PENGGUNAAN METODE KEKAKUAN (STIFFNESS) PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN GETARAN BEBAS TANPA REDAMAN DARI BANGUNAN GESER (SHEAR BUILDING)

SKRIPSI

SRI EFRINITA IRWAN
07134025

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2011

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini menyatakan bahwa :

Nama	:	**Sri Efrinita Irwan**
No. Buku Pokok	:	07 134 025
Jurusan	:	Matematika
Bidang	:	Aljabar Terapan
Judul Skripsi	:	**Penggunaan Metode Kekakuan (*Stiffness*) Pada Penyelesaian Persamaan Getaran Bebas Tanpa Redaman Dari Bangunan Geser (*Shear Building*)**

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal **4 Mei 2011** berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing / Penguji

1.

Nova Noliza Bakar, M. Si
NIP.19631104 199203 2 002

Penguji

1.

Monika Rianti Helmi, M. Si
NIP.19740718 200501 2 002

2.

Efendi, M. Si
NIP.19780717 200212 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand

Dr. Syafrizal Sy
NIP.19670807 199309 1 001

بسم الله الرحمن الرحيم

Ku panjatkan do'a kepada Tuhan, Syukurku untuk sejuta alasan
Hidup yang telah Ia tiupkan, Dengan cinta Nya kini aku bertahan
Segala puji ku persembahkan
Untuk Mu Maha Pengunjuk Kekuatan

Teruntuk yg terhormat, tercinta, terkasih, papa Pahlawanuddin, BA dan mama Irna M,
ku persembahkan karya ini dengan segenap cinta dan kasih ku.
Terima kasih untuk perhatian yg takkan tergoyahkan, pengorbanan yg takkan terbalaskan, sinar mata yg m'jadi cahaya dalam gelap jiwaku, kehadiran yg m'beri kekuatan dlm ragaku.
Ya Allah, tlah Kau titipkan aku kepada orang tua terbaik yg mendidikku dg penuh cinta n kasih sayang.

Untuk yg tersayang,
abangku Helvi Riandi Irwan, A.Md, kakakku Vivi Haryati Irwan, S.Farm.Apt, dan adekku Rifki Ardian Irwan.
*Terima kasih tuk perhatian n kasih sayang yg mewarnai indah hari-hariku, canda tawa yg kan slalu m'jadi senyum d hatiku. Luv u, ^_^*

Buat ma dang Jusni M, pa dang Zamzami Ali (alm), n p' kepsek (m' dang) Nusyirwan M. Terima kasih untuk smua do'a, nasehat, n perhatian yg tlah d berikan.

Yg takkan terlupakan, kakak2ku uni Nay (impian n smangat luar biasa, sm0ga suatu hari nanti bnar2 bs terwujud), da Man (sm0ga d beri t4 terindah d sisi Nya,i miss u bro), Tu2t (thanks bwt smuanya), m'sul Danil,ni Pat, k' Indah, n ni Nanda (makasih buku2 sipilx ni).

Untuk kakek Syamsudin Kh. Basa, tante Fairuz, p'etek Ai, tante Fuadi n keluarga. Makasih untuk smua perhatian n nasehatnya.

Dan untuk s'seorang yg tlah mengajarkan arti kesabaran n rasa syukur atas smua anugerah dlm hidup ini.
Tq so much.

Special Thanks To :

- **B' Nova** (Makasih untuk waktu, ilmu, nasehat, pengertian, n perhatian yg tlah ibu berikan. Ucapan ini takkan pernah mampu utk membalas smuanya. You are the best. ^_^). **B' May** (Smoga semangat n impian luar biasa yg tlah ibu ajarkan dapat terwujud suatu hari nanti).

- **Dosen2 n staff TU**

  B' Monik n P' Efendi_2 (trimakasih untuk nasehat n saran yg tlah ibu n bpk berikan), P' Syaf, B' Yoza, B' Iza, B' Sil, B' Rince, P' Budi, P' Dodi, P' Narwen, P' Yudi, B' Ayu, P' Werman, P' Muhafzan, P' Made, P' Zulakmal, P' Jenizon, P' Syafrudin, B' Gema, P' Efendi_1, B' Vera, P' Ginting, B' Riri, B' Welly,

  Terimakasih untuk semua ilmu yang telah bpk n ibu berikan.

  Mama Cun (makasih bwt smuanya ma ^_^), P' Syamsir, P' Zul, K' Opi, B' Eli.

- **Sobat-sobat terbaikku**

  Thanks utk hari2 penuh warna yg tlah tercipta ^_^

  Oma '**Imyar Melia Santi**', si gem*ul (hehe,,peace oma), makasih omaaaaa tlah menjadi sahabat terbaik dlm hidup rin (hahaha),, oma yg sLalu ada bahkan d hari2 tersulit dlm hidup rin,hiks hiks T_T. Hari2 m'odoy yg takkan terlupakan, kisah persahabatan yg takkan pernah tergantikan. Omaaaaaaaaaaaa,,akhir kisah 8 semester yg membahagiakan, mengharukan, skaligus sedih (pengen nangiiiis),,awas klo oma sombong2 bsk,, I'll miss u ^_^.

  Dian Kastika Syofyan, makasih bwt smuax yan ^_^, smoga cita2 qt terwujud dg indah. Hmm,,pelaksana Pe_eM_U yg handal,,biarkan smuax mngalir apa adanya yan.

  Uyu*nk '**Resti Meirita**', si ayank raja odoy. Thanks yu*nk utk hari2 penuh canda tawa, kangen juo gw sm lu bsk mah,,hehe

- **Teman2 Mc-Zoven**

  4R gi** (Rebelz 'sang ketua', Revi 'Melayanong', Rahmi 'Dun_Kurniawan', Rida 'Black-White'), kangen 'maheboh' lg,,mav,,Rhirien_Irwan tak termasuk yg gi**,,hahaha

  Lina 'mas buruak',Pute, Desma 'eyank muixs',Tia, Doenk, Noe,,kangen ngumpul2 lgiiii,,

  Lisuik, Ayu, Icut, Novri_yam, Tika, Pi'I, Winda, Imel, Angga, Jessi, Aul, Wewes, Meri, Hime, Yulian, Sobri, Yona H, Yona M, Egi, Yel, Ferdi, Ami, Neo, Ci ap, Novi, Joko, Mia, Meli, Anggun, Tia_ane, Pia, Sita, Fitria, Widya, Diah, Riri, Acha, Diana, Echa, Andra.(mav klo ad yg lp tem2,,hehe),,

- **BP_025**

  Sobeb_q tersayang (wueeeek) Isnaini Ramadhani (yg pling boco,,smgt kulx y sObeb,jan kangen2 juo sm rin,,hahaha). K'bp_q uni Rima (tq bwt smuax k' bp), uni Dewi, uni Ayu. Adk bp_q Yosi (rjn2 kul x y d' bp ^_^), n adk2 bp yg laen,, keluarga kecil_025.

- **Uni2, uda2, n adk2 Himatika**

  Ni Herlin 'indi' (haha,,mav uni,,rin acok bolok2n uni),, da Di2 (sbna aneh, tp mksih ojek n jusx da,,hehe), da Jon (blh pnjm kamus kta2 bijakx tuak?), ni Tanti, da Wisga, ni Des, ni Dika, da Santri, serta uni2, uda2, n adk2 anggota Himatika lainnya. Thanks 4 all..

By Sri Efrinita Irwan _ Ri2n

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kehadirat Allah SWT, atas limpahan rahmat, kekuatan, keimanan, hidayah, serta ridha-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **"PENGGUNAAN METODE KEKAKUAN (*STIFFNESS*) PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN GETARAN BEBAS TANPA REDAMAN DARI BANGUNAN GESER (*SHEAR BUILDING*)"** sebagai salah satu syarat dalam menyelesaikan program pendidikan strata satu pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas.

Shalawat dan salam penulis kirimkan untuk Rasulullah SAW yang telah membawa risalah kebenaran sebagai pedoman demi keselamatan hidup di dunia dan di akhirat.

Selesainya penulisan skripsi ini tidak terlepas dari do'a, dorongan semangat, dan kasih sayang yang diberikan oleh yang tercinta kedua orang tua penulis, Papa Pahlawanuddin, BA. dan Mama Irna M., serta kakak-kakak dan adik tersayang. Pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada :

1. Ibu Nova Noliza Bakar, M. Si selaku pembimbing yang telah meluangkan waktu, tenaga, serta pikiran dalam penulisan skripsi ini.
2. Ibu Dr. Maiyastri, M. Si selaku pembimbing akademik yang telah memberikan bantuan dan nasehat selama penulis menjalani pendidikan di Universitas Andalas.
3. Ibu Monika Rianti Helmi, M. Si dan Bapak Efendi, M. Si selaku penguji.

4. Bapak Dr. Syafrizal Sy selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Andalas.
5. Bapak/Ibu Dosen serta karyawan/ti Jurusan Matematika Universitas Andalas.
6. Sahabat-sahabat, teman-teman Mc Zoven, teman-teman Himatika FMIPA Universitas Andalas, serta semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Semoga Allah memberikan balasan yang berlipat ganda atas segala amal baik yang telah diberikan.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini jauh dari kesempurnaan. Oleh sebab itu, penulis mengharapkan kritik dan saran demi kesempurnaan skripsi ini. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembaca.

Padang,   Mei 2011

Penulis

ABSTRAK

Saat suatu struktur diberikan gaya luar, struktur akan mengalami getaran bebas dan getaran paksa. Jika frekuensi getaran paksa lebih besar dari frekuensi getaran bebas, maka struktur tersebut akan rusak. Efek merugikan akibat getaran paksa dapat dikurangi dengan meningkatkan frekuensi getaran bebas pada struktur. Penentuan frekuensi natural getaran (ω) penting untuk mengetahui frekuensi getaran paksa terbesar yang mampu ditahan oleh suatu struktur. Secara umum, persamaan gerak struktur bangunan geser untuk kondisi getaran bebas tanpa redaman dinyatakan sebagai $M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dengan M adalah matriks massa, K adalah matriks kekakuan, $\mathbf{x}$ adalah vektor perpindahan struktur, $x_i = a_i \sin \omega t$ untuk $i = 1,2,3,...,n$, dan $\ddot{\mathbf{x}}$ adalah vektor percepatan struktur. Persamaan tersebut akan menghasilkan polinomial berderajat n dengan variabel ω^2. Solusi persamaan tersebut akan memberikan sebanyak-banyaknya n buah nilai ω^2 sebagai nilai eigen dengan ω sebagai frekuensi natural getaran. Selanjutnya dari nilai-nilai eigen tersebut akan diperoleh vektor eigen untuk menentukan pola perubahan bentuk dari bangunan geser untuk kondisi getaran bebas tanpa redaman.

Kata kunci : *struktur, getaran bebas, getaran paksa, frekuensi natural, bangunan geser, redaman, nilai eigen, vektor eigen, pola perubahan bentuk.*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Getaran adalah gerakan bolak-balik di sekitar posisi kesetimbangan dalam suatu interval waktu tertentu. Kesetimbangan yang dimaksud adalah keadaan dimana suatu benda berada pada posisi diam jika tidak ada gaya yang bekerja pada benda tersebut. Ada dua jenis getaran secara umum, yaitu:

1. Getaran bebas

   Semua sistem yang memiliki massa dan elastisitas dapat mengalami getaran bebas. Getaran bebas terjadi jika sistem bergetar karena bekerjanya gaya yang ada dalam sistem itu sendiri tanpa dipengaruhi oleh gaya luar.

2. Getaran paksa

   Getaran paksa terjadi jika sistem bergetar karena adanya pengaruh gaya luar. Contohnya adalah getaran bangunan pada saat gempa bumi. [11]

Gempa bumi dapat menghasilkan getaran paksa yang cukup besar pada bangunan. Apabila gaya getaran yang sampai pada bangunan tersebut lebih besar dari kekuatan struktur, maka bangunan tersebut akan rusak. Akan tetapi, getaran paksa akibat gempa bumi tersebut dapat dikurangi dengan adanya getaran bebas pada bangunan. [13]

Semua sistem yang bergetar mengalami redaman sampai derajat tertentu. Kondisi getaran bebas tanpa redaman dari bangunan geser dapat dicapai jika bangunan geser sama sekali tidak dipengaruhi oleh gaya luar dan redaman pada bangunan geser diabaikan. Analisis tentang kondisi ini perlu dilakukan untuk mendapatkan nilai frekuensi natural (ω) dan pola perubahan bentuk (*mode shape*) dari bangunan geser. Penentuan nilai frekuensi natural perlu dilakukan untuk mengetahui frekuensi getaran paksa terbesar yang mampu ditahan oleh struktur tanpa menimbulkan kerusakan. Penyelesaian masalah tersebut dilakukan melalui formulasi persamaan kekakuan dari bangunan geser.

Jika frekuensi rangsangan atau gaya luar sama dengan salah satu frekuensi natural sistem, maka diperoleh keadaan resonansi (yaitu kecenderungan suatu sistem untuk bergetar dengan amplitudo yang lebih tinggi pada suatu frekuensi dibanding pada frekuensi lainnya) dan memungkinkan terjadinya osilasi atau getaran besar yang berbahaya. [4]

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka masalah yang akan dibahas adalah bagaimana penggunaan metode kekakuan (*stiffness*) untuk mendapatkan nilai frekuensi natural (ω) dan pola perubahan bentuk (*mode shape*) dari bangunan geser untuk kondisi getaran bebas tanpa redaman.

1.3 Batasan Masalah

Melihat banyaknya permasalahan yang mungkin timbul dari getaran suatu bangunan, maka perlu adanya pembatasan masalah dalam pelaksanaan penelitian ini, yaitu:

1. Getaran yang dibahas adalah getaran yang terjadi tanpa dipengaruhi oleh gaya luar atau biasa disebut dengan getaran bebas.
2. Redaman pada sistem struktur diabaikan sehingga getaran bebas yang yang terjadi merupakan getaran bebas tanpa redaman.

3. Struktur yang digunakan adalah struktur bangunan geser (*shear building*) dengan massa total struktur dipusatkan pada bidang lantai dari masing-masing tingkat.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan diadakannya penelitian ini adalah untuk mendapatkan nilai frekuensi natural (ω) dan pola perubahan bentuk (*mode shape*) dari bangunan geser untuk kondisi getaran bebas tanpa redaman.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini adalah:

Bab I : Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II : Landasan teori

Bab ini berisi teori-teori yang mendasari bagian pembahasan, yaitu teori tentang gerak harmonik, dinamika stuktur, matriks, sistem persamaan linier, nilai eigen, dan vektor eigen suatu matriks.

Bab III : Pembahasan

Bab ini merupakan bagian inti dari penulisan yang membahas mengenai penggunaan metode kekakuan (*stiffness*) pada penyelesaian persamaan getaran bebas tanpa redaman dari bangunan geser (*shear building*).

Bab IV : Kesimpulan

Bab ini berisi kesimpulan dari permasalahan yang telah dibahas pada bab sebelumnya.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Gerak Harmonik

Semua benda yang memiliki massa dan elastisitas mampu bergetar (berosilasi). Gerak osilasi dapat berulang secara teratur atau dapat juga tidak teratur. Jika gerak tersebut berulang dalam selang waktu yang sama maka gerak itu disebut gerak periodik. Waktu pengulangan tersebut disebut periode osilasi dan kebalikannya disebut frekuensi. [9]

Beberapa istilah yang digunakan saat membicarakan gerak periodik antara lain:

1. Amplitudo (A)

   Amplitudo adalah besar perpindahan maksimum benda dari titik kesetimbangan. [12]

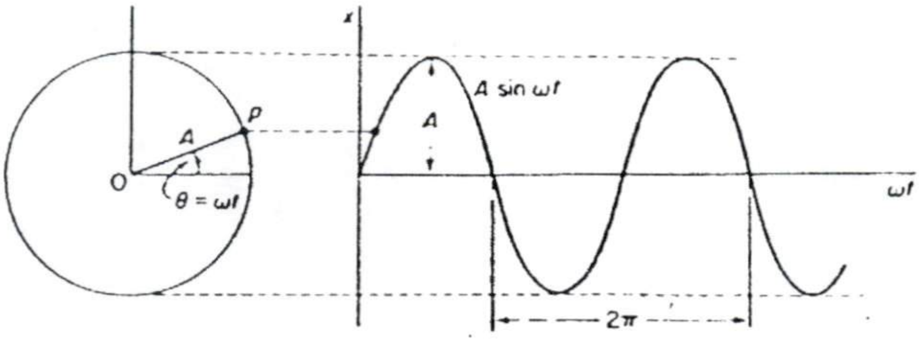
2. Frekuensi (f)

   Frekuensi adalah banyaknya getaran yang dilakukan benda pada suatu waktu tertentu. Satuan frekuensi adalah hertz. [12]

3. Periode (T)

   Periode adalah waktu yang diperlukan benda untuk melakukan satu getaran. Benda dikatakan melakukan satu getaran jika benda bergerak dari suatu titik dan kembali lagi ke titik tersebut. Satuan periode adalah sekon atau detik. [12]

Menurut [8], bentuk gerak periodik yang paling sederhana adalah gerak harmonik. Gerak harmonik sering dinyatakan sebagai proyeksi suatu titik yang bergerak melingkar dengan kecepatan tetap pada suatu garis lurus.



Gambar 2.1.1 Gerak Harmonik sebagai Proyeksi Suatu Titik yang Bergerak pada Lingkaran

Bila kecepatan sudut dari garis OP sebesar ω, maka perpindahan simpangan x dapat dinyatakan sebagai:

$$x = A \sin \omega t \qquad \text{.. (2.1.1)}$$

Besaran ω biasanya diukur dalam radian per detik. Karena gerak berulang dalam 2π radian maka diperoleh hubungan:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

2.2 Dinamika Struktur

Struktur merupakan objek berupa bangunan yang harus memikul atau menyalurkan beban. Jika kegagalan struktur harus dihindari, maka beban yang dapat dipikul suatu struktur harus lebih besar daripada beban yang akan dialaminya pada masa pakai. Kemampuan suatu struktur untuk menahan beban tersebut disebut kekuatan struktur. [4]

Beberapa istilah yang dipakai dalam respon dinamis struktur antara lain:

1. Massa (*m*)

   Massa adalah ukuran kuantitatif dari inersia, yaitu sifat kecenderungan dari sebuah benda untuk tetap bergerak saat benda tersebut mulai bergerak. Massa benda berhubungan dengan jumlah proton, elektron, dan netron di dalam benda tersebut, sehingga konsep massa merupakan cara yang paling dasar untuk menentukan jumlah zat atau komponen yang ada dalam sebuah benda. Satuan massa adalah kg atau Ns^2/mm. [12]

2. Redaman (*c*)

   Redaman (*damping*) merupakan pengurangan dalam amplitudo disebabkan oleh gaya-gaya yang hilang. Satuan redaman adalah Ns/mm. [12]

3. Kekakuan (*k*)

   Kekakuan (*stiffness*) adalah kemampuan suatu struktur untuk menahan perubahan bentuk. Satuan kekakuan adalah N/mm. [4]

4. Kolom

   Kolom merupakan batang tegak yang bekerja untuk menahan balok-balok loteng, rangka atap, dan beban vertikal lainnya yang kemudian akan melimpahkan semua beban tersebut ke pondasi. [3]

5. Frekuensi Natural (ω)

   Frekuensi natural merupakan frekuensi alami getaran yang terjadi saat suatu struktur mengalami getaran bebas.

6. Tegangan (σ)

Tegangan adalah besar gaya per satuan luas penampang,

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

sehingga satuan untuk tegangan adalah N/mm^2. [12]

7. Regangan (ε)

Regangan adalah perbandingan antara pertambahan panjang terhadap panjang awal bila benda itu diberi gaya,

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

sehingga regangan tidak mempunyai dimensi (satuan). [12]

8. Modulus elastisitas (E)

Elastisitas adalah kemampuan sebuah benda untuk kembali ke bentuk awalnya ketika gaya luar yang diberikan pada benda tersebut dihilangkan, sedangkan modulus elastisitas adalah penjabaran matematis dari kecenderungan suatu objek untuk berubah bentuk ketika diberikan suatu gaya. Modulus elastisitas mempunyai nilai yang relatif besar untuk bahan yang sangat kaku. Modulus elastisitas dinyatakan sebagai perbandingan antara tegangan (σ) dan regangan (ε),

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

sehingga satuan untuk modulus elastisitas adalah N/mm^2. [12]

9. Momen inersia (I)

Momen inersia merupakan tingkat kelembaman suatu benda. Momen inersia untuk suatu penampang kolom pada struktur tertentu dinyatakan sebagai

$$I = \frac{1}{12} th^3$$

dengan:

t = tebal kolom (mm)

h = tinggi kolom (mm)

sehingga satuan untuk momen inersia adalah mm^4. [12]

2.3 Matriks

Pada subbab ini akan diuraikan beberapa definisi dan teorema tentang matriks yang dapat digunakan saat menentukan frekuensi natural getaran (ω) dan pola perubahan bentuk bangunan geser pada kondisi getaran bebas tanpa redaman.

Definisi 2.3.1 [1]

Suatu matriks (*matrix*) adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks.

Teorema 2.3.2 [1]

Misal a,b adalah skalar sebarang dan B,C adalah matriks sebarang. Dengan mengasumsikan bahwa ukuran matriks sedemikian rupa sehingga operasi-operasi yang disebutkan dapat dilakukan, aturan-aturan aritmatika matriks berikut ini berlaku.

(i) $a(B-C) = aB - aC$

(ii) $a(bC) = (ab)C$

Selanjutnya akan diuraikan beberapa definisi dan teorema yang mendasari determinan suatu matriks yang diperlukan untuk menyelesaikan persamaan kesetimbangan dinamis struktur.

Definisi 2.3.3 [1]

Jika B adalah suatu matriks bujursangkar, maka minor dari entri b_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dihilangkan dari B. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan sebagai C_{ij} dan disebut sebagai kofaktor dari entri b_{ij}.

Teorema 2.3.4 [1]

Determinan dari matriks $B, n\times n$, dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasilkali-hasilkali yang diperoleh; di mana untuk setiap $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$,

$$\det(B) = b_{1j}C_{1j} + b_{2j}C_{2j} + \ldots + b_{nj}C_{nj}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-*j*)

dan

$$\det(B) = b_{i1}C_{i1} + b_{i2}C_{i2} + \ldots + b_{in}C_{in}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-*i*)

Menurut [1], misalkan B adalah matriks $n\times n$ dan k adalah skalar sebarang, maka

$$\det(kB) = k^n \det(B)$$

Definisi 2.3.5 [1]

Jika B adalah matriks bujursangkar dan jika terdapat matriks C yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $BC = CB = I$, maka B disebut dapat dibalik (*invertible*) dan C disebut sebagai invers (*inverse*) dari B. Jika C tidak dapat didefinisikan, maka B dinyatakan sebagai matriks singular.

Matriks diagonal

Menurut [1], matriks diagonal adalah matriks yang semua entrinya yang tidak terletak pada diagonal utama adalah nol.

Suatu matriks diagonal umum $D, n \times n$, dapat ditulis sebagai

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(2.3.1)}$$

Suatu matriks diagonal dapat dibalik jika dan hanya jika seluruh entrinya pada posisi diagonal adalah bilangan taknol, dalam hal ini invers dari (2.3.1) adalah

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}$$

2.4 Sistem Persamaan Linier

Pada subbab ini akan diuraikan beberapa definisi dan teorema tentang sistem persamaan linier yang diperlukan untuk menyelesaikan persamaan kesetimbangan dinamis struktur.

Definisi 2.4.1 [5]

Suatu persamaan linier dengan variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah suatu persamaan berbentuk

$$b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n = c$$

dengan $b_1, b_2, ..., b_n, c$ adalah skalar.

Menurut [1], suatu sistem dari m persamaan linier dengan variabel $x_1, x_2, ..., x_n$ biasanya dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + ... + b_{1n}x_n &= c_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + ... + b_{2n}x_n &= c_2 \\ ... \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + ... + b_{mn}x_n &= c_m \end{aligned} \qquad \text{.................................... (2.4.1)}$$

dengan b_{ij}, c_i adalah skalar untuk $i = 1,2,...,m$ dan $j = 1,2,...,n$.

Sistem pada (2.4.1) dapat dinyatakan ke dalam bentuk matriks sebagai

$$B\mathbf{x} = \mathbf{c} \qquad \text{.. (2.4.2)}$$

dengan:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & & ... \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_m \end{bmatrix}$$

Matriks diperbesar dari sistem (2.4.2) diperoleh dengan menggabungkan $\mathbf{c}$ ke B sebagai kolom terakhir, sehingga bentuk matriks yang diperbesar menjadi

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} & c_1 \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} & c_2 \\ ... & ... & & ... & ... \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mn} & c_m \end{bmatrix}$$

Definisi 2.4.2 [5]

Diberikan suatu matriks, operasi baris elementer terhadap matriks tersebut dilakukan melalui operasi berikut:

(i) Mengalikan suatu baris dengan konstanta taknol.

(ii) Menambahkan kelipatan satu baris ke baris lainnya.

(iii) Menukarkan posisi dua baris.

Menurut [1], suatu matriks dikatakan memiliki bentuk eselon baris tereduksi (*reduced row-echelon form*) jika memenuhi sifat-sifat berikut:

(i) Jika satu baris tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka bilangan taknol pertama pada baris itu adalah 1. Bilangan 1 ini disebut 1 utama.

(ii) Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka baris-baris ini akan dikelompokkan bersama pada bagian paling bawah dari matriks.

(iii) Jika terdapat dua baris berurutan yang tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat pada kolom yang lebih kanan dari 1 utama pada baris yang lebih tinggi.

(iv) Setiap kolom yang memiliki 1 utama memiliki nol pada tempat-tempat lainnya.

Prosedur yang dilakukan untuk menghasilkan matriks dengan bentuk eselon baris tereduksi, disebut eliminasi Gauss-Jordan (*Gauss-Jordan elimination*).

2.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Pada subbab ini akan diuraikan beberapa definisi dan teorema yang diperlukan untuk menyelesaikan persamaan kesetimbangan dinamis struktur pada bangunan geser.

Definisi 2.5.1 [1]

Jika B adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor taknol $\mathbf{x}$ pada $\Re^n$ (ruang vektor riil berdimensi n) disebut vektor eigen (*eigenvector*) dari B jika $B\mathbf{x}$ adalah sebuah kelipatan skalar dari $\mathbf{x}$; jelasnya,

$$B\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

untuk skalar sebarang λ. Skalar λ disebut nilai eigen (*eigenvalue*) dari B dan $\mathbf{x}$ disebut sebagai vektor eigen dari B yang terkait dengan λ.

Teorema 2.5.2 [1]

Jika B adalah sebuah matriks $n \times n$ dan λ adalah sebuah bilangan riil, maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen.

(a) λ adalah sebuah nilai eigen dari B.

(b) Sistem persamaan $(\lambda I - B)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ memiliki solusi nontrivial.

(c) Terdapat sebuah vektor taknol $\mathbf{x}$ pada $\Re^n$ sedemikian rupa sehingga $B\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

(d) λ adalah sebuah solusi dari persamaan karakteristik $\det(\lambda I - B) = 0$.

Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks B $n \times n$, persamaan $B\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ dituliskan kembali sebagai

$$B\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$$

$$(\lambda I - B)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Agar λ dapat menjadi nilai eigen, maka harus terdapat solusi taknol dari persamaan $(\lambda I - B)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Berdasarkan Teorema 2.5.2, persamaan tersebut memiliki solusi taknol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - B) = 0$$

Persamaan ini disebut persamaan karakteristik dari matriks B, yang dapat dinyatakan sebagai sebuah polinomial p dalam variabel λ dan disebut juga sebagai polinomial karakteristik matriks B, ditulis sebagai

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - B) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \ldots + c_n$$

Teorema 2.5.3 [2]

Setiap persamaan polinomial $p(\lambda) = 0$ mempunyai sedikitnya satu akar, bilangan riil atau bilangan kompleks. Suatu persamaan polinomial derajat n mempunyai tepat n akar.

Berdasarkan Teorema 2.5.3, diperoleh bahwa sebuah matriks $n \times n$ memiliki sebanyak-banyaknya n nilai eigen yang berbeda. [1]

BAB III

PEMBAHASAN

Gempa bumi dapat menghasilkan getaran paksa yang cukup besar pada bangunan. Apabila gaya getaran yang sampai pada bangunan tersebut lebih besar dari kekuatan struktur, maka bangunan tersebut akan rusak. Reaksi getaran yang sampai pada bangunan dapat dikurangi melalui penggunaan alat tambahan pada struktur, yang dikenal dengan istilah *seismic device*. Istilah lain yang biasa digunakan adalah alat peredam gempa (*damper*). [13]

Pada dasarnya cara perlindungan bangunan oleh alat peredam gempa dicapai melalui pengurangan getaran paksa gempa bumi kearah horizontal dan memungkinkan bangunan untuk mengalami getaran bebas saat berlangsung gempa bumi tanpa tertahan oleh pondasi. Getaran-getaran tersebut dapat dianalisis melalui analisis dinamis. [10]

Pada analisis dinamis struktur bangunan gedung bertingkat, pada umumnya massa struktur dianggap dikonsentrasikan atau digumpalkan pada lantai. Kondisi ini sering juga dinamakan prinsip bangunan geser (*shear building*). [7]

3.1 Persamaan Kesetimbangan Dinamis Struktur Bangunan Geser

Menurut [6], persamaan kesetimbangan dinamis struktur pada bangunan geser empat lantai secara umum adalah:

- Persamaan kesetimbangan dinamis lantai 1:

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_2 (x_2 - x_1) = F_1(t)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = F_1(t)$$

- Persamaan kesetimbangan dinamis lantai 2:

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) - c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - k_3(x_3 - x_2) = F_2(t)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - c_3 \dot{x}_3 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3 x_3 = F_2(t)$$

- Persamaan kesetimbangan dinamis lantai 3:

$$m_3 \ddot{x}_3 + c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + k_3(x_3 - x_2) - c_4(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) - k_4(x_4 - x_3) = F_3(t)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 - c_3 \dot{x}_2 + (c_3 + c_4)\dot{x}_3 - c_4 \dot{x}_4 - k_3 x_2 + (k_3 + k_4)x_3 - k_4 x_4 = F_3(t)$$

- Persamaan kesetimbangan dinamis lantai 4:

$$m_4 \ddot{x}_4 + c_4(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) + k_4(x_4 - x_3) = F_4(t)$$

$$m_4 \ddot{x}_4 - c_4 \dot{x}_3 + c_4 \dot{x}_4 - k_4 x_3 + k_4 x_4 = F_4(t)$$

dengan m_i = massa struktur pada lantai ke-*i* (Ns^2/mm)

c_i = redaman struktur pada lantai ke-*i* (Ns/mm)

k_i = kekakuan struktur pada lantai ke-*i* (N/mm)

x_i = perpindahan struktur pada lantai ke-*i* (mm)

$\dot{x}_i$ = kecepatan struktur pada lantai ke-*i* (mm/s)

$\ddot{x}_i$ = percepatan struktur pada lantai ke-*i* (mm/s^2)

F_i = gaya luar (N)

Secara umum, persamaan gerak bangunan geser yang terdiri dari n lantai dapat ditulis dalam bentuk notasi matriks sebagai

$$M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{F} \qquad \text{...} (3.1.1)$$

dengan

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3.1.2)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \dots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \dots & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_n \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \dots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \dots \\ \ddot{x}_n \end{bmatrix} \; ; \; \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \\ \dots \\ F_n(t) \end{bmatrix}$$

3.2 Getaran Bebas Tanpa Redaman pada Bangunan Geser

Semua sistem yang bergetar mengalami redaman sampai derajat tertentu karena energi didisipasi atau dihilangkan oleh gesekan dan tahanan lain. Jika redamannya kecil, maka pengaruhnya sangat kecil pada frekuensi natural sistem.

Oleh karena itu, perhitungan frekuensi natural biasanya dilakukan dengan menganggap bahwa sistem bergetar tanpa redaman. [4]

Penggunaan metode kekakuan (*stiffness*) didasarkan pada formulasi persamaan kekakuan (*stiffness equation*) dari bangunan geser. Kondisi getaran bebas tanpa redaman pada bangunan geser dicapai saat getaran yang dialami struktur tidak dipengaruhi oleh gaya luar $(F_i = 0, \forall i)$ dan redaman diabaikan $(c_i = 0, \forall i)$, sehingga berdasarkan (3.1.1) persamaan gerak struktur bangunan geser untuk kondisi getaran bebas tanpa redaman adalah

$$M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad (3.2.1)$$

3.3 Formulasi Matriks Kekakuan *K*

Menurut [9], setiap jenis kolom memiliki nilai konstanta kekakuan yang berbeda. Konstanta kekakuan dari kolom yang kedua ujungnya terjepit adalah

$$k = \frac{12EI}{H^3}$$

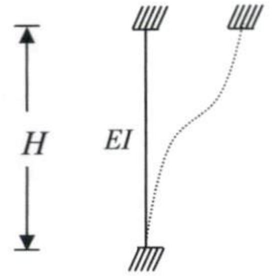
dengan:

k = kekakuan kolom pada lantai (N/mm)

E = modulus elastisitas bahan kolom (N/mm^2)

I = momen inersia penampang kolom (mm^4)

H = tinggi kolom (mm)



Gambar 3.3.1 Kolom dengan Kedua Ujung Terjepit

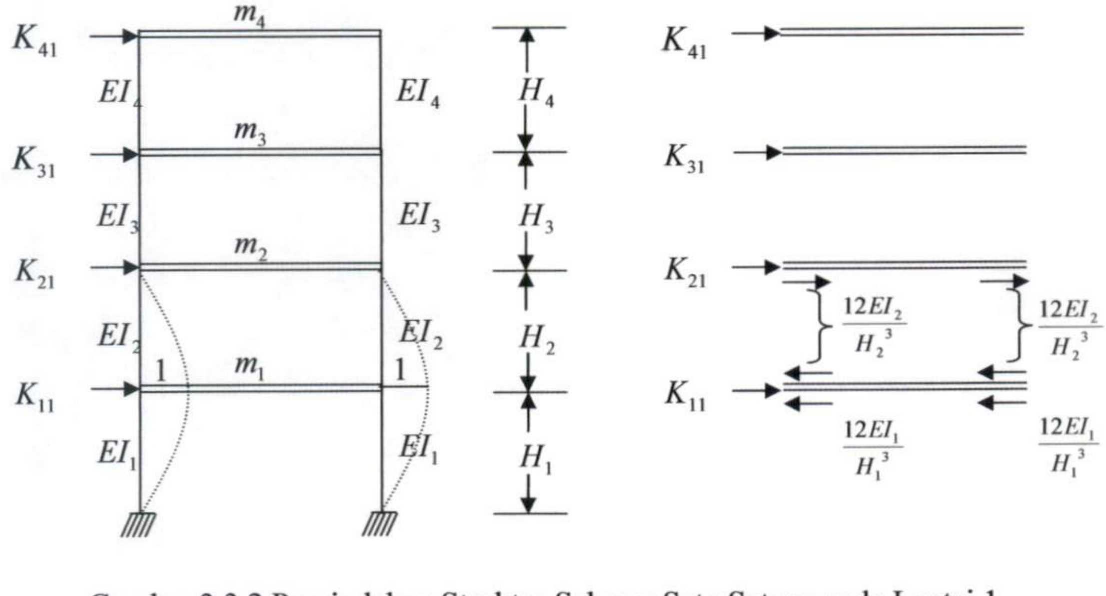
Prinsip penggumpalan massa pada lantai mengasumsikan bahwa kekakuan balok pada lantai dianggap sangat besar (tak berhingga) dibandingkan dengan kekakuan kolom. Akibatnya, perpindahan struktur yang mungkin terjadi hanya berupa perpindahan horizontal. [6]

Misalkan matriks kekakuan K dari struktur bangunan geser empat lantai adalah

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & K_{31} & K_{41} \\ K_{12} & K_{22} & K_{32} & K_{42} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & K_{43} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} \end{bmatrix}$$

dengan K_{ij} adalah besarnya gaya yang bekerja pada lantai ke-i akibat perpindahan horizontal sebesar satu satuan pada lantai ke-j.

Nilai-nilai dari K_{ij} dapat ditentukan dengan mengasumsikan perpindahan horizontal sebesar satu satuan pada masing-masing lantai berdasarkan gambar-gambar berikut:



Gambar 3.3.2 Perpindahan Struktur Sebesar Satu Satuan pada Lantai 1

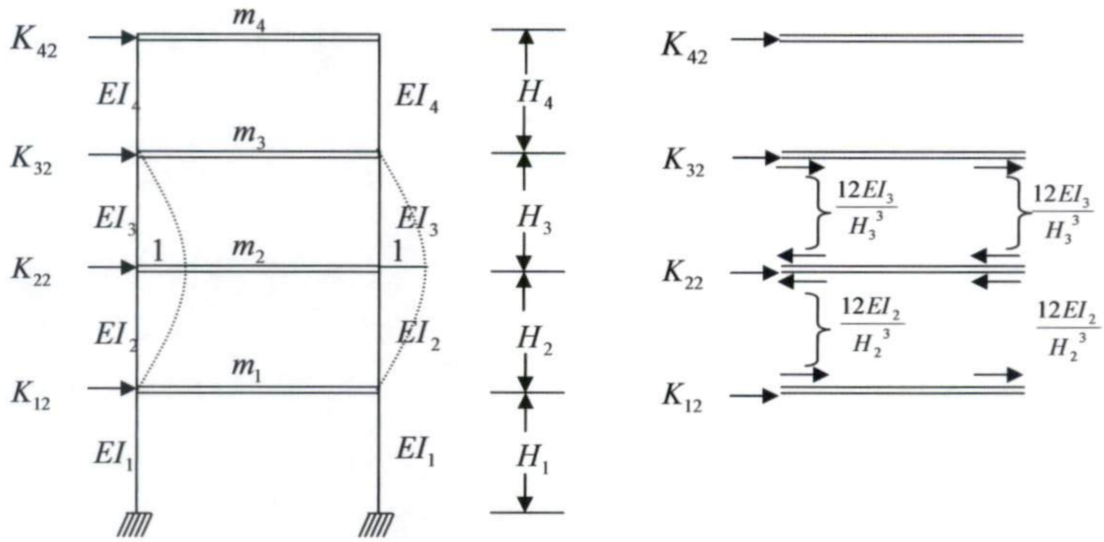
Akibat perpindahan struktur sebesar satu satuan pada lantai 1, maka dari persamaan kesetimbangan masing-masing lantai diperoleh:

$$K_{11} = 2\left(\frac{12EI_1}{H_1^{\ 3}}\right) + 2\left(\frac{12EI_2}{H_2^{\ 3}}\right)$$

$$K_{21} = -2\left(\frac{12EI_2}{H_2^{\ 3}}\right)$$

$$K_{31} = 0$$

$$K_{41} = 0$$



Gambar 3.3.3 Perpindahan Struktur Sebesar Satu Satuan pada Lantai 2

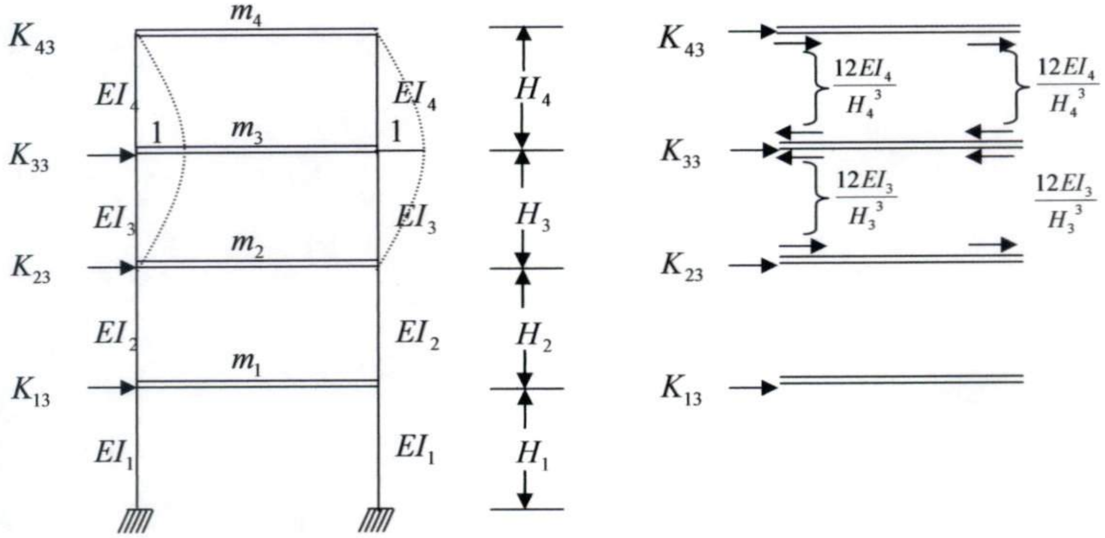
Akibat perpindahan struktur sebesar satu satuan pada lantai 2, maka dari persamaan kesetimbangan masing-masing lantai diperoleh:

$$K_{12} = -2\left(\frac{12EI_2}{H_2^{\ 3}}\right)$$

$$K_{22} = 2\left(\frac{12EI_2}{H_2^{\ 3}}\right) + 2\left(\frac{12EI_3}{H_3^{\ 3}}\right)$$

$$K_{32} = -2\left(\frac{12EI_3}{H_3^{\ 3}}\right)$$

$$K_{42} = 0$$



Gambar 3.3.4 Perpindahan Struktur Sebesar Satu Satuan pada Lantai 3

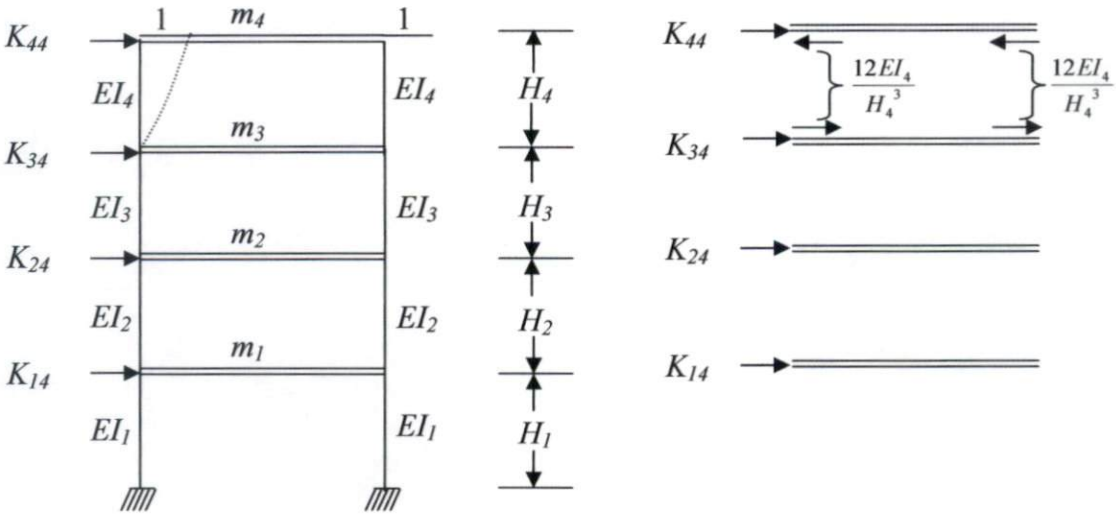
Akibat perpindahan struktur sebesar satu satuan pada lantai 3, maka dari persamaan kesetimbangan masing-masing lantai diperoleh:

$$K_{13} = 0$$

$$K_{23} = -2\left(\frac{12EI_3}{H_3^{\ 3}}\right)$$

$$K_{33} = 2\left(\frac{12EI_3}{H_3^{\ 3}}\right) + 2\left(\frac{12EI_4}{H_4^{\ 3}}\right)$$

$$K_{43} = -2\left(\frac{12EI_4}{H_4^{\ 3}}\right)$$



Gambar 3.3.5 Perpindahan Struktur Sebesar Satu Satuan pada Lantai 4

Akibat perpindahan struktur sebesar satu satuan pada lantai 4, maka dari persamaan kesetimbangan masing-masing lantai diperoleh:

$$K_{14} = 0$$

$$K_{24} = 0$$

$$K_{34} = -2\left(\frac{12EI_4}{H_4^{\ 3}}\right)$$

$$K_{44} = 2\left(\frac{12EI_4}{H_4^{\ 3}}\right)$$

Jadi, matriks kekakuan dari bangunan geser empat lantai adalah

$$K = \begin{bmatrix} \frac{24EI_1}{H_1^{\ 3}} + \frac{24EI_2}{H_2^{\ 3}} & -\frac{24EI_2}{H_2^{\ 3}} & 0 & 0 \\ -\frac{24EI_2}{H_2^{\ 3}} & \frac{24EI_2}{H_2^{\ 3}} + \frac{24EI_3}{H_3^{\ 3}} & -\frac{24EI_3}{H_3^{\ 3}} & 0 \\ 0 & -\frac{24EI_3}{H_3^{\ 3}} & \frac{24EI_3}{H_3^{\ 3}} + \frac{24EI_4}{H_4^{\ 3}} & -\frac{24EI_4}{H_4^{\ 3}} \\ 0 & 0 & -\frac{24EI_4}{H_4^{\ 3}} & \frac{24EI_4}{H_4^{\ 3}} \end{bmatrix}$$

atau dapat juga ditulis dalam bentuk

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}$$

dengan $k_i = \dfrac{24EI_i}{H_i^{\,3}}$

Dengan demikian, matriks kekakuan K untuk bangunan geser yang terdiri dari n lantai dapat dinyatakan sebagai

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \dots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix} \qquad \text{.........................} \; (3.3.1)$$

dengan $k_i = \dfrac{24EI_i}{H_i^{\,3}}$ merupakan penjumlahan semua kekakuan kolom pada lantai ke-i dari bangunan geser.

3.4 Frekuensi Natural (ω) dan Pola Perubahan Bentuk (*Mode Shape*)

Struktur bangunan geser yang mengalami getaran bebas tanpa redaman dikatakan mengalami gerak harmonik karena struktur tersebut selalu bergetar di sekitar posisi setimbang. Oleh karena itu, solusi persamaan getaran bebas tanpa redaman dari bangunan geser dapat dinyatakan sebagai solusi persamaan gerak harmonik pada Persamaan 2.1.1, yaitu

$$x_i = a_i \sin \omega t \quad , \qquad i = 1,2,3,\dots,n \qquad \text{..........................} \; (3.4.1)$$

Persamaan (3.4.1) dapat ditulis dalam bentuk notasi vektor

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} \sin \omega t \qquad \text{...} \; (3.4.2)$$

dengan : $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$, x_i = besar perpindahan pada lantai ke-i (mm)

$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \ldots \\ a_n \end{bmatrix}$, a_i = amplitudo gerak pada lantai ke-i (mm)

ω = frekuensi natural getaran (rad/s)

t = waktu (s)

sehingga diperoleh

$$\dot{\mathbf{x}} = \omega \mathbf{a} \cos \omega t$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2 \mathbf{a} \sin \omega t \qquad \text{.......... (3.4.3)}$$

Berdasarkan (3.2.1), diperoleh

$$M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$M^{-1}M\ddot{\mathbf{x}} + M^{-1}K\mathbf{x} = M^{-1}\mathbf{0}$$

$$I\ddot{\mathbf{x}} + M^{-1}K\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \text{.......... (3.4.4)}$$

Misal $M^{-1}K = B$, maka Persamaan (3.4.4) dapat ditulis sebagai

$$I\ddot{\mathbf{x}} + B\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \text{.......... (3.4.5)}$$

Dengan mensubstitusikan (3.4.2) dan (3.4.3) ke (3.4.5) diperoleh

$$I\left(-\omega^2 \mathbf{a} \sin \omega t\right) + B\left(\mathbf{a} \sin \omega t\right) = \mathbf{0}$$

$$\left(B - \omega^2 I\right)\mathbf{a} \sin \omega t = \mathbf{0} \qquad \text{.......... (3.4.6)}$$

Karena (3.4.6) berlaku $\forall t > 0$, maka diperoleh

$$\left(B-\omega^2 I\right)\mathbf{a}=\mathbf{0} \qquad \text{.. (3.4.7)}$$

Berdasarkan Teorema 2.5.2, Persamaan (3.4.7) memiliki solusi nontrivial jika

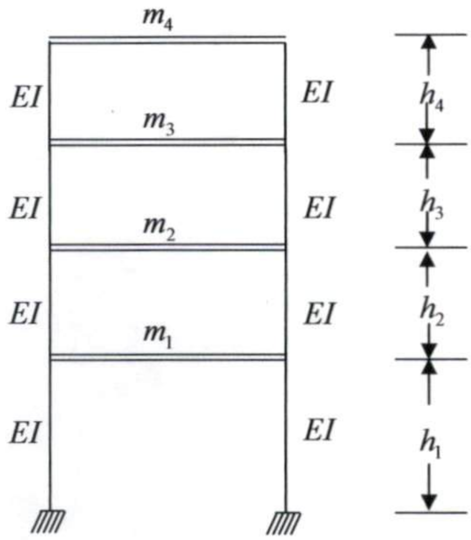
$$\det\left(B-\omega^2 I\right)=0 \qquad \text{.. (3.4.8)}$$

Persamaan (3.4.8) akan memberikan persamaan polinomial berderajat n dengan variabel ω^2, yang disebut juga dengan persamaan karakteristik (*characteristic equation*). Solusi persamaan tersebut akan memberikan sebanyak-banyaknya n buah nilai ω^2 sebagai nilai eigen dengan ω sebagai frekuensi natural getaran. Selanjutnya dari nilai-nilai eigen tersebut akan diperoleh vektor eigen untuk menentukan pola perubahan bentuk dari bangunan geser untuk kondisi getaran bebas tanpa redaman.

3.5 Contoh Kasus

Misalkan sebuah struktur bangunan geser empat lantai memiliki massa lantai $m_1 = 2.0m$, $m_2 = 1.5m$, $m_3 = 1.0m$, $m_4 = 1.0m$ dan tinggi kolom $h_1 = 1.5h$, $h_2 = 1.0h$, $h_3 = 1.0h$, $h_4 = 1.0h$.

Akan ditentukan frekuensi natural (ω) dan pola perubahan bentuk (*mode shape*) dari struktur bangunan geser empat lantai tersebut dengan menggunakan metode kekakuan (*stiffness*).



Gambar 3.5.1 Sketsa Struktur Bangunan Geser Empat Lantai

Solusi:

- Menentukan matriks massa M dan M^{-1}

  Berdasarkan (3.1.2), diperoleh

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.0m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0m \end{bmatrix}$$

  Dengan demikian

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1.5m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{6m}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

- Menentukan matriks kekakuan K

Berdasarkan (3.3.1), diperoleh

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & K_{31} & K_{41} \\ K_{12} & K_{22} & K_{32} & K_{42} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & K_{43} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{24EI_1}{{h_1}^3} + \frac{24EI_2}{{h_2}^3} & -\frac{24EI_2}{{h_2}^3} & 0 & 0 \\ -\frac{24EI_2}{{h_2}^3} & \frac{24EI_2}{{h_2}^3} + \frac{24EI_3}{{h_3}^3} & -\frac{24EI_3}{{h_3}^3} & 0 \\ 0 & -\frac{24EI_3}{{h_3}^3} & \frac{24EI_3}{{h_3}^3} + \frac{24EI_4}{{h_4}^3} & -\frac{24EI_4}{{h_4}^3} \\ 0 & 0 & -\frac{24EI_4}{{h_4}^3} & \frac{24EI_4}{{h_4}^3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{24EI}{(1.5h)^3} + \frac{24EI}{h^3} & -\frac{24EI}{h^3} & 0 & 0 \\ -\frac{24EI}{h^3} & \frac{24EI}{h^3} + \frac{24EI}{h^3} & -\frac{24EI}{h^3} & 0 \\ 0 & -\frac{24EI}{h^3} & \frac{24EI}{h^3} + \frac{24EI}{h^3} & -\frac{24EI}{h^3} \\ 0 & 0 & -\frac{24EI}{h^3} & \frac{24EI}{h^3} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{840EI}{27h^3} & -\frac{24EI}{h^3} & 0 & 0 \\ -\frac{24EI}{h^3} & \frac{48EI}{h^3} & -\frac{24EI}{h^3} & 0 \\ 0 & -\frac{24EI}{h^3} & \frac{48EI}{h^3} & -\frac{24EI}{h^3} \\ 0 & 0 & -\frac{24EI}{h^3} & \frac{24EI}{h^3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{24EI}{27h^3}\begin{bmatrix} 35 & -27 & 0 & 0 \\ -27 & 54 & -27 & 0 \\ 0 & -27 & 54 & -27 \\ 0 & 0 & -27 & 27 \end{bmatrix}$$

- Menentukan matriks B

Berdasarkan pemisalan sebelumnya, diperoleh

$$B = M^{-1}K$$

$$= \left(\frac{1}{6m}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\right)\left(\frac{24EI}{27h^3}\begin{bmatrix} 35 & -27 & 0 & 0 \\ -27 & 54 & -27 & 0 \\ 0 & -27 & 54 & -27 \\ 0 & 0 & -27 & 27 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{4EI}{27mh^3}\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 35 & -27 & 0 & 0 \\ -27 & 54 & -27 & 0 \\ 0 & -27 & 54 & -27 \\ 0 & 0 & -27 & 27 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{4EI}{27mh^3}\begin{bmatrix} 105 & -81 & 0 & 0 \\ -108 & 216 & -108 & 0 \\ 0 & -162 & 324 & -162 \\ 0 & 0 & -162 & 162 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{12EI}{27mh^3}\begin{bmatrix} 35 & -27 & 0 & 0 \\ -36 & 72 & -36 & 0 \\ 0 & -54 & 108 & -54 \\ 0 & 0 & -54 & 54 \end{bmatrix}$$

- Menentukan frekuensi natural getaran (ω)

Frekuensi natural getaran (ω) dari bangunan geser empat lantai diperoleh dari Persamaan 3.4.8, yaitu

$$\det\left(B-\omega^2 I\right)=0$$

$$\left|\frac{12EI}{27mh^3}\begin{bmatrix}35 & -27 & 0 & 0\\ -36 & 72 & -36 & 0\\ 0 & -54 & 108 & -54\\ 0 & 0 & -54 & 54\end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right|=0 \qquad \text{....... (3.5.1)}$$

Misalkan $u=\omega^2$ dan $v=\dfrac{12EI}{27mh^3}$

maka satuan untuk u adalah

$$\left(\frac{1}{s}\right)^2=\frac{1}{s^2}$$

dan satuan untuk v adalah

$$\frac{\dfrac{N}{mm^2}\,mm^4}{\dfrac{Ns^2}{mm}\,mm^3}=\frac{1}{s^2}$$

Karena satuan untuk u dan v sama, maka u dapat dinyatakan sebagai hasil kali suatu skalar α dengan v, yaitu

$$u=\alpha v$$

$$\omega^2=\alpha\frac{12EI}{27mh^3} \qquad \text{.. (3.5.2)}$$

Dengan mensubstitusikan (3.5.2) ke (3.5.1), diperoleh

$$\left|\frac{12EI}{27mh^3}\begin{bmatrix}35 & -27 & 0 & 0\\ -36 & 72 & -36 & 0\\ 0 & -54 & 108 & -54\\ 0 & 0 & -54 & 54\end{bmatrix}-\alpha\frac{12EI}{27mh^3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right|=0$$

$$\left| \frac{12EI}{27mh^3} \begin{bmatrix} 35-\alpha & -27 & 0 & 0 \\ -36 & 72-\alpha & -36 & 0 \\ 0 & -54 & 108-\alpha & -54 \\ 0 & 0 & -54 & 54-\alpha \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left(\frac{12EI}{27mh^3} \right)^4 \begin{vmatrix} 35-\alpha & -27 & 0 & 0 \\ -36 & 72-\alpha & -36 & 0 \\ 0 & -54 & 108-\alpha & -54 \\ 0 & 0 & -54 & 54-\alpha \end{vmatrix} = 0$$

Karena $\left(\frac{12EI}{27mh^3} \right)^4 \neq 0$, diperoleh

$$\begin{vmatrix} 35-\alpha & -27 & 0 & 0 \\ -36 & 72-\alpha & -36 & 0 \\ 0 & -54 & 108-\alpha & -54 \\ 0 & 0 & -54 & 54-\alpha \end{vmatrix} = 0$$

dengan menggunakan *Scientific WorkPlace (*SWP*)* 3.0 diperoleh

$$839808 - 389772\alpha + 19854\alpha^2 - 269\alpha^3 + \alpha^4 = 0$$

$$\alpha_1 = 2.4504$$

$$\alpha_2 = 26.848$$

$$\alpha_3 = 79.865$$

$$\alpha_4 = 159.84$$

Berdasarkan pemisalan sebelumnya,

$$\omega^2 = \alpha \frac{12EI}{27mh^3}$$

maka diperoleh nilai frekuensi natural (ω_i) dari bangunan geser sebagai berikut:

- $\omega_1^{\ 2} = \alpha_1 \frac{12EI}{27mh^3} = (2.4504)\frac{12EI}{27mh^3} = 1.0891 \frac{EI}{mh^3}$

$$\omega_1 = 1.0436\sqrt{\frac{EI}{mh^3}}$$

- $$\omega_2^{\,2} = \alpha_2 \frac{12EI}{27mh^3} = (26.848)\frac{12EI}{27mh^3} = 11.9324\frac{EI}{mh^3}$$

$$\omega_2 = 3.4543\sqrt{\frac{EI}{mh^3}}$$

- $$\omega_3^{\,2} = \alpha_3 \frac{12EI}{27mh^3} = (79.865)\frac{12EI}{27mh^3} = 35.4956\frac{EI}{mh^3}$$

$$\omega_3 = 5.9578\sqrt{\frac{EI}{mh^3}}$$

- $$\omega_4^{\,2} = \alpha_4 \frac{12EI}{27mh^3} = (159.84)\frac{12EI}{27mh^3} = 71.04\frac{EI}{mh^3}$$

$$\omega_4 = 8.4285\sqrt{\frac{EI}{mh^3}}$$

- Menentukan pola perubahan bentuk (*mode shape*)

Pola perubahan bentuk (*mode shape*) untuk masing-masing nilai frekuensi natural (ω_i), $i = 1,2,3,4$ diperoleh dengan menentukan nilai vektor $\mathbf{a}_i$ dari persamaan

$$\left(B - \omega_i^{\,2} I\right)\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$$

sebagai vektor eigen dari masing-masing nilai eigen $\left(\omega_i^{\,2}\right)$ yang berkaitan.

Pola perubahan bentuk 1

Untuk $\alpha_1 = 2.4504$ atau $\omega_1 = 1.0436\sqrt{\frac{EI}{mh^3}}$, diperoleh

$$\left[\frac{12EI}{27mh^3}\begin{bmatrix} 35-\alpha_1 & -27 & 0 & 0 \\ -36 & 72-\alpha_1 & -36 & 0 \\ 0 & -54 & 108-\alpha_1 & -54 \\ 0 & 0 & -54 & 54-\alpha_1 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 35-\alpha_1 & -27 & 0 & 0 \\ -36 & 72-\alpha_1 & -36 & 0 \\ 0 & -54 & 108-\alpha_1 & -54 \\ 0 & 0 & -54 & 54-\alpha_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 35-2.4504 & -27 & 0 & 0 \\ -36 & 72-2.4504 & -36 & 0 \\ 0 & -54 & 108-2.4504 & -54 \\ 0 & 0 & -54 & 54-2.4504 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 32.5496 & -27 & 0 & 0 \\ -36 & 69.5496 & -36 & 0 \\ 0 & -54 & 105.5496 & -54 \\ 0 & 0 & -54 & 51.5496 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\begin{aligned} 32.5496a_{11} - 27a_{21} &= 0 \\ -36a_{11} + 69.5496a_{21} - 36a_{31} &= 0 \\ -54a_{21} + 105.5496a_{31} - 54a_{41} &= 0 \\ -54a_{31} + 51.5496a_{41} &= 0 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan pada sistem persamaan linier di atas, diperoleh bentuk eselon baris tereduksi dari matriks diperbesarnya, yaitu

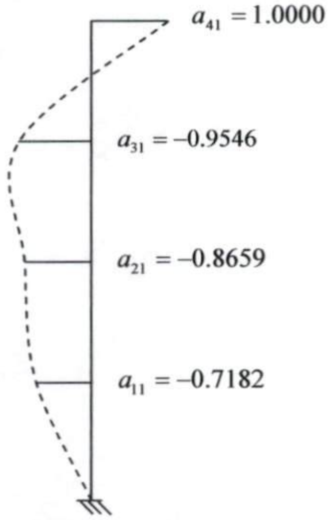
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.7182 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.8659 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.9546 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$a_{11} = -0.7182s \qquad a_{21} = -0.8659s \qquad a_{31} = -0.9546s \qquad a_{41} = s$$

atau $\mathbf{a}_1 = s\begin{bmatrix} -0.7182 \\ -0.8659 \\ -0.9546 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$

Dengan demikian, diperoleh sketsa pola perubahan bentuk 1 sebagai berikut



Gambar 3.5.2 Pola Perubahan Bentuk 1 dengan $\omega_1 = 1.0436\sqrt{\dfrac{EI}{mh^3}}$

Pola perubahan bentuk 2

Untuk $\alpha_2 = 26.848$ atau $\omega_2 = 3.4543\sqrt{\dfrac{EI}{mh^3}}$, diperoleh

$$\left[\frac{12EI}{27mh^3}\begin{bmatrix} 35-\alpha_2 & -27 & 0 & 0 \\ -36 & 72-\alpha_2 & -36 & 0 \\ 0 & -54 & 108-\alpha_2 & -54 \\ 0 & 0 & -54 & 54-\alpha_2 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 35-\alpha_2 & -27 & 0 & 0 \\ -36 & 72-\alpha_2 & -36 & 0 \\ 0 & -54 & 108-\alpha_2 & -54 \\ 0 & 0 & -54 & 54-\alpha_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 35-26.848 & -27 & 0 & 0 \\ -36 & 72-26.848 & -36 & 0 \\ 0 & -54 & 108-26.848 & -54 \\ 0 & 0 & -54 & 54-26.848 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8.152 & -27 & 0 & 0 \\ -36 & 45.152 & -36 & 0 \\ 0 & -54 & 81.152 & -54 \\ 0 & 0 & -54 & 27.152 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\begin{aligned} 8.152a_{12} \quad -27a_{22} \qquad\qquad\qquad &= 0 \\ -36a_{12} + 45.152a_{22} \quad -36a_{32} \qquad &= 0 \\ -54a_{22} + 81.152a_{32} \quad -54a_{42} &= 0 \\ -54a_{32} + 27.152a_{42} &= 0 \end{aligned}$$

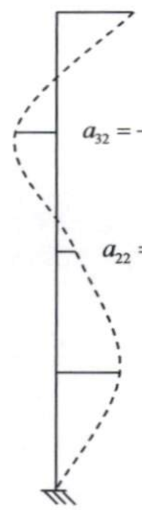
Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan pada sistem persamaan linier di atas, diperoleh bentuk eselon baris tereduksi dari matriks diperbesarnya, yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.8093 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.2444 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5028 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} a_{12} &= 0.8093s \\ a_{22} &= 0.2444s \\ a_{32} &= -0.5028s \\ a_{42} &= s \end{aligned} \qquad \text{atau} \qquad \mathbf{a}_2 = s\begin{bmatrix} 0.8093 \\ 0.2444 \\ -0.5028 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, diperoleh sketsa pola perubahan bentuk 2 sebagai berikut



Gambar 3.5.3 Pola Perubahan Bentuk 2 dengan $\omega_2 = 3.4543\sqrt{\dfrac{EI}{mh^3}}$

Pola perubahan bentuk 3

Untuk $\alpha_3 = 79.865$ atau $\omega_3 = 5.9578\sqrt{\dfrac{EI}{mh^3}}$, diperoleh

$$\left[\frac{12EI}{27mh^3}\begin{bmatrix} 35-\alpha_3 & -27 & 0 & 0 \\ -36 & 72-\alpha_3 & -36 & 0 \\ 0 & -54 & 108-\alpha_3 & -54 \\ 0 & 0 & -54 & 54-\alpha_3 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 35-\alpha_3 & -27 & 0 & 0 \\ -36 & 72-\alpha_3 & -36 & 0 \\ 0 & -54 & 108-\alpha_3 & -54 \\ 0 & 0 & -54 & 54-\alpha_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 35-79.865 & -27 & 0 & 0 \\ -36 & 72-79.865 & -36 & 0 \\ 0 & -54 & 108-79.865 & -54 \\ 0 & 0 & -54 & 54-79.865 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -44.865 & -27 & 0 & 0 \\ -36 & -7.865 & -36 & 0 \\ 0 & -54 & 28.135 & -54 \\ 0 & 0 & -54 & -25.865 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\begin{aligned} -44.865a_{13} \quad -27a_{23} \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0 \\ -36a_{13} - 7.865a_{23} \quad -36a_{33} \qquad\qquad &= 0 \\ -54a_{23} + 28.135a_{33} \quad -54a_{43} &= 0 \\ -54a_{33} - 25.865a_{43} &= 0 \end{aligned}$$

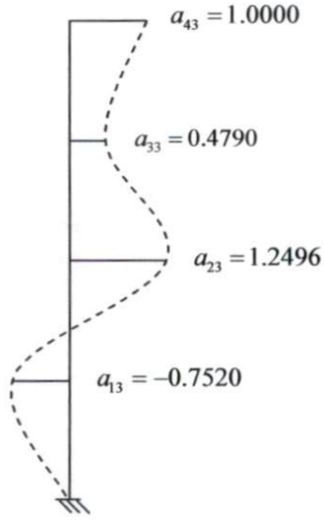
Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan pada sistem persamaan linier di atas, diperoleh bentuk eselon baris tereduksi dari matriks diperbesarnya, yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.752 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1.2496 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.479 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} a_{13} &= -0.752s \\ a_{23} &= 1.2496s \\ a_{33} &= 0.4790s \\ a_{43} &= s \end{aligned} \quad \text{atau} \quad \mathbf{a}_3 = s\begin{bmatrix} -0.7520 \\ 1.2496 \\ 0.4790 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, diperoleh sketsa pola perubahan bentuk 3 sebagai berikut



Gambar 3.5.4 Pola Perubahan Bentuk 3 dengan $\omega_3 = 5.9578\sqrt{\dfrac{EI}{mh^3}}$

Pola perubahan bentuk 4

Untuk $\alpha_4 = 159.84$ atau $\omega_4 = 8.4284\sqrt{\dfrac{EI}{mh^3}}$, diperoleh

$$\left[\frac{12EI}{27mh^3}\begin{bmatrix} 35-\alpha_4 & -27 & 0 & 0 \\ -36 & 72-\alpha_4 & -36 & 0 \\ 0 & -54 & 108-\alpha_4 & -54 \\ 0 & 0 & -54 & 54-\alpha_4 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 35-\alpha_4 & -27 & 0 & 0 \\ -36 & 72-\alpha_4 & -36 & 0 \\ 0 & -54 & 108-\alpha_4 & -54 \\ 0 & 0 & -54 & 54-\alpha_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 35-159.84 & -27 & 0 & 0 \\ -36 & 72-159.84 & -36 & 0 \\ 0 & -54 & 108-159.84 & -54 \\ 0 & 0 & -54 & 54-159.84 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -124.84 & -27 & 0 & 0 \\ -36 & -87.84 & -36 & 0 \\ 0 & -54 & -51.84 & -54 \\ 0 & 0 & -54 & -105.84 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\begin{aligned} -124.84a_{14} \quad -27a_{24} \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0 \\ -36a_{14} - 87.84a_{24} \quad -36a_{34} \qquad\qquad &= 0 \\ -54a_{24} - 51.84a_{34} - 54a_{44} &= 0 \\ -54a_{34} - 105.84a_{44} &= 0 \end{aligned}$$

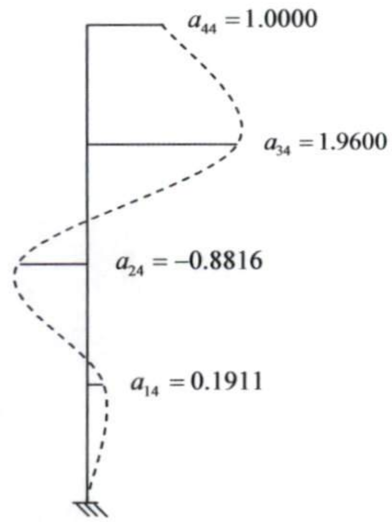
Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan pada sistem persamaan linier di atas, diperoleh bentuk eselon baris tereduksi dari matriks diperbesarnya, yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.1911 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.8816 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1.96 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} a_{14} &= 0.1911s \\ a_{24} &= -0.8816s \\ a_{34} &= 1.96s \\ a_{44} &= s \end{aligned} \qquad \text{atau} \qquad \mathbf{a}_4 = s\begin{bmatrix} 0.1911 \\ -0.8816 \\ 1.9600 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, diperoleh sketsa pola perubahan bentuk 4 sebagai berikut



Gambar 3.5.5 Pola Perubahan Bentuk 4 dengan $\omega_4 = 8.4284\sqrt{\frac{EI}{mh^3}}$

Berdasarkan perhitungan di atas, diperoleh bahwa struktur bangunan geser empat lantai dengan kondisi tersebut memiliki frekuensi natural terkecil sebesar $\omega_1 = 1.0436\sqrt{\frac{EI}{mh^3}}$. Dengan demikian, bangunan akan mampu menahan gaya luar dengan frekuensi yang lebih kecil daripada frekuensi natural sistem tersebut.

BAB IV

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh pada Bab III, dapat disimpulkan bahwa:

1. Persamaan gerak struktur bangunan geser untuk kondisi getaran bebas tanpa redaman adalah

   $$M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

   dengan

   $$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix};$$

   m_i = massa struktur pada lantai ke-i (Ns^2/mm)

   $$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \dots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix};$$

   k_i = kekakuan struktur pada lantai ke-i (N/mm)

   $$k_i = \frac{24EI_i}{H_i^3};$$

   dengan E = modulus elastisitas bahan kolom (N/mm^2)

   I_i = momen inersia penampang kolom ke-i (mm^4)

   H_i = tinggi kolom ke-i (mm)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} ; \; x_i = \text{perpindahan struktur pada lantai ke-}i \text{ (mm)}$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \dots \\ \ddot{x}_n \end{bmatrix} ; \; \ddot{x}_i = \text{percepatan struktur pada lantai ke-}i \text{ (mm/s}^2\text{)}$$

2. Melalui penggunaan metode kekakuan (*stiffness*) diperoleh persamaan polinomial berderajat n dengan variabel ω^2, yang disebut juga dengan persamaan karakteristik (*characteristic equation*). Solusi persamaan tersebut akan memberikan sebanyak-banyaknya n buah nilai ω^2 sebagai nilai eigen dengan ω sebagai frekuensi natural getaran. Selanjutnya dari nilai-nilai eigen tersebut akan diperoleh vektor eigen untuk menentukan pola perubahan bentuk dari bangunan geser untuk kondisi getaran bebas tanpa redaman.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H. dan C. Rorres. 2004. *Aljabar Linear Elementer*. Versi Aplikasi Edisi ke-8 Jilid I. Erlangga, Jakarta

[2] Ayres, F. dan P. A. Schmidt. 2004. *Matematika Universitas*. Edisi Ke-3. Erlangga, Jakarta

[3] Buana, H. 2009. Kolom dan Batang Tekan. http://best-reinald.blogspot.com/2009/10/kolom-dan-batang-tekan_7260.html. 27 Februari 2011

[4] Gere, J. M dan Timoshenko, S. P. 2000. *Mekanika Bahan*. Jilid I Edisi ke-4. Erlangga, Jakarta

[5] Jacob, Bill. 1990. *Linear Algebra*. W. H. Freedman and company, United States of America

[6] Paz, M. and W. Leigh. 2004. *Structural Dynamics Theory and Computation*. Fifth Edition. Cluwer Academic, Massachusetts

[7] Purnijanto, B. Evaluasi Penggunaan Model Bangunan Geser pada Analisis Dinamik Tiga Dimensi. *Tesis S*-2, tidak diterbitkan. Fakultas Teknik Universitas Diponegoro

[8] Setyanto. 2010. Rekayasa Fondasi III. *Buku Ajar*, tidak diterbitkan. Fakultas Teknik Universitas Lampung

[9] Thomson, W. T. 1995. *Teori Getaran dengan Penerapan*. Edisi ke-2. Erlangga, Jakarta

[10] Wicaksana, S. P. 2010. Alat-alat Sipil. http://sanggapramana.wordpress.com/2010/11/27/damper-isolator-gempa-pada-struktur-bangunan/. 4 Januari 2011

[11] Wikipedia. 2010. Getaran. http://id.wikipedia.org/wiki/Getaran,. 24 November 2010

[12] Young, H. D. dan Freedman, R. A. 2002. *Fisika Universitas*. Edisi ke-10 Jilid I. Erlangga, Jakarta

[13] Zeniad. 2009. Teknologi Anti Gempa Dalam Negeri. http://zeniad.wordpress.com/category/konstruksi/page/2/. 23 November 2010

LAMPIRAN

LAMPIRAN

Menentukan determinan matriks dengan menggunakan *Scientific WorkPlace (SWP)* 3.0 :

- Pilih menu *Insert* → *Brackets*
- Pilih menu *Insert* → *Matrix* → Input *dimensions rows* : 4 → Input *dimensions columns* : 4 → Klik *OK*
- Input entri-entri matriks
- Pilih menu *Maple* → *Matrices* → *Determinant*

Menyelesaikan persamaan polinomial dengan menggunakan *Scientific WorkPlace (SWP)* 3.0 :

- Tuliskan persamaan polinomial
- Pilih menu *Maple* → *Solve* → *Numeric*

Tampilan lembar kerja *ScientificWorkPlace* (SWP) 3.0 :

$$\begin{bmatrix} 35-x & -27 & 0 & 0 \\ -36 & 72-x & -36 & 0 \\ 0 & -54 & 108-x & -54 \\ 0 & 0 & -54 & 54-x \end{bmatrix},$$

determinant : $839\,808 - 389\,772x + 19\,854x^2 - 269x^3 + x^4$

$839\,808 - 389\,772x + 19\,854x^2 - 269x^3 + x^4 = 0,$

solution is : $\{x = 2.4504\}, \{x = 26.848\}, \{x = 79.865\}, \{x = 159.84\}$

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis bernama Sri Efrinita Irwan, dilahirkan di Sungai Tarab pada tanggal 07 Oktober 1989 dari pasangan Pahlawanuddin, BA dan Irna M. Penulis adalah anak ketiga dari empat bersaudara. Penulis menamatkan pendidikan di TK Tunas Harapan Pasie Laweh pada tahun 1995, SD Negeri 25 Sungai Tarab pada tahun 2001, MTs Negeri Batusangkar pada tahun 2004, dan SMA Negeri 3 Batusangkar pada tahun 2007. Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur Seleksi Penerimaan Mahasiswa Baru (SPMB).

Selama menjadi mahasiswa di Jurusan Matematika FMIPA UNAND, penulis merupakan anggota Himpunan Mahasiswa Matematika (Himatika) FMIPA UNAND yang terlibat dalam kepanitiaan beberapa kegiatan, diantaranya sebagai anggota tim soal Seni Bermatematika pada Pekan Seni Bermatematika (PSB) VI dan sebagai koordinator tim soal Seni Bermatematika pada Pekan Seni Bermatematika (PSB) VII. Pada tahun 2010, penulis menjadi utusan dari Universitas Andalas untuk mengikuti Olimpiade Nasional Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (ONMIPA) tingkat regional di Pekanbaru. Pada tahun yang sama, penulis juga memperoleh juara II pada Olimpiade Sains Nasional Perguruan Tinggi se-Indonesia (OSN-PTI) tingkat propinsi Sumatera Barat. Pada tahun 2011, penulis kembali menjadi utusan dari Universitas Andalas untuk mengikuti ONMIPA tingkat regional di Pekanbaru dan terpilih sebagai utusan wilayah regional X (Sumbar, Riau, Jambi, dan Kepri) untuk mengikuti ONMIPA tingkat nasional.

Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) pada tahun 2010 di Jorong Guguk Panjang Kenagarian Sumanik Kec. Salimpaung Kab. Tanah Datar dalam rangka menyelesaikan salah satu mata kuliah wajib di Universitas Andalas.