PELABELAN TOTAL (a-1)-SISI ANTI AJAIB SUPER UNTUK GRAF ULAT

SKRIPSI

DEWI HASRIANI

06934010

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

PADANG

2012

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa:

Nama	: Dewi Hasriani
No. Buku Pokok	: 06 934 010
Jurusan	: Matematika
Bidang	: Kombinatorik
Judul Skripsi	: Pelabelan Total $(a,1)$-sisi Anti Ajaib Super untuk Graf Ulat

Telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal 5 Januari 2012 berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing

1.

Dr.Lyra Yulianti

NIP. 197507061999032003

2.

Dr.Syafrizal,Sy

NIP. 196708071993091001

Penguji

1.

Budi Rudianto,M.Si

NIP. 132169920

2.

Dr.Muhafzan

NIP. 196706021993021001

3.

Nova Noliza Bakar,M.Si

NIP. 196311041992032002

Mengetahui, Ketua Jurusan Matematika

FMIPA Universitas Andalas

Dr. Syafrizal Sy

NIP. 196708071993091001

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Sesungguhnya Sesudah Kesulitan Itu Pasti Ada Kemudahan Maka Apabila Kamu Telah Selesai (Dari Suatu Urusan) Kerjakanlah Dengan Sungguh-Sungguh (Urusan) Yang Lain Dan Hanya Kepada Tuhanmulah Hendaknya Kamu Berharap"

(Q.S Nasyrah : 6-8)

Alhamdulillahirabbil'alamin kepada sumber dari suara-suara hati yang bersifat mulia. Sumber ilmu pengetahuan, Sumber segala kebenaran, Sang maha cahaya, Penabur cahaya ilham, Pilar nalar kebenaran, Sang kekasih tercinta yang tak terbatas pencahayaan_Nya bagi umat, Allah Subhanahu Wa Ta'ala
hingga suatu impian kini telah menjadi kenyataan...
Hari ini . . .Secerah harapan telah ku genggam, sepenggal asa telah ku raih
Thank you ya Allah.....Engkau beri aku kesempatan untuk membahagiakan orang - orang yang kucintai dan kusayangi . . .
Kupersembahkan dengan penuh keikhlasan sebuah usaha pencarian jati diri dalam bentuk karya kecil kepada :

Ayah dan Ibu tercinta

Untuk kasih sayang yang tulus dan do'a yang tak pernah putus,selalu memberikan semangat & kekuatan disaat ku lemah . ayah ibu akhirnya wi wisuda juga, walaupun tidak seperti yang ayah ibu inginkan ☹. Ayah ibu wi salut mempunyai ortu seperti mu, yang selalu mengutamakan pendidikan anak-anak mu.. apapun ayah ibu usahakan asalkan kami bisa menyelesaikan pendidikan dengan baik. Semua fasilitas ayah ibu berikan untuk dewi..

IBU engkau ADALAH sumber utama motivasi wi untuk mencapai cita-cita, termasuk gelar S.Si ini. Setiap kali wi pulang kampung dengan berbagai macam keluhan di kampus, ibulah teman curhat wi yang membuat wi tetap semangat untuk kuliah di matematika, dengan banyak kekurangan wi,Ibu slalu bilang wi adalah yang terbaik. tak ada KESUKSESAN YANG BISA DI RAIH DENGAN MUDAH, SEMUA BUTUH KERJA KERAS, bersakit-sakit dahulu, bersenang-senang kemudian. Kata-kata bijak yang sering ibu sampaikan sama wi, Slama ini ibu slalu berjuang melawan penyakit ibu, walupun demikian ibu tak pernah mengeluh sedikitpun demi lancarnya kuliah dewi.. semoga ibu cepat sembuh., ibu segala-galanya bagi dewi. Senyummu bagaikan matahari bagi dewi dalam setiap langkah dan motivasi untuk wi bisa meraih cita-cita. Wi gk mw lihat ibu sedih dan menangis, Do'akan wi ya bu. Agar bisa menjadi anak kebanggaan ibu dan wi bisa wujudkan impian ayah ibu.menjadi anak yang b'bakti pada ortw dan kelurga. aminn y rabbal'alamin

AYAH engkau slalu menyejukkan hati dewi dengan semua cerita2 masa lalu dan masa depan,Kalau hidup itu adalah perjuangan. setiap kali wi tidur, wi slalu ingat dongeng ayah sewaktu wi masih kecil. Dongeng yang menjadi motivasi bagi dewi tentang arti persaudaraan. Ayah adalah sosok penyabar dalam keluarga (wi sayang ayah),. yang tak pernah memarahi wi sedikitpun.. dengan sabar ayah slalu mensuport wi untuk bisa menyelesaikan kuliah wi.. alhamdulillah anak ayah ini tamat juga yah... ☺

Buat abg (HADI FEBRIAL) makasih banyak bg., semua pengalaman, motivasi, suport (moril n materil) abg untuk wi slama ini.. wi kangen bg „ kita ngumpul bersama di kampung bersama ayah ibu seperti dulu, sekarang qta terpisah jarak, tapi wi yakin hati qta slalu dekat.do'kan wi y bg bisa sukses seperti abg,, abg adalah kakak teladan bagi dewi,,. Makasih juga kak ipar (ni noly) udah mw dengar curhatan dewi di berbagai masalah ... semoga abg dan uni disana baik-baik aja.

Untuk adik-adik ku tersayang (INDAH PERMATA SARI) rajin-rajin kuliah ya dek, semoga bisa menjadi S.Farm,APT seperti cita-citamu dek, Jadilah dirimu sendiri ndah, jauhkan semua rasa minder. Uniang yakin ndah punya banyak kelebihan di balik itu semua.. ndah masih ingat kan cerita qta sebelum tidur. (akhirnya uniang wisuda juga ndah ., keep u smile and spirit, bahasa harian qt b'dua lho.. akhirnya uniang bisa juga b'bahasa inggris dikit2 ndah... hehe) ups uniang lupa., makasih atas suport ndah slama ini sama uniang.. maafin uniang ndah t'kadang uniang sering bwt ndah sedih.

Tuk adik Q (DENDI APRIANDANI) rajin-rajin sekolah ya dek,, jangan nakal 2 lagi, semoga dendi bisa jadi anak berbakti sama ortw.. adk q yg manja yang gk pernah bisa pisah sama ibu.. dek akhirnya uniang tamat juga dari kampuz yang dendi bilang markaz power rangers..

(love u all to kakak adek q tercinta)..................

Ibu Dr.Lyra Yulianti selaku pembimbing pertama yang tak kalah sibuk, selalu meluangkan waktu, tenaga dan slalu sabar membantu dewi agar bisa cepat seminar dan kompre.. makasih banyak y buk..Ibu dosen terbaik bagi dewi.... Bapak Dr.Syafrizal selaku pembimbing kedua, makasih banyak pak, di sela kesibukan bapak sebagai ketua jurusan bapak masih bisa menyempatkan waktu untuk dewi untuk bimbingan dan makasih atas masukan yang bapak berikan.

sahabat-sahabat Q

banyak kisah qt lalui bersama sahabat,. Suka duka pahit manis qta selama di matematika, sekarang qta telah terpisahkan jarak dan waktu dengan kesibukan yang baru.. perjuangan qt slama 5 tahun ini biarlah menjadi keping-keping kengangan terindah untuk slamanya. ii (gapuuuuakkk) qmu sahabt Q paling lucu, gk nyangka qta kok bisa akrab ,. Wi kangen sama bawelan qmu i, bawelan motivasi bwt wi ,. Dengan Keakraban qta slma ini wi merasa memiliki keluarga baru di padang i,makasih juga bwt mama papa i.. yang sering kasih semngat bwt wi(wi kangen pengen crta-crita sama mama i). Sahabat Q ing,. Gk nyangka ing persahabtan qt menyatukan qt sprt keluarga. Semoga sampai kapanpun hubungan silaturahmi keluarga qt slalu terjalin ing, mksh suportnya chuyy. (otya capek la baralek lai chuy,. Apo juo d tggu lai tu hahaha. .) angguni (hmmmm slalu ngasih inspirasi baru dengan kata-kta GAOL mu ☺,, jgn lupa y guni kasih info2 t'update.., mksh suportnya slama ini chooy) ni nopi(amak kambaaa) uni .....makasih banyak , uni udah mw ngizinin wi tuk tinggal di rumah uni slama nyusun skripsi ini.. gk nyangka wi bisa dekat sama uni.(mksih banyak bnyaaaaaaaaaaaaaaaak ko ni ha, slam manis dw tuk si kembar yo ni,. Walaupun bsk2 ko wq bapisah, kana-kana juo lah adiak uni nan surang ko yo, no hp msih yg lamo ko' ni .. hahahahha,. Lai wisuda juo wq akhirnyo ni.. ☺) Maafin dw y ni klo ada slah slamoko samo uni.. kawan2 4 serangkai sari(kaliiang yang hilang2 muncul d kmpz ... peace sha ☺ hahahaha,etek riza lah haniang2 c mah sajak S.Si ko, susurr bilo wq malala basamo-samo lai??) dw kangen perjuangan qta dalam 4 serangkai.. hehe akhirnya 4 serangkai selesai juga dengan dewi hasriani sbg penutup. Oce, cici, icit, ika, dedi akhirnya qt sama juga wisuda kawand..., teman2 06 arif, rido, heru, suci, jeki (semngat teman) bilo wq karaoke samo-samo liak.. hehe... arez, tari.. (sajak tamat lah ndak ado kaba c lai mah kawan,.).

Hmmmmmmm... bwt seseorang ,.. ☺☺☺

Makasih banyak y bg., bg slalu ada bwt dwi, di saat sedih atwpun senang, yg slalu sabar menghadapi wi yg sering egois ☺..dalam skripsi ini bgtu bnyak jasa abg bgi dw, semngt, perhatian dan support agar wi tidak terus mengeluh dan sabar dalam menyelsaikan skripsi. (Akhirnya wi tamat juga bg .,, semoga cerita2 dan impian qt terwujud bg) aminnn.......

YOU ALL THE BEST.......................

Akhir kata., wi ucapkan terima kasih untuk semua orang-orang terdekat dewi (tante, kak yeni, santi, ni yosi) teman KKN (reni, fani, yori), liza, wenda, alin atas support dan dukungannya slama ini.

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

Puji dan syukur penulis ucapkan kepada Allah SWT atas segala limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan tugas akhir dengan judul "**PELABELAN TOTAL $(a, 1)$- SISI ANTIAJAIB SUPER UNTUK GRAF ULAT**". Selanjutnya tak lupa shalawat dan salam penulis sampaikan kepada Nabi Besar Muhammad SAW.

Skripsi ini ditulis sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Andalas.

Penyelesaian skripsi ini tak lepas dari semua pihak yang terlibat baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu pada kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada :

1. Ibu **Dr. Lyra Yulianti** selaku Pembimbing I yang telah dengan sabar membantu mengarahkan penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Penulis berterimakasih atas ilmu, ide, saran, dan nasihat yang diberikan selama proses bimbingan tugas akhir ini.
2. Bapak **Dr. Syafrizal. Sy** selaku Pembimbing II yang telah membantu penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini, dan sekaligus selaku ketua jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas.
3. Bapak **Budi Rudianto, M.Si** selaku penguji yang telah membaca, memberi masukan dan saran kepada penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini, sekaligus pembimbing Akademik yang telah membantu penulis dalam urusan akademik terutama dalam merancang studi.

4. Bapak **Dr.Muhafzan** dan Ibu **Nova Noliza Bakar, M.Si** selaku penguji yang telah membaca, memberi masukan dan saran kepada penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.
5. Bapak dan Ibu Dosen beserta Staf jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas.
6. Keluarga tercinta yang senantiasa memberi dukungan dan semangat selama ini.
7. Teman-teman mahasiswa di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas, khususnya angkatan 2006 atas segala bantuan dan kerjasamanya.
8. Semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran agar sempurnanya skripsi ini. Semoga skripsi ini memberikan manfaat bagi kita semua. Amin.

Padang, Januari 2012

Penulis

ABSTRAK

Graf bintang (*star*) S_n adalah suatu graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat $n+1$ yang disebut dengan pusat, dan n titik lain yang berderajat satu yang disebut daun. Graf ulat (*Caterpillar graph*) bisa dilihat sebagai barisan graf bintang $S_{n_1}, S_{n_2}, \dots, S_{n_r}$ dimana S_i adalah bintang dengan titik pusat c_i dan daun n_i untuk $i = 1, 2, \cdots, r$ dan daun S_i termasuk c_{i-1} dan c_{i+1} untuk $i = 2, 3, \cdots, r-1$. Graf ulat dengan banyak titik genap dapat dilabeli sehingga dapat ditunjukkan bahwa pelabelannya adalah pelabelan$(a, 1)$-sisi antiajaib super. Selanjutnya telah ditunjukkan bahwa graf ulat dengan titik ganjil mempunyai pelabelan $(a, 1)$-sisi antiajaib.

Kata kunci: *Graf bintang, Graf ulat, Graf bipartit, Pelabelan anti ajaib super.*

ABSTRACT

A star (*star*) S_n is a connected graph which has one vertex of degree $n+1$, called the center, and other vertices of degree n, called leaves. The Caterpillar can be seen as a collection of stars $S_{n_1}, S_{n_2}, \ldots, S_{n_r}$, where S_{n_i} is a star with the center vertex c_i and leaves n_i for $i = 1,2,\cdots,r$ and leaves S_{n_i} including c_{i-1} and c_{i+1} for $i = 2,3,\cdots,r-1$. In this paper, it will be shown that the caterpillar of even order can be labeled such that the labeling is super $(a,1)$-edge antimagic.it is also shown that the caterpillar of odd order can also be labeled such that the labeling is a super $(a,1)$-edge antimagic .

Keyword : *Star Graph, Caterpillar, Bipartite Graph, Super Antimagic Labeling*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedlàček (1964), kemudian Stewart (1966), serta Kotzig dan Rosa (1970). Pelabelan graf menjadi topik dalam teori graf yang banyak mendapat perhatian, karena model-model dalam pelabelan graf sangat bermanfaat pada berbagai bidang, antara lain masalah kristalogi sinar-x, system jaringan komunikasi, dan desain sirkuit.

Secara umum graf $G = (V(G)\ , E(G))$ terdiri dari himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ yang menghubungkan titik-titik dalam $V(G)$. Graf sering digunakan untuk menyederhanakan beberapa permasalahan matematika sehingga masalah tersebut dapat diselesaikan dengan lebih mudah.

Pelabelan (*labeling*) merupakan pemetaan satu-satu yang memetakan unsur himpunan titik dan atau unsur himpunan sisi ke bilangan asli. **Pelabelan titik** adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, **pelabelan sisi** adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan **pelabelan total** adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi.

Beberapa jenis pelabelan antiajaib yang telah dibahas oleh peneliti sebelumnya adalah pelabelan total titik antiajaib, pelabelan total titik antiajaib super, pelabelan total sisi antiajaib,dan pelabelan total sisi antiajaib super. Pada tulisan ini akan dibahas tentang pelabelan total (a,d)-sisi antiajaib pada suatu graf. Suatu

1.5 Sistematika Penulisan

Bab I berisikan pendahuluan yang mencakup latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan dan sistematika penulisan skripsi ini. Konsep dasar dari teori graf berupa definisi dan terminologi, pengertian pelabelan total sisi anti-ajaib. serta beberapa teori pendukung yang digunakan untuk menyelesaikan skripsi ini disajikan pada Bab II sebagai landasan teori. Kemudian, pembahasan dari permasalahan tersebut akan diuraikan pada Bab III, yaitu pelabelan total $(a,1)$-sisi anti ajaib super untuk graf ulat. Pada bab ini juga akan diberikan beberapa penjelasan untuk membantu proses pembuktian teorema utama. Penulisan skripsi ini diakhiri dengan bagian kesimpulan dan saran yang disajikan pada Bab IV.

pelabelan terhadap graf G dikatakan pelabelan total (a,d)-sisi antiajaib super jika himpunan label titik $f(V(G)) = \{1, 2, \ldots, v\}$ dan $f(E(G)) = \{v + 1, v + 2, \ldots, v + e\}$.

1.2 Perumusan masalah

Permasalahan yang dibahas dalam tulisan ini adalah bagaimana cara melabeli graf ulat sedemikian sehingga graf tersebut memiliki pelabelan total (a,d)-sisi antiajaib super untuk suatu a dan d bilangan bulat positif.

1.3 Pembatasan masalah

Kajian tentang pelabelan total (a,d)-sisi antiajaib super pada graf ulat ini dibatasi untuk $d = 1$ dimana a adalah suku pertama dari deret aritmatika yang menyatakan bobot sisi minimum pada pelabelan, dan d adalah beda di antara suku-suku tersebut.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah menunjukkan bahwa graf ulat dengan banyak titik genap dapat dilabeli sehingga pelabelannya adalah $(a,1)$-sisi antiajaib. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa jika graf ulat mempunyai banyak titik ganjil maka terdapat pelabelan $(a,1)$-sisi antiajaib pada graf tersebut.

BAB II

LANDASAN TEORI

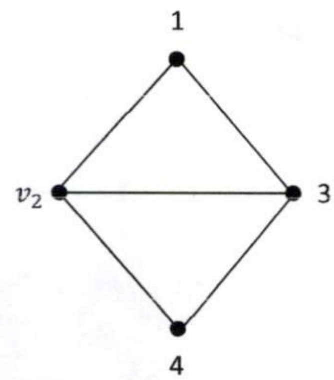
Pada bab ini akan disajikan beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan permasalahan yang terdapat pada Bab I. Kajian diawali dengan pendefinisian graf dan terminologi pada Subbab 2.1, uraian tentang graf sederhana pada Subbab 2.2, pengertian graf bintang dan graf ulat pada Subbab 2.3, dan pengertian pelabelan pada Subbab 2.4.

2.1 Pengertian dan Terminologi Graf

Graf G adalah suatu struktur (V, E) di mana V adalah himpunan tak kosong dan E (mungkin kosong) merupakan himpunan pasangan tak terurut dari elemen-elemen V. Elemen-elemen dari V disebut titik, dinotasikan dengan $v_{1,} v_2, \dots, v_n$. Elemen-elemen dari E disebut sisi, dinotasikan dengan $e_1, e_{2,\dots,} e_n$. Himpunan titik dari G dinotasikan dengan $V(G)$, sedangkan himpunan sisi dari G dinotasikan dengan $E(G)$. Banyaknya anggota $V(G)$, dinotasikan dengan $v = |V(G)|$ dan banyaknya anggota $E(G)$ dinotasikan dengan $e = |E(G)|$.

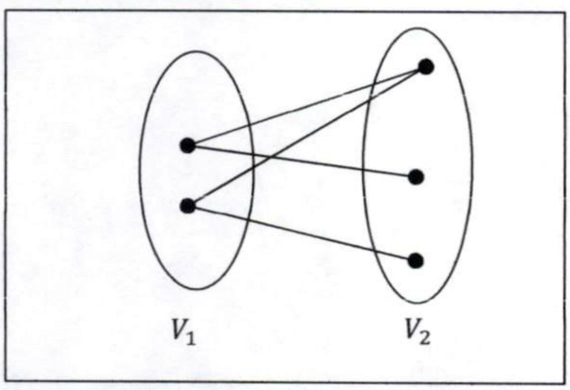
2.2 Graf Sederhana dan Graf Bipartit

Graf yang dikaji pada tulisan ini adalah **graf sederhana**, yaitu graf yang tidak memuat loop dan sisi ganda. Gambar 2.2.1 adalah gambar graf sederhana yang tidak memuat loop dan tidak memuat sisi ganda.



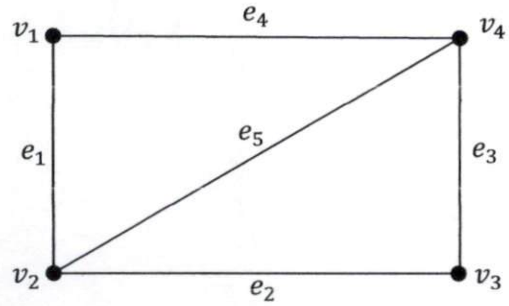
Gambar 2.2.1 Graf yang Tidak Memuat Loop dan Sisi Ganda

Graf Bipartit $G = (V_1, V_2, E)$ adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2, sedemikian sehingga titik di V_1 dihubungkan ke titik V_2.



Gambar 2.2.2 Graf Bipartit $G(V_1, V_2)$

Misalkan $e_i = v_i v_j \in E(G)$ untuk suatu i dan j. Maka titik v_i dan v_j dikatakan sebagai titik yang **bertetangga** di G. Selanjutnya sisi e_i tersebut dikatakan **terkait** dengan v_i dan v_j. Misalkan $v_i \in V(G)$, maka derajat v_i adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik v_i tersebut, dinotasikan dengan $d(v_i)$.

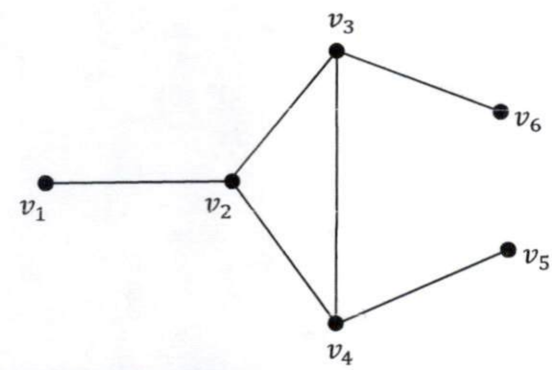


Gambar 2.2.3 Ilustrasi Titik dan Sisi pada Graf

Pada gambar 2.2.3 terdapat suatu graf G dengan himpunan titik $V(G)$ $=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

Jalan (*walk*) dengan panjang n adalah barisan titik dan sisi $v_1, e_1, v_2, e_2 \ldots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n, e_n, v_{n+1}$, sedemikian sehingga $e_i = v_i v_{i+1}$ untuk setiap $i \in \{1,2 \ldots, n\}$. Misalkan terdapat suatu titik $v \in V(G)$ maka derajat dari v adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik v tersebut, dinotasikan dengan $d(v)$.

Lintasan (*path*) adalah jalan yang semua titiknya berbeda. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n.

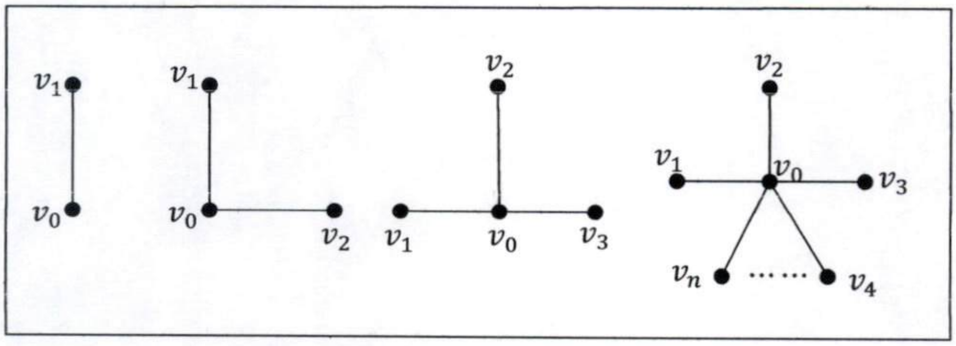


Gambar 2.2.4 Lintasan $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$ dalam Graf G

2.3 Graf ulat (*caterpillar Graph*)

Berikut diberikan definisi dari graf bintang dan graf ulat yang akan digunakan dalam pembahasan bab selanjutnya.

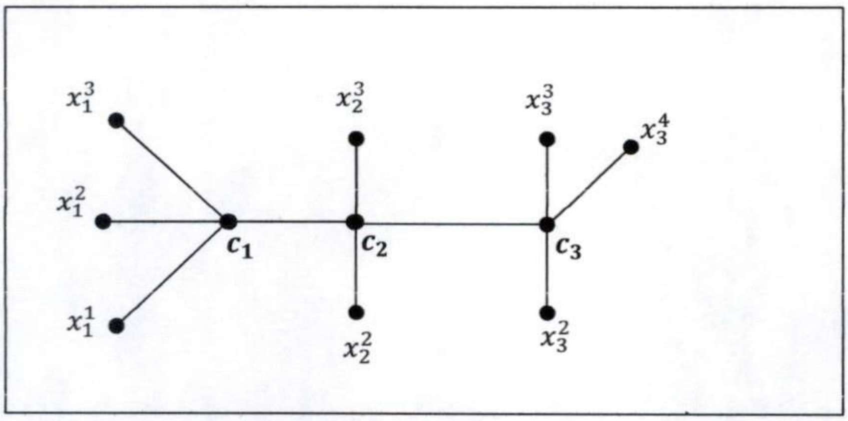
Graf bintang (*star*) S_n, dengan $n \geq 1$ adalah suatu graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat n yang disebut dengan pusat, dinotasikan dengan v_0, dan n titik lain yang berderajat satu, dinotasikan dengan v_i dimana $i = 1,2,..n$ yang disebut daun.



Gambar 2.3.1 Graf Bintang S_1, S_2, S_3, S_n

Graf ulat (*Caterpillar graph*) bisa dilihat sebagai barisan graf bintang $S_{n_1}, S_{n_2}, \dots, S_{n_r}$ dimana S_i adalah bintang dengan titik pusat c_i dan daun n_i untuk $i = 1, 2, \cdots, r$ dan daun S_i termasuk c_{i-1} dan c_{i+1} untuk $i = 2, 3, \cdots, r-1$.

Berikut disajikan contoh graf ulat $S_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$:



Gambar 2.3.1 Graf Ulat $S_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$

Graf ulat dinotasikan sebagai $S_{n_1,n_{2,\ldots,}n_r}$ mempunyai himpunan titik :

$$V\,(\,Sn_1, n_2, \ldots, n_r\,) = \{c_i | 1 \leq i \leq r\}$$

$$\cup \bigcup_{i=2}^{r-1} \{x_i^j | 2 \leq j \leq n_i - 1\} \cup \ \{x_1^j | 1 \leq j \leq n_1 - 1\} \ \cup \ \{x_r^j | 2 \leq j \leq n_r\}$$

dan himpunan sisi :

$$E\,(\,Sn_1, n_2, \ldots, n_r\,) = \{c_i c_{i+1} | 1 \leq i \leq r-1\} \ \cup \bigcup_{i=2}^{r-1} \{c_i x_i^j | 2 \leq j \leq n_i - 1\} \cup$$

$$\{c_1 x_1^j | 1 \leq j \leq n_1 - 1\} \ \cup \{c_r x_r^j | 2 \leq j \leq n_r\}$$

dimana

$$|V\,(\,Sn_1, n_2, \ldots, n_r)| = \sum_{i=1}^{r} n_i - r + 2$$

dan

$$|E(\ Sn_1, n_2, \dots, n_r\ )| = \sum_{i=1}^{r} n_i - r + 1$$

2.4 Pelabelan Graf

Pelabelan graf adalah suatu pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan titik dan himpunan sisi ke himpunan bilangan bulat positif. **Pelabelan titik (*vertex labeling*)** adalah pelabelan dengan domain himpunan titik. **Pelabelan sisi** (*edge labeling*)adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan **pelabelan total** (***total labeling***) adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi.

Bobot titik (***vertex-weight***) x didefinisikan sebagai jumlah label titik x dan semua sisi yang terkait dengan titik x. Jumlah label sisi dan label dua titik yang terkait pada sisi disebut **bobot sisi** (***edge-weight***). Jika graf memiliki bobot titik atau bobot sisi yang sama, maka graf ini disebut **graf dengan pelabelan ajaib**. Jika graf memiliki bobot titik atau bobot sisi berbeda, maka graf ini disebut **graf dengan pelabelan antiajaib**. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmatika $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (e - 1)d\}$, dengan suku pertama a dan selisih bobot sisi d maka pelabelan tersebut disebut **pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib**.

Berikut adalah beberapa jenis pelabelan (a, d)-anti ajaib pada G, yang dikutip dari [1] :

a) **Pelabelan sisi (a, d)-titik antiajaib (*Vertex-antimagic edge labeling*)**

Graf G dikatakan mempunyai pelabelan sisi (a, d)-titik antiajaib jika terdapat bilangan bulat $a > 0$, $d \geq 0$ dan $f_1: E(G) \rightarrow \{1,2, \dots, e\}$, sedemikian sehingga himpunan bobot titik dari G

$$W_1 = \{w(v) |\ w(v) = \sum f_1(uv),\ uv \in E(G)\}$$

dapat ditulis sebagai

$$W_1 = \{a, a + d, \dots, a + (v - 1)d\}$$

b) **Pelabelan titik (a, d)- sisi antiajaib (*Edge-antimagic vertex labeling*)**

Graf G dikatakan mempunyai pelabelan titik (a, d)-sisi antiajaib jika terdapat $f_2: V(G) \rightarrow \{1,2, \dots, v\}$ sedemikian sehingga himpunan bobot sisi untuk semua sisi di G

$$W_2 = \{w(uv) |\ w(uv) = f_2(u) + f_2(v),\ u, v \in V(G)\},$$

dapat ditulis sebagai

$$W_2 = \{a, a + d, a + d, \dots, a + (e - 1)d\},$$

untuk suatu $a > 0$ dan $d \geq 0$.

c) **Pelabelan total (a, d)-titik anti ajaib (*Vertex-antimagic total labeling*)**

Sebuah fungsi bijeksi $f_3 : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2, \dots, v + e\}$ dikatakan pelabelan total titik antiajaib pada graf G jika himpunan bobot titik untuk semua titik di G

$$W_3 = \{w(x) |\, w(x) = f_3(x) + \sum f_3(xy),\ xy \in E(G)\}$$

dapat dituliskan sebagai

$W_2 = \{a, a + d, \dots, a(v - 1)d\}$, untuk suatu $a > 0$, dan $d \geq 0$.

d) **Pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib (*Edge-antimagic total labeling*)**

Pelabelan total sisi antiajaib dari graf $G = (V, E)$ didefinisikan sebagai pemetaan satu-satu $f_4 : V(G) \cup E(G) \longrightarrow \{1, 2, \dots, v, v + 1, \dots, e\}$, sedemikian sehingga himpunan bobot sisi

$$W_4 = w(uv) |\, w(uv) = f_4(u) + f_4(uv) + f_4(v), uv \ \in E(G)\}$$

himpunan bobot sisi dapat ditulis sebagai

$W_4 = \{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (e - 1)d\}$, untuk suatu $a > 0$ dan $d \geq 0$.

Definisi 2.4.1 [1] *Sebuah fungsi bijeksi $\lambda : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, v + e\}$ disebut pelabelan total (a,d)-sisi antiajaib dari G jika himpunan bobot sisi pada G dapat dituliskan sebagai $\{a,\ a + d, \dots,\ a + (e - 1)d\}$ untuk dua bilangan bulat $a > 0$ dan $d \geq 0$. Pelabelan total (a,d)-sisi antiajaib λ disebut total (a,d) sisi antiajaib super jika $\lambda\,(V(G)) = \{1,\ 2,\ \dots,\ v\}$ dan $\lambda(E(G)) = \{\ v\ +\ 1, v\ +\ 2, \dots, v\ +\ e\}$.*

Lema 2.4.1 [1] *Misalkan terdapat barisan $\mathfrak{A} = \{\ c,\ c + 1,\ c + 2,\ .\ .\ .\ ,\ c + k\}$ dengan k genap. Maka terdapat permutasi $\prod$ $(\mathfrak{A})$ dari elemen-elemen $\mathfrak{A}$. Sehingga*

$$\mathfrak{A} + \prod(\mathfrak{A}) = \{\, 2c, 2c + \frac{k}{2} + 1, 2c + \frac{k}{2} + 2, \dots, 2c + \frac{3k}{2} - 1, 2c + \frac{3k}{2} \}$$

Bukti :

Misalkan terdapat barisan $\mathfrak{A} = \{\, a_i \mid a_i = c + (i - 1), 1 \leq i \leq k + 1\}$ dengan k genap. Selanjutnya didefinisikan $\prod(\mathfrak{A}) = \{\, b_i \mid b_i, 1 \leq i \leq k + 1\}$ dimana :

$$b_i = \begin{cases} c + \frac{k}{2} + \frac{1 - i}{2}, jika\ i\ ganjil & 1 \leq i \leq k + 1 \\ c + k + \frac{2 - i}{2}, jika\ i\ genap & 2 \leq i \leq k \end{cases}$$

Maka $\mathfrak{A} + \prod(\mathfrak{A})$ dapat dihitung dengan cara sebagai berikut:

1. Untuk i ganjil, $i = 1, 3, \dots, k - 1, k + 1$

   $a_i + b_i = \mathrm{c} + (\mathrm{i} - 1) + \mathrm{c} + \frac{k}{2} + - \frac{1-i}{2}$

   $= 2c + \frac{k}{2} + \frac{1-i}{2}$

Sehingga

$\mathfrak{A} + \prod(\mathfrak{A}) = \left\{2c + \frac{k}{2} + \frac{1-1}{2}, 2c + \frac{k}{2} + \frac{3-1}{2}, \dots, 2c + \frac{k}{2} + \frac{k-1-1}{2}, 2c + \frac{k}{2} + \frac{(k+1-1)}{2}\right\}$

$= \left\{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, \dots, 2c + \frac{2k}{2} - 1, 2c + \frac{2k}{2}\right\}$

2. Untuk i genap, $i = 2, 4, \dots k - 2, k$

   $a_i + b_i = \mathrm{c} + (\mathrm{i} - 1) + \mathrm{c} + \mathrm{k} + \frac{2-i}{2}$

   $= 2\mathrm{c} + \mathrm{k} + \frac{i}{2}$ (1)

sehingga

$$\mathfrak{A} + \prod(\mathfrak{A}) = \left\{2c + k + 1, 2c + k + \tfrac{4}{2}, \dots, 2c + k + \tfrac{k-2}{2}, 2c + k + \tfrac{k}{2}\right\}$$

$$= \left\{2c + k + 1, 2c + k + 2, \dots, 2c + \tfrac{3k}{2} - 1, 2c + \tfrac{3k}{2}\right\} \quad (2)$$

Dari persamaan (1) dan persamaan (2), diperoleh:

$$\mathfrak{A} + \prod(\mathfrak{A}) = \left\{c + \tfrac{k}{2} + \tfrac{i-1}{2} \mid i \ ganjil, 1 \le i \le k+1\right\} \cup$$

$$\left\{c + k + \tfrac{2-i}{2} \mid i \ genap, 2 \le i \le k\right\}$$

$$= \{\, 2c + \tfrac{k}{2}, 2c + \tfrac{k}{2} + 1, \dots, 2c + \tfrac{2k}{2} - 1, 2c + \tfrac{2k}{2}\}$$

$$\cup \left\{2c + k + 1, 2c + k + 2, \dots, 2c + \tfrac{3k}{2} - 1, 2c + \tfrac{3k}{2} - 1, 2c + \tfrac{3k}{2}\right\}$$

$$= \left\{2c + \tfrac{k}{2}, 2c + \tfrac{k}{2} + 1, 2c + \tfrac{k}{2} + 2, \dots, 2c + \tfrac{3k}{2} - 1, 2c + \tfrac{3k}{2}\right\} \qquad \blacksquare$$

Lema 2.4.2 [2] *Misalkan* $\mathfrak{B}$ *adalah sebuah barisan* $\mathfrak{B} = \{c, c+1, c+2, \dots, c + \frac{k-3}{2}, c + \frac{k-1}{2}, c + \frac{k+3}{2}, c + \frac{k+5}{2}, \dots\ c + k + 1\}$; *k ganjil. Maka terdapat barisan bilangan bulat* $\mathfrak{R} = \{1, 2, 3, \dots, k+1\}$ *sedemikian sehingga barisan* $\mathfrak{B} + \mathfrak{R}$ *terdiri dari bilangan bulat terurut.*

Bukti :

Misalkan k ganjil, $k \ge 1$, dan

$\mathfrak{B} = \{\, p_i \mid p_i = c - 1 + i, 1 \le i \le \frac{k+1}{2}\} \cup \{\, p_i \mid p_i = c + i, \frac{k+3}{2} \le i \le k + 1\}$. Pembuktian dibedakan menjadi tiga kasus.

Kasus 1.: $k + 1 \equiv 2 \pmod 6$

Untuk $k \geq 1$ didefinisikan barisan $\mathfrak{R} = \{r_i \mid 1 \leq i \leq k + 1\}$sebagai berikut:

$$r_i = \begin{cases} k + 1 - 2i & jika\ i \equiv 1(mod\ 3) \quad dan\ 1 \leq i \leq \dfrac{k-1}{2}, \\ k + 1\_2i & jika\ i \equiv 2(mod\ 3) \quad dan\ 2 \leq i \leq \dfrac{k-1}{2}, \\ k + 4 - 2i & jika\ 1 \equiv 0(mod\ 3) \quad dan\ 3 \leq i \leq \dfrac{k-1}{2}. \end{cases}$$

$$r_i = \begin{cases} k + 1 & jika\ i = \frac{k+1}{2}, \\ k & jika\ i = \frac{k+3}{2}. \end{cases}$$

$$r_i = \begin{cases} 2k + 1 - 2i & jika\ i \equiv 0(mod\ 3) \quad dan\ \dfrac{k+5}{2} \leq i \leq k - 1, \\ 2k + 1 - 2i & jika\ i \equiv 1(mod\ 3) \quad dan \dfrac{k+7}{2} \leq i \leq k\,, \\ 2k + 4 - 2i & jika\ i \equiv 2(mod3) \quad dan \dfrac{k+9}{2} \leq i \leq k + 1. \end{cases}$$

Kasus 2: $k + 1 \equiv 4$ (mod 6)

Untuk $k \geq 3$, gunakan barisan berikut $\mathfrak{R} = \{ r_i \mid 1 \leq i \leq k + 1\}$

$$r_i = \begin{cases} k & jika\ i = 1, \\ k + 1 & jika\ i = \frac{k+1}{2}. \end{cases}$$

$$r_i = \begin{cases} k + 4 - 2i & jika\ i \equiv 1(mod\ 3) \quad dan\ 4 \leq i \leq \dfrac{k-1}{2}, \\ k + 1 - 2i & jika\ i \equiv 2(mod\ 3) \quad dan\ 2 \leq i \leq \dfrac{k-1}{2}, \\ k + 1 - 2i & jika\ i \equiv 0(mod\ 3) \quad dan\ 3 \leq i \leq \dfrac{k-1}{2}. \end{cases}$$

$$r_i = \begin{cases} 2k + 4 - 2i & jika\ i \equiv 1(mod\ 3) \quad dan\ \dfrac{k+5}{2} \leq i \leq k + 1, \\ 2k + 1 - 2i & jika\ i \equiv 2(mod\ 3) \quad dan \dfrac{k+7}{2} \leq i \leq k - 1, \\ 2k + 1 - 2i & jika\ i \equiv 0(mod\ 3) \quad dan \dfrac{k+3}{2} \leq i \leq k\,. \end{cases}$$

Kasus 3 : k + 1≡ 0 (mod 6)

Untuk k ≥ 5, dikonstruksikan barisan $\mathfrak{R} = \{ r_i \mid 1 \leq i \leq k+1 \}$dengan cara berikut :

$$r_i = \begin{cases} k & jika\, i = 1, \\ k-2 & jika\, i = 2\,, \\ k+3 & jika\, i = \dfrac{k+1}{2}, \\ k-3 & jika\, i = \dfrac{k+3}{2}\,, \\ k-1 & jika\, i = \dfrac{k+5}{2}, \\ k-4 & jika\, i = \dfrac{k+7}{2}. \end{cases}$$

$$r_i = \begin{cases} k+1-2i & jika\, i \equiv 1 (mod\, 3) & dan\, 4 \leq i \leq \dfrac{k-1}{2}\,, \\ k+4-2i & jika\, i \equiv 2 (mod\, 3) & dan\, 5 \leq i \leq \dfrac{k-1}{2}, \\ k+1-2i & jika\, i \equiv 0 (mod\, 3) & dan\, 3 \leq i \leq \dfrac{k-1}{2}. \end{cases}$$

$$r_i = \begin{cases} 2k+1-2i & jika\, i \equiv 1 (mod\, 3) & dan \dfrac{k+9}{2} \leq i \leq k-1, \\ 2k+1-2i & jika\, i \equiv 2 (mod\, 3) & dan \dfrac{k+11}{2} \leq i \leq k, \\ 2k+4-2i & jika\, i \equiv 2 (mod\, 3) & dan \dfrac{k+13}{2} \leq i \leq k+1. \end{cases}$$

Dapat disimpulkan bahwa untuk semua kasus, barisan $\mathfrak{B} + \mathfrak{R}$ yang terdiri dari bilangan bulat berurutan. ■

Contoh 2.1: Misalkan diberikan k = 13, akan ditunjukkan bahwa untuk

$\mathfrak{B} = \{c, c+1, c+2, c+5, c+8, c+9, c+10, c+11, c+12, c+13, c+14\}$, terdapat $\mathfrak{R} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 14\}$, sehingga $\mathfrak{B} + \mathfrak{R}$ terdiri dari bilangan bulat berurutan. Karena $13 + 1 \equiv 2(mod\ 6)$, maka pembuktian menggunakan *Kasus 1.*

$$\mathfrak{B} = \{ p_i | p_i = c - 1 + 1, 1 \leq i \leq 7\} \cup \{ p_i \mid p_i = c + 1, 8 \leq i \leq 14\}$$

$$= \{ c, c + 1, c + 2, c + 3, c + 4, c + 5\} \cup \{ c + 8, c + 9, \ldots\ldots, c + 14 \}.$$

sementara himpunan $\mathfrak{R}$ dikontruksikan sebagai berikut:

$$r_i = \begin{cases} 14 - 2i, i & \equiv 1\ (mod\ 3); 1 \leq i < 6, \\ 14 - 2i, i & \equiv 2\ (mod\ 3); 2 \leq i \leq 6, \\ 17 - 2i, i & \equiv 0\ (mod\ 3); 3 \leq i \leq 6. \end{cases}$$

- $r_i = 14 - 2i, i \equiv 1\ mod\ 3,\ 1 \leq i < 6$

  $$r_i = 6, 12\ untuk\ i = 4, 1$$

- $r_i = 14 - 2i, i \equiv 2\ mod\ 3,\ 2 \leq i < 6$

  $$r_i = 4, 10\ untuk\ i = 2, 5$$

- $r_i = 17 - 2i, i \equiv 0\ mod\ 3, 3 \leq i < 6$

  $$r_i = 5{,}11\ untuk\ i = 3{,}6$$

- $r_i = \begin{cases} 14, i = 7 \\ 13, i = 8 \end{cases}$

- $r_i = 27 - 2i, i \equiv 0\ mod\ 3,\ 9 \leq i \leq 12$

  $$r_i = 3{,}9\ untuk\ i = 9, 12$$

- $r_i = 27 - 2i,\ i \equiv 1\ mod\ 3,\ 10 \leq i \leq 13$

  $$r_i = 1, 7\ untuk\ i = 10, 13$$

- $r_i = 30 - 2i, i \equiv 2\ mod\ 3,\ 11 \leq i \leq 14$

  $$r_i = 2, 8\ untuk\ i = 11, 14 \qquad \blacksquare$$

BAB III

PELABELAN TOTAL $(a, 1)$-SISI ANTI AJAIB SUPER PADA GRAF ULAT

Pada bab ini akan dijelaskan tentang pelabelan total $(a, 1)$-sisi antiajaib super pada graf ulat. Kajian dibagi menjadi dua kasus, yaitu banyak titik ganjil dan genap.

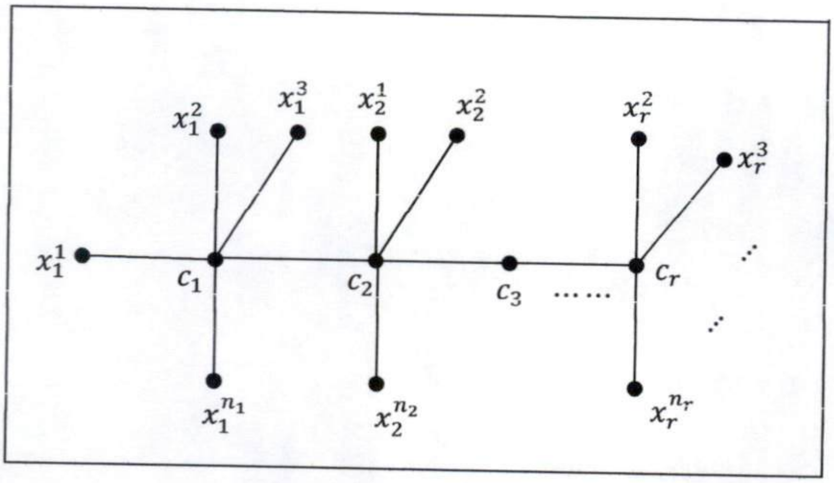
Teorema 3.1 *Jika banyaknya v titik genap, maka graf ulat dengan v titik mempunyai pelabelan total $(a, 1)$-sisi antiajaib super .*

Bukti :

Misalkan G adalah graf ulat $Sn_1, n_2, \cdots, n_r$ dengan banyaknya titik v genap. Pandang graf G sebagai graf bipartit dari graf ulat $Sn_1, n_2, \cdots, n_r$.Titik-titik $a_{1,} a_{2,\ldots,} a_t$ merupakan titik-titik di baris pertama, diurutkan dari kanan ke kiri. Sementara titik-titik $b_{1,} b_{2,\ldots,} b_{v-t}$ merupakan titik-titik di baris kedua yang diurutkan dari kiri ke kanan.

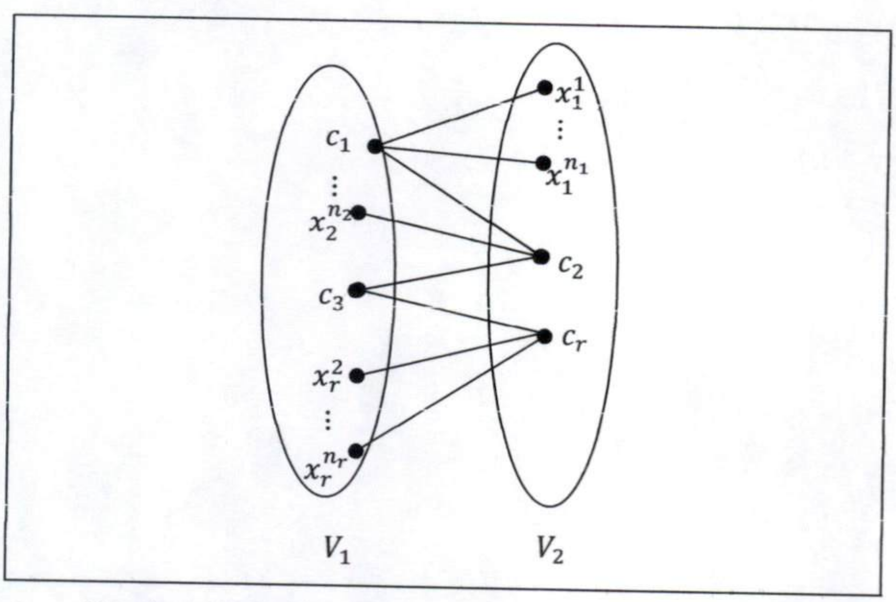
Misal $G = (V_1, V_{2,} E)$ adalah graf bipartit yang berasal dari graf $S_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$, dimana $V_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_t\}$ dan $V_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_{v-t}\}$, seperti terlihat pada gambar 3.1.2

Berikut ilustrasi graf ulat $S_{n_1,n_2,\dots,n_r}$ dengan banyaknya titik v genap.



Gambar 3.1.1 Graf Ulat $S_{n_1,n_2,\dots,n_r}$

Maka $S_{n_1,n_2,\dots,n_r}$ dapat disajikan sebagai graf bipartit berikut:



Gambar 3.1.2 Graf Bipartit dari Graf Ulat $S_{n_1,n_2,\dots,n_r}$

Konstruksikan pelabelan titik $\lambda: V(G) \rightarrow \{1,2,\dots,v\}$ graf ulat $S_{n_1,n_2,\dots,n_r}$ dengan cara sebagai berikut:

a). $\lambda(a_i) = i\ untuk\ 1 \le i \le t,$

b). $\lambda(b_j) = t + j\ untuk\ 1 \le j \le v - t.$

maka diperoleh himpunan bobot sisi terhadap pelabelan titik tersebut adalah:

$$\bigcup_{xy \in (G)} \{w(xy)\} = \lambda(a_i) \bigcup \{t+1, t+2, \dots,, t+(v-t)\},$$

$$= \{1,2,\dots,t\} \cup \{t+1, t+2, \dots, v\},$$

$$= \{t+2, t+3, \dots, t+v\}.$$

Dapat dilihat bahwa pelabelan yang dihasilkan adalah pelabelan $(t+2,1)$-sisi antiajaib. dengan $a = t + 2$ dan $k = (v - 2)$.

Menurut Lema 2.4.1, terdapat permutasi $\prod(\mathfrak{A})$ dari anggota-anggota $\mathfrak{A}$ sedemikian sehingga

$$[\mathfrak{A}(\Pi)\mathfrak{A} - a + v + 1] = \left\{a + \frac{3v}{2} + 1, a + \frac{3v}{2} + 2, \dots, a + \frac{5v}{2} - 2\right\}.$$

Jika $[\mathfrak{A}(\Pi)\mathfrak{A} - a + v + 1]$ adalah himpunan sisi dari G, maka

$\mathfrak{A} + [\mathfrak{A}(\Pi)\mathfrak{A} - a + v + 1]$ adalah himpunan bobot sisi dari G, yaitu:

$$\mathfrak{A} + [\mathfrak{A}(\Pi)\mathfrak{A} - a + v + 1] = \left\{2a + \frac{k}{2}, 2a + \frac{k}{2} + 1, 2a + \frac{k}{2} + 2, \dots, 2a + \frac{3k}{2} - 2\right\} - (a + v + 1),$$

$$= \left\{2a + \frac{v-2}{2}, 2a + \frac{v-2}{2} + 1, 2a + \frac{v-2}{2} + 2, \dots, 2a + \frac{3(v-2)}{2} - 2\right\} - (a + v + 1),$$

$$= \left\{2a + \frac{v-2}{2} - a + v + 1, 2a + \frac{v-2}{2} + 1 - a + v + 1, 2a + \frac{v-2}{2} + 2 - a + v + 1, \dots, 2a + \frac{3(v-2)}{2} - 2 - a + v + 1\right\},$$

$$= \left\{2a - a + \frac{v-2}{2} + v + 1, 2a - a + \frac{v-2}{2} + 1 + v + 1, 2a - a + \frac{v-2}{2} + 2 + v + 1, \dots, 2a - a + \frac{3(v-2)}{2} + v + 1 - 2\right\},$$

$$= \left\{a + \frac{v-2}{2} + v + 1, a + \frac{v-2}{2} + v + 2, a + \frac{v-2}{2} + 3 + v, \dots, a + \frac{3v-6}{2} + v + 1\right\},$$

$$= \left\{a + \frac{v-2+2v+2}{2}, a + \frac{v-2+2v+4}{2}, a + \frac{v-2+2v+6}{2}, \dots, a + \frac{3v-6+2v+2}{2}\right\},$$

$$= \left\{a + \frac{3v}{2}, a + \frac{3v}{2} + 1, a + \frac{3v}{2} + 2, \dots, a + \frac{5v}{2} - 2\right\}.$$

Dapat dilihat bahwa pelabelan total tersebut merupakan pelabelan $(a + \frac{3v}{2}, 1)$ sisi anti ajaib super . ■

Untuk lebih jelas, diberikan contoh dari Teorema 3.1 sebagai berikut:

Contoh 3.1

Misal diberikan pelabelan total (27,1)-sisi antiajaib super pada graf ulat $S_{4,5,2,3}$.

Himpunan titik dan sisi pada $S_{4,5,2,3}$ didefinisikan sebagai berikut :

$$V(S_{4,5,2,3}) = \{c_i \mid 1 \leq i \leq 4\} \cup \{x_1^j \mid 1 \leq j \leq 3\} \cup \{x_4^j \mid 2 \leq j \leq 3\}$$
$$\cup \{x_2^j \mid 2 \leq j \leq 4\}$$

$$= \{c_1, c_2, c_3, c_4\} \cup \{x_1^1, x_1^2, x_1^3\} \cup \{x_4^2, x_4^3\} \cup \{x_2^2, x_{2,}^3 x_2^4\}$$

$$E(S_{4,5,2,3}) = \{c_i c_{i+1} \mid 1 \leq i \leq 3\} \cup \{c_1 x_1^j \mid 1 \leq j \leq 3\} \cup \{c_4 x_4^j \mid 2 \leq j3\} \cup$$
$$\{c_2 x_2^j \mid 2 \leq j \leq 4\}$$

$$= \{c_1 c_2, c_2 c_3, c_3 c_4\} \cup \{c_1 x_1^1, c_1 x_1^2, c_1 x_1^3\} \cup \{c_4 x_4^2, c_4 x_4^3\} \cup$$
$$\{c_2 x_2^2, c_2 x_2^3, c_2 x_2^4\}$$

Dimana $\quad |V(S_{4,5,2,3})| = \sum_{i=1}^{4} n_i - r + 2$

$$= (4 + 5 + 2 + 3) - 4 + 2$$

$$= 12$$

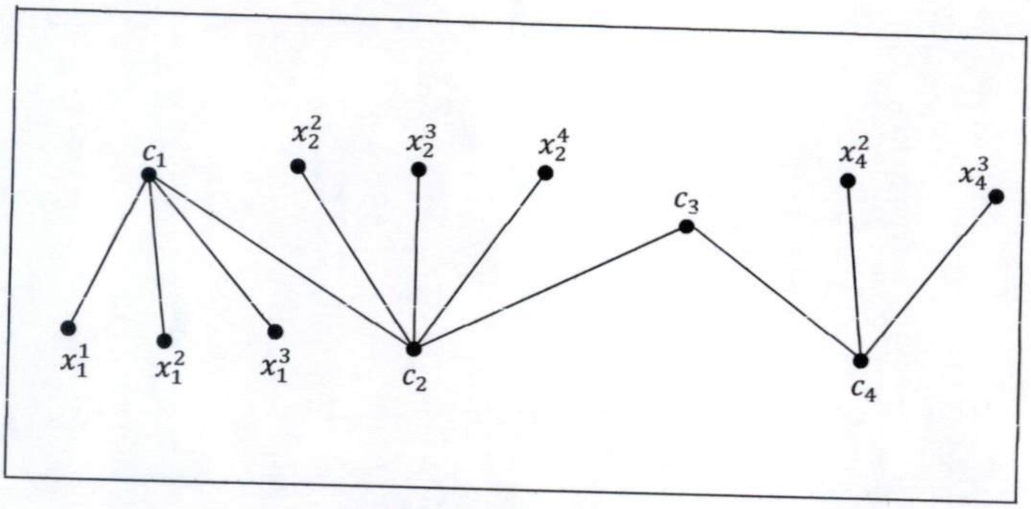
$$|E(S_{4,5,2,3})| = \sum_{i=1}^{4} n_i - r + 1$$

$$= (4 + 5 + 2 + 3) - 4 + 1$$

$$= 11$$

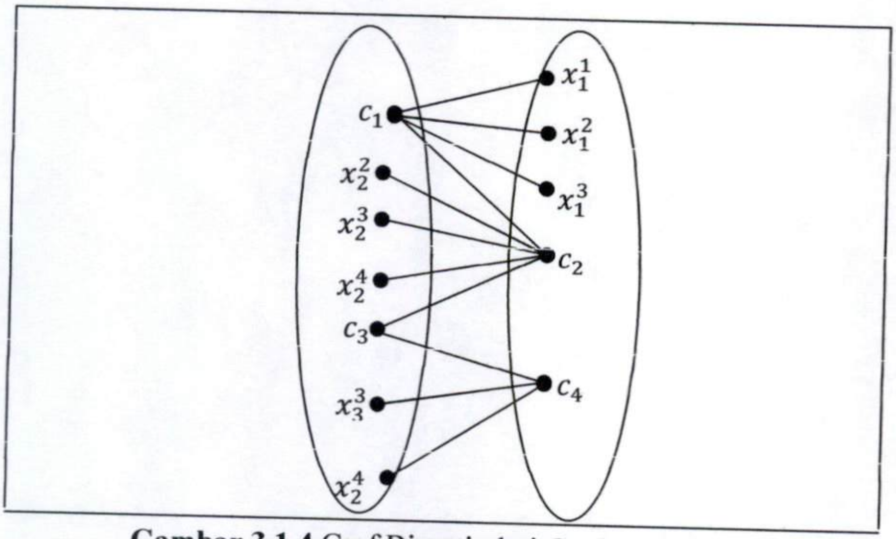
Karena pelabelan yang diberikan adalah pelabelan super, maka himpunan label untuk titik-titik di $S_{4,5,2,3}$ adalah $V = \{1,2,\cdots,12\}$ dan himpunan label untuk sisi-sisi di $S_{4,5,2,3}$ adalah $E = \{13,14,\cdots,23\}$.

Konstruksikan pelabelan pada titik-titik graf $S_{4,5,2,3}$ sebagai berikut:



Gambar 3.1.3 Graf Ulat $S_{4,5,2,3}$

Graf bipartit dari graf ulat $S_{4,5,2,3}$ adalah :



Gambar 3.1.4 Graf Bipartit dari Graf Ulat $S_{4,5,2,3}$

Langkah-langkah pelabelan pada graf ulat $S_{4,5,2,3}$ sebagai berikut:

a. Berikan pengaitan $f : V(\ S_{4,5,2,3}) \rightarrow \{1,2, \dots, v\}$:

Konstruksikan sebuah pelabelan graf ulat $S_{4,5,2,3}$ sebagai berikut:

- $\lambda(a_i\ ) = i, untuk\ 1 \leq i \leq 7$, dimana

$$a_1 = c_1, \quad \lambda(a_1) = 1$$

$$a_2 = x_2^2, \quad \lambda(a_2) = 2$$

$$a_3 = x_2^3, \quad \lambda(a_3) = 3$$

$$a_4 = x_2^4, \quad \lambda(a_4) = 4$$

$$a_5 = c_3, \quad \lambda(a_5) = 5$$

$$a_6 = x_4^2, \quad \lambda(a_6) = 6$$

$$a_7 = x_4^3, \quad \lambda(a_7) = 7$$

- $\lambda(b_j) = 7 + j, untuk\ 1 \leq j \leq v - 7$

$$b_1 = x_1^1, \quad \lambda(b_1) = 8$$

$$b_2 = x_1^2, \quad \lambda(b_2) = 9$$

$$b_3 = x_1^3, \quad \lambda(b_3) = 10$$

$$b_4 = c_2, \quad \lambda(b_4) = 11$$

$$b_5 = c_4, \quad \lambda(b_5) = 12$$

b. Labeli sisi-sisi dengan cara sebagai berikut:

- Pandang pelabelan titik pada bagian a,

- Label sisi terkecil diletakkan pada label dua titik terbesar dipartisi $\lambda(a_i)$ dan $\lambda(b_j)$, sebagai berikut :

$\lambda(c_4x_4^3) = 13$

$\lambda(c_4x_4^2) = 19$

$\lambda(c_4c_3) = 14$

$\lambda(c_2c_3) = 20$

$\lambda(c_2x_2^4) = 15$

$\lambda(c_2x_2^3) = 21$

$\lambda(c_2x_2^2) = 16$

$\lambda(c_2c_1) = 22$

$\lambda(c_1x_1^3) = 17$

$\lambda(c_1x_1^2) = 23$

$\lambda(c_1x_1^1) = 18$

- Bobot sisi pada pelabelan titik tersebut adalah $w(c_0, x_i^j) = \lambda(c_0) + \lambda(x_i^j)$ untuk setiap $i = 1,2,\dots,11$. Untuk melengkapi pelabelan menjadi pelabelan total, lihat bobot sisi untuk masing-masing sisi sebagai berikut:
    1. $w(c_1x_1^1) = \lambda(c_1) + \lambda(x_1^1) = 1 + 8 = 9$
    2. $w(c_1x_1^2) = \lambda(c_1) + \lambda(x_1^2) = 1 + 9 = 10$
    3. $w(c_1x_1^3) = \lambda(c_1) + \lambda(x_1^3) = 1 + 10 = 11$
    4. $w(c_1c_2) = \lambda(c_1) + \lambda(c_2) = 1 + 11 = 12$

5. $w(c_2x_2^2) = \lambda(c_2) + \lambda(x_2^2) = 11 + 2 = 13$

6. $w(c_2x_2^3) = \lambda(c_2) + \lambda(x_2^3) = 11 + 3 = 14$

7. $w(c_2x_2^4) = \lambda(c_2) + \lambda(x_2^4) = 11 + 4 = 15$

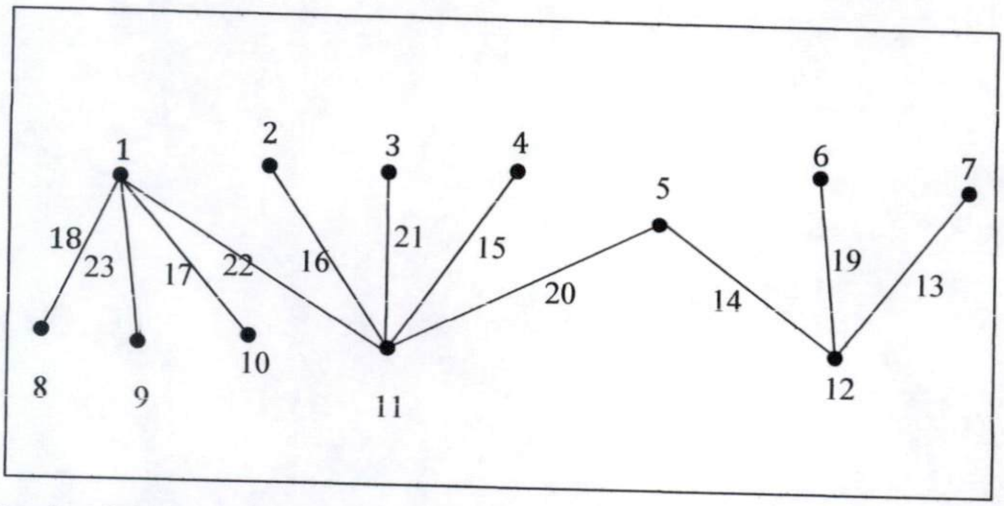
8. $w(c_2c_3) = \lambda(c_2) + \lambda(c_3) = 11 + 5 = 16$

9. $w(c_3c_4) = \lambda(c_3) + \lambda(c_4) = 5 + 12 = 17$

10. $w(c_4x_4^2) = \lambda(c_4) + \lambda(x_4^2) = 12 + 6 = 18$

11. $w(c_4x_4^3) = \lambda(c_4) + \lambda(x_4^3) = 12 + 7 = 19$

Dapat dilihat bahwa bobot sisi terbesar adalah 19, yaitu pada sisi $c_4\, x_4^3$.



Gambar 3.1.5: Pelabelan total $(27,1)$-sisi antiajaib super untuk graf ulat $S_{4,5,2,3}$

Maka diperoleh himpunan bobot sisi pada pelabelan total $(27,1)$-sisi antiajaib super untuk graf ulat $S_{4,5,2,3}$ sebagai berikut :

- $w_1 = \lambda(c_1) + \lambda(x_1^1) + \lambda(c_1x_1^1) = 1 + 8 + 18 = 27$
- $w_2 = \lambda(c_1) + \lambda(x_1^2) + \lambda(c_1x_1^2) = 1 + 9 + 23 = 33$

- $w_3 = \lambda(c_1) + \lambda(x_1^3) + \lambda(c_1x_1^3) = 1 + 10 + 17 = 28$
- $w_4 = \lambda(c_1) + \lambda(c_2) + \lambda(c_1c_2) = 1 + 11 + 22 = 34$
- $w_5 = \lambda(c_2) + \lambda(x_2^2) + \lambda(c_2x_2^2) = 11 + 2 + 16 = 29$
- $w_6 = \lambda(c_2) + \lambda(x_2^3) + \lambda(c_2x_2^3) = 11 + 3 + 21 = 35$
- $w_7 = \lambda(c_2) + \lambda(x_2^4) + \lambda(c_2x_2^4) = 11 + 4 + 15 = 30$
- $w_8 = \lambda(c_2) + \lambda(c_3) + \lambda(c_2c_3) = 11 + 5 + 20 = 36$
- $w_9 = \lambda(c_4) + \lambda(c_3) + \lambda(c_4c_3) = 12 + 5 + 14 = 31$
- $w_{10} = \lambda(c_4) + \lambda(x_4^2) + \lambda(c_4x_4^2) = 12 + 6 + 19 = 37$
- $w_{11} = \lambda(c_4) + \lambda(x_4^3) + \lambda(c_4x_4^3) = 12 + 7 + 13 = 32$

Jadi diperoleh himpunan bobot sisi $W = \{27,28,29,\dots,37\}$ dengan $d = 1$ ∎

Teorema 3.2 *Terdapat pelabelan total* $(a, 1)$*-sisi antiajaib super untuk graf ulat dengan banyak titik ganjil.*

Bukti :

Misalkan terdapat graf ulat $Sn_1,n_2, \dots ,n_r$, dengan banyak titik v adalah ganjil. Urutkan titik-titik dari $Sn_1,n_2, \dots ,n_r$, menjadi barisan c_1, x_1^1, x_1^2, . . . ,x^{n_1-1}, c_2,x_1^2, x_2^2, . . . ,x^{n_2-1}, c_3,x_3^2, x_3^3, . . . ,x^{n_3-1}, c_4, . . . ,c_r, x_r^2, x_r^3, . . . ,$x_r^{n_r}$.

Selanjutnya konstruksikan pelabelan titik λ: V $(Sn_1,n_2, \dots ,n_r) \rightarrow \{1,2,\dots,v\}$ sebagai berikut :

Langkah 1 : Pilih sebuah titik dari barisan pada posisi $\frac{v+1}{2} + 1$, kemudian labelkan titik tersebut dengan 1.

Kasus 1a :

1. Jika titik yang di pilih adalah titik pusat c_i, maka daun-daun pada $S_{n_{i+1}}$ di labeli berturut-turut dengan 2, 3, 4,… , kecuali untuk titik c_i termasuk titik c_{i+2}.
2. Selanjutnya pelabelan di lakukan terhadap daun-daun $S_{n_{i+3}}$, kecuali titik c_{i+2} dan termasuk titik c_{i+4}.
3. Pelabelan diteruskan hingga titik pusat c_r atau daun pada s_{n_r} telah di labeli.

Perhatikan bahwa daun dari sebarang S_{n_i} dilabeli sesuai urutan dari barisan yaitu C_{i-1} menerima label terkecil dan $x_i^{ni} = C_{i+1}$ menerima label terbesar.

Kasus 1b :

1. Jika titik yang dipilih adalah x_i^j maka titik x_i^{j+1}, x_i^{j+2}, … ,$x_i^{n_i-1}$ dan titik pusat c_{i+1} diberi label dengan nilai berturut-turut 2, 3, 4, . . .
2. Selanjutnya daun pada graf bintang $S_{n_{i+2}}$ diberi label kecuali c_{i+1} termasuk c_{i+3}.
3. Labeli daun pada graf bintang $S_{n_{i+4}}$ kecuali c_{i+3} termasuk c_{i+5}, seterusnya sampai titik pusat c_r daun pada graf bintang S_{n_r} diberi label.

Langkah 2 : Pelabelan dilanjutkan dengan memberikan label pada titik-titik diawal barisan.

Kasus $2a$:

1. Jika titik pusat c_i telah di pilih pada langkah 1 dan i adalah $ganjil$ (atau i adalah $genap$), maka daun-daun pada graf bintang S_{n_1} dilabeli, termasuk c_2 (atau daun-daun S_{n_2} termasuk c_1 dan c_3).
2. Kemudian daun-daun pada S_{n_t} dilabeli, termasuk c_{i+1}, kecuali c_{i-1}, untuk $t = 3,5,7 \ldots$ (atau $t = 4,6,8, \ldots$).
3. Setelah daun-daun pada S_{n_r} dilabeli, termasuk titik pusat c_r, selanjutnya daun pada graf bintang S_{n_2} dilabeli, termasuk c_1 dan c_3 (daun S_{n_1} termasuk c_2) bintang S_{n_i}.
4. Selanjutnya, daun-daun dari bintang S_{n_p} dilabeli, termasuk c_{p+1}, kecuali c_{p-1}, $p = 4,6,8, \ldots$ (atau $p = 3,5,7, \ldots$).
5. Proses dilanjutkan hingga daun-daun pada graf bintang $S_{n_{i-1}}$ dilabeli, kecuali c_i .

Kasus 2b : Jika titik x_i^j yang dipilih pada langkah 1 adalah x_i^j dengan i $ganjil$ (i $genap$).

1. Pelabelan dimulai dengan melabelkan daun-daun graf bintang S_{n_2}, termasuk c_1 dan c_3, (daun-daun S_{n_1} termasuk c_2) pada graf bintang.

2. Selanjutnya daun-daun graf bintang S_{n_t} dilabeli, termasuk c_{t+1} kecuali c_{t-1} , $t = 4, 6, 8, \ldots$ (atau t = 3, 5,7, . . .).
3. Setelah daun-daun pada graf bintang S_{n_r} dilabeli, pelabelan dilanjutkan dengan melabelkan graf bintang S_{n_1}, termasuk c_2 (daun S_{n_2} termasuk c_1 dan c_3), daun pada bintang S_{n_2}.
4. Selanjutnya dengan melabeli daun graf bintang dari S_{n_p},. termasuk c_{p+1}, kecuali c_{p-1}, $p = 3, 5, 7, \ldots$ (atau $p = 4, 6, 8, \ldots$) dan seterusnya sampai titik terakhir sebelum pelabelan x_i dilabeli.

Himpunan bobot sisi dari semua sisi pada $Sn_1, n_2, \ldots, n_r$ pada pelabelan titik λ, dapat dilihat sebagai barisan $\mathfrak{B} = \left\{a, a+1, a+2, \ldots, a+\frac{k-3}{2}, a+\frac{k-1}{2}, a+\frac{k+3}{2}, a+\frac{k+5}{2}, \ldots a+k+1\right\}$ untuk $k = v - 2$. Dari Lema 2, terdapat suatu barisan pada bilangan bulat terurut $\mathfrak{R} = \{1, 2, 3, \ldots, k+1\}$ sedemikian sehingga $\mathfrak{B}$ + $[\mathfrak{R} + v]$ terdiri dari bilangan bulat terurut.

Jika $[\mathfrak{R} + v]$ adalah pelabelan sisi pada $Sn_1, n_2, \ldots, n_r$ maka $\mathfrak{B}$ + $[\mathfrak{R} + v]$ merupakan himpunan bahwa bobot sisi dari graf ulat $Sn_1, n_2, \ldots, n_r$ sehingga dapat dilihat bahwa graf ulat dengan banyak titik ganjil mempunyai pelabelan (a,1)-sisi anti ajaib super. ■

Untuk lebih jelas, diberikan contoh dari Teorema 3.2 sebagai berikut:

Contoh 3.2

Akan ditunjukkan bahwa graf ulat $S_{3,4,5,5,3,3}$ mempunyai pelabelan total sisi anti ajaib super $(37,1)$.

Himpunan titik dan sisi pada $S_{3,4,5,5,3,3}$ didefinisikan sebagai berikut :

$$V(S_{3,4,5,5,3,3}) = \{c_i \mid 1 \le i \le 6\} \cup \{x_2^j \mid 2 \le j \le 3\} \cup \{x_3^j \mid 2 \le j \le 4\}$$

$$\cup \{x_4^j \mid 2 \le j \le 4\} \cup \{x_5^j \mid 2 \le j \le 2\} \cup \{x_1^j \mid 1 \le j \le 2\}$$

$$\cup \{x_6^j \mid 2 \le j \le 3\}$$

$$= \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\} \cup \{x_2^2, x_2^3\} \cup \{x_3^2, x_3^3, x_3^4\} \cup \{x_4^2, x_4^3, x_4^4\} \cup \{x_5^2\}$$

$$\cup \{x_1^1, x_1^2\} \cup \{x_6^2, x_6^3\}$$

$$E(S_{3,4,5,5,3,3}) = \{c_i c_{i+1} \mid 1 \le i \le 5\} \cup \{c_1 x_1^j \mid 1 \le j \le 2\} \cup \{c_6 x_6^j \mid 2 \le j \le 3\}$$

$$\cup \{c_2 x_2^j \mid 2 \le j \le 3\} \cup \{c_3 x_3^j \mid 2 \le j \le 4\} \cup \{c_4 x_4^j \mid 2 \le j \le 4\}$$

$$\cup \{c_5 x_5^j \mid 2 \le j \le 2\}$$

$$= \{c_1c_2, c_2c_3, c_3c_4, c_4c_5, c_5c_6\} \cup \{c_1x_1^1, c_1x_1^2\} \cup \{c_6x_6^2, c_6x_6^3\} \cup$$

$$\{c_2x_2^2, c_2x_2^3\} \cup \{c_3x_3^2, c_3x_3^3, c_3x_3^4\} \cup \{c_4x_4^2, c_4x_4^3, c_5x_4^4\} \cup \{c_5x_5^2\}$$

dimana

$$|V(S_{3,4,5,5,3,3})| = \sum_{i=1}^{6} n_i - r + 2$$

$$= (3+4+5+5+3+3) - 6 + 2$$

$$= 19$$

$$|E(S_{3,4,5,5,3,3})| = \sum_{i=1}^{6} n_i - r + 1$$

$$= (3+4+5+5+3+3) - 6 + 1$$

$$= 18$$

Karena pelabelan yang diberikan adalah pelabelan super, maka himpunan label untuk titik-titik di $S_{3,4,5,5,3,3}$ adalah $A = \{1,2,\cdots,19\}$ dan himpunan label untuk sisi-sisi di $S_{3,4,5,5,3,3}$ adalah $B = \{20,21,\cdots,37\}$.

Himpunan bobot sisi pada graf ulat $S_{3,4,5,5,3,3}$ adalah :

$W = \{w_v | v = 1,2,\cdots,18\}$,dimana

$$w_i = a + (v-2)d \tag{3.1}$$

Karena $a = 37$ dan $d = 1$ maka persamaan (3.1) menjadi:

$$w_i = 37 + (v-2)1$$

$$= 37 + v - 2$$

$$= 35 + v, \qquad untuk\ i = 1,2,\cdots,18$$

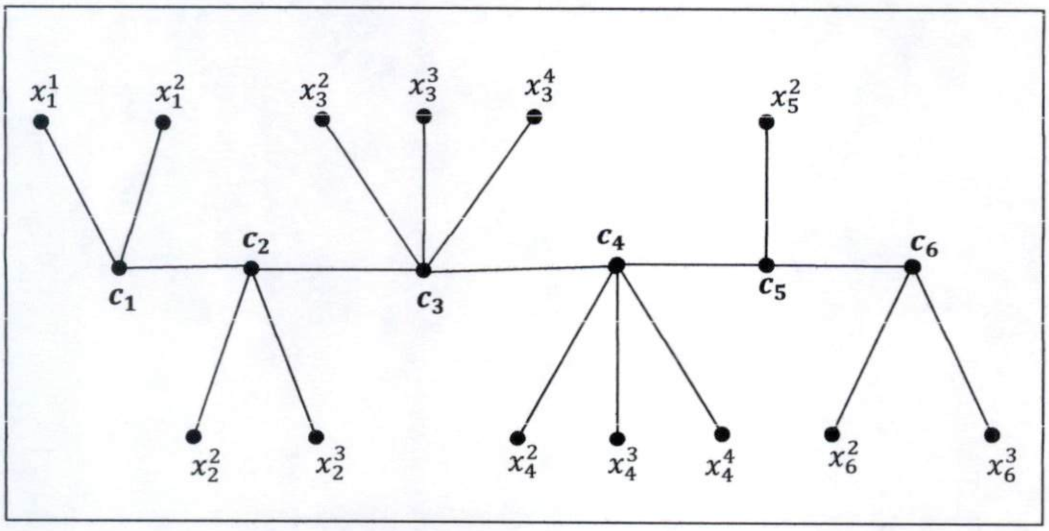
Konstruksikan sebuah pelabelan $\lambda : V\,(S_{3,4,5,5,3,3}) \to \{1,2,\dots,37\}$ untuk $d = 1$ sebagai berikut:

a. Pandang langkah 1, dimana posisi $\frac{19+1}{2} + 1$ di labeli dengan 1 berada pada posisi ke-11 yaitu pada titik pusat c_4.

b. Selanjutnya sesuai dengan kasus $1.a$, labeli daun - daun S_{4+1} dengan label 2,3.

c. Kemudian kasus $2a$, titik pusat yang dipilih adalah titik pusat dengan r genap, Selanjutnya labeli daun – daun S_{n_2} termasuk c_1 dan c_3 dengan label 4,5,6,7. Selanjutnya daun – daun S_{n_4} termasuk titik pusat c_5 kecuali titik pusat c_3 dilabeli dengan label 8,9,10,11 dan daun – daun S_{n_6} dengan label 11,12,13. Selanjutnya daun – daun S_{n_1} dan S_{n_3} dilabeli dengan label 14,15,…,19.

Berikut ini disajikan graf ulat $S_{3,4,5,5,3,3}$ yang belum diberi label :

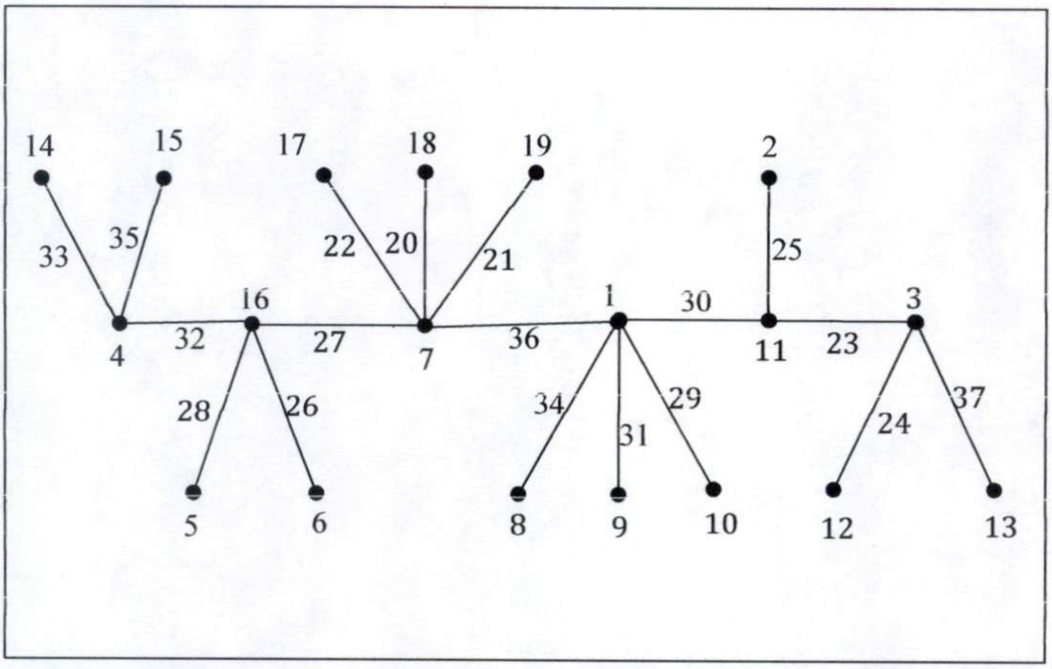


Gambar 3.2.1 : Graf Ulat $S_{3,4,5,5,3,3}$

Dari kontruksi pelabelan $\lambda : V\ (S_{3,4,5,5,3,3}) \to \{1,2,\ldots,37\}$ untuk $d = 1$ telah diperoleh label untuk himpunan titik . Selanjutnya untuk melengkapi pelabelan menjadi pelabelan total, terlebih dahulu dilihat bobot sisi untuk masing-masing sisi sebagai berikut:

1. $w(c_4, c_3) = \lambda(c_4) + \lambda(c_3) = 1 + 7 = 8$
2. $w(c_4, x_4^2) = \lambda(c_4) + \lambda(x_4^2) = 1 + 8 = 9$
3. $w(c_4, x_4^3) = \lambda(c_4) + \lambda(x_4^3) = 1 + 9 = 10$
4. $w(c_4, x_4^4) = \lambda(c_4) + \lambda(x_4^4) = 1 + 10 = 11$
5. $w(c_4, c_5) = \lambda(c_4) + \lambda(c_5) = 1 + 11 = 12$
6. $w(c_5, x_5^2) = \lambda(c_5) + \lambda(x_5^2) = 11 + 2 = 13$
7. $w(c_5, c_6) = \lambda(c_5) + \lambda(c_6) = 11 + 3 = 14$
8. $w(c_6, x_6^2) = \lambda(c_6) + \lambda(x_6^2) = 3 + 12 = 15$
9. $w(c_6, x_6^3) = \lambda(c_6) + \lambda(x_6^3) = 3 + 13 = 16$
10. $w(c_1, x_1^1) = \lambda(c_1) + \lambda(x_1^1) = 4 + 14 = 18$
11. $w(c_1, x_1^2) = \lambda(c_1) + \lambda(x_1^2) = 4 + 15 = 19$
12. $w(c_1, c_2) = \lambda(c_1) + \lambda(c_2) = 4 + 16 = 20$
13. $w(c_2, x_2^2) = \lambda(c_2) + \lambda(x_2^2) = 16 + 5 = 21$
14. $w(c_2, x_2^3) = \lambda(c_1) + \lambda(x_1^2) = 4 + 15 = 22$
15. $w(c_2, c_3) = \lambda(c_2) + \lambda(c_3) = 16 + 7 = 23$
16. $w(c_3, x_3^2) = \lambda(c_3) + \lambda(x_3^2) = 7 + 17 = 24$
17. $w(c_3, x_3^3) = \lambda(c_3) + \lambda(x_3^3) = 7 + 18 = 25$

18. $w(c_3, x_3^4) = \lambda(c_3) + \lambda(x_3^4) = 7 + 19 = 26$



Gambar 3.2.2 : Pelabelan Total (37,1)-Sisi Antiajaib Super Untul Graf Ulat

Selanjutnya diperoleh himpunan bobot sisi untuk pelabelan total *(37,1)*-sisi antiajaib super untuk graf ulat $S_{3,4,5,5,3,3}$ sebagai berikut:

- $w_1 = \lambda(c_1) + \lambda(x_1^1) + \lambda(c_1)\lambda(x_1^1) = 4 + 14 + 33 = 51$
- $w_2 = \lambda(c_1) + \lambda(x_1^2) + \lambda(c_1)\lambda(x_1^2) = 4 + 15 + 35 = 54$
- $w_3 = \lambda(c_1) + \lambda(c_2) + \lambda(c_1)\lambda(c_2) = 4 + 16 + 32 = 52$
- $w_4 = \lambda(c_2) + \lambda(x_2^2) + \lambda(c_2)\lambda(x_2^2) = 16 + 5 + 28 = 49$
- $w_5 = \lambda(c_2) + \lambda(x_2^3) + \lambda(c_2)\lambda(x_2^3) = 16 + 6 + 26 = 48$
- $w_6 = \lambda(c_2) + \lambda(c_3) + \lambda(c_2)\lambda(c_3) = 16 + 7 + 27 = 50$
- $w_7 = \lambda(c_3) + \lambda(x_3^3) + \lambda(c_3)\lambda(x_3^3) = 7 + 17 + 22 = 46$

- $w_8 = \lambda(c_3) + \lambda(x_3^4) + \lambda(c_3)\lambda(x_3^4) = 7 + 18 + 20 = 45$
- $w_9 = \lambda(c_3) + \lambda(x_3^5) + \lambda(c_3)\lambda(x_3^5) = 7 + 19 + 21 = 47$
- $w_{10} = \lambda(c_3) + \lambda(c_4) + \lambda(c_3)\lambda(c_4) = 7 + 1 + 36 \ = 44$
- $w_{11} = \lambda(c_1) + \lambda(x_4^4) + \lambda(c_1)\lambda(x_4^4) = 1 + 8 + 34 \ = 43$
- $w_{12} = \lambda(c_4) + \lambda(x_4^5) + \lambda(c_4)\lambda(x_4^5) = 1 + \ 9 + 31 = 41$
- $w_{13} = \lambda(c_4) + \lambda(x_4^6) + \lambda(c_4)\lambda(x_4^6) = 1 + 10 + 29 = 40$
- $w_{14} = \lambda(c_4) + \lambda(c_5) + \lambda(c_4)\lambda(c_5) \ = 1 + 11 + 30 = 42$
- $w_{15} = \lambda(c_5) + \lambda(x_5^5) + \lambda(c_5)\lambda(x_5^5) = 11 + 2 + 25 = 38$
- $w_{16} = \lambda(c_5) + \lambda(c_5) + \lambda(c_5)\lambda(c_5) \ = 11 + 3 + 23 = 37$
- $w_{17} = \lambda(c_6) + \lambda(x_6^6) + \lambda(c_6)\lambda(x_6^6) = 3 + 12 + 24 = 39$
- $w_{18} = \lambda(c_6) + \lambda(x_6^7) + \lambda(c_6)\lambda(x_6^7) = 3 + 13 + 37 = 53$

Maka diperoleh himpunan bobot sisi yang membentuk barisan aritmatika yaitu $W = \{37,38,39,40, \dots ,53\}$ ■

BAB IV

KESIMPULAN

Graf bintang (*star*) S_n adalah suatu graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat $n+1$ yang disebut dengan pusat, dan n titik lain yang berderajat satu yang disebut daun. Graf ulat (*Caterpillar graph*) bisa dilihat sebagai barisan graf bintang $S_{n_1}, S_{n_2}, \dots, S_{n_r}$ dimana S_{n_i} adalah bintang dengan titik pusat c_i dan daun n_i untuk $i = 1, 2, \cdots, r$ dan daun S_{n_i} termasuk c_{i-1} dan c_{i+1} untuk $i = 2, 3, \cdots, r-1$.

Jika suatu graf memiliki bobot titik atau bobot sisi yang berbeda, maka graf ini disebut graf dengan pelabelan anti ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmatika $\{a, a+d, \dots, a+(e-1)d\}$, dengan suku pertama a dan selisih bobot sisi d, maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib. Selanjutnya, suatu pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib $g: V \cup E \to \{1,2, \dots, v+e\}$ disebut pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib super jika $g(V(G)) = \{1,2, \dots v\}$ dan $g(E(G)) = \{v+1, v+2, \dots, v+e\}$ dimana v adalah banyaknya titik di G dan e adalah banyaknya sisi di G.

Pada tulisan ini telah ditunjukkan bahwa graf ulat dengan banyak titik genap dapat dilabeli sehingga dapat ditunjukkan bahwa pelabelannya adalah pelabelan$(a,1)$-sisi anti ajaib super. Selanjutnya juga telah di tunjukkan bahwa pada graf ulat dengan banyak titik ganjil mempunyai palabelan $(a,1)$-sisi anti ajaib super.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Baca, M. and Miller, M. 2008, ***Super Edge-Antimagic Graphs***, Brown Walker Press, Boca Raton-Florida

[2] Baca,M. Y. Lin, M. Miller and M. Z. Youssef. (2007), Edge-antimagic graphs, *Discrete Mathematics* 307: 1232-1244.

[3] Chartrand. G. and Zhang, P. 2005, ***Introduction to Graph Theory***, *Mc Graw-Hill Press, Boston..*

[3] Ngurah, Anak Agung Gede .2001. *Pelabelan Ajaib dan Anti Ajaib.* ITB.Bandung. *Tesis-S2,* tidak diterbitkan.

[4] Sugeng, K.A, Miller, M. Slamin and Baca, M. (2005),*(a,d)-Edge-Antimagic Total Labelings Of Caterpillars*, LNCS Vol 3330, pp 169-180.

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis dilahirkan di koto baru, Bayang Pesisir selatan pada tanggal 03 Maret 1988. Anak kedua dari pasangan Jamaluddin,S.Pd dan Yusmartini. Penulis mulai pendidikan di taman kanak-kanak Permata Bunda Asam Kumbang, Penulis melanjutkan Pendidikan di SDN 20 Bayang pada tahun 1994, Penulis melanjutkan pendidikan di MTS Negeri Asam Kumbang pada tahun 2000, Penulis melanjutkan pendidikan di MA Negeri 2 Padang pada tahun 2003.

Pada tahun 2006, penulis di terima menjadi mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Andalas melalui jalur Mandiri.

Untuk syarat meraih gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika FMIPA UNAND, penulis pernah mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Jorong Sumbaru, Kenagarian Koto Berapak, Kabupaten Pesisir Selatan pada bulan Juli s/d Agustus 2009.