



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar Unand.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Unand.

PELABELAN TOTAL (a, 3)-SISI ANTI AJAIB SUPER UNTUK GRAF ULAT

SKRIPSI



**RIRI EMARINE SUSUR
06934035**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2011**

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa:

Nama : Riri Emarine Susur
Nomor Buku Pokok : 06 934 035
Jurusan : Matematika
Bidang : Kombinatorika
Judul Skripsi : *Pelabelan Total (a,3)-Sisi Anti Ajaib Super Untuk Graf Ulat*

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal 21 September 2011 berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing/ Penguji,

1.



Dr. Lyra Yulianti

NIP: 19750706 199903 2 003

2.

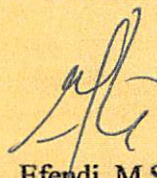


Dr. Syafrizal Sy

NIP: 19670807 199309 1 001

Penguji,

1.



Efendi, M.Si

NIP: 19780717 200212 1 002

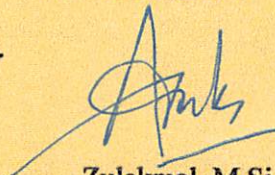
2.



Budi Rudianto, M.Si

NIP: 132303094

3.



Zulakmal, M.Si

NIP: 19671108 199802 1 001

Mengetahui

Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand,



Dr. Syafrizal Sy

NIP: 19670807 199309 1 001

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan,
maka apabila kamu telah selesai (dari suatu urusan) kerjakanlah
dengan sungguh-sungguh (urusan) yang lain dan hanya kepada
tuhanlah hendaknya kamu berharap
(QS. Alam Nasyrah : 6-8)

Ya Allah...

Aku menyadari sepenuhnya apa yang telah kuperbuat
Sampai detik ini belum berarti apa-apa
Bila dibandingkan dengan cucuran keringat orang tuaku,
Karnanya ya Allah, Aku memohon...

Jadikanlah keringat mereka sebagai mutiara yang kemilau saat aku dalam kegelapan
Jadikanlah keletihan mereka sebagai kendaraan saat aku dalam kepayahan
Jadikanlah ketabahan mereka sebagai kemudahan dalam kesusahan
Jadikanlah tetesan air mata mereka sebagai embun penyejuk dikala dahaga
dan jadikanlah do'a restu dan kasih sayang mereka sebagai pelita dalam jiwaku

Hari ini (21 september 2011)....

Satu episode kehidupan telah berlalu
Dengan airmata ku bersujud pada-Mu
Dengan beribu kata syukur ku mengadu pada-Mu
Karena dengan segala izin-Mu hingga ku mampu
Mengubah tangisku menjadi senyum kebanggaanku

Alhamdulillah ya Allah ...

Terima kasih atas segalanya
Pada saat ini ku dapat kembali tegak
Membawa segenggam harapan yang telah lama kuperjuangkan
Walau ku akui ini bukanlah akhir dari perjalanan
Dihadapanku masih terbentang seribu tantangan
Kumohon Ridho-Mu ya Allah agar ku tetap tegar...

Untukmu yang paling ku Cinta di Dunia ini

Ayahanda (H.SUHATRI DANUR B.Ac)

dan Ibunda (Hj.SURYA IDEA S.Pd)

Ku tak tau tulisan berbentuk apa yang pantas unfuk ku torehkan
Sebagai ungkapan terima kasih dari pengorbanan yang selama ini
engkau berikan
Begitu banyak cucuran keringat dan airmata yang engkau teteskan
dengan penuh kesabaran dan ketegaran
Di usia senjamu...lelah tak goyahkan langkahmu memperjuangkan,
mengantarkanku memahami kehidupan
agar kelak ku menjadi seseorang yang mempunyai pegangan

Mungkin klo bukan karna bapak mungkin riri g jadi seminar kemaren ini.sekali lagi maksih ya pakkkkk 😊😊

Bapak Dr muhafzan selaku pembimbing akademik, riri selsai jg akhirnya pak,,riri dah SSI skrg lohyyy...xixixi... snangnyaaaaaaa...mksh ya pak atas bimbingan, sran n nasehat bpk...riri senang bisa knal bpk..walaupun bpk sedikit nyebli(hehehe) tp riri senang jg klo dah curhat sama bpk,lega rasanya,,hihihihi.....(masih ingat g pak wktu bpk blg tdk ada yg tdk bisa di tukar selain ayat suci al qur'an,,,ondehhh pak lega bgt rasanya dengar kata2 bpk itu....bkin riri smngat utk melanjutkannya). sekali lg mksh ya pak, klo bkn karna bpk jg mngkin riri g jd seminar kmrn ini....mksh byk bpk 😊😊

Untuk rima(dormita)my best frend 11 taon qt sama2 byk cerita suka n duka..puak,do'a in aq dpt kerja jg y kayak kmu.....jgn prnah lupakan persahabatan qt sampe kakek ne2k..hahahaha

Untuk tmn2 qu 4srangkai...

ni liza(etek), smngat truz tgl slangkah lagi kok..mari kita sama2 pakai toga..mksh y etek ats bntuan slama pembuatan skripsi ini.

Dewi(jawinar), jgn ptus asa y tmn..kmu pasti bisa..smngat trus..rjin aj nemui ibk,insyallah slsai jg tuuuu..aq snang bisa knal kmu wi..kdang kmu orgny nyblin jg..tp kmu baik jg kok..mksh y ats bntuan kmu slama ini..kbrsamaan n canda tawa yg g prnah ii lupakan..(oya ii titip mama y syg y,,klo ii prg rjin2 main k rmh ,kpn prlu tdr rmh,ksian mama n papa berdua aj..) jgn prnh lupakan prtmanan qt walaupun sbntr lg qt akn brpisah,,kmnikasi akn slalu ad..miss u.

Sari(kaliang), 5tahun qt menjalin persahabatan ,ada suka n duka yg qt lalui bersama..sdih n senang qt lalui ber2.. walupun qt sring brtengkar.tp kdng qt g bisa d psahkan..ujung2ny ntr baik jg,hahaha iya kannnnnnn??? Oya makasih y syg slama ini dah baik sama ii,dah mau nIngin ii dalam segi apapun..jangan lupakan knangan2 indah qt yaaaa😊(oya ii titip mama y syg y,,klo ii prg rjin2 main k rmh ,kpn prlu tdr rmh,ksian mama n papa berdua aj..)oya ad yg lupa,,mkasih y atas bntuanny slama pembutan skripsi ii ni,kmu bnar2 tmn yg baik(hahaha jgn GR yaaa).smngat truz y ling,kmu psti bisa.jgn prnah lupakan persahabatan qt,walaupun sbntar lgi qt akan berpisah..kmnikasi akan slalu ad..miss u.

Teman2 'Math_Zero_Six' thank's banget atas semangat dan semua kebersamaa yang telah kita lalui bersama dalam sedih maupun senang. 5 tahun kita bersama mengukir cerita di bangku kuliah yang begitu menakjubkan. Teman-teman senasib dan sepenanggungan di masa pembinaan, menuntut ilmu, berbagi pengalaman dan cerita (reunianya.....he.....he....he),icit(semangat truz ya kawan,lanjutkan perjuanganmu tinggal selangkah lagi,,,aq tunggu di JKT yaaaa...😊,ika ndut(walaupun lu sdikit nyebli tp snang bisa knal kmu ndutttt,,,smangat truz),suci putih n oce(makasih ya atas kbrsamaan qt slama ini dalam kuliah,ujian,maen2,shopping,gosipin ttg co.lanjutkan perjuanganmu teman,semangat ya, akur2 slalu ya ber2, jangan pernah lupakan

dan semuanya takkan tergantikan,,,
Namun, izinkanlah aku mempersembahkan hasil karyaku ini sebagai
buah dari usaha dan do'a yang selalu engkau lafazkan
Walau mungkin hanya setitik kecil kebahagiaan
Namun ku ingin secuil itu dapat mengukir sekilas senyuman
dari penat yang terlalu lama engkau rasakan
Amin...
Do'a mu mama...telah berbuah kini...
harapan papa...telah terwujud kini...
Makasih Ma...Pa...atas semua
yang telah mama dan papa berikan untuk ii

Kebahagiaan ini juga kupersembahkan
Untuk kakak ku (DELLA FEBRIANTI SUSUR SE)
Terima kasih atas dukungan dan nasehat kakak selama ini
sehingga ii bisa berfikir lebih dewasa ,terima kasih jg atas do'a dan
kasih sayang yang telah kakak berikan untuk ii dan menjadi sumber inspirasi.
kak,akhirnya ii selesai juga..kita sama2 punya gelar y...(hehehe)
tp bedany kakak dh kerja ii belum,
do'a in ii y kak biar nasib ii sama kyak kakak n bisa bhagiakan mama n papa.
Aminnnnn...
Buat calon abg ipar ku (bg boby),walaupun kita knalnya bru tp ii snang punya abg bru...
abg bgi ii bukan hanya sbgai abg ipar aj tp jg bisa tmpt curhat,
makasih ya bg atas do'a, dorongan dan perhatiannya,,,

Untuk kel besar mama dan papa yg kucinta (nenek,tante,om serta sepu2 ku tersayang),
semua kel ini yang selalu mengajarku menghadapi hidup,
makasih ya do'anya dan nasehatnya baik moril maupun materil..

Terima kasih tak terhingga untuk buk Dr. Lyra yulianti (jasamu takkan kulupakan,,)
akhirnya riri selesai juga buk...akhirnya berkurang juga anak bimbingan ibk satu,,
riri sadari buk riri orangnya cerewet baget apalagi dlm proses pembuatan skripsi ini,
mungkin diantara 4 srangkai (ni liza,sari,dewi)riri lah yang paling cerewet sampe2 ibk bosan
x ya liat wajah riri di kampus, yg tiap hari tdk prnah henti nemui ibk ,tp ya mo gmn lg,,riri
pengen cpt2 tamat,,riri dh bosannn bukkkkkkk..hehe..makasih y ibk dh mau dengar
curhatan riri,riri senang bisa kenal ibk..slama proses pembuatan skripsi riri ini cbaan slalu
dtg buat riri,kadang riri g tau apa salah riri tp knp cbaan itu dtgny k riri y buk???sdihhh bgt
buk..tp mdah2an karir riri selanjutnya lebih baik lagi....doa-in ya ibk qu syg...hihi..(oya *ingt g
buk wktu qt berdiri di jenjang jurusan,riri bnar2 pasrah loh buk..kemungkinan riri tamat itu
dh g da*) tp krna ibk jg riri bisa lulus meraih gelar sarjana..makasih ibk sayang ☺☺

Bapak Dr Syafrizal Sy selaku pembimbing yang sudah rela meluangkan waktunya untuk
membimbingku. Disela-sela kesibukan, bapak tanpa lelah memberikan sumbangsih ilmu
yang tiada terhitung harganya. Untuk semangat yang terus bapak alirkan kedalam pikiranku.

ii),anggun,iing,ne2k,tiuk,heru,ridho,arif,dedi,jeki(tiada hari tanpa tawa bersama kalian,makasih atas segala kegilaan dan gosip2nyo yang masih tertinggal di tunggku penggorengan da ben ☺☺☺),vani(thx y dh mau ngajarin ii sblum ii sidang),mega(kawan seperjuangan dalam menyelesaikan TA dan segala urusan administrasi kampus,akhirnya qt wisuda juga ya ga,dah bosan soalnya d jurusan hahahaha),oyonk(makasih ya oyonk dah mau ajarin ii ttg PELABELAN,walaupun kmu ssh d hub,super sibuk tp gpp lah,,skrg alhamdulillah ii dah slsai loh yong),twik(kawan manggilo semasa lu kul).”Jadi sedih ii berpisah dengan kalian.Ur not only friends but also my family”.

Uni novi(amak),qt knalny baru2 ini tp dah serasa lama,senang bisa knal uni..kawan malala2 qu..makasih y dah mau nmpangin ii di rmhnya (rmh k 2 qu),dah mau nmpangin ii ngprint jg apalgi selama ii skripsi..hehe.jangan berubah n jangan lupakan masa2 canda n tawa qt d rmh k 2 bersama (dewi n sari),walaupun qt bntar lg akan berpisah komunikasi akan slalu ada..miss u.

Tari (mimi), makasih atas slama ini dah mau jdi teman ii dan dah mau dengar in curhat ii apalagi klo mslah co..hihi.Tar, akhirnya ii slsai jg loh..sama2 SSi qt y..hehe..walaupun skrg kmu dah ningglin aq dluan tp y mo gmn lg,kmu msti cari krja,aq ngrti kok..jgn prnah lupakan prtemanan qt slama ini y mimi qu syg☺

Oja(opz maaf ne oja mkxd riri,hehehe)dan ami mksh y atas canda n tawa kalian saia cukup terhibur,senang berkenalan dgn mu..☺,tia(miss fit) adk qu seperjuangan untuk dptin glar S.Si,,akhirnya qt slsai jg miss fit,mau ngpain qt lgi y miss fit????bagi2 info klo ad y..hahahaha.

Taufik,eka,rifki,juna,ari,shadiq,bg rian,bg kiki makasih untuk do'a dan dukungannya yang amat berarti buat ii.

Tak lupa juga untuk someone(walaupun skrg msh dlam tanda tanya besar sapa dia sebenarnya...tp g tau lah..qt liat aj nantik,,tunggu aj undanganny y tmn2..xixixixixi)

Begitu banyak kalian untuk ku paparkan satu persatu,hanya terima kasih yang bisa kugoreskan pada setiap lembaran ini buat teman2 yang selalu memberikan semangat secara ga jelsa gitu dan terima kasih untuk cerita yang hadir pada masa2 kehidupan d kampuz maupun dimana aja ☺☺

Akhir kata, saya ucapkan terima kasih atas semua dukungan, doa dan kebersamaan selama ini.

KATA PENGANTAR

Assalammu'alaikum Wr. Wb.

Syukur Alhamdulillah penulis aturkan kehadiran Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul ” **PELABELAN TOTAL($\alpha, 3$)–SISI ANTI AJAIB SUPER UNTUK GRAF ULAT** ”. Penulisan skripsi ini merupakan salah satu syarat untuk menyelesaikan program studi strata di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Andalas Padang.

Pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada pihak yang telah memberikan bimbingan, pengarahan, dorongan dan motivasi sehingga laporan Tugas Akhir ini dapat diselesaikan dengan lancar, diantaranya:

1. **Keluarga** tercinta, papa, mama, kakak dengan sabar dan ikhlas memberikan kasih sayang, doa, dan dukungannya kepada penulis.
2. Bapak **Dr. Syafrizal Sy** selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas Padang.
3. Ibu **Dr. Lyra Yulianti** selaku koordinator pendidikan Jurusan Matematika Universitas Andalas Padang juga sekaligus dosen pembimbing yang dengan sabarnya telah meluangkan banyak waktunya untuk memberikan bimbingan, membaca penulisan, petunjuk, masukan dan motivasi selama proses penyelesaian pembuatan skripsi ini.
4. Bapak **Dr. Syafrizal Sy** selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, petunjuk, masukan, dan motivasi selama proses penyelesaian pembuatan skripsi ini.

5. Bapak **Efendi, M.Si**, Bapak **Budi Rudianto, M.Si** dan Bapak **Zulakmal, M.Si** selaku penguji yang telah memberikan kritik dan saran pada seminar skripsi dan ujian sarjana.
6. Bapak **Dr. Muhafzan** selaku pembimbing akademik yang telah banyak memberikan masukan dan saran dalam pengambilan mata kuliah.
7. Seluruh **Staf Pengajar** Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas yang telah memberikan bekal ilmu yang sangat bermanfaat. Dan seluruh staf tata usaha Jurusan Matematika **Buk Eli, Mama Cun, Pak Syamsir** dan **Kak Opi**, yang telah banyak membantu selama penulis melaksanakan studi di Jurusan Matematika Universitas Andalas.
8. Teman-teman mahasiswa di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas, khususnya **angkatan 2006** yang telah banyak menyumbangkan tenaga, inspirasi dan motivasi selama penulis mengikuti studi.

Penulis menyadari bahwa tulisan ini masih mempunyai banyak kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran sangat diharapkan demi penyempurnaannya. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat dalam perkembangan ilmu matematika, khususnya di Universitas Andalas.

Wassalamu 'alaikum warahmatullahi wabarakatuh.

Padang, September 2011

Penulis

ABSTRAK

Graf bintang S_n adalah suatu graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat n yang disebut dengan titik pusat dan n titik lain yang berderajat satu.

Graf ulat S_{n_1, n_2, \dots, n_r} adalah graf yang diperoleh dari r buah graf bintang, dimana dua titik pusat dari S_{n_i} dan $S_{n_{i+1}}$ dihubungkan oleh satu sisi, untuk setiap $i = 1, 2, \dots, r - 1$.

Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmatika $\{a, a + d, \dots, a + (e - 1)d\}$, dengan suku pertama a dan beda d , maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total (a, d) -sisi anti ajaib super.

Misalkan N_1 adalah jumlah daun pada bintang ganjil dan N_2 adalah jumlah daun pada bintang genap, maka graf ulat S_{n_1, n_2, \dots, n_r} mempunyai pelabelan total $(a, 3)$ -sisi anti ajaib super untuk r genap, $N_1 = N_2$ atau $|N_1 - N_2| = 1$ serta untuk r ganjil, $N_1 = N_2$ atau $N_1 = N_2 + 1$, dimana a adalah bobot sisi minimum pada pelabelan dan 3 adalah selisih dari bobot sisi.

Kata kunci : *Graf Bintang, Graf Ulat, Pelabelan Total $(a, 3)$ -Sisi Anti Ajaib Super.*

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
ABSTRAK	iii
DAFTAR ISI	iv
DAFTAR GAMBAR	v
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Pembatasan Masalah	2
1.4 Tujuan	3
1.5 Sistematika Penulisan	3
BAB II LANDASAN TEORI	4
2.1 Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf	4
2.2 Graf Sederhana	6
2.3 Graf Ulat (<i>Caterpillar Graph</i>)	6
2.4 Pelabelan Graf	10
BAB III PELABELAN TOTAL $(a, 3)$-SISI ANTI AJAIB SUPER	
UNTUK GRAF ULAT	14
3.1 r genap, dan $N_1 = N_2$ atau $ N_1 - N_2 = 1$	14
3.2 r ganjil, dan $N_1 = N_2$ atau $N_1 = N_2 + 1$	29
BAB IV KESIMPULAN	33
DAFTAR PUSTAKA	34

DAFTAR GAMBAR

No.	Halaman
2.1.1 Ilustrasi Titik dan Sisi	5
2.1.2 Loop dan Graf dengan sisi ganda	5
2.1.3 Graf G	6
2.2.1 Graf Sederhana	6
2.3.1 Graf Siklus	7
2.3.2 Graf Pohon	7
2.3.3 Graf Bintang S_6	8
2.3.4 Graf Ulat $S_{3,4,5,4}$	9
2.4.1 Graf C_{13}	12
2.4.2 Pelabelan Total (22,2)-Sisi Anti Ajaib Super Pada C_{13}	12
3.1.1 Graf Ulat $S_{3,4,4,3}$	20
3.1.2 Pelabelan Total (16,3)-Sisi Anti Ajaib Super Pada $S_{3,4,4,3}$	20
3.1.3 Graf Ulat $S_{4,6,4,5,6,3}$	23
3.1.4 Pelabelan Total (28,3)-Sisi Anti Ajaib Super Pada $S_{4,6,4,5,6,3}$	23
3.1.5 Graf Ulat $S_{4,6,4,5,6,3} + \{Z\}$	25
3.1.6 Pelabelan Total (29,3)-Sisi Anti Ajaib Super Pada $S_{4,6,4,5,6,3} + \{Z\}$	26
3.1.7 Graf Ulat $S_{4,6,4,5,6,3} + \{Z\}$	28
3.1.8 Pelabelan Total (29,3)-Sisi Anti Ajaib Super Pada $S_{4,6,4,5,6,3} + \{Z\}$	28
3.2.1 Graf Ulat $S_{3,5,4,6,4} + \{Z\}$	32
3.2.2 Pelabelan Total (24,3)-Sisi Anti Ajaib Super Pada $S_{3,5,4,6,4} + \{Z\}$	32

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Secara umum, graf $G = (V(G), E(G))$ terdiri dari himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ yang menghubungkan titik-titik dalam $V(G)$. Graf sering digunakan untuk menyederhanakan beberapa pelabelan matematika sehingga masalah tersebut dapat diselesaikan dengan lebih mudah.

Salah satu cabang kajian graf adalah pelabelan suatu graf. Pelabelan menjadi topik yang banyak mendapat perhatian, karena model-model yang terdapat pada pelabelan graf berguna untuk aplikasi yang luas, seperti dalam masalah peta jaringan jalan raya, jaringan internet, sistem alamat jaringan komunikasi dan desain sirkuit.

Pelabelan pada suatu graf adalah pemetaan atau fungsi yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan bulat positif. Jika domain dari pemetaan adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*) dan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut pelabelan total (*total labeling*).

Bobot sisi dari suatu sisi xy terhadap suatu pelabelan adalah jumlah dari label yang diberikan kepada sisi xy serta label titik x dan y yang terkait dengan sisi xy tersebut. Jika suatu graf memiliki bobot titik atau bobot sisi yang sama, maka graf tersebut dikatakan sebagai graf dengan pelabelan ajaib. Jika graf memiliki bobot titik atau bobot sisi yang berbeda, maka graf tersebut dikatakan sebagai graf dengan pelabelan anti ajaib.

Misalkan banyaknya titik dalam graf G adalah $|V(G)| = v$, sementara banyaknya sisi dalam G adalah $|E(G)| = e$. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmatika $\{a, a + d, \dots, a + (e - 1)d\}$, dengan suku pertama a dan beda d , maka pelabelan tersebut dinamakan pelabelan total (a, d) -sisi anti ajaib super.

Definisi pelabelan total (a, d) -sisi anti ajaib dan pelabelan total (a, d) -sisi anti ajaib super diperkenalkan oleh Simanjuntak dkk. (2000). Pelabelan ini merupakan perluasan dari konsep pelabelan sisi ajaib super (*super edge magic labeling*) yang diperkenalkan oleh Enomoto (1998).

Terdapat beberapa hasil terkait pelabelan total (a, d) -sisi anti ajaib super, di antaranya adalah pelabelan untuk graf siklus dan lintasan oleh Simanjuntak dkk. (2000), pelabelan untuk graf pertemanan (*friendship graph*), graf roda (*wheel*), graf kipas (*fan*), graf lengkap (*complete graph*) dan graf bipartit lengkap (*complete bipartite graph*) yang dikaji oleh Baca dkk. (2007).

1.2 Perumusan Masalah

Dalam skripsi ini akan dibahas tentang bagaimana cara pelabelan terhadap graf ulat sedemikian sehingga graf tersebut mempunyai pelabelan total (a, d) -sisi anti ajaib super dengan $d = 3$.

1.3 Pembatasan Masalah

Pada kajian tentang pelabelan total (a, d) -sisi anti ajaib super pada graf ulat, pembahasan dibatasi untuk $d = 3$ dimana d adalah selisih bobot sisi dan a adalah bobot sisi minimum.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan dalam penulisan skripsi ini adalah menentukan pelabelan total $(\alpha, 3)$ -sisi anti ajaib super pada graf ulat Sn_1, n_2, \dots, n_r .

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan dalam tugas akhir ini terdiri dari empat bab yang diawali dengan Bab I, yang menguraikan tentang latar belakang, permasalahan, pembatasan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan. Konsep dasar dari teori graf berupa definisi dan terminologi, graf ulat, pelabelan pada graf serta beberapa teori pendukung yang digunakan untuk menyelesaikan skripsi ini disajikan pada Bab II sebagai landasan teori. Kemudian, pembahasan dari permasalahan tersebut akan diuraikan pada Bab III, yaitu pelabelan total $(\alpha, 3)$ -sisi anti ajaib super untuk graf ulat Sn_1, n_2, \dots, n_r . Penulisan skripsi ini diakhiri dengan bagian kesimpulan dan saran yang disajikan pada Bab IV.

BAB II

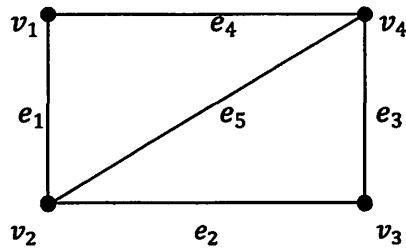
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan permasalahan yang telah dikemukakan pada Bab I. Definisi dan terminologi dalam teori graf diberikan pada Subbab 2.1, pengertian graf sederhana pada Subbab 2.2, penjelasan tentang graf ulat pada Subbab 2.3 dan penjelasan tentang pelabelan graf pada Subbab 2.4.

2.1 Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf

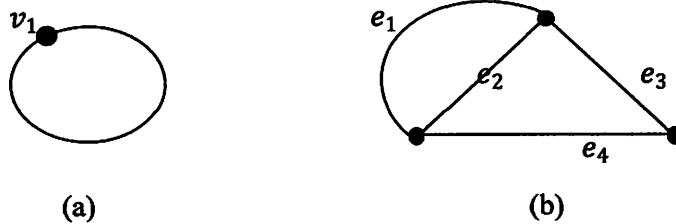
Suatu **graf** G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , ditulis dengan $G = (V, E)$, dimana V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik dan E adalah himpunan pasangan tak terurut dari elemen-elemen V . Elemen dari V disebut **titik** (*vertex*) dari G dan elemen dari E disebut **sisi** (*edge*) dari G . Himpunan titik dari G dinotasikan dengan $V(G)$ sedangkan himpunan sisi dari G dinotasikan dengan $E(G)$. Banyaknya titik di G , dinotasikan $|V(G)| = v$, disebut **orde** (*order*) dari G , sementara banyaknya sisi di G , dinotasikan $|E(G)| = e$, disebut **ukuran** (*size*) dari G . Jika sisi $e = uv \in E(G)$ dengan $u, v \in V(G)$, maka titik u dikatakan **bertetangga** dengan v , sisi e dikatakan **terkait** dengan titik u dan v .

Graf pada Gambar 2.1.1 memberikan ilustrasi dari pengertian titik dan sisi. Graf G mempunyai himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Jadi diperoleh $|V(G)| = 4$ dan $|E(G)| = 5$.



Gambar 2.1.1 Ilustrasi titik dan sisi

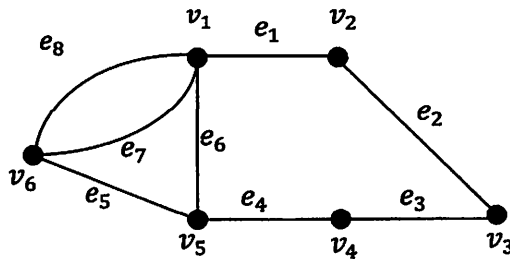
Pada kajian ini pembahasan dibatasi untuk graf sederhana, yaitu graf yang tidak memuat loop dan sisi ganda. Sebuah sisi yang menghubungkan suatu titik dengan titik itu sendiri disebut *loop*, dan suatu sisi disebut *sisi ganda* jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik yang sama. Gambar 2.1.2 berikut memperlihatkan sebuah *loop* dan graf dengan sisi ganda.



Gambar 2.1.2 (a) Loop (b) Graf dengan sisi ganda

Suatu **jalan** (*walk*) pada graf G adalah suatu barisan yang terdiri atas titik-titik dan sisi-sisi bergantian, di mana setiap sisi terkait dengan titik terdekat, diawali dan diakhiri pada suatu titik. Suatu jalan yang setiap sisinya berbeda disebut **jalur** (*trail*). Jika semua titik yang dilewati pada suatu jalur berbeda maka jalan tersebut dinamakan **lintasan** (*path*). Jika semua titik yang dilewati pada suatu lintasan berbeda, dan jika lintasan tersebut diawali dan diakhiri pada titik yang sama, maka lintasan tersebut dinamakan **siklus** (*cycle*).

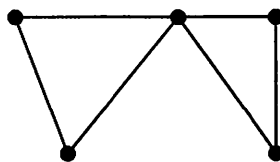
Pada Gambar 2.1.3 salah satu jalan pada graf G adalah $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5$ jalur pada graf G adalah $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5, e_5, v_6$ lintasan pada graf G adalah v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 dan siklus pada graf G adalah $v_1, e_6, v_5, e_5, v_6, e_6, v_1$.



Gambar 2.1.3 Graf G

2.2 Graf Sederhana

Suatu graf dapat mempunyai sisi ganda atau *loop*. Graf yang tidak mempunyai sisi ganda dan *loop* disebut **graf sederhana**. Pada gambar 2.2.1 berikut diberikan contoh graf sederhana.



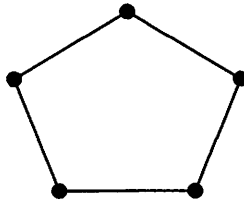
Gambar 2.2.1 Graf sederhana

2.3 Graf Ulat (*Caterpillar*)

Berikut diberikan definisi dari graf siklus, graf pohon, graf bintang dan graf ulat yang akan digunakan dalam pembahasan bab selanjutnya.

Graf siklus C_n adalah graf terhubung yang setiap titiknya berderajat dua. Graf siklus dengan n titik dilambangkan dengan C_n .

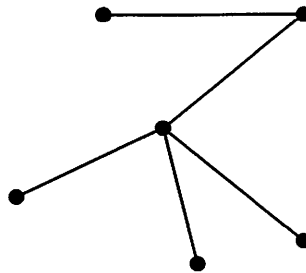
Berikut ini diberikan contoh graf siklus:



Gambar 2.3.1 Graf siklus

Graf pohon (tree) adalah graf terhubung berorde n yang tidak memuat lingkaran. Graf pohon dengan n titik dilambangkan dengan T_n .

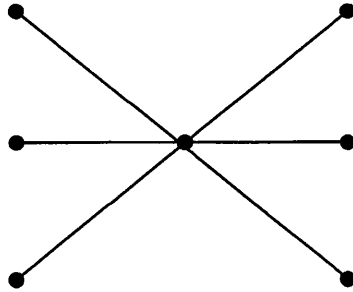
Berikut ini diberikan contoh graf pohon:



Gambar 2.3.2 Graf pohon

Graf bintang S_n adalah suatu graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat n yang disebut dengan titik pusat dan n titik lain yang berderajat satu.

Berikut ini diberikan contoh graf bintang :



Gambar 2.3.3 Graf bintang S_6

Selanjutnya, graf ulat Sn_1, n_2, \dots, n_r adalah graf yang diperoleh dari r buah graf bintang, dimana dua titik pusat dari Sn_i dan Sn_{i+1} dihubungkan oleh satu sisi, untuk setiap $i = 1, 2, \dots, r - 1$.

Graf ulat Sn_1, n_2, \dots, n_r memiliki,

himpunan titik

$$V(Sn_1, n_2, \dots, n_r)$$

$$= \{c_i | 1 \leq i \leq r\}$$

$$\cup \bigcup_{i=2}^{r-1} \{x_i^j | 2 \leq j \leq n_i - 1\} \cup \{x_1^j | 1 \leq j \leq n_1 - 1\}$$

$$\cup \{x_r^j | 2 \leq j \leq n_r\}$$

himpunan sisi

$$E(Sn_1, n_2, \dots, n_r) = \{c_i c_{i+1} | 1 \leq i \leq r - 1\} \cup \bigcup_{i=2}^{r-1} \{c_i x_i^j | 2 \leq j \leq n_i - 1\} \cup$$

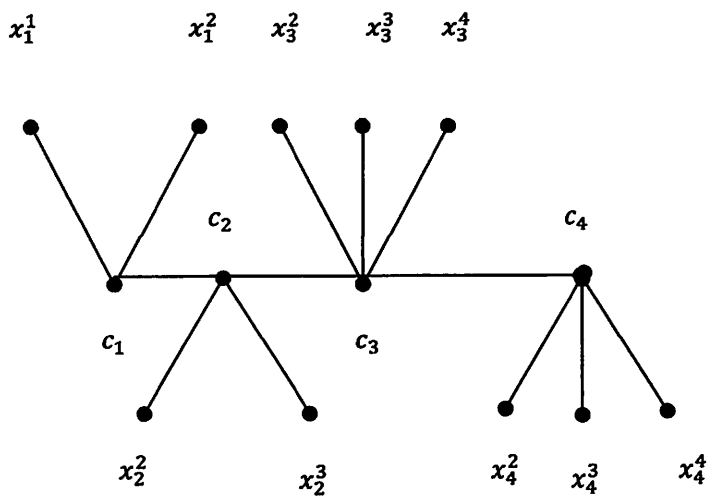
$$\{c_1 x_1^j \mid 1 \leq j \leq n_1 - 1\} \cup \{c_r x_r^j \mid 2 \leq j \leq n_r\}$$

Dimana

$$|V(S_{n_1, n_2, \dots, n_r})| = \sum_{i=1}^r n_i - r + 2$$

$$|E(S_{n_1, n_2, \dots, n_r})| = \sum_{i=1}^r n_i - r + 1$$

Berikut ini diberikan contoh graf ulat :



Gambar 2.3.4 Graf Ulat \$S_{3,4,5,4}\$

Himpunan titik dan sisi pada \$S_{3,4,5,4}\$ didefinisikan sebagai berikut:

$$V(S_{3,4,5,4}) = \{c_i \mid 1 \leq i \leq 4\} \cup \{x_1^j \mid 1 \leq j \leq 2\} \cup \{x_4^j \mid 2 \leq j \leq 4\} \cup \\ \{x_2^j \mid 2 \leq j \leq 3\} \cup \{x_3^j \mid 2 \leq j \leq 4\}$$

$$E(S_{3,4,5,4}) = \{c_i c_{i+1} \mid 1 \leq i \leq 3\} \cup \{c_1 x_1^j \mid 1 \leq j \leq 2\} \cup \{c_4 x_4^j \mid 2 \leq j \leq 4\} \\ \cup \{c_2 x_2^j \mid 2 \leq j \leq 3\} \cup \{c_3 x_3^j \mid 2 \leq j \leq 4\}$$

Dimana

$$|V(S_{3,4,5,4})| = \sum_{i=1}^4 n_i - r + 2 \\ = (3 + 4 + 5 + 4) - 4 + 2 \\ = 14$$

$$|E(S_{3,4,5,4})| = \sum_{i=1}^4 n_i - r + 1 \\ = (3 + 4 + 5 + 4) - 4 + 1 \\ = 13$$

2.4 Pelabelan Graf

Pelabelan dari suatu graf adalah suatu pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan titik atau sisi, ke himpunan bilangan bulat positif. Domain dari pemetaan tersebut dapat berupa himpunan semua titik, himpunan semua sisi, himpunan semua titik dan sisi. Bobot sisi adalah jumlah label sisi dan label dua titik yang menempel pada sisi tersebut. Dalam Definisi 2.4.1 berikut diberikan definisi pelabelan total (a, d) -sisi anti ajaib.

Definisi 2.4.1 Suatu pemetaan $g: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, v + e\}$ disebut pelabelan total (a, d) -sisi anti ajaib dari G jika himpunan bobot sisi dari semua sisi di G adalah $\{a, a + d, \dots, a + (e - 1)d\}$, untuk $a > 0$ dan $d \geq 0$.

Suatu pelabelan (a, d) -sisi anti ajaib disebut pelabelan total (a, d) -sisi anti ajaib super jika $g(V(G)) = \{1, 2, \dots, v\}$ dan $g(E(G)) = \{v + 1, v + 2, \dots, v + e\}$.

Untuk lebih jelas, diberikan contoh untuk Definisi 2.4.1 sebagai berikut:

1. Misal diberikan pelabelan total $(22, 2)$ -sisi anti ajaib super pada graf siklus C_{13} .

Himpunan titik dan sisi pada C_{13} didefinisikan sebagai berikut:

$$V(C_{13}) = \{v_i | i = 1, 2, \dots, 13\}$$

$$E(C_{13}) = \{v_i v_{i+1} | i = 1, 2, \dots, 12\} \cup \{v_1 v_{13}\}$$

Karena pelabelan yang diberikan adalah pelabelan super, maka himpunan label untuk titik-titik di C_{13} adalah $L = \{1, 2, \dots, 13\}$ dan himpunan label untuk sisi-sisi di C_{13} adalah $M = \{14, 15, \dots, 26\}$.

Himpunan bobot sisi pada graf C_{13} adalah:

$$W = \{w_i | i = 1, 2, \dots, 13\}, \text{ dimana}$$

$$w_i = a + (i - 1)d \quad (2.1)$$

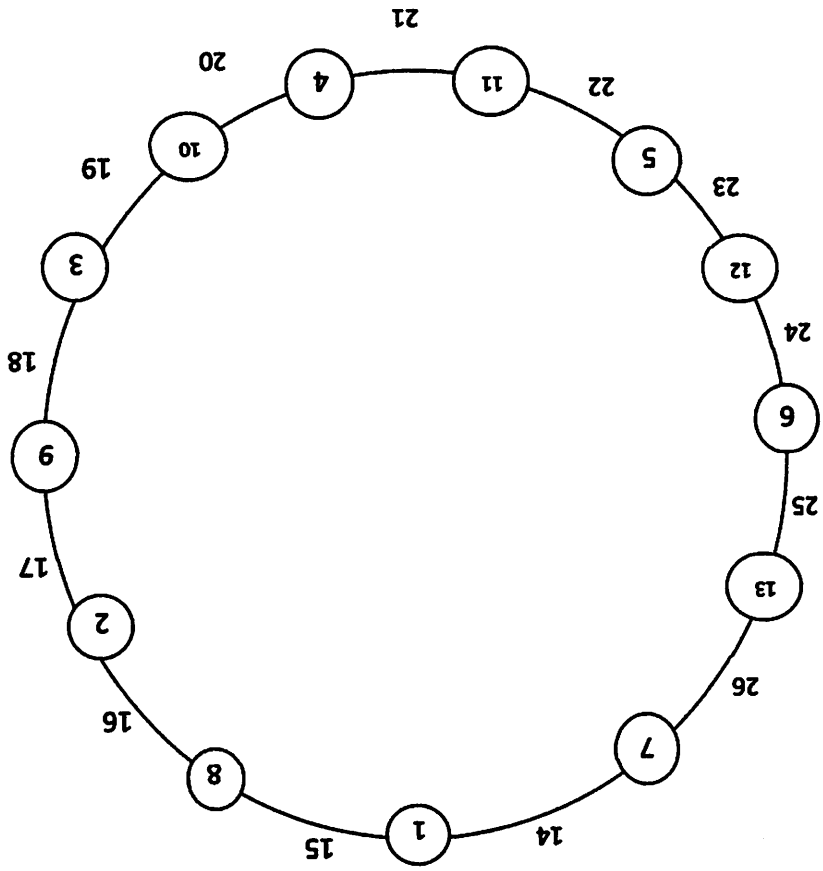
Karena $a = 22$ dan $d = 2$, maka persamaan (2.1) menjadi :

$$w_i = 22 + (i - 1)2, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, 13$$

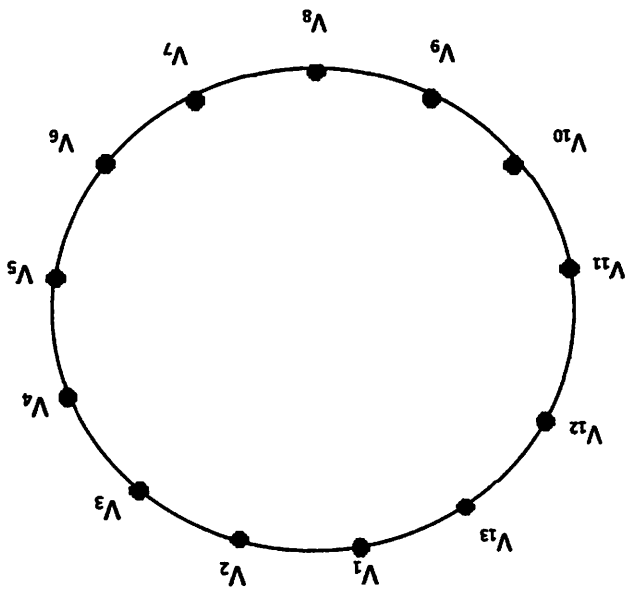
$$= 22 + 2i - 2$$

$$= 20 + 2i$$

Gambar 2.4.2 Pelabelan total (2,2)-sisi anti ajaib super pada C_{13}



Gambar 2.4.1 Graf C_{13}



Berikut ini adalah beberapa jenis pelabelan anti ajaib pada suatu graf:

Pelabelan sisi (a, d) -titik-anti ajaib pada graf $G = G(V, E)$ adalah pemetaan satu-satu λ_1 dari $E(G)$ pada $\{1, 2, \dots, e\}$, sedemikian hingga himpunan bobot-titik dari semua titik di G , dinotasikan W_1 , adalah $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (v - 1)d\}$ untuk suatu bilangan bulat positif a dan d .

Pelabelan titik (a, d) -sisi-anti ajaib pada graf $G = G(V, E)$ adalah pemetaan satu-satu λ_2 dari $V(G)$ pada $\{1, 2, 3, \dots, v\}$ sedemikian hingga himpunan bobot-sisi dari semua sisi di G , dinotasikan W_2 , adalah $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (e - 1)d\}$ untuk suatu bilangan bulat positif a dan d .

Pelabelan total (a, d) -titik-anti ajaib pada graf $G = G(V, E)$ adalah pemetaan satu-satu λ_3 dari $V(G) \cup E(G)$ pada $\{1, 2, \dots, v + e\}$, sedemikian hingga himpunan bobot titik dari semua titik di G , dinotasikan W_3 , adalah $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (v - 1)d\}$ untuk suatu bilangan bulat positif a dan d .

Pelabelan total (a, d) -sisi-anti ajaib pada graf $G = G(V, E)$ adalah pemetaan satu-satu λ_4 dari $V(G) \cup E(G)$ pada $\{1, 2, \dots, v + e\}$, sedemikian hingga himpunan semua bobot sisi dari semua sisi di G , dinotasikan W_4 , adalah $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (e - 1)d\}$ untuk suatu bilangan bulat positif a dan d .

Untuk selanjutnya, pembahasan dibatasi pada pelabelan total $(a, 3)$ -sisi anti ajaib super untuk graf ulat.

BAB III

PELABELAN TOTAL $(a, 3)$ -SISI ANTI AJAIB SUPER

UNTUK GRAF ULAT

Pada bab ini akan dijelaskan tentang pelabelan total (a, d) -sisi anti ajaib super untuk graf ulat. Kajian akan dibatasi untuk $d = 3$.

Misalkan Sn_1, n_2, \dots, n_r adalah graf ulat dengan $N_1 = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1} n_{2i-1}$ dan $N_2 = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} n_{2i}$, dimana $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ menunjukkan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan $\frac{r}{2}$. Dalam teorema berikut akan dibahas tentang pelabelan total $(a, 3)$ -sisi anti ajaib super pada graf ulat Sn_1, n_2, \dots, n_r .

3.1 r genap, dan $N_1 = N_2$ atau $|N_1 - N_2| = 1$

Teorema 3.1 Misalkan r genap dan $N_1 = N_2$ atau $|N_1 - N_2| = 1$, maka graf ulat Sn_1, n_2, \dots, n_r mempunyai pelabelan total $(a, 3)$ -sisi anti ajaib super.

Bukti :

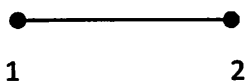
Untuk membuktikan Teorema 3.1 ini, perhatikan tiga kasus berikut:

Kasus 1 : $N_1 = N_2$

Tuliskan kembali $N_1 = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1} n_{2i-1}$ dan $N_2 = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} n_{2i}$. Konstruksi sebuah pelabelan $\lambda : V(Sn_1, n_2, \dots, n_r) \rightarrow \{1, 2, \dots, v + e\}$ sebagai berikut:

1. Daun-daun Sn_2 dilabeli dengan bilangan $1, 3, 5, \dots, 2n_2 - 1$, dengan $\lambda(c_1) = 1$ dan $\lambda(c_3) = 2n_2 - 1$.
2. Daun-daun Sn_4 (kecuali c_3) dilabeli dengan $2n_2 + 1, 2n_2 + 3, \dots, 2n_2 + 2n_4 - 3$ dimana $\lambda(c_5) = 2n_2 + 2n_4 - 3$.
3. Langkah 1 dan 2 diulangi untuk Sn_6, Sn_8, \dots, Sn_r .
4. Daun-daun pada Sn_1 diberi label dengan bilangan bulat $2, 4, 6, \dots, 2n_1$, dimana $\lambda(c_2) = 2n_1$.
5. Daun-daun pada Sn_3 (kecuali c_2) diberi label dengan bilangan bulat $2n_1 + 2, 2n_1 + 4, \dots, 2n_1 + 2n_3 - 2$ dimana $\lambda(c_4) = 2n_1 + 2n_3 - 2$.
6. Daun-daun pada $Sn_5, Sn_7, \dots, Sn_{r-1}$ dilabeli, sehingga $\lambda(c_r)$ merupakan nilai terbesar yaitu v .
7. Sisi-sisi Sn_1, n_2, \dots, n_r diberi label yang berada pada himpunan $\{v + 1, v + 2, v + 3, \dots, 2v - 1\}$.
8. Diperoleh bobot sisi yang membentuk suatu barisan aritmatika :

$$W = \{w(xy) \mid w(xy) = \lambda(x) + \lambda(y), xy \in E(Sn_1, n_2, \dots, n_r)\} = \{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (v - 2)d\} \text{ untuk } a = 3 \text{ dan } d = 2.$$



Misal kita labelkan 2 buah titik dengan 1 dan 2, maka diperoleh :

$$a = 1 + 2$$

$$= 3.$$

Karena $a = 3$, maka

$$a + (v - 2)d = 2v - 1$$

$$3 + (v - 2)d = 2v - 1$$

$$(v - 2)d = 2v - 1 - 3$$

$$(v - 2)d = 2v - 4$$

$$d = \frac{2v - 4}{(v - 2)}$$

$$d = \frac{2(v - 2)}{(v - 2)}$$

$$d = 2.$$

■

9. Diperoleh pelabelan total $(2v + 2, 1)$ -sisi anti ajaib super atau pelabelan total $(v + 4, 3)$ -sisi anti ajaib super.

Kasus 2 : $N_2 = N_1 + 1$

Misalkan f adalah pelabelan total $(v + 4, 3)$ -sisi anti ajaib super dari suatu graf ulat Sn_1, n_2, \dots, n_r . Tambahkan satu daun, misalkan daun z di c_r dan definisikan suatu pelabelan baru misal f_1 , dimana:

$$f_1(x) = f(x) \text{ untuk semua titik } x \in V(Sn_1, n_2, \dots, n_r)$$

$$f_1(z) = f(c_r) + 1 = v + 1$$

$$f_1(xy) = f(xy) + 1 \text{ untuk semua sisi } xy \in E(Sn_1, n_2, \dots, n_r)$$

$$f_1(c_r z) = 2v + 1.$$

Maka dapat dilihat bahwa f_1 adalah pelabelan total $(v + 5, 3)$ -sisi anti ajaib super pada $Sn_1, n_2, \dots, n_r + \{z\}$.

Kasus 3 : $N_1 = N_2 + 1$

Misalkan pelabelan titik $\lambda : V(Sn_1, n_2, \dots, n_r) \rightarrow \{1, 2, \dots, v\}$, seperti pada kasus 1. Definisikan sebuah pelabelan titik baru, notasikan dengan, sehingga untuk setiap titik $x \in V(Sn_1, n_2, \dots, n_r)$ berlaku

$$g(x) = \begin{cases} \lambda(x) + 1, & \text{jika } \lambda(x) \text{ bernilai ganjil} \\ \lambda(x) - 1, & \text{jika } \lambda(x) \text{ bernilai genap} \end{cases}$$

dimana label v yang bernilai genap terbesar diberikan kepada titik x_i^j serta $g(c_r) = v - 1$.

Himpunan label pada pelabelan g adalah $\{1, 2, \dots, v\}$. Sementara bobot sisi membentuk barisan $3, 5, 7, \dots, 3 + 2(v - 2)$.

$$\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (v - 2)d\}, \text{ untuk } a = 3 \text{ dan } d = 2$$

$$\{3, 3 + 2, 3 + 4, \dots, 3 + (v - 2)2\}$$

$$\{3, 5, 7, \dots, 3 + 2(v - 2)\}.$$

■

Jika ditambahkan titik baru maka bobot sisi menjadi,

$$\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (v - 2 + 1)d\}$$

$$= \{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (v - 1)d\}, \text{ untuk } a = 3 \text{ dan } d = 2.$$

Tambahkan titik baru, notasikan z , yang dihubungkan ke c_{r-1} . Definisikan pelabelan titik g_1 sebagai berikut :

$$g_1(x) = g(x) \text{ untuk semua titik } x \in V(S_{n_1, n_2, \dots, n_r}) \text{ kecuali } c_r$$

$$g_1(z) = v - 1$$

$$g_1(c_r) = v + 1.$$

Pelabelan titik g_1 menggunakan anggota himpunan $\{1, 2, 3, \dots, v + 1\}$ tepat satu kali. Bobot sisinya membentuk barisan aritmatika $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (v - 1)d\}$ untuk $a = 3$ dan $d = 2$. Jika pelabelan titik g_1 dan pelabelan sisi g_1^* : $E(S_{n_1, n_2, \dots, n_r}) \cup \{c_{r-1}z\} \rightarrow \{v + 2, v + 3, \dots, 2v + 1\}$ digabungkan, maka diperoleh pelabelan total $(v + 5, 3)$ -sisi anti ajaib super pada $S_{n_1, n_2, \dots, n_r} + \{z\}$.

Untuk lebih jelas, diberikan contoh untuk Teorema 3.1 sebagai berikut:

1. Misal diberikan pelabelan total $(16, 3)$ -sisi anti ajaib super pada graf ulat $S_{3,4,4,3}$.

Maka himpunan label untuk titik di $V(S_{3,4,4,3})$ adalah $\{1, 2, \dots, 12\}$ dan himpunan label untuk sisi di $E(S_{3,4,4,3})$ adalah $\{13, 14, \dots, 23\}$.

Himpunan titik dan sisi pada $(S_{3,4,4,3})$ didefinisikan sebagai berikut:

$$V(S_{3,4,4,3}) = \{c_i \mid 1 \leq i \leq 4\} \cup \{x_1^j \mid 1 \leq j \leq 2\} \cup \{x_4^j \mid 2 \leq j \leq 3\} \\ \cup \{x_2^j \mid 2 \leq j \leq 3\} \cup \{x_3^j \mid 2 \leq j \leq 3\}$$

$$E(S_{3,4,4,3}) = \{c_i c_{i+1} \mid 1 \leq i \leq 3\} \cup \{c_1 x_1^j \mid 1 \leq j \leq 2\} \cup \{c_4 x_4^j \mid 2 \leq j \leq 3\} \\ \cup \{c_2 x_2^j \mid 2 \leq j \leq 3\} \cup \{c_3 x_3^j \mid 2 \leq j \leq 3\}$$

Dimana

$$|V(S_{3,4,4,3})| = \sum_{i=1}^4 n_i - r + 2 \\ = (3 + 4 + 4 + 3) - 4 + 2 \\ = 12$$

$$|E(S_{3,4,4,3})| = \sum_{i=1}^4 n_i - r + 1 \\ = (3 + 4 + 4 + 3) - 4 + 1 \\ = 11$$

Karena pelabelan yang diberikan adalah pelabelan super, maka himpunan label untuk titik-titik di $S_{3,4,4,3}$ adalah $L = \{1, 2, \dots, 12\}$ dan himpunan label untuk sisi-sisi di $S_{3,4,4,3}$ adalah $M = \{13, 14, \dots, 23\}$.

Himpunan bobot sisi pada graf ulat $S_{3,4,4,3}$ adalah :

$W = \{w_i | i = 1, 2, \dots, 12\}$, dimana

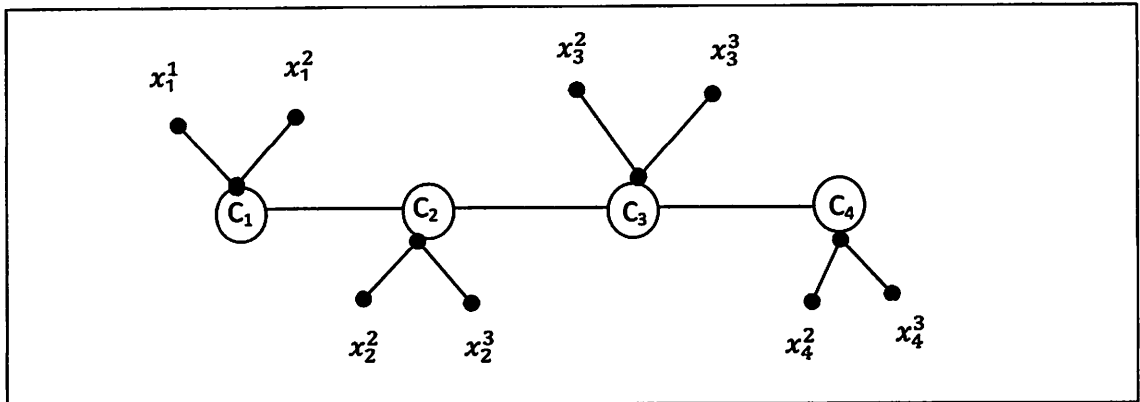
$$w_i = a + (i - 2)d \tag{3.1}$$

Karena $a = 16$ dan $d = 3$, maka persamaan (3.1) menjadi:

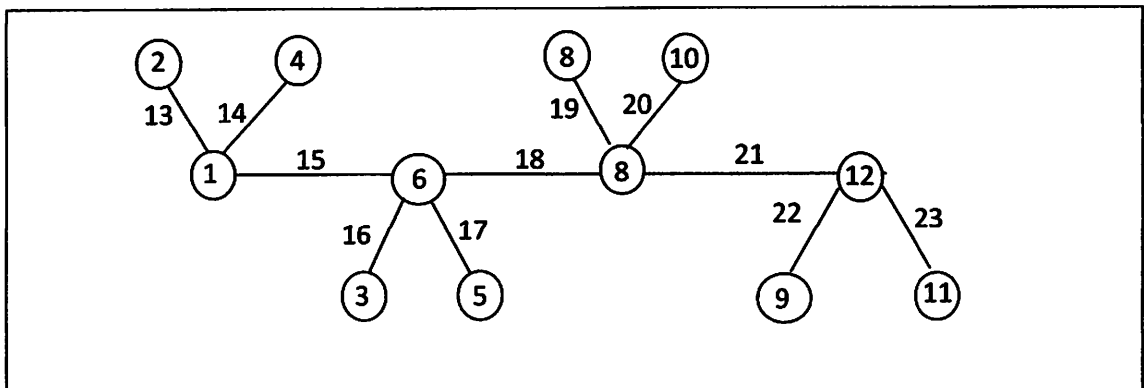
$$w_i = 16 + (i - 2)3, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, 12$$

$$= 16 + 3i - 6$$

$$= 10 + 3i$$



Gambar 3.1.1 Graf ulat $S_{3,4,4,3}$



Gambar 3.1.2 Pelabelan total (16,3)-sisi anti ajaib super pada $S_{3,4,4,3}$

2. Misal diberikan pelabelan total (28,3)-sisi anti ajaib super pada graf ulat $S_{4,6,4,5,6,3}$. Maka himpunan label untuk titik di $V(S_{4,6,4,5,6,3})$ adalah $\{1,2,3, \dots, 24\}$ dan himpunan label untuk sisi di $E(S_{4,6,4,5,6,3})$ adalah $\{25,26, \dots, 47\}$.

Himpunan titik dan sisi pada $S_{4,6,4,5,6,3}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} V(S_{4,6,4,5,6,3}) &= \{c_i \mid 1 \leq i \leq 6\} \cup \{x_1^j \mid 1 \leq j \leq 3\} \cup \{x_6^j \mid 2 \leq j \leq 3\} \\ &\cup \{x_2^j \mid 2 \leq j \leq 5\} \cup \{x_3^j \mid 2 \leq j \leq 3\} \cup \{x_4^j \mid 2 \leq j \leq 4\} \\ &\cup \{x_5^j \mid 2 \leq j \leq 5\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(S_{4,6,4,5,6,3}) &= \{c_i c_{i+1} \mid 1 \leq i \leq 5\} \cup \{c_1 x_1^j \mid 1 \leq j \leq 3\} \\ &\cup \{c_6 x_6^j \mid 2 \leq j \leq 3\} \cup \{c_2 x_2^j \mid 2 \leq j \leq 5\} \cup \{c_3 x_3^j \mid 2 \leq j \leq 3\} \\ &\cup \{c_4 x_4^j \mid 2 \leq j \leq 4\} \cup \{c_5 x_5^j \mid 2 \leq j \leq 5\} \end{aligned}$$

Dimana

$$\begin{aligned} |V(S_{4,6,4,5,6,3})| &= \sum_{i=1}^6 n_i - r + 2 \\ &= (4 + 6 + 4 + 5 + 6 + 3) - 6 + 2 \\ &= 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|E(S_{4,6,4,5,6,3})| &= \sum_{i=1}^6 n_i - r + 1 \\
&= (4 + 6 + 4 + 5 + 6 + 3) - 6 + 1 \\
&= 23
\end{aligned}$$

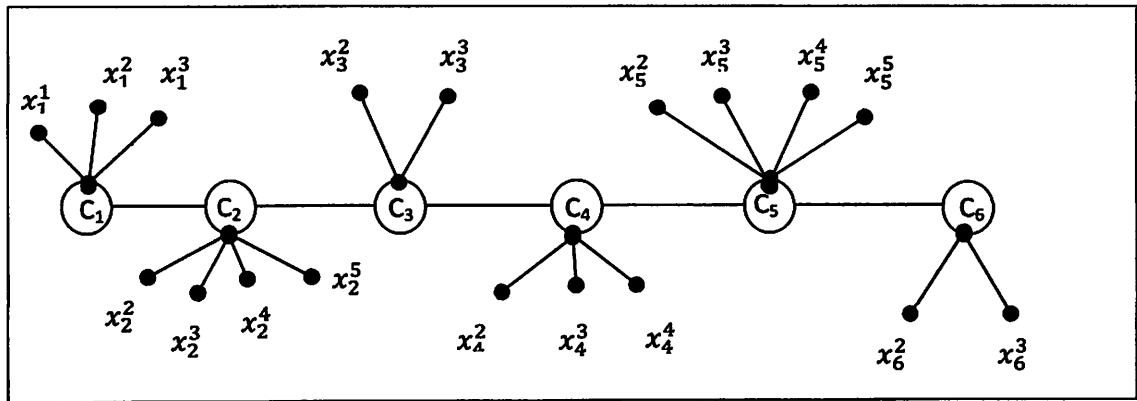
Karena pelabelan yang diberikan adalah pelabelan super, maka himpunan label untuk titik-titik di $S_{4,6,4,5,6,3}$ adalah $L = \{1, 2, \dots, 24\}$ dan himpunan label untuk sisi-sisi di $S_{4,6,4,5,6,3}$ adalah $M = \{25, 26, \dots, 47\}$.

Himpunan bobot sisi pada graf ulat $S_{4,6,4,5,6,3}$ adalah :

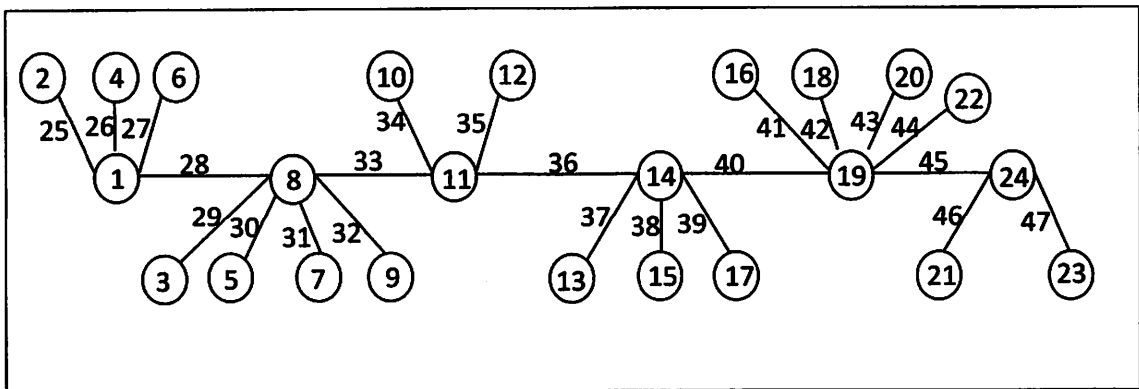
$$\begin{aligned}
W &= \{w_i | i = 1, 2, \dots, 24\}, \text{ dimana} \\
w_i &= a + (i - 2)d \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Karena $a = 28$ dan $d = 3$, maka persamaan (3.2) menjadi:

$$\begin{aligned}
w_i &= 28 + (i - 2)3, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, 24 \\
&= 28 + 3i - 6 \\
&= 22 + 3i
\end{aligned}$$



Gambar 3.1.3 Graf ulat $S_{4,6,4,5,6,3}$



Gambar 3.1.4 Pelabelan total (28,3)-sisi anti ajaib super pada $S_{4,6,4,5,6,3}$

3. Misal diberikan pelabelan total (29,3)-sisi anti ajaib super pada graf ulat $S_{4,6,4,5,6,3} + \{z\}$. Maka himpunan label untuk titik di $V(S_{4,6,4,5,6,3} + \{z\})$ adalah $\{1,2,3, \dots, 25\}$ dan himpunan label untuk sisi di $E(S_{4,6,4,5,6,3} + \{z\})$ adalah $\{26,27, \dots, 49\}$.

Himpunan titik dan sisi pada $S_{4,6,4,5,6,3} + \{z\}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
V(S_{4,6,4,5,6,3} + \{z\}) &= \{c_i \mid 1 \leq i \leq 6\} \cup \{x_1^j \mid 1 \leq j \leq 3\} \cup \{x_6^j \mid 2 \leq j \leq 3\} \\
&\cup \{x_2^j \mid 2 \leq j \leq 5\} \cup \{x_3^j \mid 2 \leq j \leq 3\} \cup \{x_4^j \mid 2 \leq j \leq 4\} \\
&\cup \{x_5^j \mid 2 \leq j \leq 5\} \cup \{z\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(S_{4,6,4,5,6,3} + \{z\}) &= \{c_i c_{i+1} \mid 1 \leq i \leq 5\} \cup \{c_1 x_1^j \mid 1 \leq j \leq 3\} \cup \{c_6 x_6^j \mid 2 \leq j \leq 3\} \\
&\cup \{c_2 x_2^j \mid 2 \leq j \leq 5\} \cup \{c_3 x_3^j \mid 2 \leq j \leq 3\} \cup \{c_4 x_4^j \mid 2 \leq j \leq 4\} \\
&\cup \{c_5 x_5^j \mid 2 \leq j \leq 5\} \cup \{c_r z\}
\end{aligned}$$

Dimana

$$\begin{aligned}
|V(S_{4,6,4,5,6,3} + \{Z\})| &= \left(\sum_{i=1}^6 n_i - r + 2 \right) + 1 \\
&= ((4 + 6 + 4 + 5 + 6 + 3) - 6 + 2) + 1 \\
&= 25
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|E(S_{4,6,4,5,6,3} + \{Z\})| &= \left(\sum_{i=1}^6 n_i - r + 1 \right) + 1 \\
&= ((4 + 6 + 4 + 5 + 6 + 3) - 6 + 1) + 1
\end{aligned}$$

$$= 24$$

Karena pelabelan yang diberikan adalah pelabelan super, maka himpunan label untuk titik-titik di $S_{4,6,4,5,6,3} + \{z\}$ adalah $L = \{1,2, \dots, 25\}$ dan himpunan label untuk sisi-sisi di $S_{4,6,4,5,6,3} + \{z\}$ adalah $M = \{26,27, \dots, 49\}$.

Himpunan bobot sisi pada graf ulat $S_{4,6,4,5,6,3} + \{z\}$ adalah

$$W = \{w_i | i = 1,2, \dots, 25\}, \text{ dimana}$$

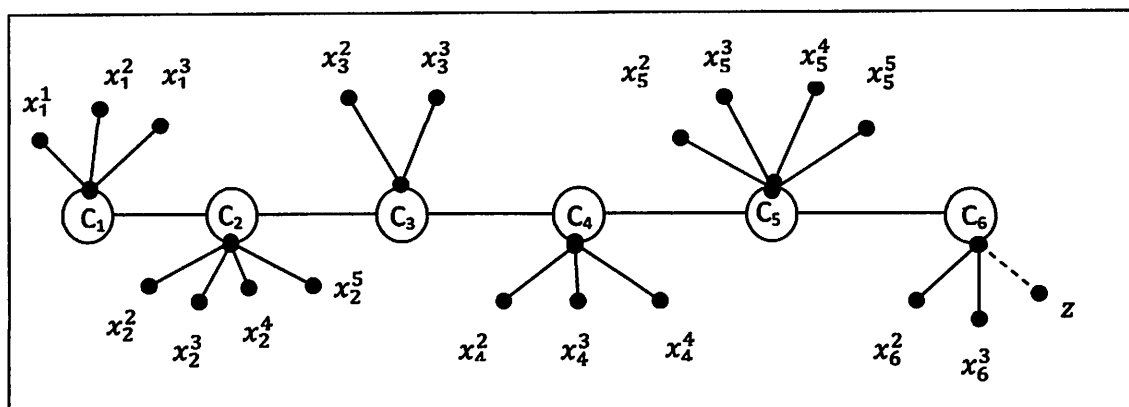
$$w_i = a + (i - 1)d \tag{3.3}$$

Karena $a = 29$ dan $d = 3$, maka persamaan (3.3) menjadi :

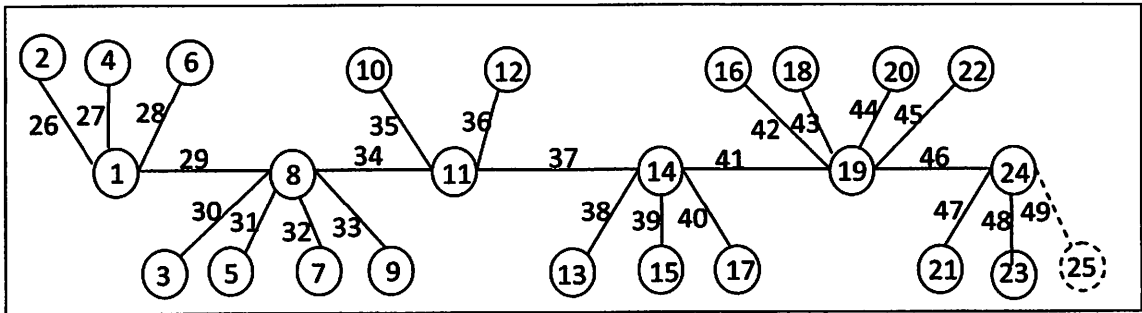
$$w_i = 29 + (i - 1)3, \text{ untuk } i = 1,2, \dots, 25$$

$$= 29 + 3i - 3$$

$$= 26 + 3i$$



Gambar 3.1.5 Graf ulat $S_{4,6,4,5,6,3} + \{z\}$



Gambar 3.1.6 Pelabelan total (29,3)-sisi anti ajaib super pada $S_{4,6,4,5,6,3} + \{z\}$

4. Misal diberikan pelabelan total (29,3)-sisi anti ajaib super pada graf ulat $S_{4,6,4,5,6,3} + \{z\}$. Maka himpunan label untuk titik di $V(S_{4,6,4,5,6,3} + \{z\})$ adalah $\{1,2,3, \dots, 25\}$ dan himpunan label untuk sisi di $E(S_{4,6,4,5,6,3} + \{z\})$ adalah $\{26,27, \dots, 49\}$.

Himpunan titik dan sisi pada $S_{4,6,4,5,6,3} + \{z\}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 &V(S_{4,6,4,5,6,3} + \{z\}) \\
 &= \{c_i \mid 1 \leq i \leq 6\} \cup \{x_1^j \mid 1 \leq j \leq 3\} \cup \{x_6^j \mid 2 \leq j \leq 3\} \\
 &\cup \{x_2^j \mid 2 \leq j \leq 5\} \cup \{x_3^j \mid 2 \leq j \leq 3\} \cup \{x_4^j \mid 2 \leq j \leq 4\} \\
 &\cup \{x_5^j \mid 2 \leq j \leq 5\} \cup \{z\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(S_{4,6,4,5,6,3} + \{z\}) &= \{c_i c_{i+1} \mid 1 \leq i \leq 5\} \cup \{c_1 x_1^j \mid 1 \leq j \leq 3\} \cup \{c_6 x_6^j \mid 2 \leq j \leq 3\} \\
&\cup \{c_2 x_2^j \mid 2 \leq j \leq 5\} \cup \{c_3 x_3^j \mid 2 \leq j \leq 3\} \cup \{c_4 x_4^j \mid 2 \leq j \leq 4\} \\
&\cup \{c_5 x_5^j \mid 2 \leq j \leq 5\} \cup \{c_7 z\}
\end{aligned}$$

Dimana

$$\begin{aligned}
|V(S_{4,6,4,5,6,3} + \{Z\})| &= \left(\sum_{i=1}^6 n_i - r + 2 \right) + 1 \\
&= ((4 + 6 + 4 + 5 + 6 + 3) - 6 + 2) + 1 \\
&= 25
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|E(S_{4,6,4,5,6,3} + \{Z\})| &= \left(\sum_{i=1}^6 n_i - r + 1 \right) + 1 \\
&= ((4 + 6 + 4 + 5 + 6 + 3) - 6 + 1) + 1 \\
&= 24
\end{aligned}$$

Karena pelabelan yang diberikan adalah pelabelan super, maka himpunan label untuk titik-titik di $S_{4,6,4,5,6,3} + \{z\}$ adalah $L = \{1, 2, \dots, 25\}$ dan himpunan label untuk sisi-sisi di $S_{4,6,4,5,6,3} + \{z\}$ adalah $M = \{26, 27, \dots, 49\}$.

Himpunan bobot sisi pada graf ulat $S_{4,6,4,5,6,3} + \{z\}$ adalah :

$W = \{w_i | i = 1, 2, \dots, 25\}$, dimana

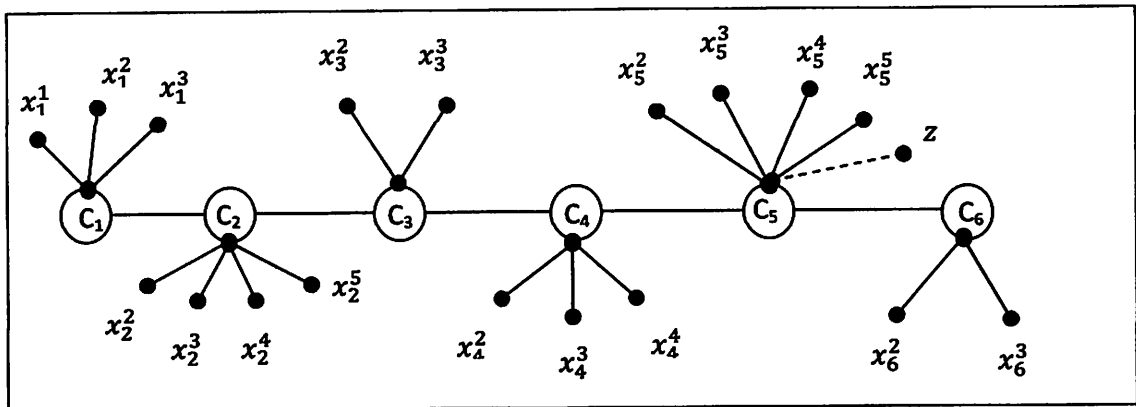
$$w_i = a + (i - 1)d \tag{3.4}$$

Karena $a = 29$ dan $d = 3$, maka persamaan (3.4) menjadi :

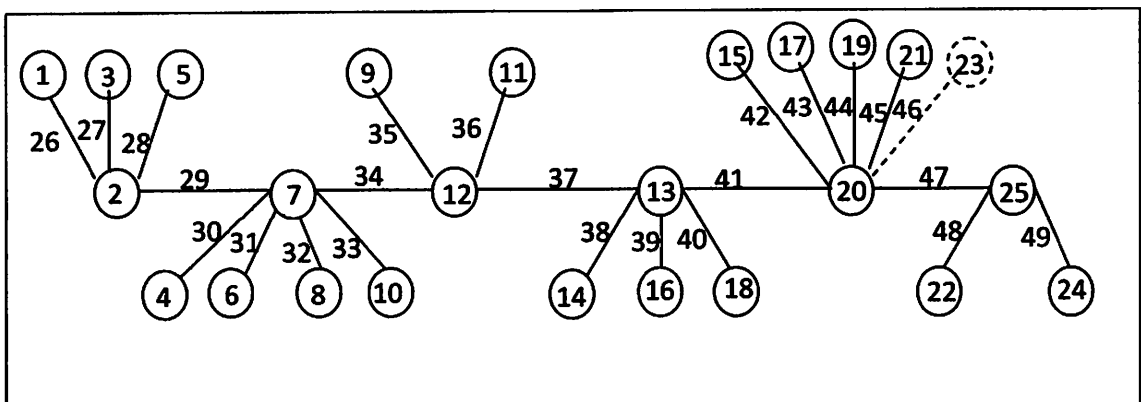
$$w_i = 29 + (i - 1)3, \text{ untuk } 1, 2, \dots, 25$$

$$= 29 + 3i - 3$$

$$= 26 + 3i$$



Gambar 3.1.7 Graf ulat $S_{4,6,4,5,6,3} + \{z\}$



Gambar 3.1.8 Pelabelan total (29,3)-sisi anti ajaib super pada $S_{4,6,4,5,6,3} + \{z\}$

3.2 r ganjil, dan $N_1 = N_2$ atau $N_1 = N_2 + 1$

Teorema 3.2 *Jika r ganjil dan $N_1 = N_2$ atau $N_1 = N_2 + 1$, maka graf ulat mempunyai pelabelan total $(a,3)$ -sisi anti ajaib super.*

Bukti :

Untuk membuktikan Teorema 3.2 ini, perhatikan dua kasus berikut:

Kasus 1 : $N_1 = N_2$

Diberikan pelabelan titik $\lambda : V(S_{n_1, n_2, \dots, n_r}) \rightarrow \{1, 2, \dots, v\}$ sehingga graf bintang S_2, S_4, \dots, S_{r-1} menerima label $\{1, 3, 5, \dots, 2n_2 - 1\}$ dan graf bintang $S_1, S_3, S_5, \dots, S_r$ menerima label $\{2, 4, 6, \dots, 2n_1\}$ dimana titik pusat C_r menerima label bilangan ganjil paling besar.

Bobot sisi, terhadap pelabelan titik λ , membentuk barisan aritmatika, dengan $a = 3$ dan $d = 2$. Jika digabungkan pelabelan titik λ dan pelabelan sisi $\lambda^* : E(S_{n_1, n_2, \dots, n_r}) \rightarrow \{v + 1, v + 2, \dots, 2v - 1\}$, maka akan diperoleh pelabelan total $(2v + 2, 1)$ sisi anti ajaib super atau pelabelan total $(v + 4, 3)$ sisi anti ajaib super.

Kasus 2 : $N_1 = N_2 + 1$

Misalkan f adalah pelabelan total $(v + 4, 3)$ sisi anti ajaib super dari suatu graf ulat S_{n_1, n_2, \dots, n_r} yang telah digunakan pada kasus 1. Tambahkan satu daun z ke c_r , definisikan suatu pelabelan baru f_1 , seperti pada Kasus 2 pada teorema sebelumnya.

Dapat dilihat bahwa f_i adalah pelabelan total $(v + 5, 3)$ sisi anti ajaib super dari $S_{n_1, n_2, \dots, n_r} + \{z\}$.

Untuk lebih jelas, diberikan contoh untuk Teorema 3.2 sebagai berikut:

1. Misal diberikan pelabelan total $(24, 3)$ -sisi anti ajaib super pada graf ulat $S_{3,5,4,6,4} + \{z\}$. Maka himpunan label untuk titik di $V(S_{3,5,4,6,4} + \{z\})$ adalah $\{1, 2, \dots, 20\}$ dan himpunan label untuk sisi di $E(S_{3,5,4,6,4} + \{z\})$ adalah $\{21, 22, \dots, 39\}$.

Himpunan titik dan sisi pada $S_{3,5,4,6,4} + \{z\}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} V(S_{3,5,4,6,4} + \{z\}) &= \{c_i \mid 1 \leq i \leq 5\} \cup \{x_1^j \mid 1 \leq j \leq 2\} \cup \{x_5^j \mid 2 \leq j \leq 4\} \\ &\cup \{x_2^j \mid 2 \leq j \leq 4\} \cup \{x_3^j \mid 2 \leq j \leq 3\} \cup \{x_4^j \mid 2 \leq j \leq 5\} \cup \{z\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(S_{3,5,4,6,4} + \{z\}) &= \{c_i c_{i+1} \mid 1 \leq i \leq 4\} \cup \{c_1 x_1^j \mid 1 \leq j \leq 2\} \cup \{c_5 x_5^j \mid 2 \leq j \leq 4\} \\ &\cup \{c_2 x_2^j \mid 2 \leq j \leq 4\} \cup \{c_3 x_3^j \mid 2 \leq j \leq 3\} \cup \{c_4 x_4^j \mid 2 \leq j \leq 5\} \\ &\cup \{c_r z\} \end{aligned}$$

Dimana

$$\begin{aligned}
|V(S_{3,5,4,6,4} + \{Z\})| &= \left(\sum_{i=1}^5 n_i - r + 2 \right) + 1 \\
&= ((3 + 5 + 4 + 6 + 4) - 5 + 2) + 1 \\
&= 20
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|E(S_{3,5,4,6,4} + \{Z\})| &= \left(\sum_{i=1}^5 n_i - r + 1 \right) + 1 \\
&= ((3 + 5 + 4 + 6 + 4) - 5 + 1) + 1 \\
&= 19
\end{aligned}$$

Karena pelabelan yang diberikan adalah pelabelan super, maka himpunan label untuk titik-titik di $S_{3,5,4,6,4} + \{z\}$ adalah $L = \{1, 2, \dots, 20\}$ dan himpunan label untuk sisi-sisi di $S_{3,5,4,6,4} + \{z\}$ adalah $M = \{21, 22, \dots, 39\}$.

Himpunan bobot sisi pada graf ulat $S_{3,5,4,6,4} + \{z\}$ adalah :

$$W = \{w_i | i = 1, 2, \dots, 20\}, \text{ dimana}$$

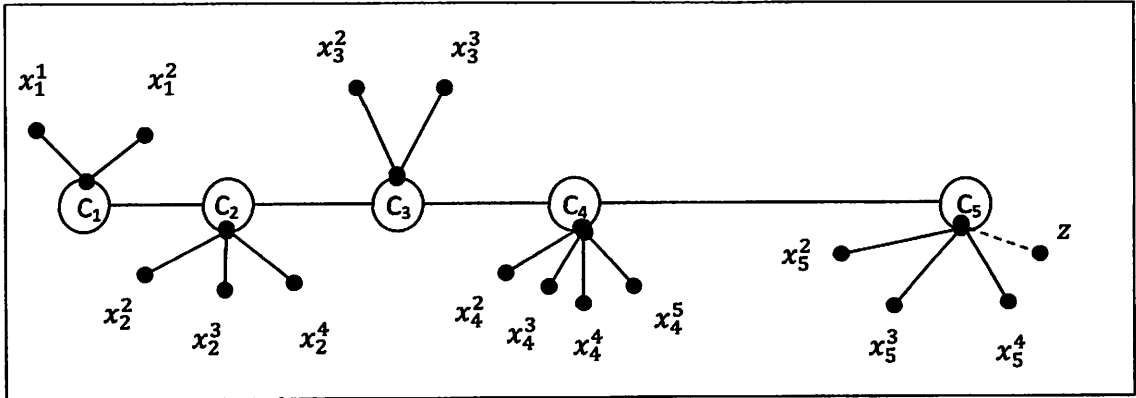
$$w_i = a + (i - 1)d \tag{3.5}$$

Karena $a = 24$ dan $d = 3$, maka persamaan (3.5) menjadi :

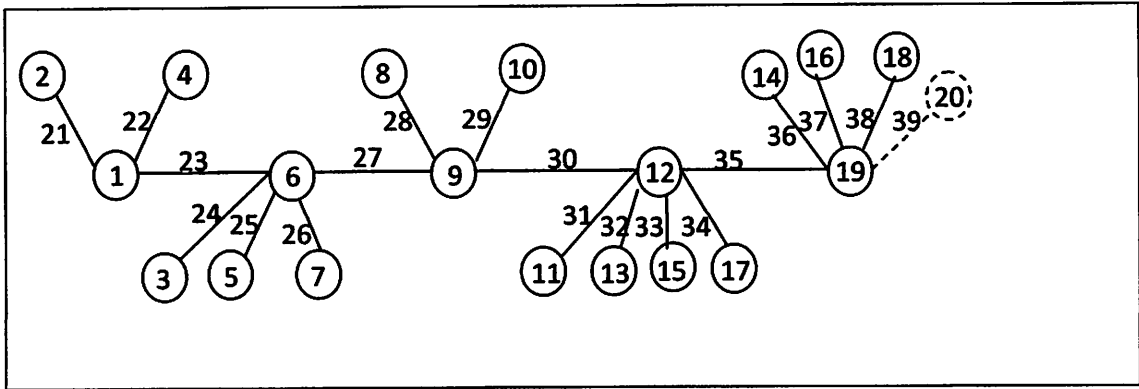
$$w_i = 24 + (i - 1)3, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, 20$$

$$= 24 + 3i - 3$$

$$= 21 + 3i$$



Gambar 3.2.1 Graf ulat $S_{3,5,4,6,4} + \{z\}$



Gambar 3.2.2 Pelabelan total (24,3)-sisi anti ajaib super pada $S_{3,5,4,6,4} + \{z\}$

BAB IV

KESIMPULAN

Misalkan N_1 adalah jumlah daun pada bintang ganjil dan N_2 adalah jumlah daun pada bintang genap. Graf ulat S_{n_1, n_2, \dots, n_r} mempunyai pelabelan total $(a, 3)$ -sisi anti ajaib super untuk r genap, $N_1 = N_2$ atau $|N_1 - N_2| = 1$ dan r ganjil, $N_1 = N_2$ atau $N_1 = N_2 + 1$, dimana a adalah bobot sisi minimum pada pelabelan dan 3 adalah selisih dari bobot sisi tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Chartrand. G. and Zhang, P. 2005, *Introduction to Graph Theory*, Mc Graw-Hill Press, Boston.
- [2] Sugeng, K.A, Miller, M. Slamin and Baca, M. *(a,d)-Edge Antimagic Total Labelings Of Caterpillars*, IJCCGGT 2003, LNCS 3330, pp 169-180, 2005.
- [3] Ngurah, Anak Agung Gede. 2001. *Pelabelan Ajaib dan Anti Ajaib*. ITB.Bandung. *Tesis-S2*, tidak diterbitkan.
- [4] Baca, M. and Miller, M. 2008, *Super Edge-Antimagic Graphs*, Brown Walker Press, Boca Raton-Florida.
- [5] M. Baca, Y. Lin, M. Miller and M. Z. Youssef, Edge-antimagic graphs, *Discrete Mathematics* 307 (2007): 1232-1244.
- [6] H. Enomoto, A. S. Llado, T. Nakamigawa and G. Ringel, Super edge-magic graphs, *SUT. J. Math* 34 (1998): 105-109.
- [7] R. Simanjuntak, F. Bertault and M. Miller, Two new (a, d) -antimagic graph labelings, *Proc. of Eleventh Australia Workshop of Combinatorial Algorithm* (2000): 179-189.

RIWAYAT HIDUP PENULIS



Penulis bernama Riri Emarine Susur, dilahirkan di Kota Padang pada tanggal 06 Maret 1988, anak kedua dari dua bersaudara, buah hati dari pasangan H.Suhatri Danur B.Ac dan Hj.Surya idea S.Pd. Penulis menamatkan pendidikan dasar di SDN 16 Surau Gadang pada tahun 2000 kemudian melanjutkan ke SLTPN 22 Padang dan menamatkannya pada tahun 2003. Penulis melanjutkan pendidikan ke SMAN 12 Padang dan selesai pada tahun 2006. Di tahun 2006 penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam FMIPA Universitas Andalas melalui jalur Mandiri. Pada bulan Juli s/d Agustus 2009 penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Jorong Aia Daliak, Kenagarian Lolo, Kecamatan Pantai Cermin, Kabupaten Solok untuk syarat meraih gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika FMIPA UNAND.