MENENTUKAN MAKSIMUM LINTASAN TERPENDEK PADA GRAF UNTUK MENCARI EKSENTRIK DIGRAF DARI GRAF STAR DAN GRAF DOUBLE STAR

SKRIPSI

SULAIMAN LASE
17134072

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2011

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa:

Nama	: Sulaiman Lase
No. Buku Pokok	: 07134072
Jurusan	: Matematika
Bidang	: Matematika Terapan
Judul Skripsi	: Menentukan Maksimum Lintasan Terpendek pada Graf untuk Mencari Eksentrik Digraf dari Graf Star dan Graf Double Star

Telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tangga 11 Juli 2011 berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing/Penguji

Dr. Syafrizal Sy
NIP. 196708071993091001

Penguji

1.

Narwen, M.Si
NIP.196704101997021001

2.

Zulakmal, M.Si
NIP.196711081998021001

Mengetahui, Ketua Jurusan Matematika
FMIPA Universitas Andalas

Dr. Syafrizal Sy
NIP. 196708071993091001

For my beloved Parents who had raised me lovingly:

Fatuman Lase & Meistina Dakhi,

And also for:

Endang, Nurlianti, Ramli, Roswita, Elvy, Herlin, Johan

Brothers and Sisters who I loved

Tiada kata terindah yang dapat dirangkai selain mengucapkan puji syukur kepada-Mu ya Tuhan atas segala berkat dan rahmatmu, telah tercapai sepenggal harapan atas izin-Mu jua.

Seuntai senyum kemenangan dan dengan penuh rasa syukur

kupersembahkan karya sederhana ini kepada kedua orang tua ku tercinta...

Setiap helaan nafas ini adalah karena cinta mu

Setiap jejak langkah kaki ini adalah karena kasih sayang mu

Setiap aliran darah ini adalah karena kerja keras mu

Dan secuil asa yang telah ku raih saat ini adalah karena doa-doa mu

Pa, Ma... terimakasih untuk semua yang telah kalian berikan

Jika dapat ku kumpulkan semua kasih sayang yang telah kalian curahkan

akan ku sertakan dalam sepenggal karya sederhana ini agar dapat menjadi hadiah yang terindah dariku.

Semoga keringat yang telah kalian cucurkan dan jerih payah yang telah kalian tanggung sedikit bisa terobati.

Adik-adikku tersayang, terimakasih telah menjadi motivator handal yang tidak akan pernah ada seorangpun yang dapat menggatikan kalian dalam hatiku. Terimakasih juga sudah "mengalah" demi mendahulukan keperluanku. Kiranya apa yang aku persembahkan ini mampu membalas semua kebaikan kalian dan jadikanlah ini sebagai pemicu semangat untuk menjadi yang terbaik dengan memberikan yang terbaik. Love U All...

Dua orang nenek yang penyayang . I. Fatuman Lase dan I. Meistina Dakhi. Meskipun telah keriput dan penuh uban, tapi kalian masih tetap perkasa, tetap tabah mengahadapi ulah cucu mu yang keras kepala ini yang selalu membuat kalian marah. Kalian adalah dua orang nenek terhebat dalam hidupku. Nasihat-

nasihat kalian akan terus ku ingat dalam setiap melangkahkan kaki. Terimakasih juga telah menyebutku dalam setiap doa-doa kalian.

Rasa terimakasih yang mendalam juga saya sampaikan kepada seluruh keluarga besar Papa Talu, Mama Talu,Paman, serta Tante yang tidak bisa saya sebutkan satu persatu yang telah banyak membantu saya selama ini, baik materil maupun moril dan juga atas nasihat-nasihatnya. Sekali lagi terimakasih dan kiranya Tuhan membalas kebaikan hati kalian semua.

Buat seluruh anak-anak Basic Science, baik Matematika maupun Fisika, thank's buat hari-hari menyenangkan bersama kalian. Dimana pun kamu berada, seberapa jauh pun jarak kita, jangan pernah lupakan hal-hal terindah dalam kebersamaan ini. Semoga kita bisa bertemu lagi di "Jembatan Pertemuan 7 Kabupaten". Good luck...!!! Cayoo... DANIAS BMW (Darmasraya, Aceh, NIas, kAur, nias Selatan, Bengkulu, MentaWai).

Ehmm..., numpang promo nie, jangan lupa, sering-sering berkunjung ke blog aku di http://lemanzky.blogspot.com/ ☺☺☺

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya sehingga skripsi dengan judul "**Menentukan Maksimum Lintasan Terpendek pada Graf untuk Mencari Eksentrik Digraf dari Graf *Star* dan Graf *Double Star***" telah dapat diselesaikan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas.

Dengan selesainya skripsi ini perkenanlah penulis menyampaikan penghargaan dan terima kasih sebesar-besarnya kepada Ketua Jurusan sekaligus sebagai Pembimbing, Bapak **Dr. Syafrizal** Sy, yang telah meluangkan waktu memberikan bimbingan, arahan, serta petunjuk, mulai dari perencanaan sampai skripsi ini selesai. Bapak **Narwen, M.Si** dan Bapak **Zulakmal, M. Si** selaku penguji yang telah mengkritisi penulisan skripsi ini sehingga beberapa kesalahan dapat diperbaiki dengan baik. Dengan ini penulis juga menyampaikan pernyataan bahwa beliau-beliau di atas tidak bertanggung jawab atas kekurangan-kekurangan pada skripsi ini, itu semua semata-mata karena kesalahan penulis sendiri.

Tidak luput juga, penulis ingin menyampaikan penghargaan dan ucapan terimakasih kepada:

1. Fatuman Lase dari Meistina Dakhi, orang tua tercinta serta adik-adik tersayang, Endang, Nurlianti, Ramli, Roswita, Elvi, Herlin, dan Johan yang telah memberikan perhatian, dukungan moril, juga atas doa-doanya kepada penulis selama penyusunan skripsi ini. Kepada anggota keluarga besar yang turut

memberikan dukungan materil maupun moril sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Universitas Andalas.

2. Bapak **Prof. Dr. I Made Arnawa, M. Si** selaku koordinator Basic Science Jurusan Matematika yang telah membimbing serta memberikan semangat kepada penulis selama menyelesaikan masa studi di Universitas Andalas.
3. Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas yang telah memberikan ilmu dan pengetahuan kepada Penulis selama menimba ilmu di Universitas Andalas.
4. Rekan-rekan Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas khususnya Program Basic Science 2007 atas bantuan dan kritik yang membangun selama penyusunan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran demi kemajuan tulisan selanjutnya. Akhirnya penulis tetap mengharapkan semoga tulisan yang sederhana ini dapat bermanfaat. Amin.

Padang, Juli 2011

PENULIS

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR ii

DAFTAR ISI iv

DAFTAR GAMBAR v

ABSTRAK vi

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah 1

1.2 Perumusan Masalah 2

1.3 Batasan Masalah 2

1.4 Tujuan Penulisan 2

1.5 Manfaat 2

1.6 Sistematika Penulisan 3

BAB II LANDASAN TEORI

2.1 Definisi dan Terminologi pada Graf 4

2.2 Jenis-jenis Graf 7

2.3 Eksentrisitas Digraf 12

BAB III MENENTUKAN MAKSIMUM LINTASAN TERPENDEK PADA GRAF UNTUK MENCARI EKSENTRIK DIGRAF DARI GRAF *STAR* DAN GRAF *DOUBLE STAR*

3.1 Eksentrik Digraf dari Graf *Star* 14

3.2 Eksentrik Digraf dari Graf *Double Star* 16

BAB IV KESIMPULAN 19

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

2.1.1	Graf G	5
2.1.2	*Walk* pada sebuah graf	6
2.1.3	Jarak pada graf G	7
2.2.1	Graf dan subgrafnya	8
2.2.2	(a) Graf terhubung dan (b) Graf tak terhubung	8
2.2.3	Digraf (*Direct graph*)	9
2.2.4	(a) Graf G dan (b) Graf komplemen $\overline{G}$	9
2.2.5	Graf komplit	10
2.2.6	(a) Graf bipartit $B_{2,3}$ dan (b) graf komplit bipartit $K_{2,3}$	10
2.2.7	Graf *Star* S_5	11
2.2.8	Graf *Double Star* $S_{4,5}$	11
2.2.9	Graf Sikel	11
2.3.1	Sebuah graf G untuk mengilustrasikan eksentrisitas	12
2.3.2	Graf dan Eksentrik Digraf	13
3.1.1	(a) S_m dan (b) $ED(S_m)$	15
3.2.1	(a) $S_{m,n}$ (b) $ED(S_{m,n})$	18

ABSTRAK

Eksentrisitas titik v pada graf G, $ec(v)$, adalah jarak maksimum dari titik v ke sebuah titik lain di G. Titik u dikatakan titik eksentrik dari v jika jarak dari u ke v sama dengan eksentrisitas titik v. Eksentrik digraf dari graf G, $ED(G)$, adalah graf yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan himpunan titik di G dengan sisi berarah (*arc*) menghubungkan titik v ke u jika dan hanya jika u adalah titik eksentrik dari v. Pada skripsi ini akan dibahas mengenai masalah eksentrik digraf dari graf *star* dan graf *double star*.

Kata kunci: *eksentrisitas, eksentrik digraf, jarak, titik eksentrik.*

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf saat ini menjadi topik yang banyak mendapat perhatian, karena model-model yang ada pada teori graf berguna untuk aplikasi yang luas, seperti masalah dalam jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, riset operasi, dan lain sebagainya. Salah satu aplikasi dalam teori graf adalah menentukan kota terjauh (maksimum lintasan terpendek) dari suatu kota ke kota lain yang terdiri dari kumpulan kota dalam suatu daerah. Masalah ini ekuivalen dengan menentukan eksentrisitas (*eccentricity*) titik pada graf. Eksentrisitas pertama kali diperkenalkan oleh **Fred Buckley** sekitar tahun 90-an.

Eksentrisitas $ec(v)$ pada sebuah titik v dalam graf G dapat dituliskan $ec(v) = max\{d(v,u) \mid u \in V(G)\}$. *Radius* $r(G)$ dari G adalah eksentrisitas minimum pada setiap titik di G, dapat dituliskan $r(\mathrm{G}) = min\{ec(v) \mid v \in V\}$ sedangkan *diameter* dari G, dinotasikan $dia(G)$, adalah eksentrisitas maksimum pada setiap titik di G, dapat dituliskan $dia\ (G) = maks\{ec(v) \mid v \in V\}$. Titik v disebut *titik pusat* (*central*) jika $ec(v) = r(G)$.

Eksentrik digraf $ED(G)$ pada graf G didefinisikan sebagai graf yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan himpunan titik di G atau $V(ED(G)) = V(G)$, dimana busur atau sisi berarah (*arc*) menghubungkan titik u ke v jika dan hanya jika v adalah titik eksentrik dari u. Buckley menyimpulkan bahwa hampir setiap graf G, eksentrik digrafnya adalah $ED\ (G) = \overline{G}$, dimana $\overline{G}$ adalah komplemen dari G yang setiap sisinya diganti dengan arc simetrik.

1.2 Perumusan Masalah

Masalah pada skripsi ini dirumuskan sebagai berikut: bagaimana menentukan maksimum jarak terpendek antara suatu titik ke titik lainnya untuk mencari eksentrik digraf pada graf *star* dan graf *double star*.

1.3 Batasan Masalah

Karena jenis-jenis graf cukup banyak, bergantung dari sudut pandang pengelompokannya, maka pada skripsi ini akan dibatasi pada graf sederhana (*simple graph*) dan graf hingga (*finite graph*) untuk mencari eksentrik digraf dari graf *star* dan graf *double star*.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah menunjukkan eksentrik digraf dari graf *star* dan eksentrik digraf dari graf *double star*, berturut-turut yaitu digraf komplit K_m dan digraf bipartit $B_{m,n}$.

1.5 Manfaat

Manfaat yang dapat diambil dari penulisan skripsi ini adalah dapat menentukan maksimum lintasan terpendek dari suatu titik ke titik lainnya. Hal ini dapat diaplikasikan dalam sistem saluran air PDAM, jaringan telekomunikasi, stasiun pemadam kebakaran dalam suatu kota dan lain sebagainya.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada tugas akhir ini adalah sebagai berikut: BAB I memuat beberapa hal yang melatarbelakangi penulisan skripsi ini, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan skripsi, serta manfaat yang dapat diambil dari penulisan skripsi ini. BAB II membahas tentang teori dasar yang digunakan pada bab pembahasan. Pada BAB III akan dibahas permasalahan mengenai eksentrisitas titik, titik eksentrik, eksentrik digraf, serta eksentrik digraf dari graf *star* dan graf *double star*. BAB IV memuat kesimpulan dari tugas akhir ini.

BAB II

LANDASAN TEORI

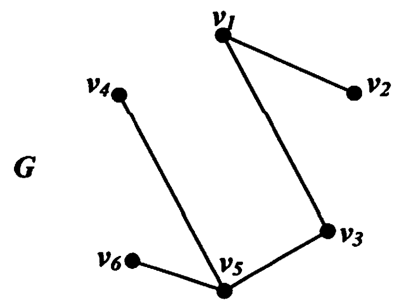
Dalam bab ini akan dikemukakan beberapa teori yang menjadi landasan dalam penyelesaian masalah eksentrik digraf dari graf *star* dan graf *double star*, yaitu tentang definisi dan notasi-notasi pada graf, jenis-jenis graf, serta eksentrik digraf pada sebuah graf.

2.1 Definisi dan Terminologi pada Graf

Secara matematis, graf dapat didefinisikan sebagai berikut. Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tak kosong dari elemen yang disebut titik (*vertex*) dan E adalah himpunan dari pasangan tak terurut (u, v) dari titik u, v di V yang disebut sisi (*edge*).

Ini berarti bahwa sebuah graf G bisa tidak memiliki sisi tetapi harus memuat paling sedikit satu buah titik. Graf G dapat berupa graf hingga (*finite graph*) maupun graf tak hingga (*infinite graph*) bergantung pada himpunan titik-titik V hinggga atau tak hingga. Secara geometris, graf tak berhingga digambarkan dengan sisi-sisi yang hanya memiliki satu titik untuk setiap titik luarnya. Untuk selanjutnya, graf yang dimaksudkan pada skripsi ini adalah graf hingga (*finite graph*), kecuali disebutkan secara khusus bahwa graf yang dimaksud adalah graf tak hingga. *Jumlah titik* dari graf G disebut *order* dan dinotasikan dengan $|V(G)|$. Graf yang ordernya hingga disebut dengan *graf hingga*.

Misalkan u dan v adalah dua buah titik di G. Titik u dikatakan bertetangga (*adjacent*) dengan titik v apabila keduanya dihubungkan oleh sebuah sisi e, yaitu $e = uv$. Sebuah titik v dikatakan menempel atau bersisian (*incident*) dengan sebuah sisi e jika $v \in E$. Pada Gambar 2.1.1 pasangan titik-titik yang bertetangga adalah (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_3, v_5), (v_5, v_4), dan (v_5, v_6).



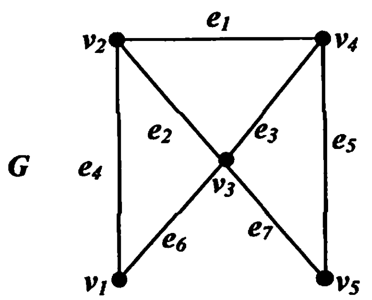
Gambar 2.1.1 Graf G

Misal terdapat dua buah titik u dan v di dalam graf, dimana u dan v saling bertetangga. Jika sisi e bersisian terhadap titik u dan v, maka titik u dan v disebut *endpoint* dari sisi e.

Derajat (*degree*) dari titik v di G adalah banyaknya sisi yang bersisian dengan titik v, dinotasikan dengan $d(v)$. Derajat minimum (*minimum degree*) dari G, dinotasikan dengan $\delta(G)$, adalah derajat terkecil dari titik-titik di G, dapat dituliskan sebagai $\delta(G) = min\,\{d(v)|v \in V\}$ dan derajat maksimum (*maximum degree*) dari G, dinotasikan dengan $\Delta(G)$, adalah derajat terbesar dari titik-titik di G, dapat dituliskan sebagai $\Delta(G) = max\,\{d(v)|v \in V\}$. Jika setiap titik dalam suatu graf G mempunyai derajat yang sama, maka graf tersebut dinamakan *graf regular.*

Jalan (walk) W dengan panjang n dari titik u ke v pada graf G adalah barisan $u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n = v$ yang terdiri dari titik dan sisi di G yang diawali dan diakhiri dengan titik, sedemikian hingga (v_i, v_{i+1}) adalah sisi di G untuk setiap $i = 0, 1, 2, \ldots, n$-1. Jalan ini menghubungkan titik v_0 dan v_n, dan dapat juga dinotasikan sebagai v_0-v_1-...-v_n. Jalan dikatakan tertutup jika $u = v$ dan terbuka jika $u \neq v$.

Sebagai contoh pada Gambar 2.1.2, v_1-v_3-v_5-v_4-v_2-v_1 adalah jalan tertutup dengan panjang 5 dan v_1-v_2-v_3-v_4-v_5 adalah jalan terbuka dengan panjang 4.



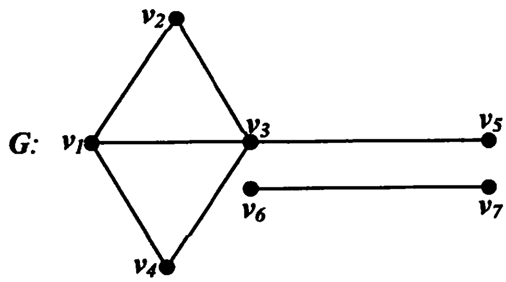
Gambar 2.1.2 *Walk* pada sebuah graf.

Jejak (*trail*) adalah jalan dimana tidak ada sisi yang berulang. Jalan dikatakan *lintasan* (*path*) jika semua titiknya berbeda. Lintasan adalah jejak, akan tetapi tidak semua jejak adalah lintasan. Pada Gambar 2.1.2, jalan v_1-v_3-v_4-v_5-v_3-v_2 adalah jejak tetapi bukan lintasan, sedangkan v_1-v_2-v_3-v_4-v_5 adalah lintasan. Sebuah lintasan dikatakan lintasan sederhana (*simple path*) jika semua titiknya berbeda (setiap sisi yang dilalui hanya satu kali). Lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut lintasan tertutup (*closed path*). Sedangkan lintasan yang tidak berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut lintasan terbuka (*open path*). Panjang lintasan adalah jumlah sisi dalam lintasan tersebut.

Sikel (*cycle*) didefinisikan sebagai jalan tertutup dengan barisan titik yang berbeda. Dengan kata lain, sikel adalah suatu lintasan tertutup (*closed path*). Pada Gambar 2.1.2, jalan yang melewati titik-titik v_1-v_2-v_4-v_3-v_1 adalah sebuah sikel.

Sisi yang menghubungkan dua titik yang sama disebut *loop*. Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik, maka sisi tersebut dinamakan *sisi rangkap* (*multiple edge*).

Jarak (*distance*) antara dua titik u dan v pada graf G adalah panjang lintasan terpendek dari u ke v. Jadi, jarak merupakan jumlah terkecil dari sisi yang mungkin yang dilewati dari titik u ke titik v dan dinotasikan dengan $d(u,v)$. Jika tidak ada lintasan dari titik u ke v, maka didefinisikan jarak $d(u,v) = \infty$. Sebagai contoh, pada Gambar 2.1.3 di bawah ini, $d(v_1,v_5) = 2$ sedangkan $d(v_2,v_7) = \infty$.



Gambar 2.1.3 Jarak pada graf G

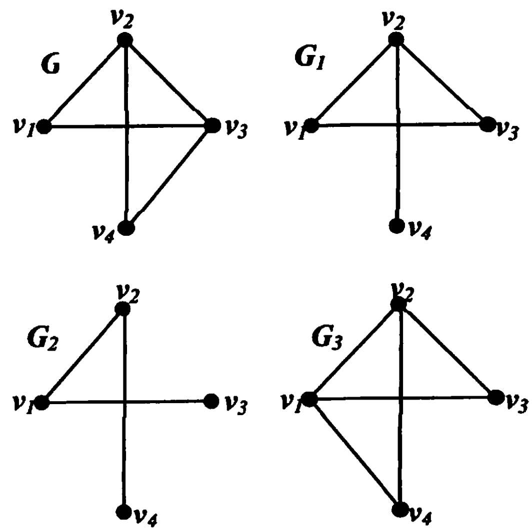
Bilangan kromatik (cromatic number) dari graf G adalah nilai minimum dari suatu pewarnaan titik pada G sedemikian hingga setiap dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda. Bilangan kromatik dari G dinotasikan dengan $\chi(G)$.

2.2 Jenis-jenis Graf

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori (jenis) bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan jumlah titik yang dimilikinya, arah dan bobotnya, serta ada tidaknya sisi ganda.

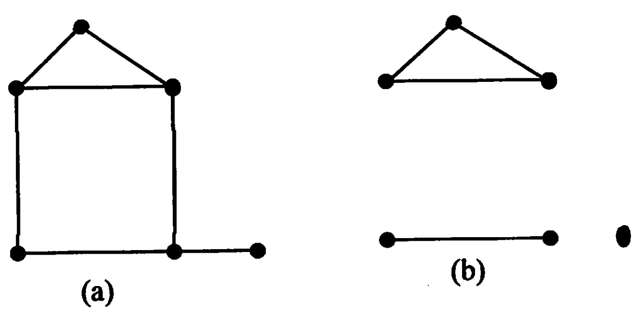
Graf H dikatakan *subgraf* (*subgraph*) dari graf G jika setiap titik di H adalah titik di G dan setiap sisi di H adalah sisi di G, atau dengan kata lain $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Perhatikan Gambar 2.2.1 di bawah, G_1 dan G_2

adalah subgraf dari G tetapi G_3 bukan subgraf dari G karena ada sisi v_1v_4 di $E(G_3)$ yang bukan elemen dari $E(G)$.



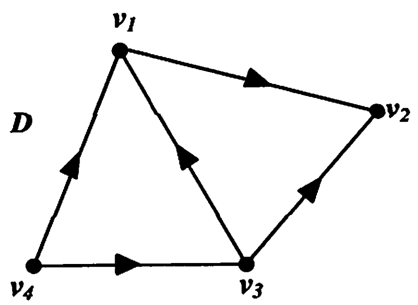
Gambar 2.2.1 Graf dan subgrafnya

Graf G disebut *graf terhubung* (*connected graph*) jika untuk setiap dua titik di G dihubungkan oleh suatu lintasan. *Komponen* dari graf adalah subgraf terhubung maksimal dari G. Jadi, setiap graf terhubung hanya mempunyai satu komponen. Sedangkan untuk graf tak terhubung, memiliki sedikitnya dua komponen. Gambar 2.2.2 adalah contoh untuk graf terhubung dan graf tak terhubung.



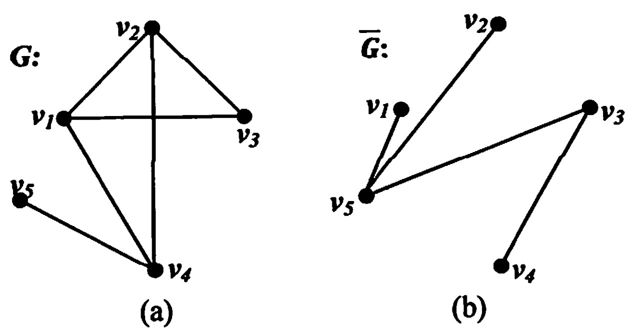
Gambar 2.2.2 (a) Graf terhubung dan (b) Graf tak terhubung

Digraf (direct graph) D adalah pasangan himpunan (V, A) dimana V adalah himpunan tak kosong dari elemen-elemen yang disebut *titik* dan A adalah himpunan dari pasangan terurut (u, v) dari titik u,v di V yang disebut sisi berarah atau busur (*arc*) [1]. Pada Gambar 2.2.3 menunjukkan sebuah graf berarah dengan himpunan titik $V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan *arc* $A(D) = \{(v_4, v_1), (v_4, v_3), (v_3, v_1), (v_3, v_2), (v_1, v_2)\}$.



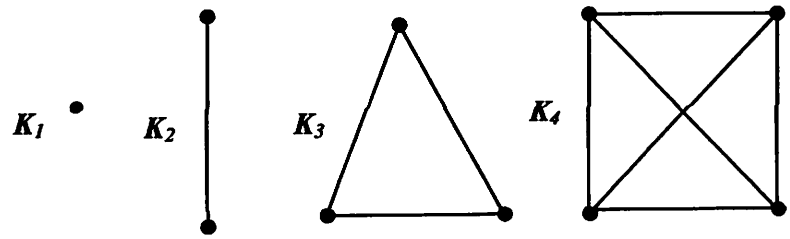
Gambar 2.2.3 Digraf (*Direct graph*)

Komplemen (*complement*) dari Graf G, $\overline{G}$, adalah graf dengan himpunan titik yang sama dengan himpunan titik di G, dengan kata lain $V(G) = V(\overline{G})$, dan titik u, v di $\overline{G}$ adalah bertetangga jika dan hanya jika titik u,v di G tidak bertetangga.



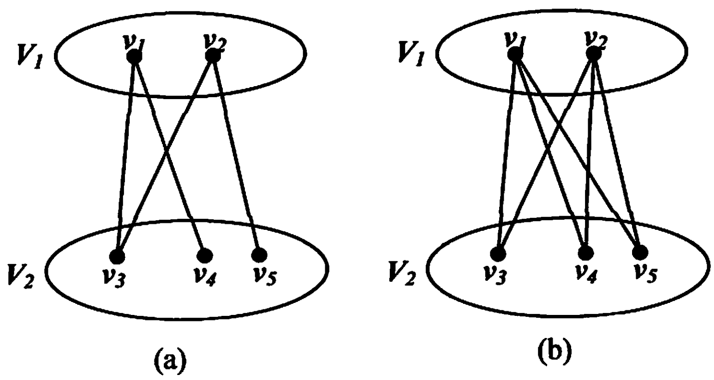
Gambar 2.2.4 (a) Graf G dan (b) Graf komplemen $\overline{G}$

Sebuah graf K dikatakan *graf komplit* (*complete graph*) jika setiap titik yang berbeda yang ada di K saling bertetangga. Secara umum, graf komplit dengan n titik dinotasikan sebagai K_n, dengan n adalah suatu bilangan bulat positif sehingga jumlah sisi pada graf K_n adalah $\frac{n(n-1)}{2}$ [4]. Contoh graf komplit seperti pada Gambar di bawah ini:



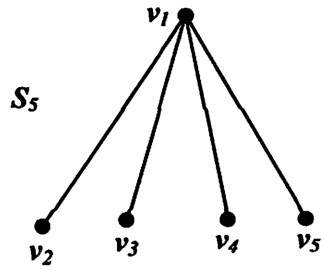
Gambar 2.2.5 Graf komplit

Graf G dikatakan *bipartit* (*bipartite*) jika himpunan titik-titik $V(G)$ dapat dipisah menjadi dua himpunan $V_1(G)$ dan $V_2(G)$. Misalkan $|V_1| = m$ dan $|V_2| = n$ maka graf bipartit dinotasikan dengan $B_{m,n}$. Jika setiap pasang titik di V_1 dan V_2 saling bertetangga maka graf tersebut dinamakan *graf komplit bipartit* (*complete bipartite*) $K_{m,n}$, dengan jumlah sisi $m \times n$.



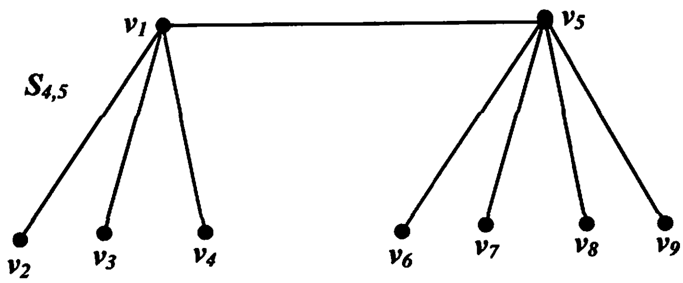
Gambar 2.2.6 (a) Graf bipartit $B_{2,3}$ dan (b) graf komplit bipartit $K_{2,3}$

Graf star adalah graf komplit bipartit $K_{1,n}$ atau $K_{n,1}$, selanjutnya akan dinotasikan dengan S_m, dengan $m = n + 1$, dimana 1 titik berderajat n disebut *titik pusat* dan n titik berderajat 1 disebut titik daun. Graf *star* dapat digunakan untuk memodelkan jaringan komputer yang memiliki satu pusat jaringan yang terhubung ke beberapa komputer lain dalam jaringan tersebut.



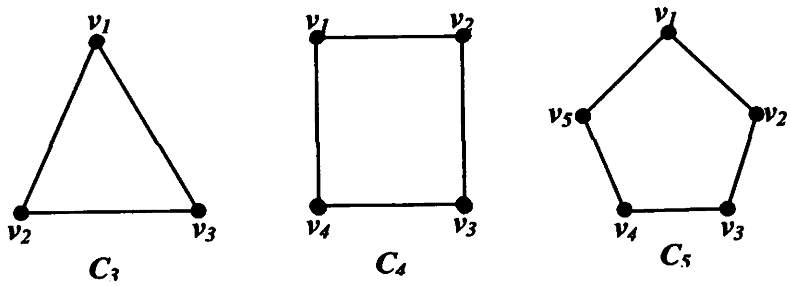
Gambar 2.2.7 Graf *Star* S_5

Graf double star adalah graf yang terdiri dari dua graf star S_m dan S_n, dimana kedua titik pusatnya saling bertetangga, dinotasikan $S_{m,n}$. Contoh graf *double star* dapat dilihat pada Gambar di bawah:



Gambar 2.2.8 Graf *Double Star* $S_{4,5}$

Graf sikel (*cycel*) adalah graf yang terdiri dari satu sikel. Graf sikel dengan n titik dinotasikan dengan C_n. Pada graf sikel, jumlah titiknya minimal 3.

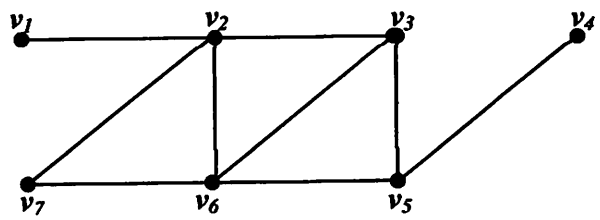


Gambar 2.2.9 Graf Sikel

2.3 Eksentrisitas Digraf

Eksentrisitas ec(v) pada titik v dalam graf G adalah nilai maksimum dari himpunan semua jarak antara titik v dengan titik u, yang melewati semua sisi yang berbeda pada graf G, dapat dituliskan $ec(v) = max\ \{d(v,u)|u \in V(G)\}$ [1]. Atau dengan kata lain, eksentrisitas titik v pada graf G merupakan jarak dari v ke sebuah titik terjauh dari v.

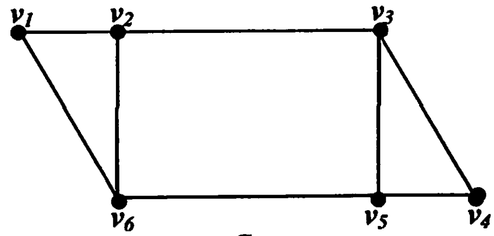
Radius dari G, $r(G)$, adalah eksentrisitas minimum pada setiap titik di G, dapat dituliskan $r(G) = min\{ec(v)|v \in V\}$. *Diameter* dari G, $dia(G)$, adalah eksentrisitas maksimum pada setiap titik di G, dapat dituliskan $dia(G) = maks\{ec(v)|v \in V\}$, titik v disebut *titik pusat* (*central*) jika $ec(v) = r(G)$. *Center*, *cen*(G), adalah subgraf pada G yang terbentuk dari titik *central*. Titik v dikatakan *titik eksentrik* dari u jika jarak dari v ke u sama dengan eksentrisitas titik u, dapat dituliskan $d(v,u) = ec(u)$ [2]. Perhatikan Gambar di bawah:



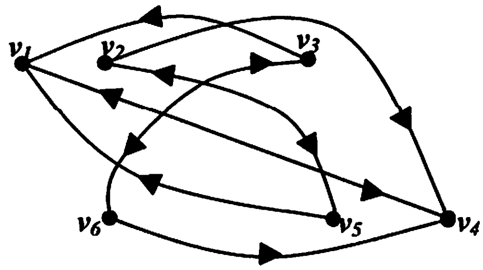
Gambar 2.3.1 Sebuah graf G untuk mengilustrasikan eksentrisitas

Pada Gambar 2.3.1 di atas, eksentrisitas dari titik v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, dan v_7 berturut-turut adalah 4, 3, 2, 4, 3, 2 dan 3 serta titik eksentriknya berturut-turut v_4, v_4, v_7, v_1, v_1, v_1 dan v_4, serta v_4. $r(G) = 2$, $d(G) = 4$, titik pusat adalah v_2 dan v_6, dan *center*-nya adalah graf yang terbentuk dari titik pusat v_2 dan v_6.

Setelah titik eksentrik dari setiap titik v di G didapatkan, maka antara titik v dengan titik eksentriknya dihubungkan oleh arc. Graf yang dihasilkan dinamakan *eksentrik digraf dari graf G*, *ED*(G), yang didefinisikan sebagai graf yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan himpunan titik di G atau $V(ED(G)) = V(G)$, dimana arc menghubungkan titik u ke v, jika dan hanya jika v adalah titik eksentrik dari u.



G



ED(G)

Gambar 2.3.2 Graf dan Eksentrik Digraf

BAB III

MENENTUKAN MAKSIMUM LINTASAN TERPENDEK PADA GRAF UNTUK MENCARI EKSENTRIK DIGRAF DARI GRAF *STAR* DAN GRAF *DOUBLE STAR*

Pada bab ini, akan dibahas mengenai eksentrik digraf pada graf *star* dan graf *double star*. Diasumsikan bahwa pada graf *star* dan graf *double star*, jarak antara dua titik berbeda yang bertetangga (*adjacent*) adalah 1.

3.1 Eksentrik Digraf dari Graf *Star*

Misal graf *star* S_m, dengan m bilangan bulat positif, mempunyai himpunan titik $V(S_m) = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m\}$ dimana v_1 adalah titik pusat dan $v_2, v_3, \ldots, v_m$ adalah titik daun, dan himpunan sisi $E(S_m) = \{e_1, e_2, \ldots, e_{m-1}\}$ dimana sisi $e_1 = v_1v_i$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \ldots, m$.

Dari definisi graf *star*, dimana v_1 adalah titik sentral dan v_i untuk setiap $i = 2, 3, \ldots, m$ adalah titik daun, maka dapat diketahui bahwa jarak terjauh dari titik pusat v_1 ke semua titik adalah semua titik daun. Jadi, eksentrisitas titik $ec(v_1) = 1$. Sedangkan eksentrisitas titik daun, $ec(v_i)$, adalah sama untuk setiap titik daun lainnya, yaitu $ec(v_2) = ec(v_3) = \ldots = ec(v_m) = 2$. Jadi, eksentrisitas titik $ec(v_i) = 2$. Secara singkat dapat dituliskan sebagai sifat berikut ini:

Sifat 3.1.1 Eksentrisitas titik v_i pada graf *star*, S_m, untuk setiap $I = 1, 2, 3, \ldots, m$ adalah sebagai berikut:

$$\mathrm{ec}(v_i) = \begin{cases} 1\,; \text{ untuk } i = 1 \\ 2\,; \text{ selainnya} \end{cases}$$

Eksentrisitas dari titik pusat v_1 adalah 1, karena maksimum lintasan terpendek dari v_1 adalah semua titik daun. Jadi, titik eksentrik dari v_1 adalah semua titik daun. Demikian juga eksentrisitas dari titik daun v_i adalah 2, karena maksimum lintasan terpendek dari setiap titik daun adalah titik daun lainnya. Jadi, titik eksentriknya adalah titik daun lainnya yang berbeda. Secara ringkas dapat dituliskan sebagai akibat berikut:

Akibat 3.1.2 Titik eksentrik pada graf *star* S_m adalah sebagai berikut:

$$\text{titik eksentrik dari } v_i = \begin{cases} v_{i+j} & \text{untuk } i = 1; \\ & \quad j = 1, 2, 3, \dots, m-1 \\ v_j & \text{untuk } i, j = 2, 3, \dots, m \\ & \quad i \neq j \end{cases}$$

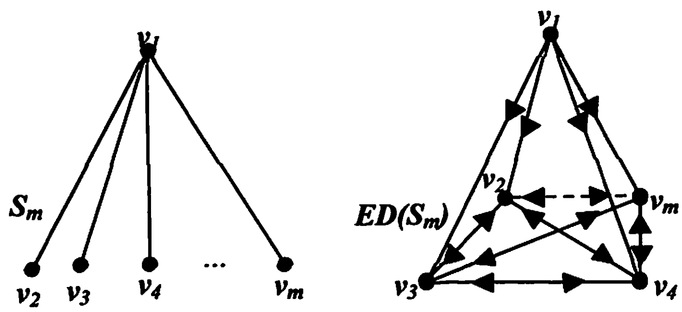
Dari Akibat 3.1.2 di atas, titik eksentrik dari titik pusat v_1 adalah titik daun v_i untuk setiap $i = 1, 2, \dots, m\text{-}1$, sehingga ada *arc* dari v_1 ke v_i yaitu v_1v_i. Demikian juga untuk titik daun v_i, titik eksentriknya adalah titik daun lainnya, sehingga ada *arc* dari v_i ke v_j yaitu v_iv_j untuk setiap $j = 2, 3, \dots, m$ dengan $i \neq j$.

Dari eksentrisitas titik $ec(v_i)$ dan titik eksentrik pada graf *star* S_m, selanjutnya diperoleh sifat berikut:

Sifat 3.1.3 Eksentrik digraf dari graf *star*, *ED(Sm)*, adalah digraf dengan himpunan titik $V(ED(Sm)) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\}$ dan himpunan *arc*

$$A(ED(S_m)) = \begin{cases} v_1v_j & \text{untuk } j = 2, 3, \dots, m \\ v_iv_j & \text{untuk } i, j = 2, 3, \dots, m; i \neq j \end{cases}$$

Contoh eksentrik digraf dari graf *star* S_m diberikan pada Gambar 3.1.1 berikut:



Gambar 3.1.1 (a) S_m dan (b) $ED(S_m)$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa eksentrik digraf dari graf *star*, *ED(Sm)*, adalah digraf komplit K_m dimana arc dari titik pusat bertetangga keluar ke semua titik daun dan arc dari setiap titik daun merupakan arc simetrik ke setiap titik daun lainnya dengan jumlah *arc* $|A(K_m)| = |A(ED(S_m)| = (m-1)^2$.

3.2 Eksentrik Digraf dari Graf *Double Star*

Graf *double star* $S_{m,n}$ adalah graf yang terdiri dari dua graf *star* S_m dan S_n, dimana kedua titik pusatnya saling bertetangga. Misal graf *double star* $S_{m,n}$ mempunyai himpunan titik:

$$V(S_{m,n}) = \begin{cases} V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \\ V_2 = \{v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_{m+n}\} \end{cases}$$

dimana : v_1 adalah titik pusat di V_1 dan $v_2, v_3, \dots, v_m$ adalah titik daun di V_1

v_{m+1} adalah titik pusat dan $v_{m+2}, v_{m+3}, \dots, v_{m+n}$ titik daun di V_2

dan himpunan sisinya adalah

$$E(S_{m,n}) = \begin{cases} E_1 = \{e_1\} \\ E_2 = \{e_2, e_3, \dots, e_m\} \\ E_3 = \{e_{m+1}, e_{m+2}, \dots, e_{m+n-1}\} \end{cases}$$

dimana : e_1 adalah sisi yang bersisian dengan v_1v_{m+1}

$e_2, e_3, \dots, e_m$ adalah sisi yang bersisian dengan v_1 dan titik daun V_1

$e_{m+1}, e_{m+2}, \dots, e_{m+n-1}$ adalah sisi yang bersisian dengan titik v_{m+1} dan titik daun di V_2.

Dari definisi graf *double star* $S_{m,n}$, dimana v_1 dan v_{m+1} adalah titik pusat dan v_i untuk setiap $i = 2, 3, \dots, m, m+2, \dots, m+n$ adalah titik daun, maka jarak terjauh dari titik pusat v_1 di V_1 ke titik lainnya adalah semua titik daun di V_2 dan jarak terjauh dari titik pusat v_{m+1} di V_2 ke semua titik yang lain adalah semua titik daun di V_1. Jadi, eksentrisitas titik $ec(v_1) = ec(v_{m+1}) = 2$. Demikian juga jarak terjauh dari titik daun di V_1 ke titik lainnya adalah semua titik daun di V_2 serta jarak terjauh titik daun di V_2 ke titik yang lain adalah semua titik daun di V_1. Jadi, eksentrisitas titik $ec(v_2) = ec(v_3) = \dots = ec(v_m) = ec(v_{m+2}) = ec(v_{m+3}) = \dots = ec(v_{m+n}) = 3$. Secara singkat dapat dituliskan sebagai sifat berikut ini:

Sifat 3.2.1 Eksentrisitas titik v_i pada graf *double star* $S_{m,n}$ adalah sebagai berikut:

$$ec(v_i) = \begin{cases} 2 & \text{untuk } i = 1, m+1 \\ 3 & \text{untuk } i = 2, 3, \dots, m, m+2, \dots, m+n \end{cases}$$

Misalkan v_k adalah himpunan titik daun di V_1, yakni $v_k = \{v_2, v_3, \dots, v_m\}$ dan misalkan juga v_j adalah himpunan titik daun di V_2, yakni $v_j = \{v_{m+2}, v_{m+3}, \dots, v_{m+n}\}$. Dari Sifat eksentrisitas titik pada graf *double star* di atas, titik eksentrik dari titik pusat v_1 adalah v_j dan titik eksentrik dari titik pusat v_{n+2} adalah v_k. Demikian juga eksentrisitas dari titik daun di V_1 adalah v_j, dan sebaliknya, titik eksentrik dari titik daun V_2 adalah v_k. Secara matematis, dapat dituliskan sebagai akibat berikut:

Akibat 3.2.2 Titik eksentrik pada graf *double star* $S_{m,n}$ adalah sebagai berikut:

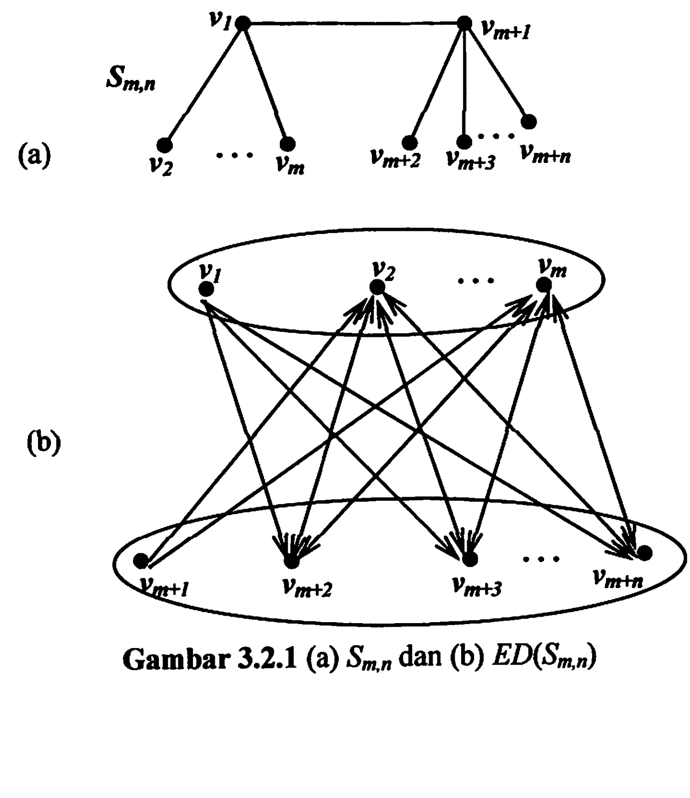
$$\text{titik eksentrik dari } v_i = \begin{cases} v_j & \text{untuk } i = 1, v_k \\ v_k & \text{untuk } i = m+1, v_j \end{cases}$$

Dari Akibat 3.2.2 di atas, dimana titik eksentrik dari titik pusat v_1 di V_1 adalah titik daun v_j di V_2, sehingga ada arc dari v_1 ke v_j yaitu v_1v_j dan titik eksentrik dari titik pusat v_{m+1} di V_2 adalah titik daun v_k di V_1, sehingga ada arc dari v_{m+1} ke v_k yaitu $v_{m+1}v_k$. Demikian juga titik eksentrik dari titik daun v_k di V_1 adalah titik daun v_j di V_2, sehingga ada arc dari v_k ke v_j yaitu v_kv_j dan titik eksentrik dari titik daun v_j di V_2 adalah titik daun v_k di V_1, sehingga ada arc dari v_j ke v_k yaitu v_jv_k. Secara ringkas dapat dituliskan sebagai berikut:

Sifat 3.2.3 Eksentrik digraf dari graf *double star, $ED(S_{m,n})$,* adalah digraf dengan himpunan titik $V(ED(S_{m,n})) = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m, v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_{m+n}\}$ dan himpunan arc:

$$A\left(ED(S_{m,n})\right) = \begin{cases} v_1 v_j & \text{untuk } j = m+2, m+3, \ldots, m+n \\ v_{m+1} v_k & \text{untuk } k = 2, 3, \ldots, m \\ v_k v_j & \text{untuk } k = 2, 3, \ldots, m;\ j = m+2, m+3, \ldots, m+n \\ v_j v_k & \text{untuk } j = m+2, m+3, \ldots, m+n;\ k = 2, 3, \ldots, m \end{cases}$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa eksentrik digraf dari graf *double star* $ED(S_{m,n})$ adalah digraf bipartit $D(B_{m,n})$ yang mempunyai dua himpunan titik yaitu $V_1(B_m)$ dan $V_2(B_n)$, dengan $V_1(B_m) = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ dan $V_2(B_n) = \{v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_{m+n}\}$, dimana arc dari titik pusat v_1 di V_1 bertetangga keluar ke titik daun di V_2 dan arc dari titik pusat v_{n+1} di V_2 bertetangga keluar ke titik daun di V_1, serta arc dari setiap titik daun adalah arc simetrik ke titik daun lainnya dengan jumlah *arc* adalah $\left|A\left(ED(S_{m,n})\right)\right| = [(m-1)n + (n-1)m]$. Eksentrik digraf dari graf *double star* $S_{m,n}$ diberikan pada gambar di bawah ini:



Gambar 3.2.1 (a) $S_{m,n}$ dan (b) $ED(S_{m,n})$

BAB IV

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, maka kesimpulan yang dapat diambil mengenai eksentrik digraf dari graf *star* dan graf *double star* adalah sebagai berikut:

1. Eksentrik digraf dari graf *star* $ED(S_m)$ adalah digraf komplit K_m dimana arc dari titik pusat bertetangga keluar ke semua titik daun dan arc dari setiap titik daun merupakan arc simetrik ke setiap titik daun lainnya dengan jumlah arc $|A(K_m)| = |A(ED(S_m)| = (m-1)^2$.
2. Eksentrik digraf dari graf *double star* $ED(S_{m,n})$ adalah digraf bipartit $D(B_{m,n})$ yang mempunyai dua himpunan titik yaitu $V_1(B_m)$ dan $V_2(B_n)$, dengan $V_1(B_m) = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ dan $V_2(B_n) = \{v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_{m+n}\}$, dimana arc dari titik pusat v_1 di V_1 bertetangga keluar ke titik daun di V_2 dan arc dari titik pusat v_{n+1} di V_2 bertetangga keluar ke titik daun di V_1, serta arc dari setiap titik daun adalah arc simetrik ke titik daun lainnya dengan jumlah *arc* $\left|A\left(ED(S_{m,n})\right)\right| = [(m-1)n + (n-1)m]$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Balakrishnan, V. K. 1997. Schaum's Outline of Theory and Problems of Graph Theory. *www.books.google.com*, pp. 1-34, diakses 26 Mei 2011

[2] Buckley, Fred & Marty Lewinter. 2002. *A Friendly Introduction to Graph Theory.* Prentice Hall, New Jersey

[3] Chartrand, Gary & Oellerman O. R. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory.* McGraw-Hill, Inc., New York

[4] Hartsfield, Nora & Gerhard Ringel. 1994. *Perals in Graph Theory: A Comprehensive Introduction. Revised and Augmented.* Academic Press, Inc., San Diego

[5] Sundari, Sri. 2008. Eksentrisitas Digraf pada Graf Cycel dan Graf Lintasan. *Skripsi S-1*, tidak diterbitkan. FMIPA – Universitas Sumatera Utara

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis dilahirkan sebagai anak pertama dari delapan bersaudara dari Ayah bernama Fatuman Lase dan Ibu bernama Meistina Dakhi. Penulis menamatkan Sekolah Dasar pada tahun 1999 di SD Negeri Hilikoyo Kec. Hilisimaetanõ, SMP Kristen BNKP Hilisimaetanõ pada tahun 2002 dan SMAN 3 Gunungsitoli Nias pada tahun 2005. Pada tahun 2007, Penulis diterima sebagai Mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang melalui jalur Beasiswa Program *Basic Science* guru berasrama. Setelah menyelesaikan studi pada tahun 2011, Penulis mengambil Program Pendidikan Guru (PPG) di Universitas Negeri Padang.