{x_4} = \frac{\sum_{H_{4,2}} (-1)^{L_H} w(H_{4,2})}{\sum_H (-1)^{L_H} w(H)}, \quad k = 2$$

Selanjutnya, untuk menentukan  $\sum_H (-1)^{L_H} w(H)$ , terlebih dahulu akan ditentukan  $1$ -factor dari *Coates graph*  $G_C(A)$ . Perhatikan  $1$ -factors beserta bobotnya yang disajikan pada Tabel 3.2.1 berikut, dengan titik atau *vertices* dalam tanda kurung menyatakan sirkuit berarah.

$1$ -factor $H$	Weight $w(H)$	$L_H$
$(x_1)(x_2)(x_3)$	12	3
$(x_2)(x_1, x_3)$	6	2
$(x_3)(x_1, x_2)$	4	2
$(x_1, x_2, x_3)$	2	1

Tabel 3.2.1.  $1$ -factor dari graf  $G_C(A)$

dari tabel di atas, diperoleh

$$\sum_H (-1)^{L_H} w(H) = (-1)^3 \cdot 12 + (-1)^6 \cdot 6 + (-1)^2 \cdot 4 + (-1)^1 \cdot 2 = -4$$

Kemudian, untuk menghitung  $\sum_{H_{4,2}} (-1)^{L'_H} w(H_{4,2})$ , lebih dahulu harus ditentukan 1-factorial connection  $H_{4,2}$  pada *Coates Graph*  $G_C(A')$ . Matriks  $A'$  adalah matriks  $A$  yang diperbesar dengan menambahkan  $-\mathbf{b}$  pada bagian kanan matriks  $A$  dan menambahkan baris nol pada bagian bawah matriks hasil, sehingga diperoleh

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Graf Coates  $G_C(A')$  dari matriks ketetangaan tersebut adalah graf Coates yang ditunjukkan pada Gambar 2.3.4.

Bentuk 1-factorial connection  $H_{4,2}$  dari graf  $G_C(A')$  disajikan pada Tabel 3.2.2 berikut, dengan titik-titik pada lintasan berarah dari  $x_4$  ke  $x_2$  dinyatakan dalam tanda kurung.

1-factorial connection $H_{4,2}$	$w(H_{4,2})$	$L'_H$
$(x_4, x_1, x_2) (x_3)$	6	1
$(x_4, x_2) (x_1) (x_3)$	-6	2
$(x_4, x_2) (x_1, x_3)$	-3	1
$(x_4, x_3, x_2, x_1)$	-2	0

Tabel 3.2.2. 1-factorial connection dari graf  $G_C(A')$

dari tabel tersebut diperoleh,

$$\sum_{H_{4,2}} (-1)^{L_H} w(H_{4,2}) = (-1)^1 \cdot 6 + (-1)^2 \cdot (-6) + (-1)^1 \cdot (-3) + (-1)^0 \cdot (-2) = -11$$

Sehingga nilai alir dari lintasan  $x_4$  ke  $x_2$  adalah

$$\frac{x_2}{x_4} = \frac{11}{4}$$

*Mason's signal flow graf* atau graf Mason atau dilambangkan dengan  $G_m(A)$  didefinisikan sebagai suatu graf berarah dan berbobot yang diasosiasikan dengan matriks ketetangaan  $A$ , yang dapat diperoleh dengan menambahkan suatu *self-loop* berbobot 1 pada setiap titik dari graf Coates. Teorema berikut menjelaskan bagaimana menentukan alir dari suatu lintasan dari titik  $x_{n+1}$  ke titik  $x_k$  pada graf  $G_m(A)$ .

**Teorema 3.2.3.** *Jika matriks koefisien  $A$  pada sistem persamaan  $Ax = bx_{n+1}$  adalah matriks nonsingular, maka*

$$\frac{x_k}{x_{n+1}} = \frac{\sum_j w(P_{n+1,k}^j) \Delta_j}{\Delta}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.2.6)$$

dengan  $P_{n+1,k}^j$  adalah lintasan berarah (*directed path*) ke  $j$  dari  $x_{n+1}$  ke  $x_k$  pada graf  $G_m(A')$ .  $\Delta_j$  adalah subgraf dari  $G_m(A')$  yang titiknya saling lepas dengan lintasan berarah ke  $j$ , dan  $\Delta$  adalah determinan dari graf Mason  $G_m(A)$ .

**Bukti.**

Misalkan matriks  $A$  adalah matriks nonsingular. Akan dibuktikan bahwa

$$\frac{x_k}{x_{n+1}} = \frac{\sum_j w(P_{n+1,k}^j) \Delta_j}{\Delta}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

Misalkan graf Coates  $G_C(A)$  merupakan suatu graf yang diperoleh dengan menambahkan suatu *self-loop* berbobot  $-1$  pada setiap titik dari graf Mason  $G_m(A)$  dan  $S$  adalah himpunan semua *self-loop* yang berbobot  $-1$ .

Perhatikan bahwa, 1-factor  $H$  pada  $G_C$  memiliki  $j$  self-loop. Jika  $H$  mempunyai  $L_{Q+j}$  total sirkuit berarah, maka dengan menghapus  $j$  self-loop pada  $H$ , akan menghasilkan suatu subgraf  $Q$  dari graf  $G_m(A)$  yang merupakan kumpulan titik yang saling lepas dengan sirkuit berarah (*vertex disjoint directed circuit*)  $L_Q$  dan  $w(H) = (-1)^j w(Q)$ . Selanjutnya, dengan menggunakan **Teorema 2.3.4**, diperoleh

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^n \sum_H (-1)^{L_H} w(H) \\ &= (-1)^n \sum_Q (-1)^{L_{Q+j}} [(-1)^j w(Q)] \\ &= (-1)^n \sum_Q (-1)^{L_Q} w(Q) \\ &= (-1)^n \left[ 1 + \sum_Q (-1)^{L_Q} w(Q) \right] \end{aligned}$$

atau

$$\det(A) = (-1)^n \left[ 1 - \sum_j Q_{j1} + \sum_j Q_{j2} - \sum_j Q_{j3} \dots \right]$$

dengan  $\sum_j Q_{ji}$  merupakan bobot dari  $i$  *vertex disjoint directed circuits* pada graf Mason  $G_m(A)$ .

Misalkan  $(-1)^n \det(A)$  sebagai determinan dari graf  $G_m(A)$ , sehingga untuk suatu  $P_{n+1,k}^j$  lintasan berarah (*directed path*) dari  $x_{n+1}$  ke  $x_k$  pada graf  $G_m(A')$  dan  $\Delta_j$  yang merupakan determinan dari subgraf  $G_m(A')$  yang titiknya saling lepas (*vertex disjoint*) dari lintasan  $P_{n+1,k}^j$ , sehingga diperoleh

$$\sum_{i=1}^n b_i \Delta_{ik} = (-1)^n \sum_j w(P_{n+1,k}^j) \Delta_j \quad (3.2.7)$$

kemudian, dengan mensubstitusi hasil ini ke dalam persamaan (3.2.2), yaitu

$$\frac{x_k}{x_{n+1}} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i \Delta_{ik}}{\det(A)}$$

diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{x_k}{x_{n+1}} &= \frac{(-1)^n \sum_j w(P_{n+1,k}^j) \Delta_j}{(-1)^n \det(A)} \\ &= \frac{\sum_j w(P_{n+1,k}^j) \Delta_j}{\det(A)} \\ &= \frac{\sum_j w(P_{n+1,k}^j) \Delta_j}{\Delta}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

Jadi dapat dibuktikan bahwa jika matriks koefisien  $A$  pada sistem persamaan  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_{x_{n+1}}$  adalah matriks nonsingular, maka

$$\frac{x_k}{x_{n+1}} = \frac{\sum_j w(P_{n+1,k}^j) \Delta_j}{\Delta}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

Solusi dari persamaan  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_{x_{n+1}}$  ini dikenal sebagai **Mason's gain formula**.

■

### Aplikasi Kasus 2.

Berikut ini akan diilustrasikan penerapan metode Mason dengan menyelesaikan sistem persamaan pada Aplikasi kasus 1, yaitu

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} x_4$$

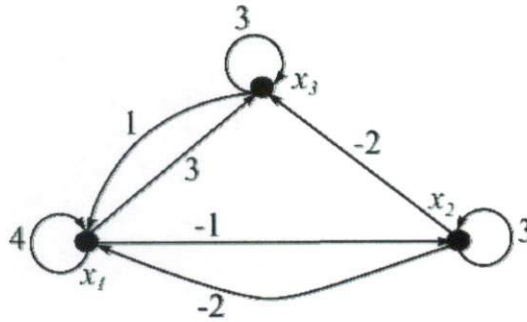
untuk

$$\frac{x_2}{x_4}$$

Sistem di atas dapat ditulis sebagai  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_{x_{n+1}}$ , dengan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \text{dan } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Mason graph  $G_m(A)$  dapat diperoleh dari Coates graph pada Gambar 2.3.5 dengan cara menambahkan bobot bernilai satu pada setiap *self-loop* Coates Graph. Perhatikan gambar Mason graph  $G_m(A)$  berikut.



Gambar 3.2.3. Mason graph  $G_m(A)$

Dari Gambar 3.2.3 diperoleh data sirkuit berarah serta bobotnya seperti yang tercantum pada Tabel 3.2.3.

Karena  $A$  adalah matriks nonsingular, maka sesuai dengan **Teorema 3.2.3**, berlaku

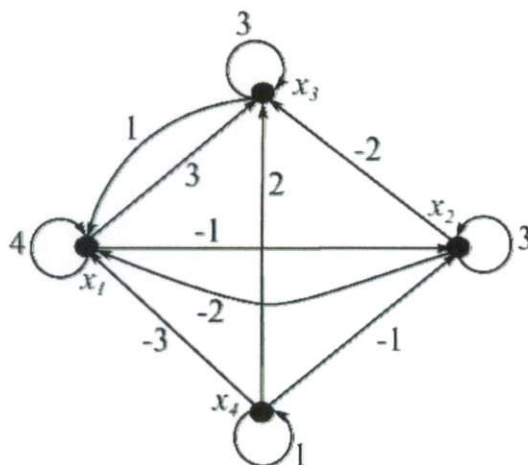
$$\frac{x_k}{x_{n+1}} = \frac{\sum_j w(P_{n+1,k}^j) \Delta_j}{\Delta}$$

$$\frac{x_2}{x_4} = \frac{\sum_j w(P_{4,2}^j) \Delta_j}{\Delta}$$

selanjutnya dari Tabel 3.2.3, dapat diperoleh

$$\Delta = 1 + (-1)^1[4 + 3 + 3 + 2 + 3 + 2] + (-1)^1[12 + 12 + 9 + 9 + 6] + (-1)^3 \cdot 36 = -4$$

No.	Vertex disjoint directed circuits of $G_m(A)$	Weight $w(H)$	$L_H$
1	$(x_1)$	4	1
2	$(x_2)$	3	1
3	$(x_3)$	3	1
4	$(x_1, x_2)$	2	1
5	$(x_1, x_3)$	3	1
6	$(x_1, x_2, x_3)$	2	1
7	$(x_1)(x_2)$	12	2
8	$(x_1)(x_3)$	12	2
9	$(x_2)(x_3)$	9	2
10	$(x_2)(x_1, x_3)$	9	2
11	$(x_3)(x_1, x_2)$	6	2
12	$(x_1)(x_2)(x_3)$	36	3

Tabel 3.2.3. Sirkuit berarah dan bobotnya pada *Mason Graph*  $G_m(A)$ Gambar 3.2.4. *Mason graph*  $G_m(A')$

Perhatikan tabel *forward path* yang terdapat pada graf  $G_m(A')$  dari  $x_4$  ke  $x_2$  berikut

$j$	$P_{4,2}^j$	$(w(P_{4,2}^j))$
1	$(x_4, x_2)$	-1
2	$(x_4, x_1, x_2)$	3
3	$(x_4, x_3, x_1, x_2)$	-2

Tabel 3.2.4. *Forward path* dari  $x_4$  ke  $x_2$  pada graf  $G_m(A')$

Dari Tabel 3.2.4 di peroleh hasil:

1. Sirkuit berarah yang merupakan vertex-disjoint dari  $P_{4,2}^1$  adalah  $(x_1)$ ,  $(x_3)$ ,  $(x_1, x_3)$ , sehingga  $\Delta_1 = 1 - (4 + 3 + 3) + 12 = 3$ .
2.  $(x_3)$  adalah satu-satunya sirkuit berarah yang merupakan *vertex-disjoint* dari  $P_{4,2}^2$ , sehingga  $\Delta_2 = 1 - 3 = -2$
3. Tidak terdapat sirkuit berarah yang merupakan vertex-disjoint dari  $P_{4,2}^3$  sehingga  $\Delta_3 = 1$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned} \sum_j w(P_{4,2}^j)\Delta_j &= w(P_{4,2}^1)\Delta_1 + w(P_{4,2}^2)\Delta_2 + w(P_{4,2}^3)\Delta_3 \\ &= (-1).(3) + (3).(-2) + (-2).(1) = -11 \end{aligned}$$

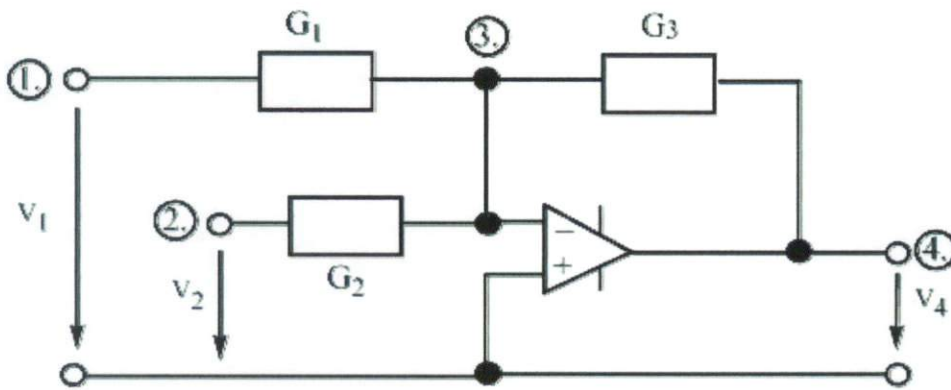
Dengan demikian diperoleh,

$$\frac{x_2}{x_4} = \frac{11}{4}$$



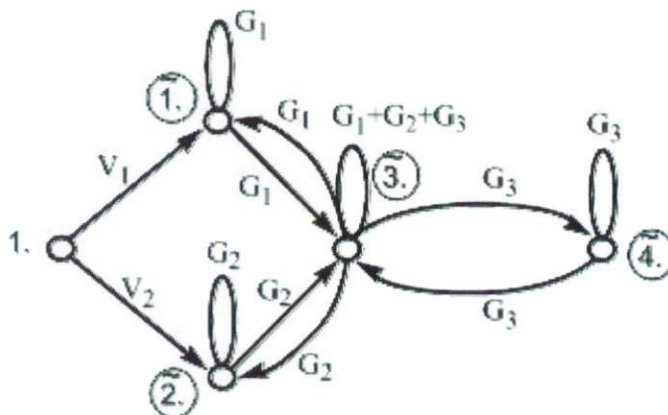
### 3.3 Graf Multi-Transformasi pada Sirkuit Elektronik

Untuk memahami penerapan metode graf multi-transformasi pada *signal flow graph* dalam menyelesaikan sirkuit elektronik, perhatikan rangkaian sirkuit elektronik berikut yang memuat *operational amplifier*.



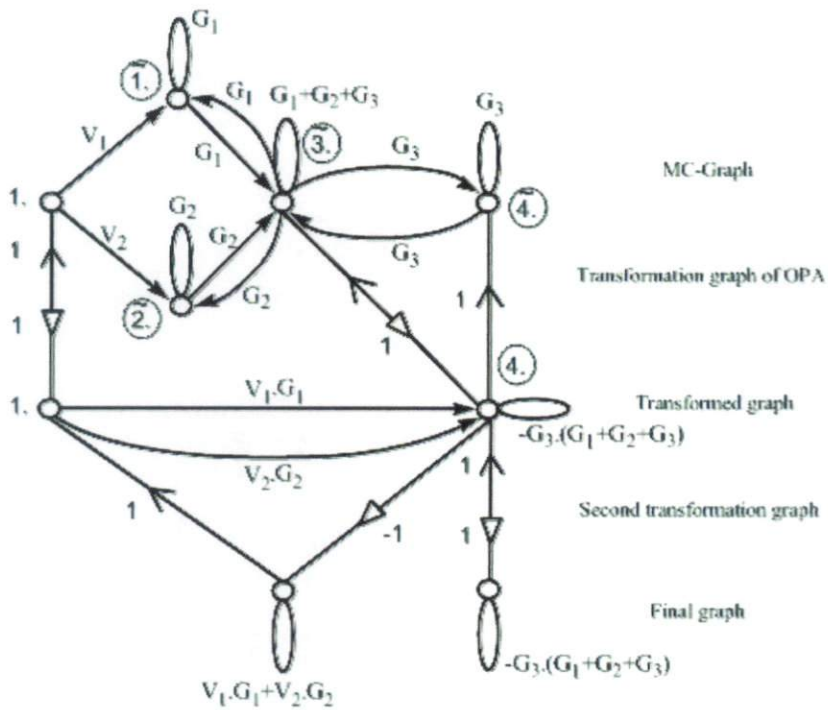
Gambar 3.3.5. Diagram sirkuit elektronik

Diagram sirkuit elektronik di atas dapat direpresentasikan dalam bentuk *signal flow graph* dari *Mason Coates graph (MC-graph)* berikut.



Gambar 3.3.6. *MC-graph*

Kemudian, dengan menerapkan aturan transformasi dan reduksi dari *signal flow graph* dan melakukan dua kali transformasi pada *MC-graph* tersebut, maka diperoleh solusi grafis dari sirkuit elektronik seperti yang terlihat pada Gambar 3.3.7.



Gambar 3.3.7. Proses transformasi dan graf hasil transformasi

Dari hasil transformasi graf pada Gambar 3.3.7, transfer tegangan dari  $V_1$  ke  $V_4$  yang dihasilkan dari rangkaian sirkuit adalah

$$V_4 = \frac{V_1 G_1 + V_2 G_2}{G_3 - a^v (G_1 + G_2 + G_3)}$$

Kemudian hasil tersebut akan dievaluasi dengan menggunakan *Mason's gain formula* pada graf akhir (*final graph*).

$$\frac{x_k}{x_{n+1}} = \frac{\sum_j w(P_{n+1,k}^j) \Delta_j}{\Delta}, \quad k = 4$$

Untuk menghitung pembilang dari formula di atas, lebih dahulu di hitung *vertex-disjoint directed circuit* pada graf akhir dari hasil transformasi graf, sebagai berikut.

$$\sum_j w(P_{n+1,k}^j) \Delta_j = V_1 G_1 + V_2 G_2$$

Kemudian

$$\Delta = G_3 - a^v(G_1 + G_2 + G_3)$$

sehingga

$$V_4 = \frac{V_1 G_1 + V_2 G_2}{G_3 - a^v(G_1 + G_2 + G_3)}$$

Dari hasil perhitungan tersebut diperoleh hasil nilai alir tegangan dari *node* sumber ke  $V_4$  yang dihitung langsung dari hasil transformasi, sama dengan nilai alir tegangan yang dihitung atau dievaluasi dengan menggunakan *Mason's gain formula*.

## BAB IV

# PENUTUP

### 4.1 Kesimpulan

Dari hasil pembahasan sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa, proses penerapan metode graf multi transformasi pada sirkuit elektronik dapat dilakukan dengan lebih dahulu menentukan representasi dari sirkuit elektronik dalam bentuk *Mason Coates graph*. Setelah itu, dilanjutkan dengan mentransformasi *Mason Coates graph (MC-graph)* hingga diperoleh graf akhir (*final graph*). Kemudian, aliran tegangan pada *final graph* ditentukan atau dievaluasi dengan menggunakan *Mason's gain formula*.

### 4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan untuk membahas penyelesaian sirkuit elektronik dengan menggunakan transformasi graf dan evaluasi dengan metode *Z-transformations* dan metode resistor ekuivalen.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Birtnik, Bihumil. 2011. Solving Circuits by Multiple Transformation Graphs. *Int. J. Math. Models and Method. Appl. Sci* 5: 230-237.
- [2] Deo, Narsingh. 1989. *Graph Theory With Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice-Hall, New Delhi.
- [3] Chen, Wai-Kai. 1997. *Graph Theory and It's Engineering Applications*. World Scientific Publishing, Singapore.
- [4] Bondy, J. A and U. S. R. Murty. 1976. *Graph Theory with Applications*. Macmillan, London.
- [5] Thulasiraman, K. 2000. *Signal Flow Graph*. Chapter 8: 245-255. CRC Press LLC.
- [6] Anton, Howard dan Chris Rorres. 2004. *Aljabar Linier Elementer versi Aplikasi*. Edisi Kedelapan. Erlangga, Jakarta.
- [7] Sayood, Khalid. 2005. *Understanding Circuits, Learning Problem Solving Using Circuit Analysis*. Morgan and Claypool, United State of America.