KESTABILAN MODEL EPIDEMI SEIR DENGAN TINGKAT IMIGRASI KONSTAN

SKRIPSI

NOVI EKA ADE PUTRA
07934021

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2011

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini menyatakan bahwa :

Nama	:	Novi Eka Ade Putra
No. Buku Pokok	:	07 934 021
Jurusan	:	Matematika
Bidang	:	Matematika Terapan
Judul Skripsi	:	**Kestabilan Model Epidemi SEIR dengan Tingkat Imigrasi Konstan**

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh **gelar Sarjana Sains (S.Si)** melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal 2 November 2011 berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing/ Penguji

1.

Dr. Muhafzan
NIP. 19670602 199302 1 001

2.

Efendi, M.Si
NIP. 19780717 200212 1 002

Penguji

1.

Dr. Syafrizal Sy
NIP. 19750706 199903 2 003

2.

Dr. Lyra Yulianti
NIP. 19670807 199309 1 001

3.

Zulakmal, M.Si
NIP. 19671108 199802 1 001

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand

Dr. Syafrizal Sy
NIP.19670807 199309 1 001

KATA PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Segala puji milik Allah Subhanahu Wata'ala, Dialah Tuhan seru sekalian alam. Tuhan Maha Pengasih lagi Maha Penyayang. Yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya sehingga perjuangan karya sederhana ini dapat terselesaikan.

"Tidaklah Allah membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya"

(Q. S. Al-Baqarah: 256)

"Kesukaran yang terbesar disebabkan oleh orang-orang yang mengira bahwa mereka bisa melakukan sesuatu yang belum dipelajari"

(M. N. Carson)

"Tolong-menolonglah kalian dalam berbuat kebajikan dan takwa dan janganlah kalian tolong-menolong dalam berbuat dosa dan permusuhan"

(Q. S. Al-Maidah: 2)

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, maka apabila kamu telah selesai (dari suatu urusan) dikerjakanlah dengan sungguh-sungguh (urusan) yang lain dan hanya kepada Tuhan-mulah hendaknya kamu berharap"

(Q. S. Al-Insyirah: 6-8)

"Ketika engkau gembira lihatlah ke dalam hatimu dan engkau akan melihat bahwa

sebenarnya engkau meratapi sesuatu yang pernah menjadi kebahagiaanmu"

(Kahlil Gibran)

Karya ini kupersembahkan teruntuk,
orang-orang yang selalu dekat dihati :
Ayah dan Ibunda tercinta,
Terimakasih atas kasih sayang, semangat, dorongan, dan doa kepada penulis, dengan penuh kesabaran dan keikhlasannya. Semoga Allah SWT memberikan tempat yang sempurna di akhirat kelak. Amin...

Kakak-kakakku,
Yang telah banyak mengajarkan betapa pentingnya pendidikan.

Serta sahabat-sahabat penulis
Yang senantiasa menjadi teman diskusi dalam menyelesaikan skripsi ini.

Almamater Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Andalas Padang

NOVI EKA ADE PUTRA. S.Si

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah puji syukur kehadirat Allah SWT atas limpahan berkah, rahmat, dan hidayah-Nya, sehingga penulis berhasil menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul **"Kestabilan Model Epidemi SEIR dengan Tingkat Imigrasi Konstan"**. Salawat dan salam tidak lupa penulis kirimkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW yang telah membawa umat manusia dari zaman kebodohan ke zaman yang penuh ilmu pengetahuan.

Penulisan tugas akhir ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar kesarjanaan, serta sebagai wujud nyata dari disiplin ilmu yang telah penulis dapatkan selama mengikuti perkuliahan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas. Dalam proses penyusunan skripsi ini tak lepas dari hambatan dan kesulitan. Namun berkat bantuan dari berbagai pihak akhirnya skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik. Untuk itu, pada kesempatan ini, penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Muhafzan selaku Dosen Pembimbing I yang dengan sabar telah memberikan bimbingan, pengarahan, saran, dan masukan yang berguna. Sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.
2. Bapak Efendi,M.Si selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, saran, dan bantuan literature. Sehingga penulis dapat memperbaiki dan menyelesaikan penyusunan skripsi ini dengan lancar.

3. Tim Penguji: Bapak Dr. Syafrizal Sy, Ibu Dr. Lyra, dan Zulakmal,M.Si, terima kasih atas waktu, saran, dan bantuannya sehingga penulis mendapatkan tambahan ilmu yang sangat berharga untuk menyempurnakan penulisan skripsi ini.
4. Bapak Ir. Werman Kasoep, M. Kom selaku Pembimbing Akademik yang telah membantu penulis dalam urusan akademik terutama dalam merancang studi agar dapat selesai tepat pada waktunya. Serta nasihat dan ilmu yang telah diberikan selama penulis menjalani proses studi.
5. Bapak Dr. Syafrizal Sy selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang.
6. Segenap dosen pengajar Program Studi Matematika FMIPA UNAND, yang telah memberikan bekal ilmu kepada penulis selama mengikuti perkuliahan.
7. Segenap staff dan karyawan di Program Studi Matematika FMIPA UNAND atas semua fasilitas, pelayanan, dan dukungan yang telah diberikan kepada penulis selama kuliah di Matematika UNAND.
8. Sahabat-sahabat seperjuangan matematika angkatan 2007, terima kasih atas segala bantuan dan doanya.
9. Sahabat-sahabatku: Ajay, Adrian, Kiki, Akbar, Reza, Riko, Taufik Ifi, Tiva, Lina, Rina yang senantiasa memberi semangat, dorongan, dan doa. Kalian telah menjadi bagian dari kebahagiaanku.
10. Adif Laksana, M.Si yang telah banyak memberi bantuan dalam menyelesaikan skripsi ini.

11. Semua pihak yang telah membantu, baik secara langsung maupun tidak langsung, yang tidak bisa penulis sebutkan satu-persatu dikarenakan keterbatasan yang penulis miliki.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan dan penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan-kekurangan dan masih jauh dari kesempurnaan. Untuk itu, penulis sangat mengharapkan kritik dan saran yang membangun, sehingga dapat menyempurnakan tulisan skripsi ini di masa mendatang. Akhir kata penulis berharap, semoga tulisan skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis dan pembaca pada umumnya.

Padang, November 2011

Penulis

ABSTRAK

Model SEIR merupakan suatu model epidemiologi untuk laju penyebaran penyakit. Model ini mendeskripsikan penyebaran penyakit dalam suatu populasi dengan ukuran bervariasi. Pada model SEIR, populasi terbagi atas kelompok rentan, laten, terinfeksi, dan bebas penyakit. Tujuan skripsi ini adalah menganalisis kestabilan penyebaran penyakit menular yang memiliki periode laten, dengan melakukan linierisasi model menggunakan Matriks Jacobian.

Kata kunci : Model SEIR, kestabilan, periode laten, Matriks Jacobian.

DAFTAR ISI

Daftar Notasi

Notasi/ Parameter	Deskripsi
p	Peluang
A	Calon imigran yang akan masuk ke dalam kelas ekspos dan kelas rentan. Dimana calon imigran tersebut terdiri dari individu ekspos dan individu rentan.
pA	Laju imigran pada populasi laten (*exposed*)
$(1-p)A$	Laju imigran pada populasi rentan (*susceptibles*)
$S(t)$	Banyaknya individu yang rentan terhadap suatu penyakit pada waktu t (*susceptibles*)
$E(t)$	Banyaknya individu yang terinfeksi tetapi belum bisa menularkan penyakitnya pada waktu t (*exposed*)
$I(t)$	Banyaknya individu yang terinfeksi pada waktu t (*infectious*)
$R(t)$	Banyaknya individu bebas penyakit pada waktu t (*recovered*). Individu bebas penyakit dapat diakibatkan oleh sistem kekebalan *(immune)* dari individu itu sendiri.
β_{10}	Laju kontak pada periode laten
β_{20}	Laju kontak pada periode terinfeksi
β_{30}	Laju kontak pada periode bebas penyakit

μ	Laju kematian alami
α_0	Laju kematian karena penyakit
γ_0	Laju transfer antara populasi laten dan populasi terinfeksi
k_0	Laju kesembuhan
t	Waktu
$N(t)$	Penjumlahan dari S(t), E(t), I(t), dan R(t).

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam dunia kesehatan terdapat penyakit yang bersifat menular *(infectious diseases)* dan tidak menular *(non infectious diseases)*. Pada tugas akhir ini akan dibahas pemodelan penyebaran penyakit yang menular. Dalam hal ini, matematika mempunyai peran yang penting untuk mengetahui pola penyebaran penyakit menular.

Beberapa penyakit seperti cacar air *(measles)*, gondong *(mumps)*, *tubercoluses*, *Human Immunodeficiency Virus* (HIV) mempunyai periode laten *(laten period)*. Periode laten adalah selang waktu dimana suatu individu terinfeksi sampai munculnya penyakit. Adanya periode laten ini menjadi alasan pembentukan model SEIR, yakni munculnya kelas ekspos *(exposed)*. Kemudian, dengan adanya imigran yang masuk konstan ke dalam kelas rentan dan kelas laten, dimana imigran tersebut terdiri dari individu-individu rentan dan laten. Sehingga berdasarkan keadaan tersebut, akan dibahas kestabilan model epidemi SEIR dengan tingkat imigrasi konstan.

Model epidemi SEIR merupakan perluasan dari model epidemi SIR yang dikemukakan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927. Model SEIR menggambarkan empat kelas yakni kelas banyaknya individu yang rentan terhadap penyakit (*susceptibles*), kelas banyaknya individu yang dicurigai terinfeksi oleh penyakit (*exposed*), kelas banyaknya individu yang telah terinfeksi oleh penyakit (*infectious*), dan kelas banyaknya individu yang bebas dari penyakit (*recovered*).

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah diatas, maka dalam skripsi ini akan di kaji masalah kestabilan model epidemi SEIR *(Susceptibles, Exposed, Infectious, and Recovered)* dengan tingkat imigrasi konstan.

1.3 Pembatasan Masalah

Agar lebih fokus dan tidak memperluas masalah, dalam skripsi ini dibatasi dengan asumsi bahwa pada tiap kelas terjadi kematian alami, terjadi kematian yang disebabkan oleh penyakit itu sendiri, dan individu yang masuk ke dalam kelas ekspos merupakan individu yang terinfeksi tetapi belum bisa menularkan penyakitnya. Selain itu, model ini juga menggambarkan laju kontak antara individu rentan dengan individu laten, terinfeksi, dan bebas penyakit.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah untuk mengetahui kestabilan model epidemi SEIR dengan tingkat imigrasi konstan.

1.5 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan dalam skripsi ini terdiri dari 4 bab yang masing-masing bab yaitu Bab I Pendahuluan yang terdiri dari latar belakang masalah, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan. Bab II Landasan Teori yang terdiri dari teori-teori yang akan mendukung pembahasan masalah pada Bab III yaitu landasan teori yang menjelaskan tentang teori matriks, ekspansi kofaktor, Matriks Jacobian, kestabilan siatem non linier, dan Teorema Kriteria Routh Hurwitz. Bab III akan mengkaji lebih lanjut tentang kestabilan model epidemi SEIR dengan tingkat imigrasi konstan. Bab IV memberikan kesimpulan dari analisis yang telah di lakukan pada Bab III.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Teori Matriks

Suatu matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks. Diberikan suatu matriks A berukuran $n \, x \, n$. Skalar λ disebut nilai eigen dari A jika terdapat vektor tak nol X di dalam $\Re^n$ sehingga berlaku :

$$AX = \lambda X.$$

Selanjutnya vektor X disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Teorema 2.1.1 [1]

Jika A matriks berukuran $n \times n$, I_n matriks identitas berukuran $n \times n$ dan λ suatu bilangan real, maka pernyataan- pernyataan berikut ekuivalen :

(i) *λ adalah suatu nilai eigen dari A,*

(ii) Sistem persamaan $(A - \lambda I_n)X = 0$ mempunyai penyelesaian tak trivial, dan

(iii) *Ada suatu vektor tak nol X pada $\Re^n$ sedemikian sehingga $AX = \lambda X$. λ merupakan suatu penyelesaian dari persamaan karakteristik* $\det(A - \lambda I_n)$.

2.2 Sistem Persamaan Diferensial

Berikut disajikan beberapa materi dasar teori sistem, yaitu mengenai sistem non linear, pengertian matriks Jacobian, titik ekuilibrium, serta teorema penting tentang kestabilan sistem nonlinear.

Definisi 2.2.1 [4]

Suatu sistem persamaan diferensial biasa non linier adalah suatu persamaan yang berbentuk sebagai berikut

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{f}\big(x(t)\big),\ \boldsymbol{x}(t_0),\ t \in \Re, \tag{2.2.1.1}$$

Dengan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in \Re^n$ $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))^T$ dan syarat awal $\mathbf{x}(t_0) = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})^T$.

Secara umum, kestabilan sistem (2.2.1.1) dapat dimaknai sebagai solusi $x(t)$ dari sistem (2.2.1.1) yang pada mulanya cukup dekat dari suatu titik tertentu, maka $x(t)$ akan lebih dekat lagi dari titik tersebut dengan berlalunya waktu.

Definisi 2.2.2 [4]

Misalkan $f : \Re^n \rightarrow \Re^n$ *adalah fungsi yang diferensiabel secara kontinu pada himpunan* $D \subset \Re^n$ *dan* $\hat{x} \in \Re^n$. ***Matriks Jacobian*** *dari* f *di* $\hat{x}$ *, ditulis* $J_{f(\hat{x})}$ *didefinisikan sebagai:*

$$J_{f(\hat{x})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

2.3 Kestabilan Sistem Non Linier

Definisi 2.3.1 [6]

Suatu titik $\mathbf{x}_0 \in \Re^n$ *dikatakan titik ekuilibrium persamaan diferensial orde satu* $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ *jika*

$$f(x_0) = 0.$$

Khusus untuk sistem persamaan diferensial linier orde satu

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) \qquad (2.3.1.1)$$

maka (0,0) adalah titik tetapnya. Jika det(A) ≠ 0, maka tentu saja titik ekuilibrium (2.3.1.1) hanyalah (0,0).

Definisi 2.3.3 [6]

Suatu titik ekuilibrium $\mathbf{x}_0$ *dari sistem* $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(x)$ *dikatakan stabil asimtotik jika untuk setiap keadaan awal berlaku*

$$\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}_0 \ \textit{bila} \ t \to \infty$$

Sistem $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(x)$ *dikatakan stabil asimtotik jika titik ekuilibrium stabil asimtotik.*

Teorema 2.3.4 [3]

Misalkan $\mathbf{x}_0 \in \Re^n$ *adalah titik ekuilibrium dari persamaan diferensial nonlinier*

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(x(t)) \qquad (2.3.4.1)$$

dan semua turunan parsial pada f *adalah kontinu. Jika semua bagian riil dari matriks Jacobian* $J_f(\mathbf{x}_0)$ *untuk sistem (2.3.4.1) adalah negatif, maka sistem (2.2.1.1) adalah stabil asimtotik.*

Teorema 2.3.5 [5] (Kriteria Routh-Hurwitz)

Diberikan polinomial derajat n, $P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$ *dengan koefisien bilangan real* $a_i > 0$, $i = 1,2,\ldots,n$. *Jika* $D_1 = |a_1| > 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0$,

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,\ \ldots,\ D_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix} > 0$$

maka semua bagian real dari akar-akar polinomial $P(\lambda)$ *bernilai negatif.*

BAB III

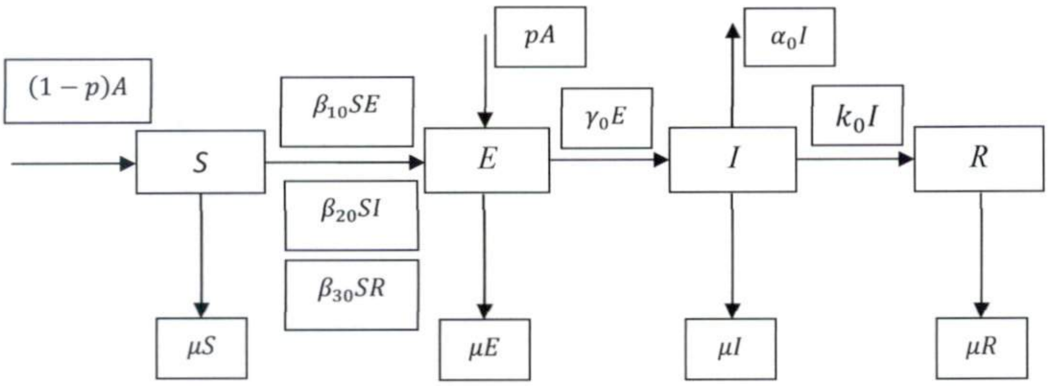
KESTABILAN MODEL EPIDEMI SEIR DENGAN TINGKAT IMIGRASI KONSTAN

3.1 Asumsi Model Epidemi SEIR dengan Tingkat Imigrasi Konstan

Untuk memformulasikan model epidemi SEIR dengan tingkat imigrasi konstan, asumsi-asumsi berikut digunakan [3], yaitu :

1. Penyakit yang sedang dibicarakan memiliki periode laten,
2. Pada tiap kelas terdapat laju kematian alami,
3. Terjadi kematian yang disebabkan oleh penyakit,
4. Laju kontak terjadi antara individu rentan (*susceptibles)* dengan individu laten *(exposed)*, terinfeksi *(infectious)*, dan bebas penyakit (*recovered),*
5. Laju imigran pada populasi laten (*exposed*) konstan, dan
6. Laju imigran pada populasi rentan (*susceptibles)* konstan.

Pembentukan model epidemi SEIR didasari oleh adanya penyakit menular yang memiliki periode laten. Misalnya, populasi yang diberikan dibagi kedalam empat kelas, yakni kelas populasi rentan (*susceptibles*), kelas populasi laten (*exposed*), kelas populasi terinfeksi (*infectious*), dan kelas populasi bebas penyakit (*recovered*). Perhatikan diagram alir perubahan keadaan suatu populasi akibat adanya penyebaran penyakit [3].



Gambar 3.1.1 Bagan Alir Model Epidemi SEIR

Bagan alir ini di bentuk berdasarkan asumsi-asumsi model epidemi SEIR dengan tingkat imigrasi konstan. Karena pada tiap kelas terjadi kematian alami, maka yang menjadi keluaran dari kelas rentan adalah μS, kelas ekpos adalah μE, kelas terinfeksi adalah μI, dan kelas bebas penyakit adalah μR. Kemudian, imigran masuk ke dalam kelas ekspos sebanyak pA dan ke dalam kelas rentan sebanyak $(1-p)A$. Karena terjadi kontak antara individu rentan dengan individu ekpos, terinfeksi, dan bebas penyakit, maka sebanyak $\beta_{10}SE$, $\beta_{20}SI$, dan $\beta_{30}SR$ individu akan masuk ke dalam kelas ekspos. Jika terjadi perubahan keadaan pada kelas ekpos, maka sebanyak $\gamma_0 E$ individu akan masuk ke dalam kelas terinfeksi. Karena pada kelas terinfeksi terjadi kematian yang disebabkan oleh penyakit itu sendiri, maka sebayak $\alpha_0 I$ individu akan masuk ke dalam kelas bebas penyakit. Kemudian, jika terjadi kesembuhan pada kelas terinfeksi yang mungkin disebabkan oleh sistem kekebalan atau imun dari individu itu sendiri, maka sebanyak $k_0 I$ individu akan masuk ke dalam kelas bebas penyakit.

Sehingga menurut Gambar 3.1.1, dapat dilihat bahwa model dapat ditulis dalam sistem persamaan diferensial berikut :

$\frac{dS}{dt}$ = Laju perubahan populasi rentan terhadap waktu

= Banyaknya individu yang masuk ke dalam kelas rentan di kurang dengan banyaknya individu yang keluar dari kelas rentan,

$\frac{dE}{dt}$ = Laju perubahan populasi terekspos terhadap waktu

= Banyaknya individu yang masuk ke dalam kelas ekpos di kurang dengan banyaknya individu yang keluar dari kelas ekpos,

$\frac{dI}{dt}$ = Laju perubahan populasi terinfeksi terhadap waktu

= Banyaknya individu yang masuk ke dalam kelas terinfeksi di kurang dengan banyaknya individu yang keluar dari kelas terinfeksi, dan

$\frac{dR}{dt}$ = Laju perubahan populasi bebas penyakit terhadap waktu

= Banyaknya individu yang masuk ke dalam kelas bebas penyakit di kurang dengan banyaknya individu yang keluar dari kelas bebas penyakit.

Atau dapat juga ditulis dalam bentuk

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = (1-p)A - \beta_{10}SE - \beta_{20}SI - \beta_{30}SR - \mu S, \\ \frac{dE}{dt} = pA + \beta_{10}SE + \beta_{20}SI + \beta_{30}SR - \gamma_0 E - \mu E, \\ \frac{dI}{dt} = \gamma_0 E - k_0 I - \alpha_0 I - \mu I, \\ \frac{dR}{dt} = k_0 I - \mu R. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Misalkan

$$d\tau = \mu dt,\ \beta_1 = \frac{\beta_{10}}{\mu},\ \beta_2 = \frac{\beta_{20}}{\mu},\ \beta_3 = \frac{\beta_{30}}{\mu},\ \gamma = \frac{\gamma_0}{\mu},\ k = \frac{k_0}{\mu},\ c = \frac{A}{\mu},\ \alpha = \frac{\alpha_0}{\mu},$$

maka Sistem (3.1.1) dapat ditulis menjadi

$$
\begin{cases}
\frac{dS}{d\tau} = (1-p)c - \beta_1 SE - \beta_2 SI - \beta_3 SR - S, \\
\frac{dE}{d\tau} = pc + \beta_1 SE + \beta_2 SI + \beta_3 SR - \gamma E - E, \\
\frac{dI}{d\tau} = \gamma E - kI - \alpha I - I, \\
\frac{dR}{d\tau} = kI - R.
\end{cases} \tag{3.1.2}
$$

Karena banyaknya individu yang masuk ke dalam kelas ekspos lebih besar dari pada banyaknya individu yang terinfeksi dan individu bebas penyakit, maka laju kontak yang terjadi pada kelas ekspos juga lebih besar dari laju kontak individu terinfeksi dan bebas penyakit. Sehingga dapat juga di tulis $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > 0$. Kemudian, karena $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$, maka

$$
\begin{aligned}
\frac{dN}{d\tau} &= \frac{dS}{d\tau} + \frac{dE}{d\tau} + \frac{dI}{d\tau} + \frac{dR}{d\tau} \\
&= [(1-p)c - \beta_1 SE - \beta_2 SI - \beta_3 SR - S] + [pc + \beta_1 SE + \beta_2 SI + \beta_3 SR - \\
&\quad \gamma E - E] + [\gamma E - kI - \alpha I - I] + [kI - R] \\
&= c - S - E - I - R - \alpha I \\
&= c - (S + E + I + R) - \alpha I \\
&= c - N - \alpha I.
\end{aligned} \tag{3.1.3}
$$

Selanjutnya, karena $S = N - E - I - R$, maka sistem (3.1.2) dapat ditulis menjadi

$$
\begin{cases}
\frac{dE}{d\tau} = pc + (\beta_1 E + \beta_2 I + \beta_3 R)(N - E - I - R) - \delta E, \\
\frac{dI}{d\tau} = \gamma E - \omega I, \\
\frac{dR}{d\tau} = kI - R, \\
\frac{dN}{d\tau} = c - N - \alpha I,
\end{cases} \tag{3.1.4}
$$

dengan $\delta = 1 + \gamma$ dan $\omega = 1 + k + \alpha$, model (3.1.2) dan (3.1.4) merupakan model epidemi SEIR.

3.2 Titik Ekuilibrium Model Epidemi SEIR dengan Tingkat Imigrasi Konstan

Jika $\frac{dE}{d\tau} = \frac{dI}{d\tau} = \frac{dR}{d\tau} = \frac{dN}{d\tau} = 0$, maka titik ekuilibrium dari Sistem (3.1.4) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{cases} pc + (\beta_1 E + \beta_2 I + \beta_3 R)(N - E - I - R) - \delta E = 0, \\ \gamma E - \omega I = 0, \\ kI - R = 0, \\ c - N - \alpha I = 0. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Dengan mensubstitusikan $E = \frac{\omega I}{\gamma}$, $R = kI$, dan $N = c - \alpha I$, ke dalam persamaan

$$pc + (\beta_1 E + \beta_2 I + \beta_3 R)(N - E - I - R) - \delta E = 0, \tag{3.2.2}$$

dari persamaan (3.2.2) diperoleh

$$0 = pc + \left(\beta_1 \frac{\omega I}{\gamma} + \beta_2 I + \beta_3 R\right)\left(c - \alpha I - \frac{\omega I}{\gamma} - I - kI\right) - \frac{\delta \omega I}{\gamma}$$

$$= pc + \frac{I}{\gamma^2}(\beta_1 \omega + \beta_2 \gamma + \beta_3 k\gamma)(c\gamma - (\alpha\gamma + \omega + \gamma + k\gamma)I) - \frac{\delta \omega I}{\gamma}$$

$$= \gamma^2 pc + c\gamma I(\beta_1 \omega + \beta_2 \gamma + \beta_3 k\gamma)$$

$$-(\beta_1 \omega + \beta_2 \gamma + \beta_3 k\gamma)(\alpha\gamma + \omega + \gamma + k\gamma)I^2 - \gamma\delta\omega I. \tag{3.2.3}$$

Perhatikan koefisien $(\alpha\gamma + \omega + \gamma + k\gamma)I^2$ dalam (3.2.3) yakni

$$(\alpha\gamma + \omega + \gamma + k\gamma). \tag{3.2.4}$$

Dengan mensubstitusikan $\omega = 1 + k + \alpha$, ke dalam persamaan (3.2.4), diperoleh

$$\begin{aligned}(\alpha\gamma + \omega + \gamma + k\gamma) &= [\alpha\gamma + (1 + k + \alpha) + \gamma + k\gamma] \\ &= (1 + k + \alpha) + (\gamma + k\gamma + \alpha\gamma) \\ &= (1 + \gamma)(1 + k + \alpha) \\ &= \delta\omega.\end{aligned}$$

Akibatnya (3.2.3) dapat ditulis menjadi

$$(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)\delta\omega I^2 + \gamma[\delta\omega - c(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)]I - \gamma^2 pc = 0.$$

Definisikan

$$\begin{aligned}\widetilde{H}(I) = (\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)\delta\omega I^2 + \gamma[\delta\omega - c(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)]I \\ -\gamma^2 pc = 0.\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Jika $p = 0$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}\widetilde{H}(I) = (\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)\delta\omega I^2 + \\ \gamma[\delta\omega - c(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)]I = 0.\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Persamaan (3.2.6) adalah polinomial derajat dua dalam I, yang akar-akarnya adalah

$I = 0$, atau

$$I = \frac{\gamma[c(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma) - \delta\omega]}{\delta\omega(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)}. \tag{3.2.7}$$

Persamaan (3.2.7) adalah positif jika dan hanya jika

$$\sigma = [c(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma) - \delta\omega] > 0.$$

Substitusikan I=0 ke Sistem (3.2.1) diperoleh E=0, R=0, dan N=c= $\frac{A}{\mu}$. Jadi titik ekuilibrium dari Sistem (3.2.1) pada saat $p = 0$ adalah

$$P_0 = (E, I, R, N) = \left(0{,}0{,}0, \frac{A}{\mu}\right).$$

Selanjutnya, jika $p > 0$ maka Persamaan (3.2.5) akan memberikan

$$\widetilde{H}(I) = (\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)\delta\omega I^2 + \gamma[\delta\omega - c(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)]I - \gamma^2 pc = 0. \quad (3.2.8)$$

Akar dari (3.2.8) dapat ditulis sebagai

$$I^* = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - 4rt}}{2r}, \quad (3.2.9)$$

dengan

$$r = (\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)\delta\omega,$$

$$s = \gamma[\delta\omega - c(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)],$$

$$t = -\gamma^2 pc.$$

Penjabaran (3.2.9) memberikan

$$I^* = \frac{-\{\gamma[\delta\omega - [c(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)]]\}}{2[(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)\delta\omega]} \pm$$

$$\frac{\sqrt{\{\gamma[\delta\omega - c(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)]\}^2 - 4\{(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)\delta\omega\}\{-\gamma^2 pc\}}}{2[(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)\delta\omega]}$$

$$= \frac{\gamma[c(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma) - \delta\omega]}{2(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)} \pm$$

$$\frac{\gamma\sqrt{[\delta\omega - c(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)]^2 + 4\gamma pc\delta\omega(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)}}{2(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)}$$

$$= \frac{\gamma[c(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma) - \delta\omega]}{2(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)} \pm$$

$$\frac{\gamma\sqrt{\{-[c(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma) - \delta\omega]\}^2 + 4\gamma pc\delta\omega(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)}}{2(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)}$$

$$= \frac{\gamma[c(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma) - \delta\omega]}{2(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)} \pm$$

$$\frac{\gamma\sqrt{[c(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma) - \delta\omega]^2 + 4\gamma pc\delta\omega(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)}}{2(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)}.$$

Sehingga akar positif dari (3.2.8) adalah

$$I^* = \frac{\gamma\sigma + \gamma\sqrt{\sigma^2 + 4pc\delta\omega(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)}}{2\delta\omega(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)}. \tag{3.2.10}$$

Substitusikan persamaan (3.2.10) ke sistem (3.2.1), diperoleh

$$E^* = \frac{\omega\left[\gamma\sigma + \gamma\sqrt{\sigma^2 + 4pc\delta\omega(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)}\right]}{2\delta\omega\gamma(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)}, \tag{3.2.11}$$

$$R^* = k\,\frac{\gamma\sigma + \gamma\sqrt{\sigma^2 + 4pc\delta\omega(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)}}{2\delta\omega(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)}, \tag{3.2.12}$$

$$N^* = c - \alpha I^* = c - \alpha\left(\frac{\gamma\sigma + \gamma\sqrt{\sigma^2 + 4pc\delta\omega(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)}}{2\delta\omega(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3 k\gamma)}\right). \tag{3.2.13}$$

Sehingga diperoleh

$$S^* = N^* - E^* - I^* - R^*$$

$$= \left[c - \alpha\left(\frac{\gamma\sigma + \gamma\sqrt{\sigma^2 + 4pc\delta\omega(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3k\gamma)}}{2\delta\omega(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3k\gamma)}\right)\right] -$$

$$\left[\frac{\omega\left(\gamma\sigma + \gamma\sqrt{\sigma^2 + 4pc\delta\omega(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3k\gamma)}\right)}{2\delta\omega\gamma(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3k\gamma)}\right] -$$

$$\left[\left(\frac{\gamma\sigma + \gamma\sqrt{\sigma^2 + 4pc\delta\omega(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3k\gamma)}}{2\delta\omega(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3k\gamma)}\right)\right] -$$

$$\left[k\frac{\gamma\sigma + \gamma\sqrt{\sigma^2 + 4pc\delta\omega(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3k\gamma)}}{2\delta\omega(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3k\gamma)}\right]$$

$$= \frac{2\delta\omega c(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3k\gamma)}{2\delta\omega(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3k\gamma)} -$$

$$\frac{(\alpha + \omega + 1 + k)(\gamma\sigma + \gamma\sqrt{\sigma^2 + 4pc\delta\omega(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3k\gamma)}}{2\delta\omega(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3k\gamma)}.$$

Jadi, titik $P^* = (E, I, R, N) = (E^*, I^*, R^*, N^*)$ dengan E^*, I^*, R^*, dan N^* seperti pada persamaan (3.2.11), (3.2.10), (3.2.12), dan (3.2.13) merupakan titik ekuilibrium yang lain dari sistem (3.2.1).

3.3 Kestabilan Model Epidemi SEIR dengan Tingkat Imigrasi Konstan

Untuk menentukan kestabilan model epidemi SEIR dengan tingkat imigrasi konstan, akan digunakan titik ekuilibrium $P_0 = (E, I, R, N) = \left(0,0,0,\frac{A}{\mu}\right)$

pada saat $p = 0$ dan $P^* = (E, I, R, N) = (E^*,\ I^*,\ R^*, N^*)$, dengan E^*, I^*, R^* dan N^* diberikan dalam (3.2.11), (3.2.10), (3.2.12), dan (3.2.13) pada saat $p > 0$.

Teorema 3.3.1 [3] Jika $p = 0$ maka titik ekuilibrium $P_0 = (E, I, R, N) = \left(0,0,0,\frac{A}{\mu}\right)$ adalah stabil asimtotik.

Bukti.

Misalkan

$$\begin{cases} f_1(E,I,R,N) = pc + (\beta_1 E + \beta_2 I + \beta_3 R)(N - E - I - R) - \delta E, \\ f_2(E,I,R,N) = \gamma E - \omega I, \\ f_3(E,I,R,N) = kI - R, \\ f_4(E,I,R,N) = c - N - \alpha I. \end{cases} \tag{3.3.1.1}$$

Maka berdasarkan (2.2.2), matriks Jacobian dari sistem (3.3.1.1) adalah

$$J_f(E,I,R,N) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(E,I,R,N)}{\partial E} & \frac{\partial f_1(E,I,R,N)}{\partial I} & \frac{\partial f_1(E,I,R,N)}{\partial R} & \frac{\partial f_1(E,I,R,N)}{\partial N} \\ \frac{\partial f_2(E,I,R,N)}{\partial E} & \frac{\partial f_2(E,I,R,N)}{\partial I} & \frac{\partial f_2(E,I,R,N)}{\partial R} & \frac{\partial f_2(E,I,R,N)}{\partial N} \\ \frac{\partial f_3(E,I,R,N)}{\partial E} & \frac{\partial f_3(E,I,R,N)}{\partial I} & \frac{\partial f_3(E,I,R,N)}{\partial R} & \frac{\partial f_3(E,I,R,N)}{\partial N} \\ \frac{\partial f_4(E,I,R,N)}{\partial E} & \frac{\partial f_4(E,I,R,N)}{\partial I} & \frac{\partial f_4(E,I,R,N)}{\partial R} & \frac{\partial f_4(E,I,R,N)}{\partial N} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{T}_1 & \tilde{T}_2 & \tilde{T}_3 & \tilde{T}_4 \\ \gamma & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & k & -1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

dengan

$$\tilde{T}_1 = \beta_1(N - I - R) - (2\beta_1 E + \beta_2 I + \beta_3 R) - \delta,$$

$$\tilde{T}_2 = \beta_2(N - E - R) - (\beta_1 E + 2\beta_2 I + \beta_3 R),$$

$$\tilde{T}_3 = \beta_3(N - E - I) - (\beta_1 E + \beta_2 I + 2\beta_3 R),$$

$\tilde{T}_4 = (\beta_1 E + \beta_2 I + \beta_3 R).$

Di titik $P_0 = (E, I, R, N) = \left(0{,}0{,}0, \frac{A}{\mu}\right)$,

$$J_f(E, I, R, N) = \begin{pmatrix} \beta_1 \dfrac{A}{\mu} - \delta & \beta_2 \dfrac{A}{\mu} & \beta_3 \dfrac{A}{\mu} & 0 \\ \gamma & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & k & -1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Persamaan karakteristik dari $J_f(E, I, R, N)$ adalah

$$\left| J_f(E, I, R, N) - \lambda I_{4x4} \right| = 0,$$

yang bila dijabarkan memberikan hasil sebagai berikut

$$0 = \left| \begin{pmatrix} \beta_1 \dfrac{A}{\mu} - \delta & \beta_2 \dfrac{A}{\mu} & \beta_3 \dfrac{A}{\mu} & 0 \\ \gamma & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & k & -1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} \beta_1 \dfrac{A}{\mu} - \delta - \lambda & \beta_2 \dfrac{A}{\mu} & \beta_3 \dfrac{A}{\mu} & 0 \\ \gamma & -\omega - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & k & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} \bar{A} - \lambda & \bar{B} & \bar{C} & 0 \\ \bar{D} & \bar{E} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \bar{F} & \bar{G} - \lambda & 0 \\ 0 & \bar{H} & 0 & \bar{G} - \lambda \end{pmatrix} \right|,$$

dengan

$$\bar{A} = \beta_1 \frac{A}{\mu} - \delta,\ \bar{B} = \beta_2 \frac{A}{\mu},\ \bar{C} = \beta_3 \frac{A}{\mu},\ \bar{D} = \gamma,\ \bar{E} = -\omega, \bar{F} = k,\ \bar{G} = -1,\ \bar{H} = -\alpha.$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor diperoleh

$$0 = (\bar{D}) \begin{vmatrix} \bar{B} & \bar{C} & 0 \\ \bar{F} & \bar{G} - \lambda & 0 \\ \bar{H} & 0 & \bar{G} - \lambda \end{vmatrix} - (\bar{E} - \lambda) \begin{vmatrix} \bar{A} - \lambda & \bar{C} & 0 \\ 0 & \bar{G} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \bar{G} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$+0 \begin{vmatrix} \bar{A} - \lambda & \bar{B} & 0 \\ 0 & \bar{F} & 0 \\ 0 & \bar{H} & \bar{G} - \lambda \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} \bar{A} - \lambda & \bar{B} & \bar{C} \\ 0 & \bar{F} & \bar{G} - \lambda \\ 0 & \bar{H} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\bar{D})\{\bar{B}(\bar{G} - \lambda)^2 - \bar{C}\bar{F}(\bar{G} - \lambda)\} - (\bar{E} - \lambda)\{(\bar{A} - \lambda)(\bar{G} - \lambda)^2\}$$

$$= (\bar{G} - \lambda)\{\bar{D}\bar{B}(\bar{G} - \lambda) - \bar{C}\bar{F}\bar{D} - [(\bar{E} - \lambda)(\bar{A} - \lambda)(\bar{G} - \lambda)]\}. \qquad (3.3.1.2)$$

Dari persamaan (3.3.1.2) diperoleh

$$(\bar{G} - \lambda) = 0 \text{ atau } \{\bar{D}\bar{B}(\bar{G} - \lambda) - \bar{C}\bar{F}\bar{D} - [(\bar{E} - \lambda)(\bar{A} - \lambda)(\bar{G} - \lambda)]\} = 0.$$

Jika $(\bar{G} - \lambda) = 0$, maka diperoleh $\lambda = \bar{G} = -1$.

Jika $\{\bar{D}\bar{B}(\bar{G} - \lambda) - \bar{C}\bar{F}\bar{D} - [(\bar{E} - \lambda)(\bar{A} - \lambda)(\bar{G} - \lambda)]\} = 0$, maka diperoleh

$$0 = \{\bar{D}\bar{B}(\bar{G} - \lambda) - \bar{C}\bar{F}\bar{D} - [(\bar{E} - \lambda)(\bar{A} - \lambda)(\bar{G} - \lambda)]\}$$

$$= (\bar{G} - \lambda)\{\bar{D}\bar{B} - [(\bar{E} - \lambda)(\bar{A} - \lambda)]\} - \bar{C}\bar{F}\bar{D}$$

$$= (\bar{G} - \lambda)\{\bar{D}\bar{B} - [\bar{E}\bar{A} - (\bar{E} + \bar{A})\lambda + \lambda^2]\} - \bar{C}\bar{F}\bar{D}$$

$$= \bar{D}\bar{B}\bar{G} - \bar{E}\bar{A}\bar{G} + \bar{G}(\bar{E} + \bar{A})\lambda - \bar{G}\lambda^2 - \bar{D}\bar{B}\lambda + \bar{E}\bar{A}\lambda - (\bar{E} + \bar{A})\lambda^2$$

$$+\lambda^3 - \bar{C}\bar{F}\bar{D}$$

$$= \lambda^3 + [-\bar{G} - (\bar{E} + \bar{A})]\lambda^2 + [\bar{G}(\bar{E} + \bar{A}) - \bar{D}\bar{B} + \bar{E}\bar{A}]\lambda$$

$$+[\bar{D}\bar{B}\bar{G} - \bar{E}\bar{A}\bar{G} - \bar{C}\bar{F}\bar{D}]. \qquad (3.3.1.3)$$

Persamaan (3.3.1.3) dapat ditulis menjadi

$$0 = -\lambda^3 - [-\bar{G} - (\bar{E} + \bar{A})]\lambda^2 - [\bar{G}(\bar{E} + \bar{A}) - \bar{D}\bar{B} + \bar{E}\bar{A}]\lambda - [\bar{D}\bar{B}\bar{G} -$$

$$\bar{E}\bar{A}\bar{G} - \bar{C}\bar{F}\bar{D}]. \qquad (3.3.1.4)$$

Selanjutnya, notasikan koefisien dari λ sebagai λ_C. Dari persamaan (3.3.1.4) dapat dilihat bahwa

$$\lambda_C^2 = -[-\bar{G} - (\bar{E} + \bar{A})],$$

$$= -[-(-1) - ((-\omega) + (\beta_1 N - \delta))]$$

$$= -[1 - ((-\omega) + (\beta_1 N - \delta))]$$

$$= [\beta_1 N - 1 - \omega - \delta]$$

$$= \beta_1 N - (1 + \omega + \delta).$$

Karena $\beta_1 N > (1 + \omega + \delta) > 0$, dengan $N = (S + E + I + R)$ maka

$$\lambda_C^2 = \beta_1 N - (1 + \omega + \delta) > 0.$$

$$\lambda_C^1 = -[\bar{G}(\bar{E} + \bar{A}) - \bar{D}\bar{B} + \bar{E}\bar{A}]$$

$$= -[-((-\omega) + \beta_1 N - \delta) - \gamma\beta_2 N + (-\omega)(\beta_1 N - \delta)]$$

$$= \omega\beta_1 N + \beta_1 N + \gamma\beta_2 N - \omega - \delta - \delta\omega$$

$$= (\omega\beta_1 + \beta_1 + \gamma\beta_2)N - (\omega + \delta + \delta\omega).$$

Karena $(\omega\beta_1 + \beta_1 + \gamma\beta_2)N > (\omega + \delta + \delta\omega) > 0$, dengan $N = (S + E + I + R)$ maka $\lambda_C^1 = (\omega\beta_1 + \beta_1 + \gamma\beta_2)N - (\omega + \delta + \delta\omega) > 0$.

Selain itu $\lambda_C^0 = -[\bar{D}\bar{B}\bar{G} - \bar{E}\bar{A}\bar{G} - \bar{C}\bar{F}\bar{D}]$

$$= -\{[\gamma\beta_2 N(-1)] - [(-\omega)(\beta_1 N - \delta)(-1)] - \gamma k\beta_3 N\}$$

$$= \beta_1 N\omega + \gamma\beta_2 N + \gamma k\beta_3 N - \delta\omega$$

$$= \{\beta_1\omega + \gamma\beta_2 + \gamma k\beta_3\}N - \delta\omega.$$

Karena $\{\beta_1\omega + \gamma\beta_2 + \gamma k\beta_3\}N > \delta\omega > 0$, dengan $N = (S + E + I + R)$ maka koefisien $\lambda_C^0 = \{\beta_1\omega + \gamma\beta_2 + \gamma k\beta_3\}N - \delta\omega > 0$. Selanjutnya

$$\lambda_C^2 . \lambda_C^1 = [\beta_1 N - (1 + \omega + \delta)].[(\omega\beta_1 + \beta_1 + \gamma\beta_2)N - (\omega + \delta + \delta\omega)]$$

$$= \beta_1 N(\omega\beta_1 + \beta_1 + \gamma\beta_2)N - \beta_1 N(\omega + \delta + \delta\omega) - (1 + \omega + \delta)$$

$$(\omega\beta_1 + \beta_1 + \gamma\beta_2)N + (1 + \omega + \delta)(\omega + \delta + \delta\omega)$$

$$= \beta_1 N(\omega\beta_1 + \beta_1 + \gamma\beta_2)N + (1 + \omega + \delta)(\omega + \delta + \delta\omega)$$

$$-\{\beta_1 N(\omega + \delta + \delta\omega) + (1 + \omega + \delta)(\omega\beta_1 + \beta_1 + \gamma\beta_2)N\}$$

$$> \{\beta_1\omega + \gamma\beta_2 + \gamma k\beta_3\}N - \delta\omega > 0$$

$$= \lambda_C^0 > 0.$$

Karena $\lambda_C^2 . \lambda_C^1 - \lambda_C^0 > 0$ maka menurut Kriteria Routh-Hurwitz titik ekuilibrium $P_0 = (E, I, R, N) = \left(0,0,0,\frac{A}{\mu}\right)$ adalah stabil asimtotik.■

Teorema 3.3.2 [3] Jika $p > 0$ maka titik ekuilibrium $P^* = (E, I, R, N) = (E^*,\ I^*,\ R^*, N^*)$, dengan E^*, I^*, R^* dan N^* diberikan dalam (3.2.11), (3.2.10), (3.2.12), dan (3.2.13) adalah stabil asimtotik.

Bukti.

Perhatikan matriks Jacobian untuk sistem (3.2.1) di titik $P^* = (E, I, R, N) = (E^*, I^*, R^*, N^*)$, yaitu :

$$J_{f(E^*,I^*,R^*,N^*)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(E^*,I^*,R^*,N^*)}{\partial E^*} & \frac{\partial f_1(E^*,I^*,R^*,N^*)}{\partial I^*} & \frac{\partial f_1(E^*,I^*,R^*,N^*)}{\partial R^*} & \frac{\partial f_1(E^*,I^*,R^*,N^*)}{\partial N^*} \\ \frac{\partial f_2(E^*,I^*,R^*,N^*)}{\partial E^*} & \frac{\partial f_2(E^*,I^*,R^*,N^*)}{\partial I^*} & \frac{\partial f_2(E^*,I^*,R^*,N^*)}{\partial R^*} & \frac{\partial f_2(E^*,I^*,R^*,N^*)}{\partial N^*} \\ \frac{\partial f_3(E^*,I^*,R^*,N^*)}{\partial E^*} & \frac{\partial f_3(E^*,I^*,R^*,N^*)}{\partial I^*} & \frac{\partial f_3(E^*,I^*,R^*,N^*)}{\partial R^*} & \frac{\partial f_3(E^*,I^*,R^*,N^*)}{\partial N^*} \\ \frac{\partial f_4(E^*,I^*,R^*,N^*)}{\partial E^*} & \frac{\partial f_4(E^*,I^*,R^*,N^*)}{\partial I^*} & \frac{\partial f_4(E^*,I^*,R^*,N^*)}{\partial R^*} & \frac{\partial f_4(E^*,I^*,R^*,N^*)}{\partial N^*} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1 & \tilde{Q}_2 & \tilde{Q}_3 & \tilde{Q}_4 \\ \gamma & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & k & -1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

dengan

$$\tilde{Q}_1 = \beta_1(N^* - E^* - I^* - R^*) - (\beta_1 E^* + \beta_2 I^* + \beta_3 R^*) - \delta,$$

$$\tilde{Q}_2 = \beta_2(N^* - E^* - I^* - R^*) - (\beta_1 E^* + \beta_2 I^* + \beta_3 R^*),$$

$$\tilde{Q}_3 = \beta_3(N^* - E^* - I^* - R^*) - (\beta_1 E^* + \beta_2 I^* + \beta_3 R^*),$$

$$\tilde{Q}_4 = (\beta_1 E^* + \beta_2 I^* + \beta_3 R^*).$$

Dari persamaan (3.2.2), dengan $P^* = (E, I, R, N) = (E^*, I^*, R^*, N^*)$ maka diperoleh

$$(N^* - E^* - I^* - R^*) = \frac{\delta E^* - pc}{(\beta_1 E^* + \beta_2 I^* + \beta_3 R^*)}$$

$$= \frac{\delta E^*}{(\beta_1 E^* + \beta_2 I^* + \beta_3 R^*)} - \frac{pc}{(\beta_1 E^* + \beta_2 I^* + \beta_3 R^*)}$$

$$= \frac{\delta \frac{\omega}{\gamma} I^*}{\left(\beta_1 \delta \frac{\omega}{\gamma} I^* + \beta_2 I^* + \beta_3 k I^*\right)} - \frac{pc}{(\beta_1 E^* + \beta_2 I^* + \beta_3 R^*)}$$

$$= \frac{\gamma I^* \delta \omega}{\gamma I^*(\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3)} - \frac{pc}{(\beta_1 E^* + \beta_2 I^* + \beta_3 R^*)}$$

$$= \frac{\delta\omega}{(\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3)} - \frac{pc}{(\beta_1 E^* + \beta_2 I^* + \beta_3 R^*)}.$$

Misalkan

$$X = \frac{\delta\omega}{(\omega\beta_1+\gamma\beta_2+k\gamma\beta_3)} > 0, \qquad (3.3.2.1)$$

$$Y = (\beta_1 E^* + \beta_2 I^* + \beta_3 R^*) > 0. \qquad (3.3.2.2)$$

Sehingga matriks Jacobian untuk sistem (3.2.1) di titik $P^* = (E, I, R, N) = (E^*, I^*, R^*, N^*)$, dapat juga disajikan dalam bentuk :

$$J_{f(E^*,I^*,R^*,N^*)} = \begin{pmatrix} \left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_1 - Y - \delta & \left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_2 - Y & \left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_3 & Y \\ \gamma & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & k & -1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Persamaan karakteristiknya adalah $\left|J_{f(E^*,I^*,R^*,N^*)} - \lambda I_{4x4}\right| = 0$,

$$0 = \left| \begin{pmatrix} \left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_1 - Y - \delta & \left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_2 - Y & \left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_3 & Y \\ \gamma & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & k & -1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} \left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_1 - Y - \delta - \lambda & \left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_2 - Y & \left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_3 & Y \\ \gamma & -\omega - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & k & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor diperoleh

$$0 = \left(\left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_1 - Y - \delta - \lambda\right)\begin{vmatrix} -\omega - \lambda & 0 & 0 \\ k & -1 - \lambda & 0 \\ -\alpha & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$-\left(\left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_2 - Y\right)\begin{vmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} + \left(\left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_3\right)$$

$$\begin{vmatrix} \gamma & -\omega - \lambda & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & -\alpha & -1 - \lambda \end{vmatrix} - Y\begin{vmatrix} \gamma & -\omega - \lambda & 0 \\ 0 & k & -1 - \lambda \\ 0 & -\alpha & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_1 - Y - \delta - \lambda\right](-\omega - \lambda)(-1 - \lambda)^2 -$$

$$\left[\left(\left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_2 - Y\right)\gamma(-1 - \lambda)^2\right] - Y[-\alpha\gamma(-1 - \lambda)]$$

$$+ \left[\left(\left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_3 - Y\right)\gamma k(-1 - \lambda)\right]$$

$$= (-1 - \lambda)\left\{\left[\left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_1 - Y - \delta - \lambda\right](-\omega - \lambda)(-1 - \lambda)\right.$$

$$\left. - \left(\left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_2 - Y\right)\gamma(-1 - \lambda) + \left[\left(\left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_3 - Y\right)\gamma k + Y\alpha\gamma\right]\right\}.$$

Definisikan

$$\widetilde{W} = (-1 - \lambda)\left\{\left[\left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_1 - Y - \delta - \lambda\right](-\omega - \lambda)(-1 - \lambda)\right.$$

$$\left. - \left(\left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_2 - Y\right)\gamma(-1 - \lambda) + \left[\left(\left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_3 - Y\right)\gamma k + Y\alpha\gamma\right]\right\} = 0.$$

(3.3.2.3)

Persamaan (3.3.2.3) dipenuhi oleh

$(-1 - \lambda) = 0$ atau

$$\left\{\left[\left(X-\frac{pc}{Y}\right)\beta_1 - Y - \delta - \lambda\right](-\omega-\lambda)(-1-\lambda)\right.$$

$$\left.-\left(\left(X-\frac{pc}{Y}\right)\beta_2 - Y\right)\gamma(-1-\lambda) + \left[\left(\left(X-\frac{pc}{Y}\right)\beta_3 - Y\right)\gamma k + Ya\gamma\right]\right\} = 0.$$

Jika $(-1-\lambda) = 0$, maka diperoleh $\lambda = -1$.

Jika

$$0 = \left\{\left[\left(X-\frac{pc}{Y}\right)\beta_1 - Y - \delta - \lambda\right](-\omega-\lambda)(-1-\lambda) - \left(\left(X-\frac{pc}{Y}\right)\beta_2 - Y\right)\right.$$

$$\left.\gamma(-1-\lambda) + \left[\left(\left(X-\frac{pc}{Y}\right)\beta_3 - Y\right)\gamma k + Ya\gamma\right]\right\}$$

$$= \left[\left(X-\frac{pc}{Y}\right)\beta_1\omega + \left(X-\frac{pc}{Y}\right)\beta_1(\omega+1)\lambda + \left(X-\frac{pc}{Y}\right)\beta_1\lambda^2 - Y\omega - Y(\omega+1)\right.$$

$$\left.\lambda - Y\lambda^2 - \delta\omega - \delta(\omega+1)\lambda - \delta\lambda^2 - \omega\lambda - (\omega+1)\lambda^2 - \lambda^3\right] +$$

$$\left[\gamma\left(X-\frac{pc}{Y}\right)\beta_2 + \gamma\left(X-\frac{pc}{Y}\right)\beta_2\lambda - \gamma Y - \gamma Y\lambda\right] + \left[\left(X-\frac{pc}{Y}\right)\right.$$

$$\left.\beta_3\gamma k - Y\gamma k + +Ya\gamma\right]$$

$$= \left\{\left[\left(X-\frac{pc}{Y}\right)\beta_1\omega - Y\omega - \delta\omega + \gamma\left(X-\frac{pc}{Y}\right)\beta_2 + \left(X-\frac{pc}{Y}\right)\gamma k\beta_3 - Y\gamma k +\right.\right.$$

$$\left. +Ya\gamma\right] + \left[\left(X-\frac{pc}{Y}\right)\beta_1(\omega+1) - Y(\omega+1) - \delta(\omega+1) - \omega + \gamma\right.$$

$$\left.\left.(X-\frac{pc}{Y})\beta_2 - \gamma Y\right]\lambda + \left[\left(X-\frac{pc}{Y}\right)\beta_1 - Y - \delta - (\omega+1)\right]\lambda^2 - \lambda^3\right\}$$

$$= \lambda^3 - \left[\left(X-\frac{pc}{Y}\right)\beta_1 - Y - \delta - (\omega+1)\right]\lambda^2 - \left[\left(X-\frac{pc}{Y}\right)\beta_1(\omega+1) - Y\right.$$

$$\left.(\omega+1) - \delta(\omega+1) - \omega + \gamma\left(X-\frac{pc}{Y}\right)\beta_2 - \gamma Y\right]\lambda - \left[\left(X-\frac{pc}{Y}\right)\beta_1\omega\right.$$

$$\left.-Y\omega - \delta\omega + \gamma\left(X-\frac{pc}{Y}\right)\beta_2 - \gamma Y + \left(X-\frac{pc}{Y}\right)\gamma k\beta_3 - Y\gamma k + +Ya\gamma\right].$$

Definisikan

$$\tilde{Z} = \lambda^3 - \left[\left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_1 - Y - \delta - (\omega + 1)\right]\lambda^2 - \left[\left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_1(\omega + 1) - Y\right.$$

$$(\omega + 1) - \delta(\omega + 1) - \omega + \gamma\left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_2 - \gamma Y\Big]\lambda - \left[\left(X - \frac{pc}{Y}\right)\right.$$

$$\beta_1\omega] - Y\omega - \delta\omega + \gamma\left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_2 - \gamma Y + \left(X - \frac{pc}{Y}\right)\gamma k\beta_3 -$$

$$Y\gamma k + Ya\gamma] = 0. \qquad (3.3.2.4)$$

Selanjutnya, notasikan koefisien dari λ sebagai λ_C. Dari persamaan (3.3.2.4) dapat dilihat bahwa

$$\lambda_C^2 = -\left[\left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_1 - Y - \delta - (\omega + 1)\right]$$

$$= -\left\{-\left[(\omega + 1) + Y + \delta - \left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_1\right]\right\}$$

$$= \left[(\omega + 1) + Y + \delta - \left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_1\right]$$

$$= (\omega + 1) + Y + \frac{pc}{Y}\beta_1 + \delta - X\beta_1$$

$$= 1 + \omega + Y + \frac{pc}{Y}\beta_1 + \delta - \frac{\delta\omega}{\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + \gamma k\beta_3}\beta_1$$

$$= 1 + \omega + Y + \frac{pc}{Y}\beta_1 + \frac{\delta(\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + \gamma k\beta_3) - \delta\omega\beta_1}{\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + \gamma k\beta_3}$$

$$= 1 + \omega + Y + \frac{pc}{Y}\beta_1 + \frac{\delta(\gamma\beta_2 + \gamma k\beta_3)}{\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + \gamma k\beta_3} > 0,$$

dengan $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > 0$.

$$\lambda_C^1 = -\left[\left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_1(\omega + 1) - Y(\omega + 1) - \delta(\omega + 1) - \omega + \right.$$

$$\left.\gamma\left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_2 - \gamma Y\right]$$

$$= -\left\{-\left[Y(\omega+1) + \delta(\omega+1) + \omega + \gamma Y - \left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_1(\omega+1)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\gamma\left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_2\right]\right\}$$

$$= \left[Y(\omega+1) + \delta(\omega+1) + \omega + \gamma Y - \left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_1(\omega+1) - \gamma\left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_2\right]$$

$$= (Y+\delta)(\omega+1) + \omega + \gamma\left(Y + \frac{pc}{Y}\beta_2\right) - X\beta_1(\omega+1) - \gamma X\beta_2$$

$$= \omega + \left((Y+\delta) + \frac{pc}{Y}\beta_1\right)(\omega+1) + \gamma\left(Y + \frac{pc}{Y}\beta_2\right) - X[\beta_1(\omega+1) + \gamma\beta_2]$$

$$= \omega + \big((Y+\delta)(\omega+1)\big) + \gamma Y + \frac{pc}{Y}\beta_1(\omega+1) + \gamma\frac{pc}{Y}\beta_2 - X[\beta_1(\omega+1) + \gamma\beta_2]$$

$$= \omega + \big((Y+\delta)(\omega+1)\big) + \gamma Y + \frac{pc}{Y}\beta_1(\omega+1) + \gamma\frac{pc}{Y}\beta_2$$

$$-X[\beta_1(\omega+1) + \gamma\beta_2]$$

$$= \omega + Y\big((1+\gamma) + \omega\big) + \delta(\omega+1) + \frac{pc}{Y}\beta_1(\omega+1) + \gamma\frac{pc}{Y}\beta_2$$

$$-X[\beta_1(\omega+1) + \gamma\beta_2]$$

$$= \omega + Y(\delta+\omega) + \frac{pc}{Y}\beta_1(\omega+1) + \gamma\frac{pc}{Y}\beta_2 + \delta(\omega+1)$$

$$-X[\beta_1(\omega+1) + \gamma\beta_2].$$

Definisikan

$$\widetilde{U} = \omega + Y(\delta+\omega) + \frac{pc}{Y}\beta_1(\omega+1) + \gamma\frac{pc}{Y}\beta_2 + \delta(\omega+1) - X[\beta_1(\omega+1) + \gamma\beta_2]. \tag{3.3.2.5}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.3.2.1) ke persamaan (3.3.2.5), diperoleh

$$\widetilde{U} = \omega + Y(\delta+\omega) + \frac{pc}{Y}\beta_1(\omega+1) + \gamma\frac{pc}{Y}\beta_2 + \delta(\omega+1)$$

$$-\frac{\delta\omega}{(\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3)}[\beta_1(\omega+1) + \gamma\beta_2]$$

$$= \omega + Y(\delta + \omega) + \frac{pc}{Y}\beta_1(\omega + 1) + \gamma\frac{pc}{Y}\beta_2 + \frac{\delta(\omega + 1)(\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3)}{(\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3)}$$

$$-\frac{\delta\omega[\beta_1(\omega + 1) + \gamma\beta_2]}{(\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3)}$$

$$= \omega + Y(\delta + \omega) + \frac{pc}{Y}\beta_1(\omega + 1) + \gamma\frac{pc}{Y}\beta_2 +$$

$$\frac{\delta(\omega + 1)(\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3) - \delta\omega(\beta_1(\omega + 1) + \gamma\beta_2)}{(\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3)}$$

$$= \omega + Y(\delta + \omega) + \frac{pc}{Y}\beta_1(\omega + 1) + \gamma\frac{pc}{Y}\beta_2 + \frac{\delta\omega\beta_1(\omega + 1)}{(\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3)} +$$

$$\frac{\left[\left(\delta(\omega + 1)\right)(\gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3)\right] - \delta\omega\beta_1(\omega + 1) - \gamma\delta\omega\beta_2}{(\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3)}$$

$$= \omega + Y(\delta + \omega) + \frac{pc}{Y}\beta_1(\omega + 1) + \gamma\frac{pc}{Y}\beta_2 + \frac{\delta\omega\beta_1(\omega + 1) + \gamma\delta\omega\beta_2}{(\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3)} +$$

$$\frac{k\gamma\omega\delta\beta_3 + \delta\gamma\beta_2 + \delta k\gamma\beta_3 - \delta\omega\beta_1(\omega + 1) - \gamma\delta\omega\beta_2}{(\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3)}$$

$$= \omega + Y(\delta + \omega) + \frac{pc}{Y}\beta_1(\omega + 1) + \gamma\frac{pc}{Y}\beta_2 + \frac{k\gamma\omega\delta\beta_3 + \delta\gamma\beta_2 + \delta k\gamma\beta_3}{(\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3)}$$

$$= \omega + Y(\delta + \omega) + \frac{pc}{Y}\beta_1(\omega + 1) + \gamma\frac{pc}{Y}\beta_2 + \frac{\gamma\delta(\beta_2 + k(\omega + 1)\beta_3)}{(\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3)} > 0,$$

dengan $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > 0$.

Selain itu

$$\lambda_C^0 = -\left[\left(X - \tfrac{pc}{Y}\right)\beta_1\omega - Y\omega - \delta\omega + \gamma\left(X - \tfrac{pc}{Y}\right)\beta_2 - \gamma Y + \left(X - \tfrac{pc}{Y}\right)\right.$$

$$\left.\gamma k\beta_3 - Y\gamma k + Ya\gamma\right]$$

$$= -\left\{-\left[\left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_1\omega + Y\omega + \delta\omega - \gamma\left(X - \frac{pc}{Y}\right)\beta_2 + \gamma Y - \left(X - \frac{pc}{Y}\right)\gamma k\beta_3\right.\right.$$

$$+Y\gamma k - Ya\gamma]\}$$

$$= \left[-\left(X - \tfrac{pc}{Y}\right)\beta_1\omega + Y\omega + \delta\omega - \gamma\left(X - \tfrac{pc}{Y}\right)\beta_2 + \gamma Y - \left(X - \tfrac{pc}{Y}\right)\gamma k\beta_3 + \right.$$

$$\left. Y\gamma k - Ya\gamma\right]$$

$$= \left[\omega\frac{pc}{Y}\beta_1 + \gamma\frac{pc}{Y}\beta_2 + \gamma k\frac{pc}{Y}\beta_3\right] + [Y\omega + \gamma Y + \gamma Yk + \gamma Y\alpha + \delta\omega]$$

$$-X(\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + \gamma k\beta_3).$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
Y\omega + \gamma Y + \gamma Yk + \gamma Y\alpha + \delta\omega &= Y\omega + \gamma Y + \gamma Yk + \gamma Y\alpha + (1+\gamma)\omega \\
&= Y\omega + \gamma Y + \gamma Yk + \gamma Y\alpha + \omega + \gamma\omega \\
&= (Y\omega + \omega + \gamma\omega) + (\,\gamma Y + \gamma Yk + \gamma Y\alpha) \\
&= \omega(Y + \gamma + 1) + \gamma(Y + Yk + Y\alpha) \\
&= \omega(Y + \gamma + 1) + \gamma[Y(1 + k + \alpha)] \\
&= \omega(Y + \gamma + 1) + \gamma Y\omega \\
&= \omega Y + \omega(\gamma + 1) + \gamma Y\omega \\
&= [\omega Y + \gamma Y\omega] + [\omega(\gamma + 1)] \\
&= [\omega Y(1 + \gamma)] + [\omega(\gamma + 1)] \\
&= \omega Y\delta + \omega\delta \\
&= (Y + 1)\omega\delta,
\end{aligned}$$

dengan demikian λ_C^0 menjadi

$$\lambda_C^0 = \left[\omega\frac{pc}{Y}\beta_1 + \gamma\frac{pc}{Y}\beta_2 + \gamma k\frac{pc}{Y}\beta_3\right] + [Y\omega + \gamma Y + \gamma Yk + \gamma Y\alpha + \delta\omega]$$

$$-X(\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + \gamma k\beta_3)$$

$$= \left[\omega\frac{pc}{Y}\beta_1 + \gamma\frac{pc}{Y}\beta_2 + \gamma k\frac{pc}{Y}\beta_3\right] + [(Y+1)\omega\delta] - X(\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + \gamma k\beta_3).$$

Definisikan

$$\tilde{T} = \left[\omega\frac{pc}{Y}\beta_1 + \gamma\frac{pc}{Y}\beta_2 + \gamma k\frac{pc}{Y}\beta_3\right] + [(Y+1)\omega\delta]$$

$$-X(\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + \gamma k\beta_3), \qquad (3.3.2.6)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (3.3.2.1) ke persamaan (3.3.2.6), diperoleh

$$\tilde{T} = \left[\omega\frac{pc}{Y}\beta_1 + \gamma\frac{pc}{Y}\beta_2 + \gamma k\frac{pc}{Y}\beta_3\right] + [(Y+1)\omega\delta]$$

$$-\frac{\delta\omega}{\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3}(\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + \gamma k\beta_3)$$

$$= Y\omega\delta + \left[\omega\frac{pc}{Y}\beta_1 + \gamma\frac{pc}{Y}\beta_2 + \gamma k\frac{pc}{Y}\beta_3\right] + \frac{\omega\delta[\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3]}{\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3}$$

$$-\frac{\delta\omega(\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + \gamma k\beta_3)}{\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3}$$

$$= Y\omega\delta + \left[\omega\tfrac{pc}{Y}\beta_1 + \gamma\tfrac{pc}{Y}\beta_2 + \gamma k\tfrac{pc}{Y}\beta_3\right] > 0,$$

dengan $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > 0$. Selanjutnya

$$\lambda_C^2.\lambda_C^1 - \lambda_C^0 = \left[1 + \omega + Y + \frac{pc}{Y}\beta_1 + \frac{\delta(\gamma\beta_2 + \gamma k\beta_3)}{\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + \gamma k\beta_3}\right].\left[\omega + Y(\delta\omega) + \frac{pc}{Y}\beta_1\right.$$

$$\left.(\omega+1) + \gamma\frac{pc}{Y}\beta_2 + \frac{\delta\gamma[\beta_2 + (\omega+1)\beta_3]}{\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3}\right] - \left[Y\omega\delta + \omega\frac{pc}{Y}\beta_1\right.$$

$$\left.+\gamma\frac{pc}{Y}\beta_2 + \gamma k\frac{pc}{Y}\beta_3\right]$$

$$= \left(\omega + Y + \frac{pc}{Y}\beta_1 + \frac{\delta(\gamma\beta_2 + \gamma k\beta_3)}{\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + \gamma k\beta_3}\right).\left(\omega + Y(\delta\omega) + \frac{pc}{Y}\beta_1\right.$$

$$(\omega + 1) + \gamma\frac{pc}{Y}\beta_2 + \left.\frac{\delta\gamma[\beta_2 + (\omega + 1)\beta_3]}{\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3}\right) + (\omega + Y(\delta\omega) +$$

$$\frac{pc}{Y}\beta_1(\omega + 1) + \gamma\frac{pc}{Y}\beta_2 + \left.\frac{\delta\gamma[\beta_2 + (\omega + 1)\beta_3]}{\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3}\right) - \left(Y\omega\delta + \omega\frac{pc}{Y}\right.$$

$$\left.\beta_1 + \gamma\frac{pc}{Y}\beta_2 + \gamma k\frac{pc}{Y}\beta_3\right)$$

$$= \left(\omega + Y + \frac{pc}{Y}\beta_1 + \frac{\delta(\gamma\beta_2 + \gamma k\beta_3)}{\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + \gamma k\beta_3}\right).\left(\omega + Y(\delta\omega) + \frac{pc}{Y}\beta_1\right.$$

$$(\omega + 1) + \gamma\frac{pc}{Y}\beta_2 + \left.\frac{\delta\gamma[\beta_2 + (\omega + 1)\beta_3]}{\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3}\right) + \left(\omega + \frac{pc}{Y}\beta_1 +\right.$$

$$\left.\frac{\delta\gamma[\beta_2 + (\omega + 1)\beta_3]}{\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3}\right) - \gamma k\frac{pc}{Y}\beta_3.$$

Karena

$$\left(\omega + Y + \frac{pc}{Y}\beta_1 + \frac{\delta(\gamma\beta_2 + \gamma k\beta_3)}{\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + \gamma k\beta_3}\right).\left(\omega + Y(\delta\omega) + \frac{pc}{Y}\beta_1(\omega + 1)\right.$$

$$\left. + \gamma\frac{pc}{Y}\beta_2 + \frac{\delta\gamma[\beta_2 + (\omega + 1)\beta_3]}{\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3}\right) + \left(\omega + \frac{pc}{Y}\beta_1 + \frac{\delta\gamma}{\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3}\right.$$

$$\left.\frac{[\beta_2 + (\omega + 1)\beta_3]}{\omega\beta_1 + \gamma\beta_2 + k\gamma\beta_3}\right) > \gamma k\frac{pc}{Y}\beta_3 > 0,$$

maka $\lambda_C^2.\lambda_C^1 - \lambda_C^0 > 0$, untuk $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > 0$. Sehingga menurut Kriteria Routh-Hurwitz titik ekuilibrium $P^* = (E, I, R, N) = (E^*, I^*, R^*, N^*)$ adalah stabil asimtotik.■

BAB IV

KESIMPULAN

Model epidemi SEIR merupakan model penyebaran penyakit menular yang terjadi pada kelompok-kelompok individu yang berbeda, yaitu kelas rentan, ekpos, terinfeksi, dan bebas penyakit. Terjadinya interaksi antara individu rentan dengan individu ekspos, terinfeksi, dan bebas penyakit, akan mengakibatkan adanya masa yang di lewati antara kerentanan individu hingga munculnya penyakit. Kemudian, adanya imigran masuk ke dalam kelas rentan dan ke dalam kelas ekpos, akan mempengaruhi kestabilan yang asimtotik terhadap titik ekuilibriumnya. Kestabilan asimtotik pada saat peluang imigran masuk ke dalam kelas ekpos 0 dan peluang imigran masuk ke dalam kelas ekpos besar dari 0.

Sehingga, berdasarkan analisis yang telah dilakukan pada bab III diperoleh kesimpulan, yaitu :

1. Jika $p = 0$ maka tidak terdapat individu yang terinfeksi atau di curigai terinfeksi penyakit. Kemudian, juga tidak terdapat imigran yang masuk kedalam kelas ekspos. Semua imigran hanya masuk kedalam kelas rentan sebanyak $\frac{A}{\mu}$.
2. Jika $p > 0$ maka terdapat penyakit yang bersifat endemik pada masing-masing individu *susceptibles*, *exposed*, *infectious*, dan *recovered*.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H., 2000, *Dasar-Dasar Aljabar Linear*, edisi ketujuh, (diterjemahkan oleh: Suminto, H.), Interaksara, Batam.

[2] Li G, Wang W, and Jin Z. (2006). *Global stability of an SEIR epidemic model with constant immigration*. Chaos, Soliton & Fractal 30; 1012-1019.

[3] Britton, N.F., 2005, *Essential Mathematical Biology*, Springer-Verlag, USA.

[4] Finizio, N. and Ladas, G., 1988, *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*, edisi kedua, (diterjemahkan oleh: Santoso, W.), Erlangga, Jakarta.

[5] Berlin. Ross, S.L., 1984, *Differential Equations*, John Wiley and Sons,Inc., Singapore.

[6] Boyce, W. E and R. C DiPrima. 1992. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. 5th Edition. John Wiley and Son, Inc, Canada.

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis dilahirkan di Surantih pada tanggal 20 Juni 1989. Anak ke delapan dari pasangan Khaidir dan Pik Alam. Penulis memulai pendidikannya di SD Negeri 31 Gunung Malelo pada tahun 1995. Pada tahun 2001, penulis melanjutkan pendidikannya di SMP Negeri 1 SUTERA. Pada tahun 2004, penulis melanjutkan pendidikannya di SMA Negeri 2 Painan dan tamat pada tahun 2007. Pada tahun yang sama, penulis di terima menjadi mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Andalas melalui jalur Seleksi Penerimaan Mahasiswa Baru Mandiri (SPMBM). Selama di bangku perkuliahan penulis pernah mengikuti magang di UKM Forum Komunikasi Islam Rabbani (FKI Rabbani) Unit Universitas Andalas tahun 2007, dan menjadi anggota HIMATIKA periode 2008/2009. Untuk syarat meraih gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika FMIPA UNAND, penulis pernah mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Nagari Lareh Nan Panjang, Kecamatan VII Koto Sungai Sariak, Kabupaten Padang Pariaman pada bulan Juli s/d Agustus 2010.