KESTABILAN TITIK TETAP PERSAMAAN DIFERENSIAL NON AUTONOMUS

SKRIPSI

RICE AMELIA
06134049

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2011

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa :

Nama	: RICE AMELIA
No. Buku Pokok	: 06 134 049s
Jurusan	: Matematika
Bidang	: Matematika Terapan
Judul Skripsi	: Kestabilan Titik Tetap Persamaan Diferensial Non Autonomous

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal 31 Januari 2010 berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing / Penguji

1.

Efendi, M. Si
NIP.

Penguji

1.

Haripamyu, M. Si
NIP.

2.

Monika Rianti Helmi, M.Si
NIP.

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand

Dr. Syafrizal
NIP.

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Alhamdulillah wa syukurillah. Segala puji dan syukur hanyalah milik Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya sehingga Penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat dan salam semoga selalu tercurah kepada Baginda Rasulullah SAW yang telah menebarkan ilmu dan iman dalam cahaya Islam yang beliau bawa.

Selesainya skripsi ini tak lepas dari do'a, motivasi, dorongan semangat, dan bantuan yang senantiasa diberikan oleh kedua orang tua dan adek-adek Penulis. Seiring dengan ungkapan terima kasih kepada keluarga tercinta, tak lupa pula Penulis sampaikan ungkapan terima kasih kepada:

1. Bapak Efendi, M. Si selaku dosen pembimbing yang telah bersedia meluangkan waktu dan tenaga serta membagi fikiran untuk membimbing dan membantu Penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Haripamyu, M. Si dan Ibu Monika Rianti Helmi, M. Si selaku dosen penguji pada seminar dan sidang sarjana.
3. Bapak Dr.Syafrizal selaku Ketua Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas.
4. Ibu Des Welyyanti, M. Si selaku pembimbing akademik penulis yang senantiasa meluangkan waktu untuk membimbing Penulis.
5. Bapak dan Ibu dosen di Jurusan Matematika yang telah bersedia membagi ilmunya kepada Penulis selama ini.
6. Mama Cun, Pak Syamsir, Pak Zul, Ni Opi dan Bu Eli, yang telah memberi bantuan untuk kemudahan Penulis selama menjadi mahasiswi di Jurusan Matematika.
7. Keluarga besar mahasiswa matematika, khususnya angkatan 2006 yang telah memberikan bantuan, motivasi dan do'a untuk Penulis.
8. Selanjutnya kepada seluruh pihak yang telah banyak membantu Penulis selama pengerjaan skripsi ini.

Atas bantuan yang telah diberikan, Penulis do'akan semoga Allah SWT membalasnya dengan sebaik-baik balasan.

Penulisan skripsi ini tentunya masih jauh dari kesempurnaan dan tidak luput dari berbagai kekurangan karena terbatasnya ilmu dan pengalaman yang Penulis miliki. Oleh sebab itu, dengan kerendahan hati Penulis mengharapkan kritikan dan saran agar kedepannya diperoleh hasil yang lebih baik. Penulis berharap agar skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkannya.

Akhirnya, hanya kepada Allah SWT Penulis berserah diri.

Padang, Februari 2011

Penulis

ABSTRAK

Diberikan persamaan diferensial logistik *non autonomous*

$$\frac{dx(t)}{dt} = r(t)x(t)(1 - x(t))$$

dengan $x(t)$ menyatakan jumlah populasi pada saat t, dan $r(t)$ menyatakan laju pertumbuhan populasi dimana $r(t)$ merupakan suatu fungsi yang bergantung terhadap waktu t. Pada tulisan ini akan dianalisa perilaku jangka panjang dari solusi persamaan diferensial *non autonomous* ini dengan melihat kestabilan titik tetap dari solusi persamaan diferensialnya.

Kata Kunci : *non autonomous, persamaan logistik, titik tetap, kestabilan*

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR iii

ABSTRAK v

DAFTAR ISI.. vi

BAB I PENDAHULUAN.. 1

1.1 Latar Belakang.. 1

1.2 Perumusan Masalah.. 2

1.3 Pembatasan Masalah 2

1.4 Tujuan Penulisan 3

1.5 Sistematika Penulisan 3

BAB II LANDASAN TEORI 4

2.1 Persamaan Diferensial Autonomous dan Non Autonomous.........4

2.2 Persamaan Logistik 4

2.3 Kestabilan Titik Tetap.. 5

2.4 Sifat Kelengkapan Bilangan Riil 6

BAB III KESTABILAN TITIK TETAP PERSAMAAN DIFFERENSIAL NON AUTONOMOUS.. 7

3.1 Analisa Kestabilan Titik Tetap Dari Solusi Persamaan Differensial Logistik 7

3.1.1 Analisa Kestabilan Titik Tetap dari Solusi Persamaan Diferensial Logistik *Non Autonomous* jika $r(t) = e^t$.................... 8

3.1.2 Analisa Kestabilan Titik Tetap dari Solusi Persamaan

Diferensial Logistik *Non Autonomous* jika $r(t) = e^{-t}$................ 10

3.1.3 Analisa Kestabilan Titik Tetap dari Solusi Persamaan

Diferensial Logistik *Non Autonomous* jika $r(t) = -e^{t}$................. 11

3.1.4 Analisa Kestabilan Titik Tetap dari Solusi Persamaan

Diferensial Logistik *Non Autonomous* jika $r(t) = -e^{-t}$............... 12

3.1.5 Analisa Kestabilan Titik Tetap dari Solusi Persamaan

Diferensial Logistik *Non Autonomous* jika $r(t) = \sin(t)$............. 13

3.1.6 Analisa Kestabilan Titik Tetap dari Solusi Persamaan

Diferensial Logistik *Non Autonomous* jika $r(t) = \cos(t)$............ 14

3.2 Analisa Kestabilan Dari Solusi Terbatas..................................16

BAB IV KESIMPULAN dan SARAN..24

4.1 Kesimpulan 24

4.2 Saran 24

DAFTAR PUSTAKA...25

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Masalah persamaan diferensial baik *autonomous* maupun *non autonomous* dewasa ini makin banyak dipelajari lebih lanjut. Hal ini disebabkan karena berhubungan erat dengan topik-topik penting dari matematika terapan terutama yang terkait dengan masalah-masalah kestabilan dari suatu persamaan diferensial maupun sistemnya.

Dalam penerapannya, pengaplikasian dari persamaan diferensial *autonomous* lebih cenderung digunakan, karena persamaan diferensial *autonomous* mengabaikan fungsi waktu. Namun, ternyata tidak semua fungsi waktu yang ada pada setiap persamaan itu terus menerus diabaikan, karena ada persamaan diferensial yang membutuhkan analisa lebih lanjut pada solusinya dimana fungsi waktu harus dilibatkan. Sebagai contoh, pada persamaan diferensial logistik *non autonomous* berikut:

$$\frac{dx(t)}{dt} = r(t)x(t)(1 - x(t)) \tag{1.1.1}$$

dengan $x(t)$ menyatakan jumlah populasi pada waktu t dan $r(t)$ menyatakan laju pertumbuhan populasi dimana $r(t)$ merupakan suatu fungsi yang bergantung terhadap waktu t dalam persamaan (1.1.1), sedangkan pada persamaan *autonomous*, karena tidak bergantung terhadap waktu, maka $r(t)$ ditulis dalam bentuk konstanta (misalkan r).

Sifat-sifat tertentu dari solusi suatu persamaan diferensial, seringkali menjadi perhatian lebih, termasuk pada persamaan diferensial *non autonomous* ini. Sebagai contoh, apakah solusinya mempunyai titik tetap yang stabil? Apakah solusinya terbatas setiap saat? Atau bagaimanakah perilaku jangka panjang dari solusi persamaannya? Cara yang berhasil guna dalam mempelajari suatu persamaan diferensial *non autonomous* yang bentuknya berupa persamaan diferensial tak linier ini, dapat dihampiri dengan melinierkan bentuk persamaannya, kemudian dengan mendapatkan titik tetapnya dari hampiran linier tersebut, perilaku jangka panjang dari solusi persamaan diferensial *non autonomous* ini terhadap waktu t menuju tak hingga dapat dianalisa. Jika solusi dari persamaan tersebut menuju titik tetap atau berada di sekitar titik tetapnya untuk setiap waktu t menuju tak hingga, maka titik tetap tersebut disebut stabil untuk solusi persamaan yang diperoleh.

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, penulis tertarik membahas perilaku jangka panjang dari solusi suatu persamaan diferensial *non autonomous*.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan uraian di atas, maka masalah yang akan dibahas dalam penulisan ini adalah bagaimana analisa perilaku jangka panjang dari solusi suatu persamaan diferensial *non autonomous*.

1.3 Pembatasan Masalah

Pembahasan pada penulisan skripsi ini dibatasi oleh:

1. Persamaan diferensial logistik *non autonomous* yaitu

$$\frac{dx(t)}{dt} = r(t)x(t)(1 - x(t))$$

2. Fungsi laju pertumbuhan populasi $r(t)$ dalam bentuk periodik yaitu fungsi $\sin(t), \cos(t)$ dan fungsi positif monoton naik dan monoton turun yaitu e^t, e^{-t}, serta fungsi negatif monoton naik dan monoton turun yaitu $-e^t, -e^{-t}$.

1.4 Tujuan Penulisan

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk menganalisa perilaku jangka panjang dari solusi suatu persamaan diferensial *non autonomous*.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini terdiri atas empat bab. Bab 1 berisikan latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan. Bab 2 berisikan landasan teori sebagai pedoman dalam perumusan masalah. Bab 3 berisikan pembahasan kestabilan titik tetap persamaan diferensial logistik *non autonomous*. Bab 4 berisikan kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bagian ini, akan dijelaskan teori-teori yang melandasi penulisan skripsi ini. Adapun teori-teori yang menjadi landasan dalam penulisan skripsi ini antara lain Persamaan Diferensial *Autonomous* dan *Non Autonomous*, Persamaan Logistik, Kestabilan Titik Tetap dan Sifat Kelengkapan Bilangan Riil.

2.1 Persamaan Diferensial Autonomous Dan Non Autonomous

Definisi 2.1.1 [1]

Persamaan diferensial autonomous adalah persamaan diferensial biasa yang berbentuk :

$$\dot{x} = f(x), \qquad (2.1.1)$$

disebut autonomous karena nilai f *tidak bergantung pada waktu* t *secara eksplisit. Jika bentuk persamaannya*

$$\dot{x} = f(x,t) \qquad (2.1.2)$$

dengan nilai f *bergantung waktu* t*, maka persamaan (2.1.2) disebut persamaan diferensial non autonomous.*

Salah satu contoh persamaan diferensial *non autonomous* adalah persamaan logistik.

2.2 Persamaan Logistik

Persamaan logistik merupakan salah satu persamaan diferensial yang menggambarkan pertumbuhan suatu populasi dalam jangka waktu t. Persamaan ini digunakan tidak hanya untuk menggambarkan populasi manusia tapi juga dapat digunakan untuk menggambarkan populasi ikan, hewan, jamur, bakteri, dan lain-lain. Bentuk persamaan logistik yang akan dibahas yaitu

$$\frac{dx(t)}{dt} = r(t)x(t)(1 - x(t)) \qquad (2.2.1)$$

dengan $x(t)$ menyatakan jumlah populasi pada saat t, dan $r(t)$ menyatakan laju pertumbuhan populasi.

2.3 Kestabilan titik tetap

Definisi 2.3.1 [2]

Titik tetap adalah titik yang mengakibatkan $\dot{x}$ atau f bernilai nol.

Pada persamaan (2.1.2), nilai x yang menyebabkan f bernilai nol akan menjadi titik tetap pada persamaan tersebut. Demikian juga halnya dengan persamaan logistik (1.1.1). Titik tetap pada persamaan ini adalah titik yang mengakibatkan $\frac{dx(t)}{dt}$ bernilai nol.

Titik tetap dari suatu persamaan diferensial *non autonomous* disebut stabil jika solusi dari persamaan tersebut mendekati atau berada di sekitar titik tetapnya.

Definisi 2.3.2 [2]

Kestabilan titik tetap pada persamaan diferensial logistik non autonomous diperoleh dengan cara:

Jika solusi persamaan diferensial non autonomous mendekati atau berada di sekitar titik tetap untuk $t \to \infty$, maka titik tetap tersebut disebut titik tetap yang stabil.

2.4 Sifat Kelengkapan Bilangan Riil

Definisi 2.4.1 [2]

Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}$, *maka*

1) $u \in \mathbb{R}$ *disebut batas atas dari S jika* $s \leq u, \forall s \in S$.

2) $v \in \mathbb{R}$ *disebut batas bawah dari S jika* $s \geq v, \forall s \in S$.

Definisi 2.4.2 [2]

1) $S \subseteq \mathbb{R}$ *dikatakan terbatas di atas jika S mempunyai batas atas.*

2) $S \subseteq \mathbb{R}$ *dikatakan terbatas di bawah jika S mempunyai batas bawah.*

3) $S \subseteq \mathbb{R}$ *dikatakan terbatas jika S terbatas di atas dan terbatas di bawah.*

Definisi 2.4.3 [2]

Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}$, *maka*

1) *Jika S terbatas di atas, maka batas atas u disebut supremum (batas atas terkecil) S jika tidak terdapat bilangan yang lebih kecil dari u sebagai batas atas S.*

2) *Jika S terbatas di bawah, maka batas atas v disebut infimum (batas bawah terbesar) S jika tidak terdapat bilangan yang lebih besar dari v sebagai batas bawah S.*

Definisi 2.4.4 [2]

Suatu fungsi $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ *dikatakan terbatas pada A jika ada suatu konstanta* $M > 0$ *sedemikian sehingga* $|f(x)| \leq M, \forall x \in A$.

Dengan kata lain, suatu fungsi akan terbatas pada suatu interval, jika *range*nya adalah himpunan terbatas dalam $\mathbb{R}$.

BAB III

KESTABILAN TITIK TETAP

Pada bagian ini, akan dijelaskan mengenai isi dari penulisan skripsi ini. Adapun yang akan dibahas dalam BAB III ini terdiri dari dua sub bab yaitu Analisa Kestabilan Titik Tetap Dari Solusi Persamaan Diferensial Logistik pada sub bab pertama dan Analisa Kestabilan Dari Solusi Terbatas pada sub bab kedua.

3.1 Analisa Kestabilan Titik Tetap Dari Solusi Persamaan Diferensial Logistik

Bagian ini membahas analisa terhadap solusi dari persamaan diferensial logistik *non autonomous*. Perhatikan persamaan logistik berikut:

$$\frac{dp}{dt} = r(t)p(1-p) \tag{3.1.1}$$

dengan p merupakan parameter yang menunjukkan jumlah populasi pada saat t. Persamaan (3.1.1) ekivalen dengan persamaan (2.2.1).

Karena persamaan (3.1.1) dalam bentuk *non autonomous* yaitu dengan adanya fungsi laju pertumbuhan populasi yang bergantung pada nilai t, maka di sini akan dilihat bagaimana kondisi titik tetapnya jika laju dari pertumbuhan populasi ini dalam bentuk periodik (*sinus* dan *cosinus*) dan bentuk eksponensial.

Untuk mendapatkan titik tetap persamaan (3.1.1), berdasarkan definisi (2.3.1), perhatikan bahwa

$$\frac{dp}{dt} = 0$$

$$0 = r(t)p(1-p)$$

$$0 = r(t)p - r(t)p^2. \tag{3.1.2}$$

Dengan menggunakan hampiran linier, persamaan (3.1.2) menjadi

$$0 = r(t)p.$$

Karena nilai dari fungsi laju pertumbuhan populasi tidak mungkin bernilai nol, maka $r(t) \neq 0$, sehingga diperoleh $p = 0$.

Selanjutnya, akan dicari solusi dari persamaan (3.1.1) dengan mengganti nilai $r(t)$ dalam bentuk eksponensial dan periodik.

3.1.1 Analisa Kestabilan Titik Tetap dari Solusi Persamaan Diferensial Logistik *Non Autonomous* untuk $r(t) = e^t$

Perhatikan persamaan (3.1.1). Dengan mengganti $\mathrm{r(t)} = \mathrm{e^t}$, maka persamaan (3.1.1) menjadi

$$\frac{dp}{dt} = \mathrm{e}^{\mathrm{t}} p(1-p). \qquad (3.1.1.1)$$

Persamaan (3.1.1.1) dapat ditulis dalam bentuk persamaan diferensial peubah terpisah yaitu

$$\frac{dp}{p(1-p)} = e^t dt. \qquad (3.1.1.2)$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas persamaan (3.1.1.2), diperoleh

$$\int \frac{dp}{p(1-p)} = \int \mathrm{e}^{\mathrm{t}} dt$$

$$\int \frac{1}{p(1-p)} dp = \mathrm{e}^{\mathrm{t}} + c. \qquad (3.1.1.3)$$

Dengan menggunakan pecahan parsial, $\frac{1}{p(1-p)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}$ sehingga diperoleh

$$\int \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right] dp = \mathrm{e}^{\mathrm{t}} + c$$

$$\int \frac{1}{p} dp + \int \frac{1}{1-p} dp = \mathrm{e}^{\mathrm{t}} + c$$

$$\ln p + (-\ln(1-p)) = \mathrm{e}^{\mathrm{t}} + c$$

$$\ln p - \ln(1-p) = \mathrm{e}^{\mathrm{t}} + c$$

$$\ln \frac{p}{1-p} = \mathrm{e}^{\mathrm{t}} + c. \qquad (3.1.1.4)$$

Dengan mengeksponensialkan kedua ruas pada persamaan (3.1.1.4), diperoleh

$$\frac{p}{1-p} = e^{e^t + c}$$

$$p = e^{e^t+c} - pe^{e^t+c}. \qquad (3.1.1.5)$$

Kedua ruas pada persamaan (3.1.1.5) dikelompokkan berdasarkan peubah p, diperoleh

$$p\left(1 + e^{e^t+c}\right) = e^{e^t+c}$$

$$p = \frac{e^{e^t+c}}{1 + e^{e^t+c}}$$

$$p = \frac{1}{Ce^{-e^t}+1}, \text{ dengan } C = e^{-c}.$$

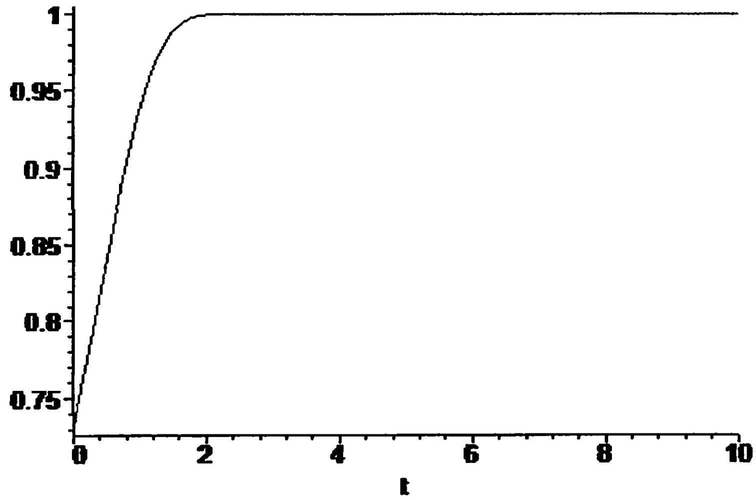
Dengan demikian solusi untuk persamaan (3.1.1.1) dapat ditulis dalam bentuk

$$p(t) = \frac{1}{Ce^{-e^t}+1}, \text{ dengan } C = e^{-c}. \qquad (3.1.1.6)$$

Dari solusi yang diperoleh seperti pada persamaan (3.1.1.6) tersebut, dapat dilihat bahwa

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{Ce^{-e^t}+1} = \frac{1}{Ce^{-e^\infty}+1} = \frac{1}{Ce^{-\infty}+1} = \frac{1}{0+1} = 1.$$

Hal ini berarti, untuk waktu $t \to \infty$, solusi (3.1.1.6) konvergen ke 1. Lebih jelasnya, jika persamaan (3.1.1.6) ini diplotkan untuk $t \to \infty$, maka akan terlihat bahwa grafik solusi tersebut bergerak menjauhi titik tetap $p = 0$.



Hal ini menunjukkan bahwa titik tetap $p = 0$ tidak stabil.

3.1.2 Analisa Kestabilan Titik Tetap dari Solusi Persamaan Diferensial Logistik *Non Autonomous* untuk $r(t) = e^{-t}$

Perhatikan persamaan (3.1.1). Dengan mengganti $r(t) = e^{-t}$, maka persamaan (3.1.1) menjadi

$$\frac{dp}{dt} = e^{-t}p(1-p). \qquad (3.1.2.1)$$

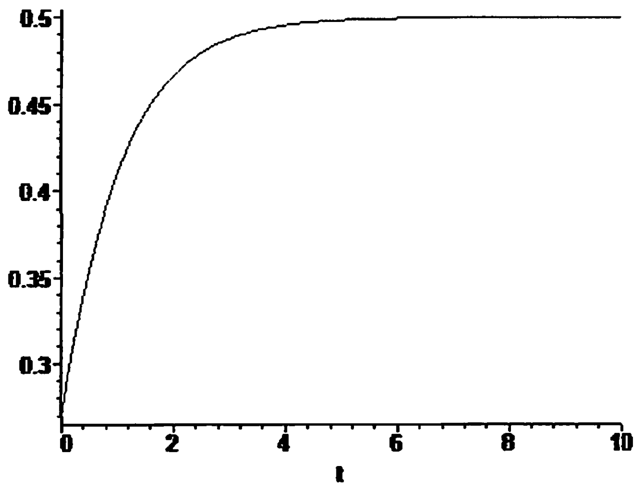
Dengan cara yang sama seperti sub bab 3.1.1 diperoleh solusinya sebagai berikut:

$$p(t) = \frac{1}{1+Ce^{e^{-t}}}, \text{ dengan } C = e^{-c}. \qquad (3.1.2.2)$$

Dari solusi yang diperoleh seperti pada persamaan (3.1.2.2) tersebut, dapat dilihat bahwa

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1+Ce^{e^{-t}}} = \frac{1}{1+Ce^{e^{-\infty}}} = \frac{1}{1+Ce^{0}} = \frac{1}{1+C}.$$

Hal ini berarti, untuk waktu $t \to \infty$, solusi (3.1.2.2) akan memperlihatkan prilaku yang sama yaitu menjauhi nilai nol. Lebih jelasnya, jika persamaan (3.1.2.2) ini diplotkan untuk $t \to \infty$, maka akan terlihat bahwa grafik solusi tersebut bergerak menjauhi titik tetap $p = 0$.



Hal ini menunjukkan bahwa titik tetap $p = 0$ pada persamaan (3.1.2.1) juga tidak stabil.

3.1.3 Analisa Kestabilan Titik Tetap dari Solusi Persamaan Diferensial Logistik *Non Autonomous* untuk $r(t) = -e^t$

Perhatikan persamaan (3.1.1). Dengan mengganti $\mathrm{r(t)} = -\mathrm{e^t}$, maka persamaan (3.1.1) menjadi

$$\frac{dp}{dt} = -\mathrm{e^t}p(1-p). \qquad (3.1.3.1)$$

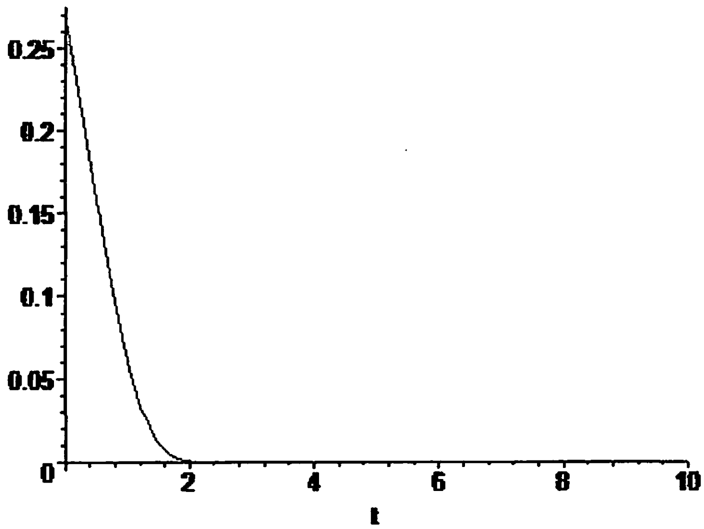
Dengan cara yang sama seperti sub bab 3.1.1 diperoleh solusinya sebagai berikut:

$$p(t) = \frac{1}{1+Ce^{e^t}}, \text{ dengan } C = e^{-c}. \qquad (3.1.3.2)$$

Dari solusi yang diperoleh seperti pada persamaan (3.1.3.2) tersebut, dapat dilihat bahwa

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1+Ce^{e^t}} = \frac{1}{1+Ce^{e^\infty}} = \frac{1}{1+Ce^\infty} = \frac{1}{1+\infty} = 0\,.$$

Hal ini berarti, untuk waktu $t \to \infty$, solusi (3.1.3.2) konvergen ke 0. Lebih jelasnya, jika persamaan (3.1.3.2) ini diplotkan untuk $t \to \infty$, maka akan terlihat bahwa grafik solusi tersebut bergerak mendekati titik tetap $p = 0$.



Hal ini menunjukkan bahwa titik tetap $p = 0$ pada persamaan (3.1.3.1) merupakan titik tetap yang stabil.

3.1.4 Analisa Kestabilan Titik Tetap dari Solusi Persamaan Diferensial Logistik *Non Autonomous* untuk $r(t) = -e^{-t}$

Perhatikan persamaan (3.1.1). Dengan mengganti $\mathrm{r(t)} = -\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}$, maka persamaan (3.1.1) menjadi

$$\frac{dp}{dt} = -\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}p(1-p). \qquad (3.1.4.1)$$

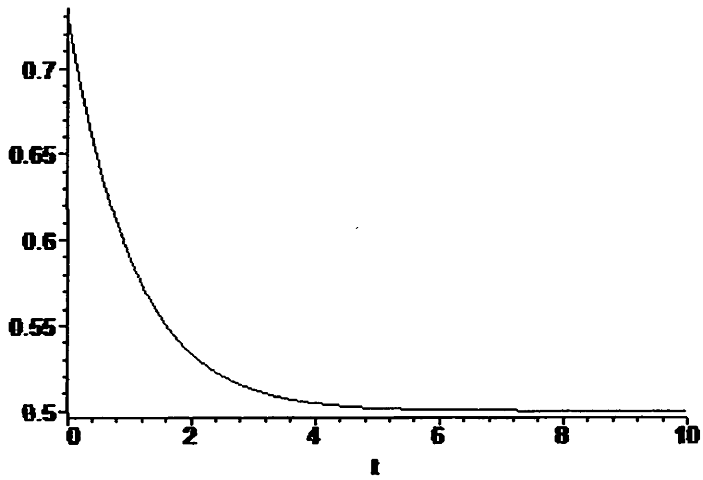
Dengan cara yang sama seperti sub bab 3.1.1 diperoleh solusinya sebagai berikut:

$$p(t) = \frac{1}{1+Ce^{-e^{-t}}}, \text{ dengan } C = e^{-c}. \qquad (3.1.4.2)$$

Dari solusi yang diperoleh seperti pada persamaan (3.1.4.2) tersebut, dapat dilihat bahwa

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1+Ce^{-e^{-t}}} = \frac{1}{1+Ce^{-e^{-\infty}}} = \frac{1}{1+Ce^{0}} = \frac{1}{1+C}.$$

Bila dilihat dari bentuk plotnya, untuk $t \to \infty$, grafik solusi tidak mendekati titik tetap $p = 0$.



Hal ini menunjukkan bahwa titik tetap $p = 0$ pada persamaan (3.1.4.1) tidak stabil.

3.1.5 Analisa Kestabilan Titik Tetap dari Solusi Persamaan Diferensial Logistik *Non Autonomous* untuk $r(t) = \sin(t)$

Perhatikan persamaan (3.1.1). Dengan mengganti r(t) = sin (t), maka persamaan (3.1.1) menjadi

$$\frac{dp}{dt} = \sin(t)\,p(1-p). \qquad (3.1.5.1)$$

Dengan cara yang sama seperti sub bab 3.1.1 diperoleh solusinya sebagai berikut:

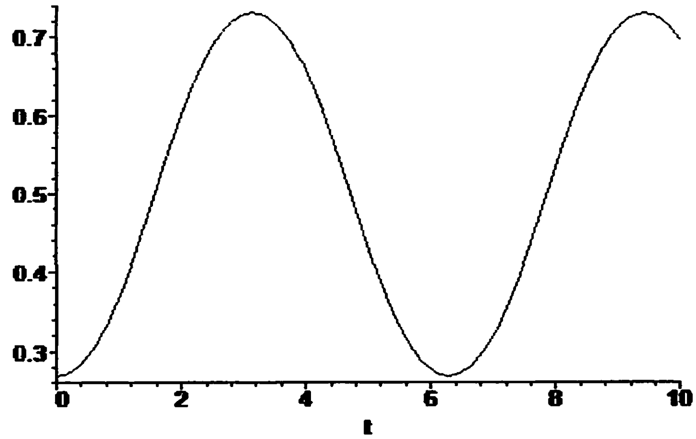
$$p(t) = \frac{1}{1+Ce^{\cos(t)}}\text{, dengan } C = e^{-c}. \qquad (3.1.5.2)$$

Dari solusi yang diperoleh seperti pada persamaan (3.1.5.2) tersebut, dapat dilihat bahwa

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1+Ce^{\cos(t)}}.$$

Nilai limit dari bentuk persamaan di atas tidak ada karena ada fungsi $\cos(t)$ yang merupakan fungsi yang berosilasi, sehingga tidak ada solusi dari $p(t)$ yang mendekati titik tetap $p = 0$ untuk $t \to \infty$.

Bila dilihat dari bentuk plotnya, untuk $t \to \infty$, grafik solusi akan berosilasi seperti grafik fungsi sin (t).



Hal ini menunjukkan bahwa titik tetap $p = 0$ pada persamaan (3.1.5.1) tidak stabil.

3.1.6 Analisa Kestabilan Titik Tetap dari Solusi Persamaan Diferensial Logistik *Non Autonomous* untuk $r(t) = \cos(t)$

Perhatikan persamaan (3.1.1). Dengan mengganti r(t) = sin (t), maka persamaan (3.1.1) menjadi

$$\frac{dp}{dt} = \cos(t)\, p(1 - p). \qquad (3.1.6.1)$$

Dengan cara yang sama seperti sub bab 3.1.1 diperoleh solusinya sebagai berikut:

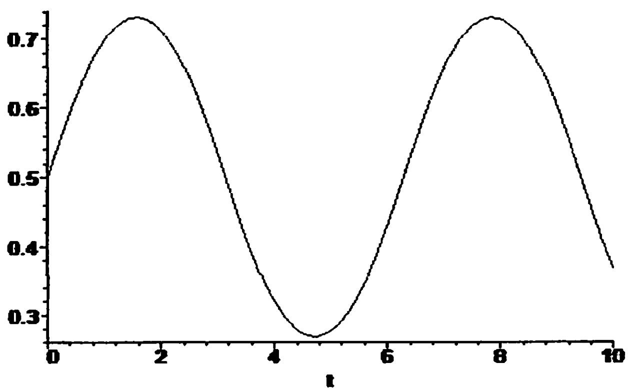
$$p(t) = \frac{e^{\sin(t)}}{C + e^{\sin(t)}}, \text{ dengan } C = e^{-c}. \qquad (3.1.6.2)$$

Dari solusi yang diperoleh seperti pada persamaan (3.1.5.2) tersebut, dapat dilihat bahwa

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{e^{\sin(t)}}{C + e^{\sin(t)}} .$$

Nilai limit dari bentuk persamaan di atas tidak ada karena fungsi $\sin(t)$ sama halnya dengan fungsi $\cos(t)$ merupakan fungsi yang berosilasi, sehingga tidak ada solusi dari $p(t)$ yang mendekati titik tetap $p = 0$ untuk $t \to \infty$.

Bila dilihat dari bentuk plotnya, untuk $t \to \infty$, grafik solusi akan berosilasi seperti grafik fungsi cos (t).



Hal ini menunjukkan bahwa titik tetap $p = 0$ pada persamaan (3.1.6.1) tidak stabil.

Secara umum jika laju pertumbuhan populasi $r(t)$, maka diperoleh solusi umum persamaan (3.1.1) dengan langkah-langkah penyelesaian sebagai berikut:

$$\frac{dp}{dt} = \mathrm{r}(t)\, p(1-p).$$

Dengan pemisahan peubah, persamaan diferensial (3.1.1) di atas dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{dp}{p(1-p)} = \mathrm{r}(t)\, dt.$$

Kemudian dengan mengintegralkan kedua ruas diperoleh

$$\int \frac{dp}{p(1-p)} = \int \mathrm{r}(t)\, dt,$$

$$\int \frac{1}{p(1-p)} dp = \left(\int \mathrm{r}(t)\, dt\right) + c.$$

Dengan menggunakan pecahan parsial, $\frac{1}{p(1-p)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}$ sehingga diperoleh

$$\int \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right] dp = \left(\int \mathrm{r}(t)\, dt\right) + c,$$

$$\int \frac{1}{p} dp + \int \frac{1}{1-p} dp = \left(\int \mathrm{r}(t)\, dt\right) + c,$$

$$\ln p + (-\ln(1-p)) = \left(\int \mathrm{r}(t)\, dt\right) + c,$$

$$\ln p - \ln(1-p) = \left(\int \mathrm{r}(t)\, dt\right) + c,$$

$$\ln \frac{p}{1-p} = \left(\int \mathrm{r}(t)\, dt\right) + c.$$

Dengan mengeksponensialkan kedua ruas diperoleh

$$\frac{p}{1-p} = e^{\left(\int \mathrm{r}(t)dt\right)+c},$$

$$p = e^{\left(\int \mathrm{r}(t)dt\right)+c} - pe^{\left(\int \mathrm{r}(t)dt\right)+c},$$

$$p + pe^{\left(\int \mathrm{r}(t)dt\right)+c} = e^{\left(\int \mathrm{r}(t)dt\right)+c}.$$

Dengan mengelompokkan berdasarkan peubah p diperoleh

$$p\left(1 + e^{\left(\int \mathrm{r}(t)dt\right)+c}\right) = e^{\left(\int \mathrm{r}(t)dt\right)+c},$$

$$p = \frac{e^{\left(\int \mathrm{r}(t)dt\right)+c}}{1+e^{\left(\int \mathrm{r}(t)dt\right)+c}},$$

$$p = \frac{e^{\int \mathrm{r}(t)dt}}{C+e^{\int \mathrm{r}(t)dt}}, \text{ dengan } C = e^{-c}.$$

Jadi, dengan mengganti nilai fungsi $\mathrm{r}(t)$, dapat dilihat kestabilan titik tetap $p = 0$ terhadap solusi yang diperoleh. Jika solusi dari persamaan tersebut mendekati atau berada di sekitar titik tetap $p = 0$, maka titik tetap tersebut merupakan titik tetap yang stabil.

3.2 Analisa Kestabilan Dari Solusi Terbatas

Ketika berhadapan dengan kasus $r(t)$ yang berosilasi (seperti $sin(t)$ dan $cos\ (t)$), $r(t)$ dapat dipandang sebagai fungsi terbatas.

Perhatikan bentuk persamaan logistik (3.1.1) berikut:

$$\frac{dp}{dt} = r(t)p(1-p),$$

dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{dp}{dt} = r(t)p - r(t)p^2. \tag{3.2.1}$$

Misalkan $r(t)$ terbatas, dengan

$$0 < \alpha \leq r(t) \leq A, \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.2.2}$$

untuk sebarang konstanta positif α dan A. Selanjutnya, perhatikan teorema berikut:

Teorema 3.2.1 [5]

Misalkan kondisi (3.2.2) berlaku, maka persamaan logistik non autonomous (3.2.1) mempunyai solusi terbatas tunggal dan positif $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *yang tidak menuju nol pada saat* $t \to \infty$, *sedemikian sehingga*

$$\frac{\alpha}{A} \leq p(t) \leq \frac{A}{\alpha}, t \in \mathbb{R}. \tag{3.2.3}$$

Bukti

Pertama, perhatikan bahwa $p = 0$ adalah solusi persamaan (3.2.1), maka oleh ketunggalan solusi dari masalah nilai awal, sebarang solusi non trivial persamaan (3.2.1) harus negatif atau positif . Misalkan $p(t) \neq 0$ adalah solusi non trivial yang positif atau negatif pada persamaan (3.2.1). Klaim bahwa $p(t)$ memenuhi pertidaksamaan

$$0 < p(t) \leq \frac{A}{\alpha}, \forall\, t \in \mathbb{R} \tag{3.2.4}$$

Andaikan $p(t_0) < 0$ untuk sebarang t_0 maka $p(t) < 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Dari (3.2.1) dan (3.2.2)

$$\frac{dp}{dt} = r(t)p - r(t)p^2$$

$$\leq \alpha p - \alpha p^2 < 0, \text{karena } p < 0$$

sehingga

$$\frac{1}{\alpha p - \alpha p^2}\frac{dp}{dt} \geq 1. \tag{3.2.5}$$

Pandang $\frac{1}{p(\alpha-\alpha p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{\alpha - \alpha p} = \frac{A(\alpha-\alpha p)+Bp}{p(\alpha-\alpha p)}$, (3.2.6)

diperoleh

$$A = \frac{1}{\alpha}, B = 1,$$

sehingga dengan mensubstitusikan nilai A dan B pada persamaan (3.2.6) diperoleh

$$\frac{1}{p(\alpha-\alpha p)} = \frac{1}{\alpha p} + \frac{1}{\alpha-\alpha p} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right),$$

sehingga (3.2.5) menjadi

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right)\frac{dp}{dt} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p-1}\right)\frac{dp}{dt} \geq \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p}\frac{dp}{dt} - \frac{1}{p-1}\frac{dp}{dt} \geq \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\ln(\alpha p)) - \frac{d}{dt}(\ln(\alpha p - \alpha)) \geq \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} ln \frac{\alpha p}{\alpha p - \alpha} \geq \alpha, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dengan mengintegralkan dari t_0 sampai t dengan $t_0 \leq t$, diperoleh

$$p(t) \leq \frac{c_0}{c_0 - e^{\alpha(t-t_0)}} < 0 \tag{3.2.7}$$

dengan $c_0 = p(t_0)(p(t_0) - 1)^{-1} > 0$ dan mempunyai asimtot tegak pada

$$t_* = t_0 + \alpha^{-1} ln[(c_0)^{-1}] > t_0 \, , \tag{3.2.8}$$

maka $p(t) \to -\infty$ untuk $t \to t_*^-$. Ini kontradiksi dengan $p(t)$ terbatas, sehingga $p(t)$ haruslah positif.

Dengan cara yang sama, misalkan $p(t_0) > \frac{A}{\alpha}$ untuk sebarang $t_0 \in \mathbb{R}$, maka $p(t)$ turun untuk $t \leq t_0$ dan berlaku $\frac{dp}{dt} \leq Ap - \alpha p^2$. Karena $Ap - \alpha p^2 < 0$, maka $(Ap - \alpha p^2)^{-1}\frac{dp}{dt} \geq 1$. Dengan menggunakan pecahan parsial, diperoleh

$$\frac{d}{dt} ln\left(\frac{Ap}{\alpha p - A}\right) \geq A, \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Dengan mengintegralkan dari t sampai t_0 untuk $t \leq t_0$ maka

$$p(t) \geq \frac{c_0 A}{c_0\alpha - Ae^{A(t_0 - t)}} > 0 \qquad (3.2.9)$$

dimana $c_0 = Ap(t_0)(\alpha p(t_0) - A)^{-1} > 0$ dan mempunyai asimtot tegak pada

$$t_* = t_0 + A^{-1} ln[A(\alpha c_0)^{-1}] < t_0\,, \qquad (3.2.10)$$

maka $p(t) \to \infty$ untuk $t \to t_*^+$. Ini kontradiksi dengan $p(t)$ terbatas. Dengan demikian pertidaksamaan (3.2.4) harus berlaku untuk setiap solusi terbatas pada persamaan (3.2.1).

Selanjutnya, klaim bahwa terdapat sedikitnya satu solusi positif terbatas pada persamaan (3.2.1). Misalkan $\epsilon \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $0 < \epsilon < \frac{\alpha}{A}$ dan perhatikan masalah nilai awal

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = w(r(t) - r(t)w),\ t \in \mathbb{R} \\ \qquad w(t_0) = \epsilon \end{cases} \qquad (3.2.11)$$

maka solusi tunggal untuk persamaan (3.2.11) memenuhi pertidaksamaan (3.2.4). Perhatikan bahwa $w^{-1}\frac{dw}{dt} \geq \epsilon_2$ untuk semua $t \leq t_0$, dengan $\epsilon_2 = \alpha - A\epsilon > 0$, maka hasil integralnya

$$0 < w(t) \leq w(t_0)e^{\epsilon_2(t - t_0)}, \text{untuk semua } t \leq t_0. \qquad (3.2.12)$$

Hal ini berarti $w(t) \to 0$ untuk $t \to -\infty$. Selanjutnya klaim bahwa $0 < w(t) \leq \frac{A}{\alpha}$, untuk $t \geq t_0$ maka $w(t)$ naik untuk $t \to \infty$.

Sekarang, misalkan $I \subset \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$I = \left\{w_0 \in R\colon \frac{dp}{dt} = r(t)p - r(t)p^2, \text{dengan } p(0) = w_0, \text{punya solusi terbatas}\right\}$$

Misalkan $p_0 = sup\ I$ dan $p(t)$ menyatakan solusi persamaan (3.2.1) dengan masalah nilai awal $p(0) = p_0$, maka dari persamaan (3.2.11) hal tersebut langsung menunjukkan bahwa $p_0 \geq \frac{\alpha}{A}$, selanjutnya akan ditunjukkan $p_0 \leq \frac{A}{\alpha}$. Ambil $w_0 \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\frac{A}{\alpha} < w_0 < p_0$, maka berdasarkan (3.2.9) dengan $t_0 = 0$ solusi yang melalui w_0 naik untuk $t \to -\infty$. Hal ini kontradiksi dengan p_0 sebagai *supremum* dari nilai awal solusi terbatas persamaan (3.2.1). Alasan yang sama menunjukkan bahwa $p(t) \leq \frac{A}{\alpha}$ untuk semua $t < 0$, sehingga hal ini juga menunjukkan bahwa $p(t) \leq \frac{A}{\alpha}$ untuk semua $t \in \mathbb{R}$. Karena $p(t)$ memenuhi pertidaksamaan (3.2.4) dengan $p_0 \in I$, maka $p(t)$ merupakan solusi terbatas maksimal pada persamaan (3.2.1).

Selanjutnya, klaim bahwa $p(t) \geq \frac{\alpha}{A}$ untuk semua $t \leq 0$. Misalkan terdapat $t_0 < 0$ demikian sehingga $p(t_0) < \frac{\alpha}{A}$. Ambil $\epsilon \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$$p(t_0) < \epsilon < \frac{\alpha}{A}$$

maka solusi persamaan (3.2.11) terbatas pada $\mathbb{R}$, dengan $w(0) > p_0$ berdasarkan ketunggalan solusi pada masalah nilai awal. Hal ini kontradiksi dengan definisi p_0. Oleh karena itu, $p(t) \geq \frac{\alpha}{A}$ untuk semua $t \in \mathbb{R}$. Hal ini kontradiksi dengan (3.2.12), sehingga solusi maksimal $p(t)$ memenuhi pertidaksamaan (3.2.3).

Sekarang akan ditunjukkan ketunggalan solusi $p(t)$ sehingga tidak ada solusi terbatas lain untuk persamaan (3.2.1) yang memenuhi pertidaksamaan (3.2.3). Untuk itu, misalkan $J \subset I$ yang didefinisikan oleh

$$J = \left\{w_0 \in R: w_0 \in I \text{ dan } \frac{\alpha}{A} \leq \mathrm{p(t)} \leq \frac{A}{\alpha} \text{ berlaku}\right\}.$$

Misalkan $q_0 = \inf J$ dan misalkan $q(t)$ menyatakan solusi (3.2.1) dengan $q(0) = 0$. Perhatikan bahwa $p_0 \in J$, dan $\frac{\alpha}{A} \leq q_0 \leq p_0 \leq \frac{A}{\alpha}$. Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan bahwa solusi minimal $q(t)$ juga memenuhi pertidaksamaan (3.2.3) yaitu $q_0 \in J$, sehingga

$$0 < \frac{\alpha}{A} \leq q(t) \leq p(t) \leq \frac{A}{\alpha} \text{ untuk semua } t \in \mathbb{R}. \qquad (3.2.13)$$

Sekarang akan ditunjukkan bahwa $q(t) = p(t)$ untuk semua $t \in \mathbb{R}$. Asumsikan bahwa $p(t) > q(t)$ untuk semua $t \in \mathbb{R}$. Dengan menggunakan (3.2.1) dan (3.2.13) diperoleh

$$q^{-1}\frac{dq}{dt} - p^{-1}\frac{dp}{dt} \geq r(t)(p(t) - q(t)) \text{ untuk semua } t \in \mathbb{R}, \text{ sehingga}$$

$$\frac{d}{dt} ln\left(\frac{q}{p}\right) \geq r(t)(p(t) - q(t)) > 0 \text{ untuk semua } t \in \mathbb{R} \qquad (3.2.14)$$

Hal ini mengakibatkan fungsi $\left(\frac{q}{p}\right)$ naik di $\mathbb{R}$, sehingga

$$\frac{q(t)}{p(t)} \leq \frac{q(0)}{p(0)} \leq c < 1 \text{ untuk semua } t \leq 0.$$

Dengan kata lain

$$\frac{p(t)-q(t)}{p(t)} \geq (1-c)$$

$$\Leftrightarrow p(t) - q(t) \geq (1-c)p(t) \geq (1-c)\frac{\alpha}{A} = \delta > 0$$

untuk semua $t \leq 0$. Dengan menggunakan (3.2.14) dan dengan mengintegralkan dari t sampai 0, $t \leq 0$ diperoleh

$$\frac{q(t)}{p(t)} \leq \frac{q(0)}{p(0)} e^{\alpha\delta t} \text{ untuk semua } t \leq 0$$

Karena $\frac{q(t)}{p(t)} \to 0$ untuk $t \to -\infty$, hal ini kontradiksi dengan (3.2.13), untuk semua $t \in \mathbb{R}$.. Berarti $q(t) = p(t)$. ∎

Sebagai contoh, ambil kasus $r(t) = \sin(t) + 2$. Perhatikan bahwa dari nilai $\sin(t)$ yang terbatas pada selang [-1,1] mengakibatkan nilai $r(t)$ terbatas yaitu:

$$-1 + 2 \leq \sin(t) + 2 \leq 1 + 2$$

$$1 \leq \mathrm{r(t)} \leq 3 \qquad (3.2.15)$$

karena pertidaksamaan (3.2.15) memenuhi kondisi (3.2.2), maka persamaan (3.2.1) dengan $r(t) = \sin(t) + 2$ mempunyai solusi terbatas tunggal yang positif dan tidak menuju nol saat $t \to \infty$, sehingga diperoleh

$$\frac{1}{3} \leq p(t) \leq 3. \qquad (3.2.16)$$

Dengan demikian, solusi terbatas (3.2.16) disebut *attractor* untuk semua solusi positif pada persamaan (3.2.1). Hal ini dijelaskan pada teorema berikut.

Teorema 3.2.2 [4]

Misalkan kondisi (3.2.2) berlaku dan $q(t)$ adalah solusi positif pada persamaan (3.2.1) maka solusi terbatas $p(t)$ yang ada pada Teorema 3.2.1 merupakan attractor untuk semua solusi positif pada persamaan (3.2.1) yang memenuhi

$$lim_{t\to\infty}|p(t) - q(t)| = 0 \qquad (3.2.17)$$

Bukti

Perhatikan kasus saat $q(t_0) > p(t_0)$ untuk sebarang nilai $t_0 \in \mathbb{R}$, maka dari pembuktian Teorema 3.2.1 dapat ditunjukkan bahwa

$$\frac{\alpha}{A} \leq p(t) < q(t) \leq max\left\{q(t_0), \frac{A}{\alpha}\right\} \; \forall t \geq t_0$$

sehingga $q(t)$ tak terbatas berdasarkan (3.2.9) dan (3.2.10). Dengan menggunakan (3.2.1) dan (3.2.2) diperoleh

$$\frac{d}{dt} ln\left(\frac{p}{q}\right) = r(t)(q-p) > 0 \ \ \forall t \geq t_0.$$

Hal ini mengakibatkan fungsi $\left(\frac{p}{q}\right)$ naik pada interval $[t_0, \infty)$, dengan

$0 < \frac{p}{q} < 1, \forall t \geq t_0$, maka $\lim_{t\to\infty} \left[\frac{p(t)}{q(t)}\right] = c$, $c = \sup_{[t_0,\infty)} \left[\frac{p(t)}{q(t)}\right]$ adalah konstanta sehingga $0 < c \leq 1$. Misalkan $c < 1$, maka $q(t) - p(t) \geq (1-c)\frac{\alpha}{A} = \delta > 0$. Karena $p(t) \leq cq(t)$ dan $q(t) \geq \frac{\alpha}{A}$, maka

$$\frac{d}{dt} ln\left(\frac{p}{q}\right) \geq \alpha\delta \ \ \forall t \geq t_0.$$

Dengan mengintegralkan dari t_0 sampai t diperoleh

$$1 > c \geq \frac{p(t)}{q(t)} \geq \frac{p(t_0)}{q(t_0)} e^{\alpha\delta(t-t_0)}.$$

Jika $c = 1$ yaitu $\lim_{t\to\infty} \left[\frac{p(t)}{q(t)}\right] = 1$, maka $[p(t) - q(t)] \to 0^+$ untuk $t \to \infty$. Karena $\left[\frac{p(t)}{q(t)}\right] \to 1^+$ untuk $t \to \infty$ dan $p(t) \leq \frac{A}{\alpha}$ $\forall t \geq t_0$, maka (3.2.17) berlaku.

Selanjutnya, jika $0 < q(t_0) < p(t_0)$ untuk sebarang $t_0 \in \mathbb{R}$, maka $0 < q(t) < p(t) \leq \frac{A}{\alpha}$ $\forall\, t \geq t_0$. Perhatikan bahwa

$$\frac{d}{dt} ln\left(\frac{q}{p}\right) = \frac{1}{q}\frac{dq}{dt} - \frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = r(t)[p(t) - q(t)] > 0 \ \ \forall\, t \geq t_0.$$

Dengan proses seperti di atas, dapat disimpulkan bahwa $\lim_{t\to\infty}[p(t) - q(t)] = 0$ Dengan demikian (3.2.17) berlaku. ■

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan pada bab sebelumnya, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa :

1. Titik tetap $p = 0$ tidak stabil untuk kasus $r(t) = e^t$ dan $r(t) = e^{-t}$ serta $r(t) = -e^{-t}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, sedangkan untuk kasus $r(t) = -e^t$ titik tetap $p = 0$ stabil.
2. Jika $0 < \alpha \leq r(t) \leq A,\quad \forall t \in \mathbb{R}$ maka terdapat solusi terbatas yang tunggal $\frac{\alpha}{A} \leq p(t) \leq \frac{A}{\alpha}$ yang memenuhi $\lim_{t\to\infty} |p(t) - q(t)| = 0$ untuk suatu solusi positif $q(t)$.

4.2 Saran

Pada penulisan selanjutnya, Penulis menyarankan untuk mendapatkan jenis persamaan non autonomous lainnya untuk dilihat bentuk solusi yang dihasilkan dan bentuk kestabilan titik tetapnya, serta mencoba alternatif lain dalam menganalisa kestabilan titik tetap.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anonym. No Year. *Types of Differential Equations.* http:// www.abo.fi/fak/mnf/mate/kurser/dynsyst/fasin/.pdf ,

[2] Bartle, R. G. dan Sherbert, D. R. 1994. *Introduction to Real Analysis, 2nd edition.* John Wiley and Sons, New York,

[3] Finizio, N dan G. Ladas. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern.* Erlangga, Jakarta

[4] Kocak, H and J. Hale. 1991. *Dynamics and Bifurcations.* Springer-Verlag, New York

[5] Nkashama, M.N. 2000. *Dynamics of Logistik Equations with Non Autonomous Bounded Coefficients.* www.ejde.math.swt.edu,

[6] Phat, Vu Ngoc. 1997. *Asymptotic Stability of Non Linear Time-Varying Differential Equations.* www.ictp.trieste.it/pub_off,

[7] Suryanto, A. 2009. Analisis Persamaan Logistik Diskret. www.dynsys.bandungfe.net/Tutorial/chaosTutorsitefolder/chaostutorsite/perlogistik/logistik.html