© HAK CIPTA MILIK UNIVERSITAS ANDALAS

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
   a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
   b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar Unand.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Unand.

PELABELAN VERTEX-GRACEFUL PADA GRAF-(5, 6) DAN GRAF-(6- 7)

SKRIPSI

GEMA HISTAMEDIKA
06934001

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2011

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa:

Nama	:	Gema Histamedika
Nomor Buku Pokok	:	06 934 001
Jurusan	:	Matematika
Bidang	:	Kombinatorika
Judul Skripsi	:	**Pelabelan *Vertex-Graceful* Pada Graf-(5,6) dan Graf-(6,7)**

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal **28 Maret 2011** berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing/Penguji,	Penguji,
1.	1.
Dr. Syafrizal Sy	Nova Noliza Bakar, M.Si
NIP: 19670807 199309 1 001	NIP: 19631104 199203 2 002
2.	2.
Des Welyyanti, M.Si	Narwen, M.Si
NIP: 19791205 200812 2 001	NIP: 19670410 199702 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand

Dr. Syafrizal Sy
NIP: 19670807 199309 1 001

Alhamdulillahi rabbil 'alamin

puji syukur ke hadirat Allah S.W.T atas segala karunia-Nya. Sholawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Rasulullah Muhammad S.A.W, keluarganya, sahabat-sahabatnya serta para pengikutnya hingga hari akhir..

"Bukanlah suatu aib jika kamu gagal dalam suatu usaha, yang merupakan aib adalah jika kamu tidak bangkit dari kegagalan itu"
(Ali bin Abu Thalib)

Karya kecil ini kupersembahkan untuk.....
papa tercinta **Nuryanuwar** dan mama tercinta **Evawani**
(atas kasih sayang, nasehat, kesabaran, dan do'a yang tak pernah henti terucap...semoga ika bisa membahagiakan apa jo ama)

udaku **Fifian Fitra Janeva**, sistaku **Nurul Ziqra**, n adikku **Muhammad Furqan Akbar** (atas semangat dan do'a yang diberikan...semoga kita selalu rukun, saling menyayangi, n bisa membahagiakan ama jo apa.. aminn ya Allah..)

Muynesku, uda **Zebbil Billian Tomi**
(atas semangat, pengertian, kesabaran n do'a yang diberikan)
20 5 1 13 15
^_~^_~

Semua keluarga besarku.....
(atas semangat n do'a yang diberikan...semoga kita selalu rukun n bisa berkumpul lagi..)

Special Thank's to:

Bapak Syafrizal (terima kasih banyak ya pak, atas semua kebaikan yang telah diberikan...semoga rahmat Allah senantiasa tercurah untuk bapak dan keluarga)

Ibu Wely (terima kasih banyak ya bu, atas semua kebaikan yang telah diberikan...maaf ika sering merepotkan...semoga rahmat Allah senantiasa tercurah untuk ibu dan keluarga)

Bapak Narwen dan Ibu Nova (terima kasih sudah menjadi penguji terbaik untuk ika, juga atas kritik dan saran yang Bapak/Ibu berikan)

Bunda Sil (terima kasih ya bunda sudah menjadi pembimbing akademik ika, juga atas arahan, masukan dan bimbingan yang bunda berikan)

Pak Made, Pak Sanusi, Bu Monik, Pak Efendi, Bu May, Bu Izza, Bu Yoza, Bu Ayu, Pak Jon, Pak Syafruddin, Pak Budi, Pak Werman, Pak Yudi, Pak Iqbal, Pak Muhafzan, Bu Dian, Bu Rince, Bu Refilda, Bu Riri dan dosen-dosen lainnya terima kasih telah memberikan ilmu yang bermanfaat untuk ika. Semoga ilmu yang diberikan menjadi amal jariyah di akhirat kelak. Aminn..

Mama Cun, Bu Eli, Pak Syamsir, Bu Onang, Ni Opi
(terima kasih telah membantu ika selama perkuliahan..)

Teman-teman Seperjuangan:

Mei(gmn kbr drimu d papua sana =O..), **Tanti**(mksh kue semnarny y tut), **Ciput**(fokus lah k T.A tu lai,bdai pst brll), **de2k** (kl jd,pnjam ika bku2 de2k bsk y), **vanny**(mksh bntuan ny jeng..), **Iyet** (kpn kta ktm lg..), **mega**(mksh kue kmpre ny yo nyak..haha), **ne2k**(mksh do'any nek,knlan lh kakek bru thu..), **ayuk**(alhamdulillah jd jg y yuk..jgn lupa undanganny..), **iche, pino, tuwik, ade, jeki, tante, amel, ika, nilam, nia, yong, imel, mira, tari, susur,** dan teman-teman'06 lainnya makasih atas smua do'a n bantuanny..

BP'001:

Uni Fitrah (gmn kbrny uni?..), **Da Rio, Wewes**(mksh udah jd moderator uni), **Dea**(mksh sdh nungguin uni n coklatny), **ivone, mira, n Ridho**..Rajin² kul y dek..

Terima kasih untuk semuanya, maaf bagi yang tak tertuliskan namanya, karena begitu banyaknya nama yang harus disebutkan, namun karena keterbatasan, hanya ini yang mampu ika tulis..Terima kasih untuk semua pihak yang telah membantu ika selama ini..

Semoga Allah selalu memberikan rahmat dan kemudahan bagi kalian semua...Amin..

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis ucapkan kepada Allah SWT atas segala limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul "**Pelabelan *Vertex-Graceful* Pada Graf-(5,6) dan Graf-(6,7)**". Selanjutnya tak lupa shalawat dan salam penulis sampaikan kepada Nabi Besar Muhammad SAW.

Skripsi ini ditulis sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Andalas.

Penyelesaian skripsi ini tak lepas dari semua pihak yang terlibat baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu pada kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada :

1. Bapak **Dr. Syafrizal Sy** dan Ibu **Des Welyyanti, M.Si** selaku pembimbing yang telah memberikan bimbingan dalam penyelesaian skripsi ini.
2. Ibu **Nova Noliza Bakar, M.Si** dan Bapak **Narwen, M.Si** selaku penguji dalam penyelesaian skripsi ini.
3. Ibu **Monika Rianti Helmi, M.Si** selaku Koordinator Pendidikan Jurusan Matematika.
4. Ibu **Dr. Susila Bahri** selaku Pembimbing Akademik.
5. Bapak / Ibu Dosen beserta Karyawan Jurusan Matematika.
6. Orangtuaku tercinta (**Nuryanuwar & Evawani**), kakakku (**Fifian Fitra Janeva**), adik-adikku (**Nurul Ziqra**, **Muhammad Furqan Akbar**), dan muynesku (**Zebbil Billian Tomi**), serta semua keluarga besarku yang senantiasa memberikan dukungan dan semangat selama ini.

7. Teman-teman mahasiswa di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas, khususnya angkatan 2006 atas segala bantuan dan kerjasamanya.
8. Semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran agar sempurnanya skripsi ini. Semoga skripsi ini memberikan manfaat bagi kita semua. Amin.

Padang, April 2011

Penulis

ABSTRAK

Misalkan G adalah suatu graf terhubung sederhana berhingga dengan p titik dan $p + 1$ sisi, ditulis graf-$(p, p + 1)$, dengan p adalah bilangan asli. Pada tugas akhir ini, kajian dibatasi hanya untuk $p = 5$ dan $p = 6$. Dalam kajian ini, akan ditunjukkan bahwa terdapat 3 graf-(5,6) yang mempunyai pelabelan *vertex-graceful* dan juga sekaligus mempunyai pelabelan *strong vertex-graceful*. Selanjutnya, pada kajian tugas akhir ini juga menunjukkan bahwa pada graf-(6,7) terdapat 14 graf yang mempunyai pelabelan *vertex-graceful.* Dari ke 14 graf ini, hanya empat graf yang mempunyai pelabelan *strong vertex-graceful.*

Kata kunci: *graf-*$(p, p + 1)$, *pelabelan vertex-graceful*, *pelabelan strong vertex-graceful.*

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

No Halaman

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 sebagai upaya pemecahan masalah jembatan Königsberg. Masalah jembatan Königsberg adalah mungkin tidaknya melewati ketujuh jembatan yang ada di kota Königsberg masing-masing tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat semula. Untuk memecahkan masalah tersebut, Euler mempresentasikan daratan yang dihubungkan jembatan dengan titik (*vertex*) dan jembatan dinyatakan dengan sisi (*edge*). Dengan menggunakan model tersebut, Euler berkesimpulan bahwa tidak mungkin seseorang dapat melalui ketujuh jembatan tersebut masing-masing satu kali dan kembali lagi ke tempat semula[2].

Pelabelan pada suatu graf adalah sebarang pemetaan atau fungsi yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat positif). Pelabelan graf pertama diperkenalkan oleh Rosa (1967). Berbagai macam pelabelan graf dikaji dan berkembang, baik konsep itu muncul untuk keperluan aplikasi maupun teoritis. Aplikasi pelabelan graf dapat dijumpai dalam berbagai bidang, diantaranya dekomposisi graf, kriptografi, teori koding (*coding theory*), radar, desain sirkuit dan desain jaringan komunikasi [1]. Hingga kini dikenal beberapa jenis pelabelan pada graf, antara lain pelabelan *graceful*, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib.

Pelabelan *graceful* awalnya didefinisikan dan dikembangkan oleh Solomon Colomb pada tahun 1972. Pada tugas akhir ini, penulis melakukan kajian pelabelan *vertex-graceful* pada graf-(5,6) dan graf-(6,7).

1.2 Perumusan Masalah

Masalah yang dikaji pada tugas akhir ini adalah menentukan pelabelan *vertex-graceful* pada graf-(5,6) dan graf-(6,7).

1.3 Pembatasan Masalah

Diberikan suatu graf-$(p, p+1)$ dengan p adalah bilangan asli. **Graf-$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}+\mathbf{1})$** yaitu graf yang mempunyai p titik dan $p+1$ sisi. Pada tugas akhir ini, nilai p dibatasi untuk $p=5$ dan $p=6$. Selanjutnya, juga dibatasi untuk graf-$(p, p+1)$ yang sederhana terhubung berhingga.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan tugas akhir ini adalah menentukan pelabelan *vertex-graceful* pada graf-(5,6) dan graf-(6,7).

1.5 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini terdiri dari empat bab, yakni : Bab I Pendahuluan berisi latar belakang masalah, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan. Sedangkan Bab II Landasan teori yang mendukung permasalahan. Bab III Pembahasan. Bab IV Penutup berisi kesimpulan dan saran.

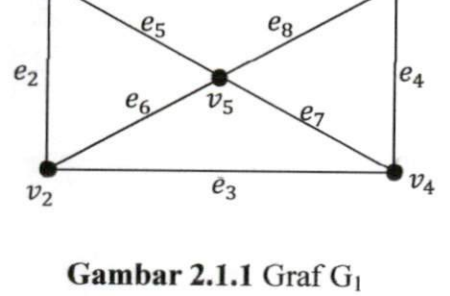
BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diperkenalkan konsep-konsep dasar, definisi dan notasi termasuk istilah-istilah dalam teori graf dan beberapa jenis graf serta pengertian dari pemetaan dan pelabelan secara umum.

2.1 Definisi dan Notasi

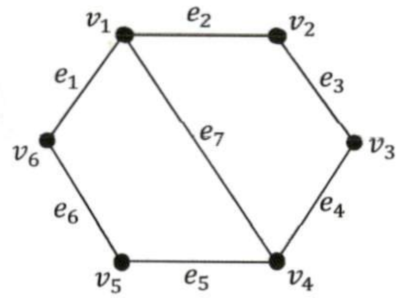
Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ dengan V adalah himpunan titik-titik (*vertices* atau *node*) di G dan E adalah himpunan sisi-sisi (*edges*) yang menghubungkan dua titik di G. Himpunan titik-titik pada G dinotasikan dengan $V(G)$, dan himpunan sisi-sisi pada G dinotasikan dengan $E(G)$ [3]. Jadi, G yang terdiri dari p titik dan q sisi dapat ditulis $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ dimana $e_i = (v_j, v_k)$ dengan $v_j, v_k \in V(G)$, $j \neq k$ dan $j, k \in \{1,2,..,p\}$. Banyak titik yang ada pada G adalah $|V(G)|$, dan disebut **orde** dari G, sedangkan banyak sisi pada G adalah $|E(G)|$, dan disebut **ukuran** dari G, sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 2.1.1.



Gambar 2.1.1 Graf G_1

Misal graf G_1 mempunyai titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$. Jadi, $|V(G)| = 5$ dan $|E(G)| = 8$.

Jika sisi $e = (u, v)$ dengan $u, v \in V(G)$, maka titik u disebut **bertetangga** dengan titik v dan demikian sebaliknya. Dalam hal ini, sisi e dikatakan **terkait** dengan titik u dan v, juga titik u dan v dikatakan terkait dengan sisi e. Banyak sisi yang terkait dengan titik v dinamakan **derajat** titik v, ditulis $d(v)$.



Gambar 2.1.2 Graf G_2

Pada graf G_2, titik v_1 bertetangga dengan titik v_2, v_6, dan v_4, tetapi tidak bertetangga dengan titik v_5 dan v_3. Sisi e_2 terkait dengan titik v_1 dan v_2.

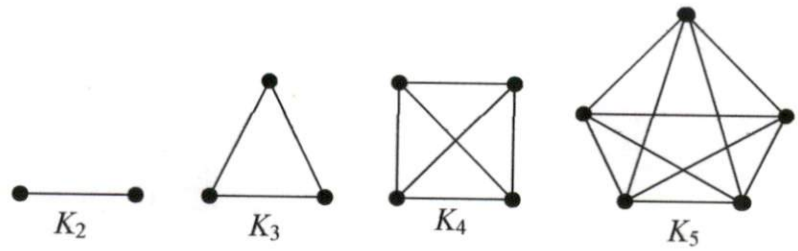
Suatu sisi e disebut ***loop***, jika $e = (v, v)$ untuk suatu $v \in V(G)$. Suatu sisi disebut **sisi ganda** (*multiple edge*), jika terdapat lebih dari satu sisi yang terkait dengan 2 titik. Graf G disebut **graf sederhana** jika G tidak memuat *loop* atau sisi ganda. Suatu graf G yang tidak sederhana disebut ***pseudograph***. Graf yang jumlah titiknya n berhingga disebut **graf berhingga**. Dua buah graf G_1 dan G_2 dikatakan ***isomorf*** jika terdapat korespondensi satu-satu antara titik di G_1 dan titik di G_2. Untuk selanjutnya, tanpa mengurangi perumuman, permasalahan dibatasi pada graf-*(p,p+1)* untuk $p = 5$ dan $p = 6$. Graf-*(p,p+1)* merupakan graf sederhana terhubung berhingga.

2.2 Jenis-Jenis Graf

Terdapat beberapa jenis graf sederhana khusus. Berikut ini didefinisikan beberapa graf khusus yang sering ditemukan:

a. **Graf Lengkap**

Graf Lengkap adalah graf sederhana yang setiap titiknya saling bertetangga. Graf lengkap dengan n titik dilambangkan dengan K_n.



Gambar 2.2.1 Graf Lengkap

b. **Graf Lingkaran**

Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n titik dilambangkan dengan C_n. Gambar 2.2.2 merupakan gambar graf lingkaran C_n, dengan $3 \leq n \leq 6$.

Gambar 2.2.2 Graf Lingkaran

2.3 Pemetaan[4]

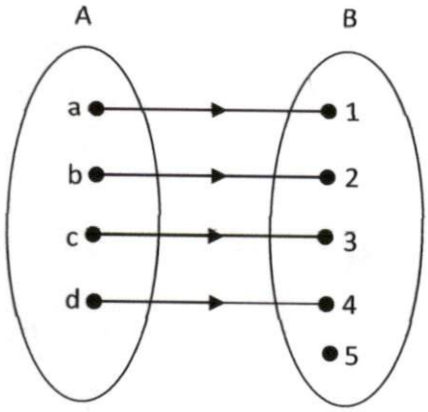
Misalkan A dan B adalah dua himpunan yang tidak kosong. Suatu cara atau aturan yang memasangkan setiap elemen dari himpunan A dengan tepat satu elemen di himpunan B disebut pemetaan dari himpunan A ke himpunan B. Pemetaan dari himpunan A ke himpunan B diberi notasi f, yaitu : $f: A \rightarrow B$.

Selanjutnya, himpunan A disebut sebagai daerah asal (*domain*) dan himpunan B disebut daerah kawan (*kodomain*). Secara umum, pemetaan dapat digolongkan menjadi 3 golongan sebagai berikut:

1) **Pemetaan satu-satu** (*injektif*) adalah pemetaan dimana setiap elemen di daerah *kodomain* yang berpasangan mempunyai pasangan elemen tepat satu di daerah *domain*, dapat dituliskan secara matematika sebagai berikut:

   $f: A \to B$ dikatakan $injektif \Leftrightarrow \forall x, y \in A,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$

   Contoh:

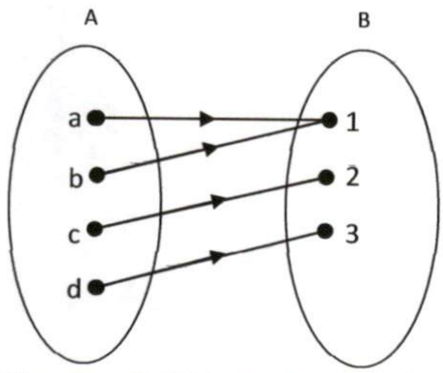


Gambar 2.3.1 Pemetaan *injektif*

2) **Pemetaan pada** (*surjektif*) adalah pemetaan dimana semua elemen di daerah *kodomain* mempunyai pasangan elemen di daerah *domain*, dapat dituliskan secara matematika berikut:

   $f: A \to B$ dikatakan $surjektif \Leftrightarrow \forall y \epsilon B, \exists x \epsilon A \ni y = f(x)$

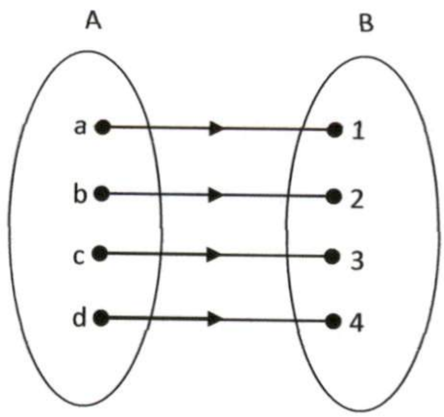
   Contoh:



Gambar 2.3.2 Pemetaan *surjektif*

3) **Pemetaan korespondensi satu-satu** (*bijektif*) adalah pemetaan yang memenuhi pemetaan *injektif* dan pemetaan *surjektif*.

Contoh:



Gambar 2.3.3 Pemetaan *bijektif*

2.4 Pelabelan Graf

Pelabelan pada suatu graf adalah sebarang pemetaan atau fungsi yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat positif). Jika *domain* dari pemetaan adalah titik, maka pelabelan disebut **pelabelan titik** (*vertex labeling*). Jika *domain* nya adalah sisi, maka disebut **pelabelan sisi** (*edge labeling*), dan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut **pelabelan total** (*total labeling*).

Suatu graf G dengan p titik dan q sisi adalah **pelabelan *graceful*** jika terdapat pemetaan *injektif* $f: V \to \{0,1,\cdots,q\}$ sehingga $f^{*}: E(G) \to \{1,2,\cdots,q\}$ yang didefinisikan dengan $f^{*}(e_i) = |f(v_j) - f(v_k)|$ dimana $e_i = (v_j, v_k)$ merupakan pemetaan *surjektif* [5].

Suatu graf G dikatakan **pelabelan *vertex-graceful*** jika ada pelabelan $f: V(G) \to \{1,2,\cdots,p\}$ sedemikian sehingga terdapat pelabelan $f^{+}: E(G) \to Z_q$ yang didefinisikan dari $f^{+}\left((v_j, v_k)\right) = \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \bmod q$ yang merupakan pemetaan *bijektif* [5]. Adapun contoh untuk pelabelan *vertex-graceful* adalah sebagai berikut:

Diberikan graf $C_4 \cup K_1$ dengan orde 5, akan ditunjukkan graf tersebut mempunyai pelabelan *vertex-graceful*.

Jawab:

Misalkan $V(C_4 \cup K_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan definisikan

$$f: V(C_4 \cup K_1) \to \{1,2,3,4,5\}.$$

$$v_1 \mapsto 1,$$

$$v_2 \mapsto 4,$$

$$v_3 \mapsto 2,$$

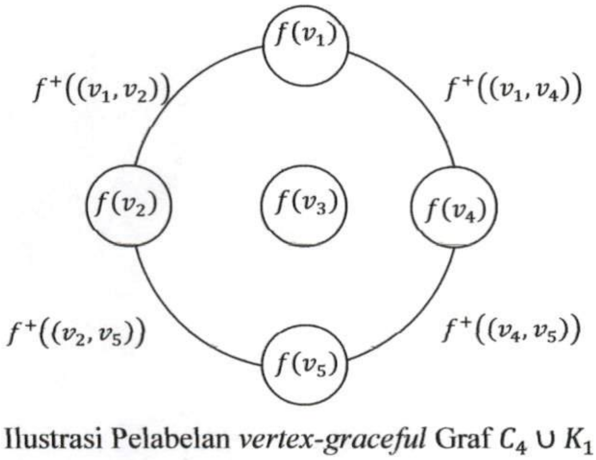
$$v_4 \mapsto 5,$$

$$v_5 \mapsto 3,$$

dan $f^+: E(C_4 \cup K_1) \to Z_q$ dimana $q = 4$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \; mod \; 4, \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful*.



Gambar 2.4.1 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf $C_4 \cup K_1$ dengan Orde 5

Dari definisi pemetaan diperoleh

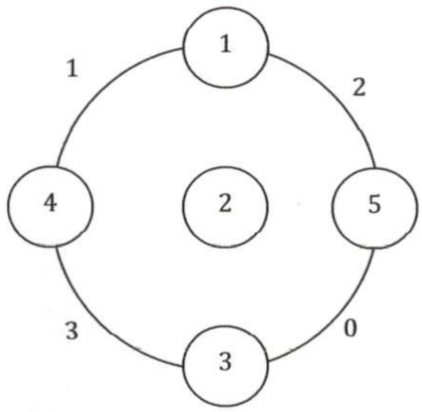
$$f^+((v_1, v_2)) = (f(v_1) + f(v_2))\ mod\ 4 = (1 + 4)\ mod\ 4 = 1$$

$$f^+((v_1, v_4)) = (f(v_1) + f(v_4))\ mod\ 4 = (1 + 5)\ mod\ 4 = 2$$

$$f^+((v_2, v_5)) = (f(v_2) + f(v_5))\ mod\ 4 = (4 + 3)\ mod\ 4 = 3$$

$$f^+((v_4, v_5)) = (f(v_4) + f(v_5))\ mod\ 4 = (5 + 3)\ mod\ 4 = 0.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 2.4.2 Graf $C_4 \cup K_1$ adalah Pelabelan *vertex-graceful*

Karena $f^+: E(C_4 \cup K_1) \to \{0,1,2,3\}$ merupakan pemetaan *bijektif* maka pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful.*

Misalkan $f^+(\neg mod)$ adalah suatu pemetaan $f^+(\neg mod): E(G) \to \mathbb{N}$ yang didefinisikan $f^+(\neg mod)\left((v_j, v_k)\right) = f(v_j) + f(v_k)$ dengan $v_j, v_k \in E(G)$, $j \neq k$. Misalkan $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli. Suatu subhimpunan S dari $\mathbb{N}$ dikatakan ***konsekutif*** jika S terdiri dari bilangan-bilangan bulat yang berurut (*konsekutif*). Suatu Pemetaan $f: S \to \mathbb{N}$ dengan $S \subseteq \mathbb{N}$ dikatakan *konsekutif* jika $f(x)$ *konsekutif* untuk setiap $x \in S$.

Suatu pelabelan *vertex-graceful* f dikatakan ***strong*** jika $f^+(\neg mod)$ adalah konsekutif. Jika G dianggap pelabelan *strong vertex-graceful*, maka G

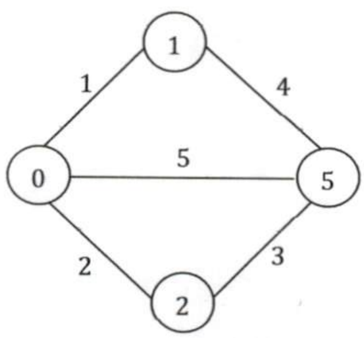
dikatakan ***strong vertex-graceful*** [5]. $f^+(\neg mod)$ dapat juga didefinisikan sebagai berikut:

$$f^+(\neg mod): E(G_1) \to \left\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\right\}$$

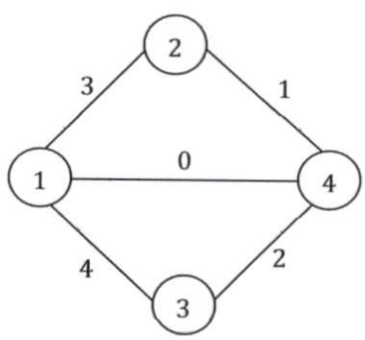
$$(v_j, v_k) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Contoh:

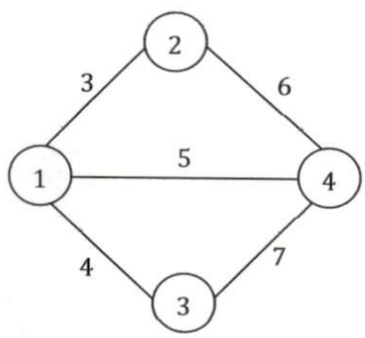
1. Graf G dengan orde 4 dan ukuran 5 adalah pelabelan *graceful* dan pelabelan *vertex-graceful*. Maka graf G adalah pelabelan *strong vertex-graceful*.



(i) G adalah pelabelan *graceful*



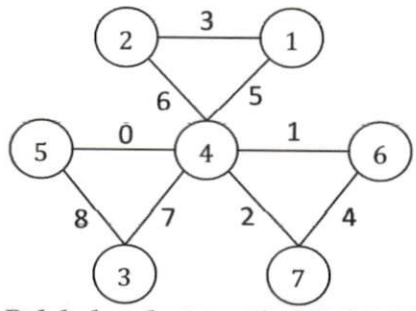
(ii) G adalah pelabelan *vertex-graceful*



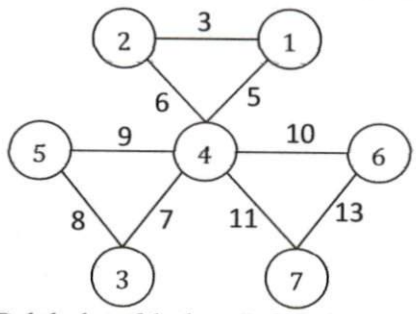
(iii) G adalah *strong vertex-graceful*

Gambar 2.4.3 Graf G dengan Orde 4 dan Ukuran 5

2. Graf *friendship* dengan orde 7 dan ukuran 9 bukan merupakan pelabelan *graceful*. Tetapi merupakan pelabelan *vertex-graceful*. Misalkan ada dua pelabelan *vertex-graceful* yaitu *f* dan *g* dimana pelabelan *g strong* tetapi pelabelan *f* bukan *strong*.

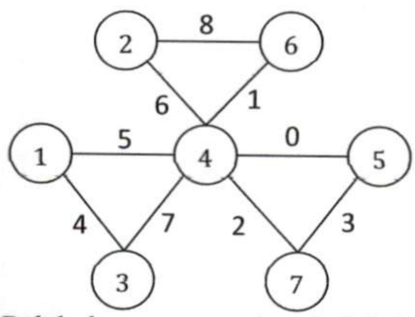


Gambar 2.4.4 Pelabelan f merupakan Pelabelan *vertex-graceful.*

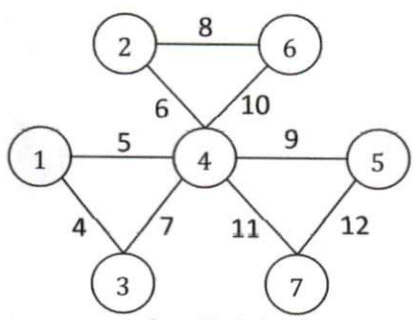


Gambar 2.4.5 Pelabelan f bukan Pelabelan *strong vertex-graceful.*

Karena pelabelan f tidak *konsekutif.* Jadi, pelabelan f merupakan pelabelan *vertex-graceful* tetapi bukan pelabelan *strong vertex-graceful.*



Gambar 2.4.6 Pelabelan g merupakan Pelabelan *vertex-graceful.*



Gambar 2.4.7 Pelabelan g merupakan Pelabelan *strong vertex-graceful.*

Jadi, pelabelan g merupakan pelabelan *vertex-graceful* dan pelabelan *strong vertex-graceful.*

BAB III

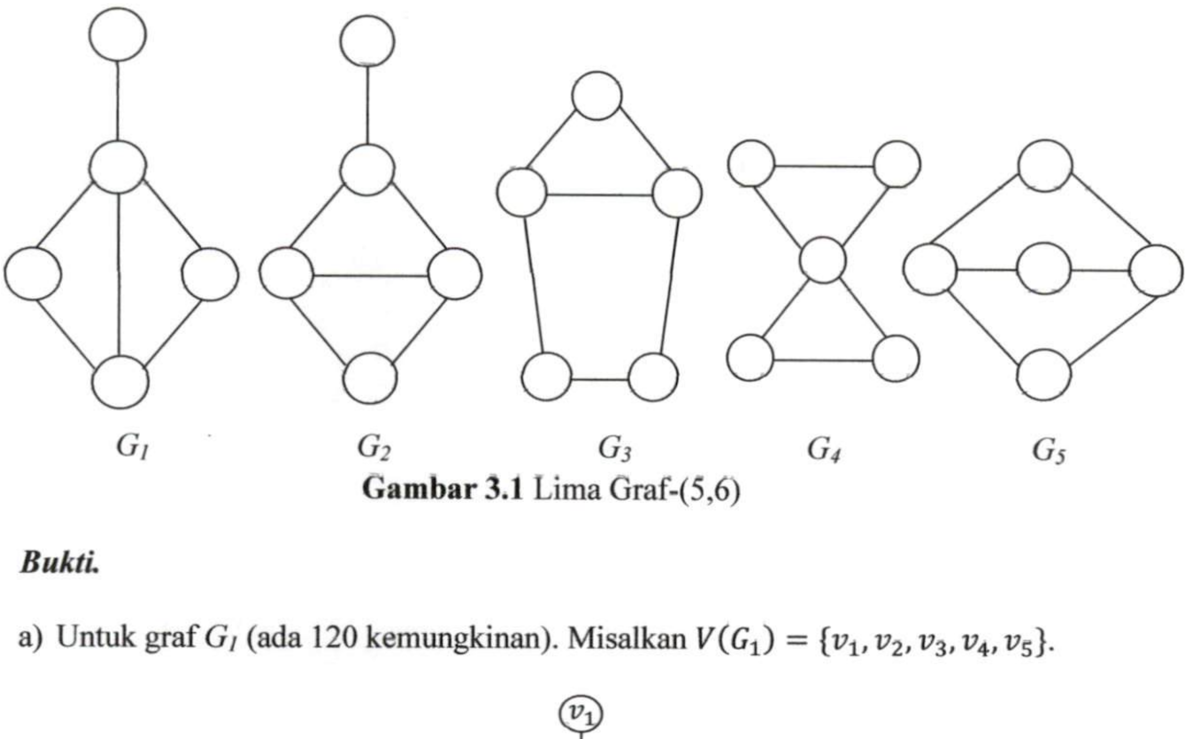
PELABELAN *VERTEX-GRACEFUL*

PADA GRAF-$(5,6)$ DAN GRAF-$(6,7)$

Pada bab ini akan dibahas hasil utama dari kajian tugas akhir ini, yaitu Pelabelan *Vertex-Graceful* pada Graf-(5,6) dan Graf-(6,7).

Teorema 3.1

Di antara lima graf-(5,6) *seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.1 hanya tiga graf yang merupakan pelabelan vertex-graceful.*



Gambar 3.1 Lima Graf-(5,6)

Bukti.

a) Untuk graf G_1 (ada 120 kemungkinan). Misalkan $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

Gambar 3.1.1 Ilustrasi $V(G_1)$

- Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(G_1) \to \{1,2,3,4,5\}$.

$$v_1 \mapsto 1,$$
$$v_2 \mapsto 2,$$
$$v_3 \mapsto 3,$$
$$v_4 \mapsto 4,$$
$$v_5 \mapsto 5,$$

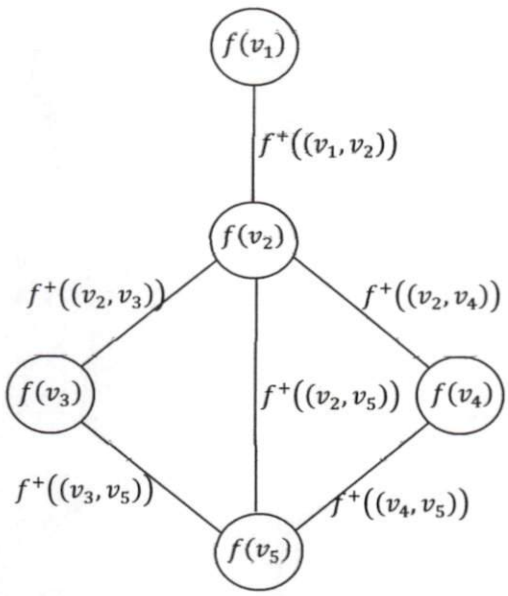
dan $f^+: E(G_1) \to Z_q$ dimana $q = 6$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \, mod \, 6, \qquad j \neq k$$

dan $f^+(\neg mod): E(G_1) \to \left\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\right\}$

$$(v_j, v_k) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful.*



Gambar 3.1.2 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_1 (I)*

*(I) menyatakan kemungkinan pertama dari Graf G_1

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+((v_1, v_2)) = (f(v_1) + f(v_2)) \, mod \, 6 = (1 + 2) \, mod \, 6 = 3$$

$$f^+((v_2, v_3)) = (f(v_2) + f(v_3)) \, mod \, 6 = (2 + 3) \, mod \, 6 = 5$$

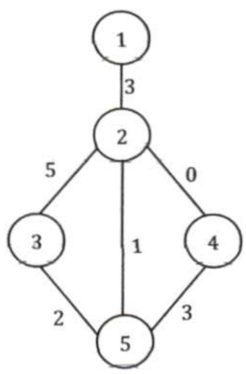
$$f^+((v_2, v_4)) = (f(v_2) + f(v_4))\ mod\ 6 = (2+4)\ mod\ 6 = 0$$

$$f^+((v_2, v_5)) = (f(v_2) + f(v_5))\ mod\ 6 = (2+5)\ mod\ 6 = 1$$

$$f^+((v_3, v_5)) = (f(v_3) + f(v_5))\ mod\ 6 = (3+5)\ mod\ 6 = 2$$

$$f^+((v_4, v_5)) = (f(v_4) + f(v_5))\ mod\ 6 = (4+5)\ mod\ 6 = 3.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.1.3 Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_1 yang sudah dilabeli (I)

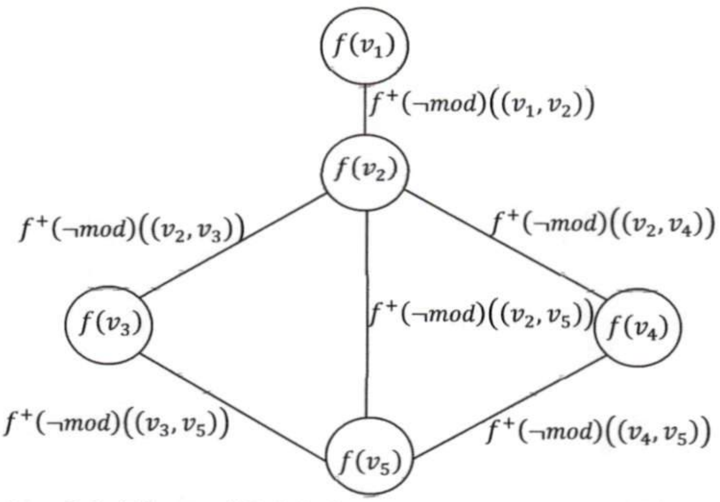
Karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1.1 Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_1 (I)

f					f^+						Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_2, v_5)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
1	2	3	4	5	3	5	0	1	2	3	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama.

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful.*



Gambar 3.1.4 Ilustrasi Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_1 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+(\neg mod)((v_1,v_2)) = f(v_1) + f(v_2) = 1 + 2 = 3$$

$$f^+(\neg mod)((v_2,v_3)) = f(v_2) + f(v_3) = 2 + 3 = 5$$

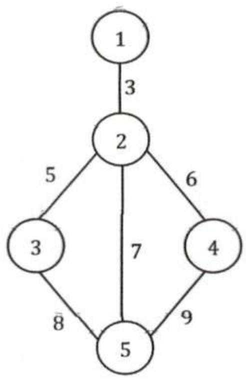
$$f^+(\neg mod)((v_2,v_4)) = f(v_2) + f(v_4) = 2 + 4 = 6$$

$$f^+(\neg mod)((v_2,v_5)) = f(v_2) + f(v_5) = 2 + 5 = 7$$

$$f^+(\neg mod)((v_3,v_5)) = f(v_3) + f(v_5) = 3 + 5 = 8$$

$$f^+(\neg mod)((v_4,v_5)) = f(v_4) + f(v_5) = 4 + 5 = 9.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.1.5 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_1 yang sudah dilabeli(I)

Karena pelabelan di atas sisinya tidak *konsekutif* maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *strong vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1.2 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_1 (I)

f					$f^+(\neg mod)$						Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_2, v_5)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
1	2	3	4	5	3	5	6	7	8	9	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif.*

- Kemungkinan kedua, definisikan $f: V(G_1) \to \{1,2,3,4,5\}$.

$$v_1 \mapsto 1,$$
$$v_2 \mapsto 3,$$
$$v_3 \mapsto 2,$$
$$v_4 \mapsto 5,$$
$$v_5 \mapsto 4,$$

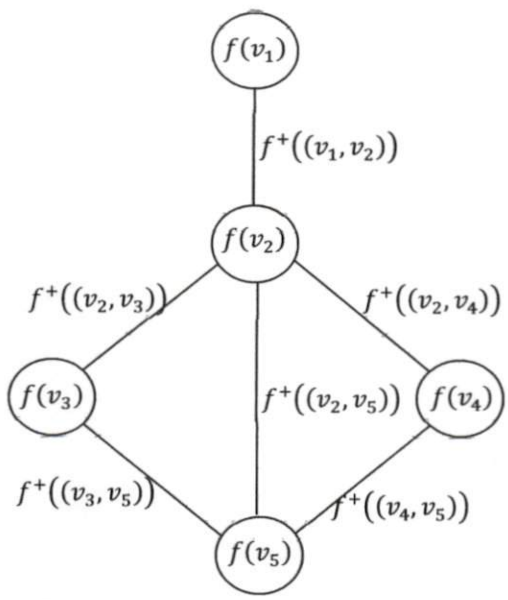
dan $f^+: E(G_1) \to Z_q$ dimana $q = 6$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \; mod \; 6, \qquad j \neq k$$

dan $f^+(\neg mod): E(G_1) \to \left\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\right\}$

$$(v_j, v_k) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful.*



Gambar 3.1.6 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_1 (II)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+((v_1, v_2)) = (f(v_1) + f(v_2))\, mod\ 6 = (1 + 3)\, mod\ 6 = 4$$

$$f^+((v_2, v_3)) = (f(v_2) + f(v_3))\, mod\ 6 = (3 + 2)\, mod\ 6 = 5$$

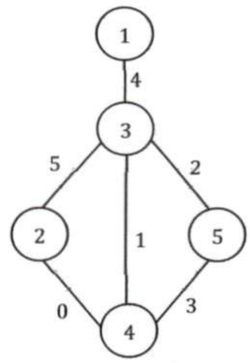
$$f^+((v_2, v_4)) = (f(v_2) + f(v_4))\, mod\ 6 = (3 + 5)\, mod\ 6 = 2$$

$$f^+((v_2, v_5)) = (f(v_2) + f(v_5))\, mod\ 6 = (3 + 4)\, mod\ 6 = 1$$

$$f^+((v_3, v_5)) = (f(v_3) + f(v_5))\, mod\ 6 = (2 + 4)\, mod\ 6 = 0$$

$$f^+((v_4, v_5)) = (f(v_4) + f(v_5))\, mod\ 6 = (5 + 4)\, mod\ 6 = 3.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.1.7 Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_1 yang sudah dilabeli (II)

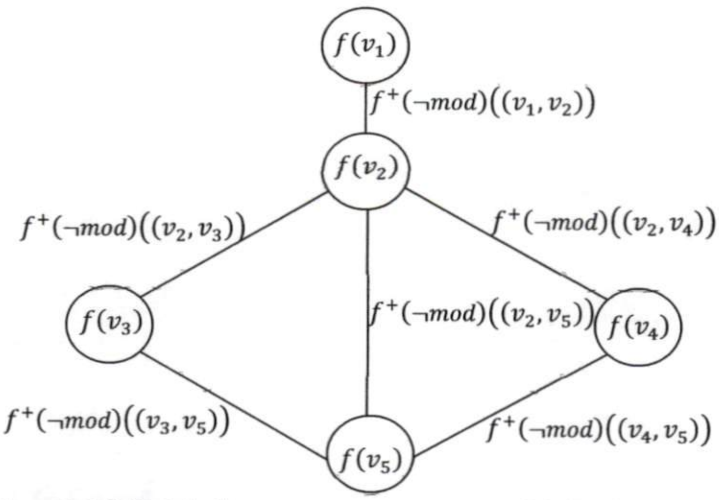
Karena $f^+: E(G_1) \to Z_6$ merupakan pemetaan *bijektif* maka pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful*. Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1.3 Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_1 (II)

f					f^+						Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_2, v_5)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
1	3	2	5	4	4	5	2	1	0	3	Ya

Keterangan:
"Ya" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *vertex-graceful* karena $f^+: E(G_1) \to Z_6$ merupakan pemetaan *bijektif*.

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful.*



Gambar 3.1.8 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_1 (II)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+(\neg mod)\big((v_1, v_2)\big) = f(v_1) + f(v_2) = 1 + 3 = 4$$

$$f^+(\neg mod)\big((v_2, v_3)\big) = f(v_2) + f(v_3) = 3 + 2 = 5$$

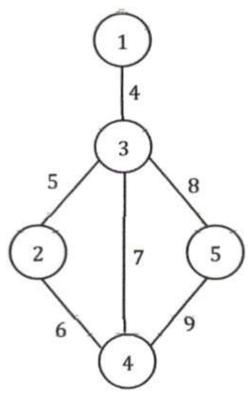
$$f^+(\neg mod)\big((v_2, v_4)\big) = f(v_2) + f(v_4) = 3 + 5 = 8$$

$$f^+(\neg mod)\big((v_2, v_5)\big) = f(v_2) + f(v_5) = 3 + 4 = 7$$

$$f^+(\neg mod)\big((v_3, v_5)\big) = f(v_3) + f(v_5) = 2 + 4 = 6$$

$$f^+(\neg mod)\big((v_4, v_5)\big) = f(v_4) + f(v_5) = 5 + 4 = 9.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.1.9 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_1 yang sudah dilabeli (II)

Karena pelabelan di atas sisinya *konsekutif* maka pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1.4 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_1 (II)

f					$f^+(\neg mod)$						Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_2, v_5)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
1	3	2	5	4	4	5	8	7	6	9	Ya

Keterangan:
"Ya" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya *konsekutif.*

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *vertex-graceful* atau tidak.

Tabel 3.1.5 Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_1

No	f					f^+						Ket
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_2, v_5)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
1	1	2	3	4	5	3	5	0	1	2	3	Tidak
2	1	2	3	5	4	3	5	1	0	1	3	Tidak
3	1	2	4	3	5	3	0	5	1	3	2	Tidak
4	1	2	4	5	3	3	0	1	5	1	2	Tidak
5	1	2	5	3	4	3	1	5	0	3	1	Tidak
6	1	2	5	4	3	3	1	0	5	2	1	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
7	1	3	2	4	5	4	5	1	2	1	3	Tidak
8	1	3	2	5	4	4	5	2	1	0	3	Ya
9	1	3	4	2	5	4	1	5	2	3	1	Tidak
10	1	3	4	5	2	4	1	2	5	0	1	Tidak
11	1	3	5	2	4	4	2	5	1	3	0	Ya
12	1	3	5	4	2	4	2	1	5	1	0	Tidak
13	1	4	2	3	5	5	0	1	3	1	2	Tidak
14	1	4	2	5	3	5	0	3	1	5	2	Tidak
15	1	4	3	2	5	5	1	0	3	2	1	Tidak
16	1	4	3	5	2	5	1	3	0	5	1	Tidak
17	1	4	5	2	3	5	3	0	1	2	5	Tidak
18	1	4	5	3	2	5	3	1	0	1	5	Tidak
19	1	5	2	3	4	0	1	2	3	0	1	Tidak
20	1	5	2	4	3	0	1	3	2	5	1	Tidak
21	1	5	3	2	4	0	2	1	3	1	0	Tidak
22	1	5	3	4	2	0	2	3	1	5	0	Tidak
23	1	5	4	2	3	0	3	1	2	1	5	Tidak
24	1	5	4	3	2	0	3	2	1	0	5	Tidak
25	2	1	3	4	5	3	4	5	0	2	3	Tidak
26	2	1	3	5	4	3	4	0	5	1	3	Tidak
27	2	1	4	3	5	3	5	4	0	3	2	Tidak
28	2	1	4	5	3	3	5	0	4	1	2	Ya
29	2	1	5	3	4	3	0	4	5	3	1	Tidak
30	2	1	5	4	3	3	0	5	4	2	1	Ya
31	2	3	1	4	5	5	4	1	2	0	3	Ya
32	2	3	1	5	4	5	4	2	1	5	3	Tidak
33	2	3	4	1	5	5	1	4	2	3	0	Ya
34	2	3	4	5	1	5	1	2	4	5	0	Tidak
35	2	3	5	1	4	5	2	4	1	3	5	Tidak
36	2	3	5	4	1	5	2	1	4	0	5	Tidak
37	2	4	1	3	5	0	5	1	3	0	2	Tidak
38	2	4	1	5	3	0	5	3	1	4	2	Ya
39	2	4	3	1	5	0	1	5	3	2	0	Tidak
40	2	4	3	5	1	0	1	3	5	4	0	Tidak
41	2	4	5	1	3	0	3	5	1	2	4	Ya
42	2	4	5	3	1	0	3	1	5	0	4	Tidak
43	2	5	1	3	4	1	0	2	3	5	1	Tidak
44	2	5	1	4	3	1	0	3	2	4	1	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
45	2	5	3	1	4	1	2	0	3	1	5	Tidak
46	2	5	3	4	1	1	2	3	0	4	5	Ya
47	2	5	4	1	3	1	3	0	2	1	4	Tidak
48	2	5	4	3	1	1	3	2	0	5	4	Ya
49	3	1	2	4	5	4	3	5	0	1	3	Tidak
50	3	1	2	5	4	4	3	0	5	0	3	Tidak
51	3	1	4	2	5	4	5	3	0	3	1	Tidak
52	3	1	4	5	2	4	5	0	3	0	1	Tidak
53	3	1	5	2	4	4	0	3	5	3	0	Tidak
54	3	1	5	4	2	4	0	5	3	1	0	Tidak
55	3	2	1	4	5	5	3	0	1	0	3	Tidak
56	3	2	1	5	4	5	3	1	0	5	3	Tidak
57	3	2	4	1	5	5	0	3	1	3	0	Tidak
58	3	2	4	5	1	5	0	1	3	5	0	Tidak
59	3	2	5	1	4	5	1	3	0	3	5	Tidak
60	3	2	5	4	1	5	1	0	3	0	5	Tidak
61	3	4	1	2	5	1	5	0	3	0	1	Tidak
62	3	4	1	5	2	1	5	3	0	3	1	Tidak
63	3	4	2	1	5	1	0	5	3	1	0	Tidak
64	3	4	2	5	1	1	0	3	5	3	0	Tidak
65	3	4	5	1	2	1	3	5	0	1	3	Tidak
66	3	4	5	2	1	1	3	0	5	0	3	Tidak
67	3	5	1	2	4	2	0	1	3	5	0	Tidak
68	3	5	1	4	2	2	0	3	1	3	0	Tidak
69	3	5	2	1	4	2	1	0	3	0	5	Tidak
70	3	5	2	4	1	2	1	3	0	3	5	Tidak
71	3	5	4	1	2	2	3	0	1	0	3	Tidak
72	3	5	4	2	1	2	3	1	0	5	3	Tidak
73	4	1	2	3	5	5	3	4	0	1	2	Ya
74	4	1	2	5	3	5	3	0	4	5	2	Tidak
75	4	1	3	2	5	5	4	3	0	2	1	Ya
76	4	1	3	5	2	5	4	0	3	5	1	Tidak
77	4	1	5	2	3	5	0	3	4	2	5	Tidak
78	4	1	5	3	2	5	0	4	3	1	5	Tidak
79	4	2	1	3	5	0	3	5	1	0	2	Tidak
80	4	2	1	5	3	0	3	1	5	4	2	Ya
81	4	2	3	1	5	0	5	3	1	2	0	Tidak
82	4	2	3	5	1	0	5	1	3	4	0	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
83	4	2	5	1	3	0	1	3	5	2	4	Ya
84	4	2	5	3	1	0	1	5	3	0	4	Tidak
85	4	3	1	2	5	1	4	5	2	0	1	Tidak
86	4	3	1	5	2	1	4	2	5	3	1	Tidak
87	4	3	2	1	5	1	5	4	2	1	0	Tidak
88	4	3	2	5	1	1	5	2	4	3	0	Ya
89	4	3	5	1	2	1	2	4	5	1	3	Tidak
90	4	3	5	2	1	1	2	5	4	0	3	Ya
91	4	5	1	2	3	3	0	1	2	4	5	Ya
92	4	5	1	3	2	3	0	2	1	3	5	Tidak
93	4	5	2	1	3	3	1	0	2	5	4	Ya
94	4	5	2	3	1	3	1	2	0	3	4	Tidak
95	4	5	3	1	2	3	2	0	1	5	3	Tidak
96	4	5	3	2	1	3	2	1	0	4	3	Tidak
97	5	1	2	3	4	0	3	4	5	0	1	Tidak
98	5	1	2	4	3	0	3	5	4	5	1	Tidak
99	5	1	3	2	4	0	4	3	5	1	0	Tidak
100	5	1	3	4	2	0	4	5	3	5	0	Tidak
101	5	1	4	2	3	0	5	3	4	1	5	Tidak
102	5	1	4	3	2	0	5	4	3	0	5	Tidak
103	5	2	1	3	4	1	3	5	0	5	1	Tidak
104	5	2	1	4	3	1	3	0	5	4	1	Tidak
105	5	2	3	1	4	1	5	3	0	1	5	Tidak
106	5	2	3	4	1	1	5	0	3	4	5	Tidak
107	5	2	4	1	3	1	0	3	5	1	4	Tidak
108	5	2	4	3	1	1	0	5	3	5	4	Tidak
109	5	3	1	2	4	2	4	5	1	5	0	Tidak
110	5	3	1	4	2	2	4	1	5	3	0	Ya
111	5	3	2	1	4	2	5	4	1	0	5	Tidak
112	5	3	2	4	1	2	5	1	4	3	5	Tidak
113	5	3	4	1	2	2	7	4	5	0	3	Ya
114	5	3	4	2	1	2	1	5	4	5	3	Tidak
115	5	4	1	2	3	3	5	0	1	4	5	Tidak
116	5	4	1	3	2	3	5	1	0	3	5	Tidak

117	5	4	2	1	3	3	0	5	1	5	4	Tidak
118	5	4	2	3	1	3	0	1	5	3	4	Tidak
119	5	4	3	1	2	3	1	5	0	5	3	Tidak
120	5	4	3	2	1	3	1	0	5	4	3	Tidak

Keterangan:

"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama. "Ya" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *vertex-graceful* karena $f^{+}: E(G_1) \rightarrow Z_6$ merupakan pemetaan *bijektif.*

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *strong vertex-graceful* atau tidak.

Tabel 3.1.6 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_1

No	f					$f^{+}(\neg mod)$						Ket
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_2, v_5)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
1	1	2	3	4	5	3	5	6	7	8	9	Tidak
2	1	2	3	5	4	3	5	7	6	7	9	Tidak
3	1	2	4	3	5	3	6	5	7	9	8	Tidak
4	1	2	4	5	3	3	6	7	5	7	8	Tidak
5	1	2	5	3	4	3	7	5	6	9	7	Tidak
6	1	2	5	4	3	3	7	6	5	8	7	Tidak
7	1	3	2	4	5	4	5	7	8	7	9	Tidak
8	1	3	2	5	4	4	5	8	7	6	9	Ya
9	1	3	4	2	5	4	7	5	8	9	7	Tidak
10	1	3	4	5	2	4	7	8	5	6	7	Tidak
11	1	3	5	2	4	4	8	5	7	9	6	Ya
12	1	3	5	4	2	4	8	7	5	7	6	Tidak
13	1	4	2	3	5	5	6	7	9	7	8	Tidak
14	1	4	2	5	3	5	6	9	7	5	8	Tidak
15	1	4	3	2	5	5	7	6	9	8	7	Tidak
16	1	4	3	5	2	5	7	9	6	5	7	Tidak
17	1	4	5	2	3	5	9	6	7	8	5	Tidak
18	1	4	5	3	2	5	9	7	6	7	5	Tidak
19	1	5	2	3	4	6	7	8	9	6	7	Tidak
20	1	5	2	4	3	6	7	9	8	5	7	Tidak
21	1	5	3	2	4	6	8	7	9	7	6	Tidak
22	1	5	3	4	2	6	8	9	7	5	6	Tidak
23	1	5	4	2	3	6	9	7	8	7	5	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
24	1	5	4	3	2	6	9	8	7	6	5	Tidak
25	2	1	3	4	5	3	4	5	6	8	9	Tidak
26	2	1	3	5	4	3	4	6	5	7	9	Tidak
27	2	1	4	3	5	3	5	4	6	9	8	Tidak
28	2	1	4	5	3	3	5	6	4	7	8	Ya
29	2	1	5	3	4	3	6	4	5	9	7	Tidak
30	2	1	5	4	3	3	6	5	4	8	7	Ya
31	2	3	1	4	5	5	4	7	8	6	9	Ya
32	2	3	1	5	4	5	4	8	7	5	9	Tidak
33	2	3	4	1	5	5	7	4	8	9	6	Ya
34	2	3	4	5	1	5	7	8	4	5	6	Tidak
35	2	3	5	1	4	5	8	4	7	9	5	Tidak
36	2	3	5	4	1	5	8	7	4	6	5	Tidak
37	2	4	1	3	5	6	5	7	9	6	8	Tidak
38	2	4	1	5	3	6	5	9	7	4	8	Ya
39	2	4	3	1	5	6	7	5	9	8	6	Tidak
40	2	4	3	5	1	6	7	9	5	4	6	Tidak
41	2	4	5	1	3	6	9	5	7	8	4	Ya
42	2	4	5	3	1	6	9	7	5	6	4	Tidak
43	2	5	1	3	4	7	6	8	9	5	7	Tidak
44	2	5	1	4	3	7	6	9	8	4	7	Tidak
45	2	5	3	1	4	7	8	6	9	7	5	Tidak
46	2	5	3	4	1	7	8	9	6	4	5	Ya
47	2	5	4	1	3	7	9	6	8	7	4	Tidak
48	2	5	4	3	1	7	9	8	6	5	4	Ya
49	3	1	2	4	5	4	3	5	6	7	9	Tidak
50	3	1	2	5	4	4	3	6	5	6	9	Tidak
51	3	1	4	2	5	4	5	3	6	9	7	Tidak
52	3	1	4	5	2	4	5	6	3	6	7	Tidak
53	3	1	5	2	4	4	6	3	5	9	6	Tidak
54	3	1	5	4	2	4	6	5	3	7	6	Tidak
55	3	2	1	4	5	5	3	6	7	6	9	Tidak
56	3	2	1	5	4	5	3	7	6	5	9	Tidak
57	3	2	4	1	5	5	6	3	7	9	6	Tidak
58	3	2	4	5	1	5	6	7	3	5	6	Tidak
59	3	2	5	1	4	5	7	3	6	9	5	Tidak
60	3	2	5	4	1	5	7	6	3	6	5	Tidak
61	3	4	1	2	5	7	5	6	9	6	7	Tidak

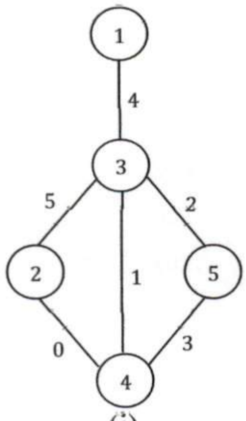
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
62	3	4	1	5	2	7	5	9	6	3	7	Tidak
63	3	4	2	1	5	7	6	5	9	7	6	Tidak
64	3	4	2	5	1	7	6	9	5	3	6	Tidak
65	3	4	5	1	2	7	9	5	6	7	3	Tidak
66	3	4	5	2	1	7	9	6	5	6	3	Tidak
67	3	5	1	2	4	8	6	7	9	5	6	Tidak
68	3	5	1	4	2	8	6	9	7	3	6	Tidak
69	3	5	2	1	4	8	7	6	9	6	5	Tidak
70	3	5	2	4	1	8	7	9	6	3	5	Tidak
71	3	5	4	1	2	8	9	6	7	6	3	Tidak
72	3	5	4	2	1	8	9	7	6	5	3	Tidak
73	4	1	2	3	5	5	3	4	6	7	8	Ya
74	4	1	2	5	3	5	3	6	4	5	8	Tidak
75	4	1	3	2	5	5	4	3	6	8	7	Ya
76	4	1	3	5	2	5	4	6	3	5	7	Tidak
77	4	1	5	2	3	5	6	3	4	8	5	Tidak
78	4	1	5	3	2	5	6	4	3	7	5	Tidak
79	4	2	1	3	5	6	3	5	7	6	8	Tidak
80	4	2	1	5	3	6	3	7	5	4	8	Ya
81	4	2	3	1	5	6	5	3	7	8	6	Tidak
82	4	2	3	5	1	6	5	7	3	4	6	Tidak
83	4	2	5	1	3	6	7	3	5	8	4	Ya
84	4	2	5	3	1	6	7	5	3	6	4	Tidak
85	4	3	1	2	5	7	4	5	8	6	7	Tidak
86	4	3	1	5	2	7	4	8	5	3	7	Tidak
87	4	3	2	1	5	7	5	4	8	7	6	Tidak
88	4	3	2	5	1	7	5	8	4	3	6	Ya
89	4	3	5	1	2	7	8	4	5	7	3	Tidak
90	4	3	5	2	1	7	8	5	4	6	3	Ya
91	4	5	1	2	3	9	6	7	8	4	5	Ya
92	4	5	1	3	2	9	6	8	7	3	5	Tidak
93	4	5	2	1	3	9	7	6	8	5	4	Ya
94	4	5	2	3	1	9	7	8	6	3	4	Tidak
95	4	5	3	1	2	9	8	6	7	5	3	Tidak
96	4	5	3	2	1	9	8	7	6	4	3	Tidak
97	5	1	2	3	4	6	3	4	5	6	7	Tidak
98	5	1	2	4	3	6	3	5	4	5	7	Tidak
99	5	1	3	2	4	6	4	3	5	7	6	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
100	5	1	3	4	2	6	4	5	3	5	6	Tidak
101	5	1	4	2	3	6	5	3	4	7	5	Tidak
102	5	1	4	3	2	6	5	4	3	6	5	Tidak
103	5	2	1	3	4	7	3	5	6	5	7	Tidak
104	5	2	1	4	3	7	3	6	5	4	7	Tidak
105	5	2	3	1	4	7	5	3	6	7	5	Tidak
106	5	2	3	4	1	7	5	6	3	4	5	Tidak
107	5	2	4	1	3	7	6	3	5	7	4	Tidak
108	5	2	4	3	1	7	6	5	3	5	4	Tidak
109	5	3	1	2	4	8	4	5	7	5	6	Tidak
110	5	3	1	4	2	8	4	7	5	3	6	Ya
111	5	3	2	1	4	8	5	4	7	6	5	Tidak
112	5	3	2	4	1	8	5	7	4	3	5	Tidak
113	5	3	4	1	2	8	7	4	5	6	3	Ya
114	5	3	4	2	1	8	7	5	4	5	3	Tidak
115	5	4	1	2	3	9	5	6	7	4	5	Tidak
116	5	4	1	3	2	9	5	7	6	3	5	Tidak
117	5	4	2	1	3	9	6	5	7	5	4	Tidak
118	5	4	2	3	1	9	6	7	5	3	4	Tidak
119	5	4	3	1	2	9	7	5	6	5	3	Tidak
120	5	4	3	2	1	9	7	6	5	4	3	Tidak

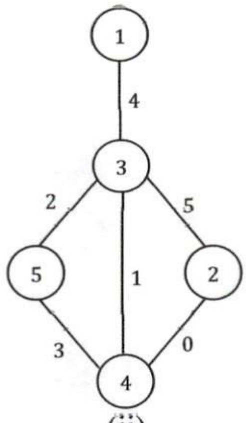
Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif*. "Ya" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya *konsekutif*.

Dari tabel, dapat dilihat bahwa pada graf G_1 terdapat 20 pelabelan *vertex-graceful* yang juga pelabelan *strong vertex-graceful*.

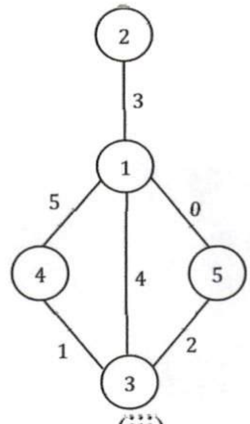
Gambar untuk graf G_1 yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* adalah sebagai berikut:



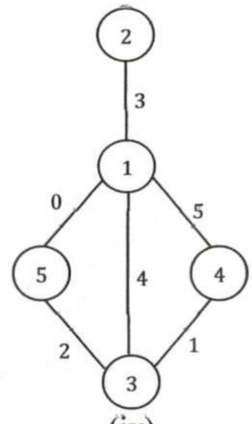
(i)



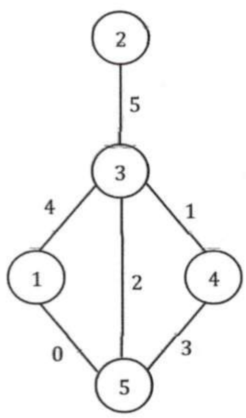
(ii)



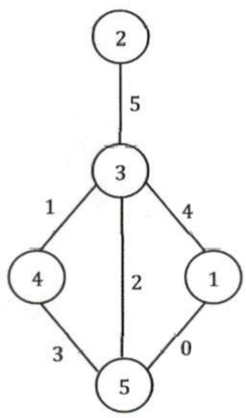
(iii)



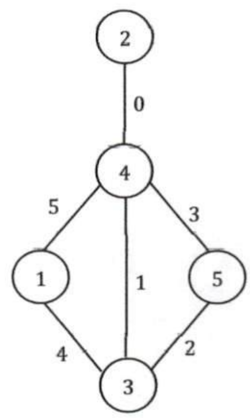
(iv)



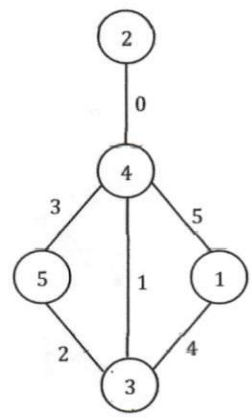
(v)



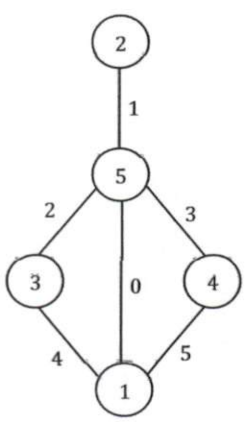
(vi)



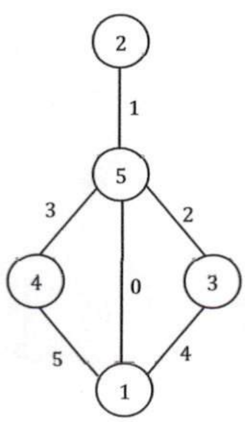
(vii)



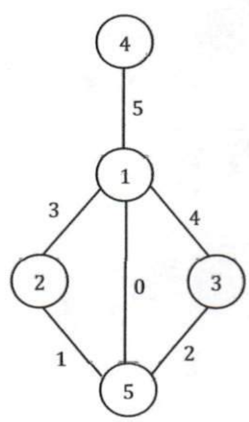
(viii)



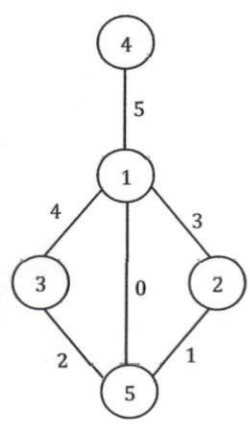
(ix)



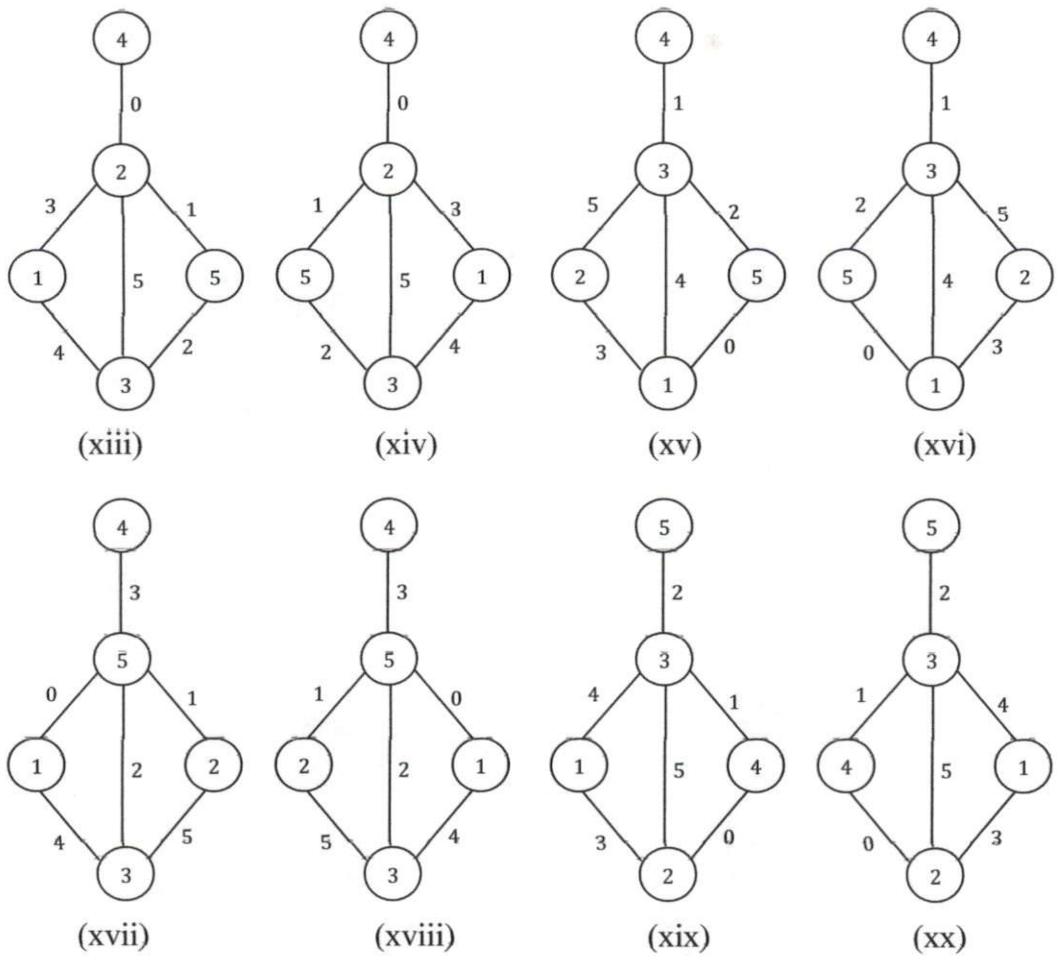
(x)



(xi)

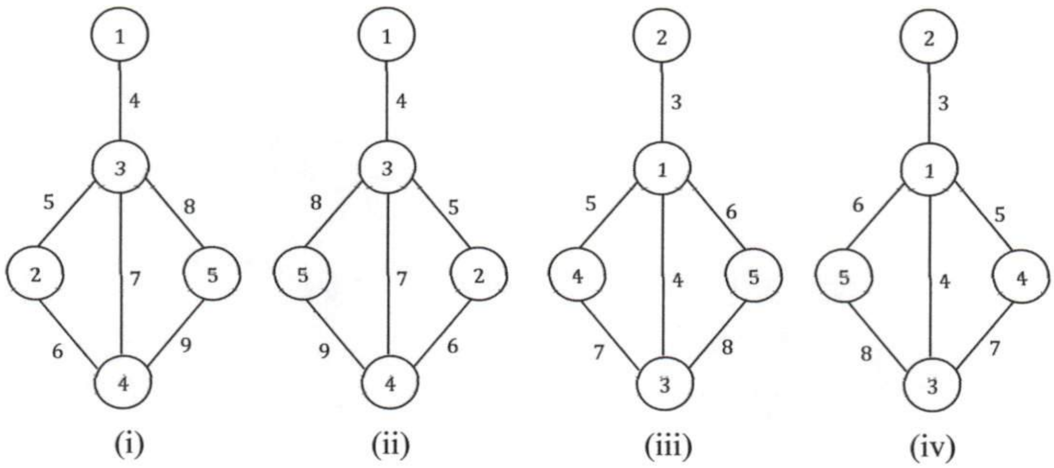


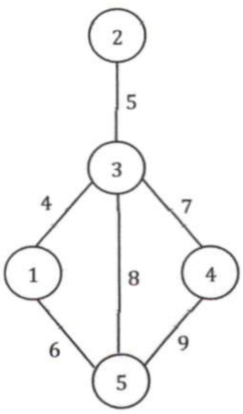
(xii)

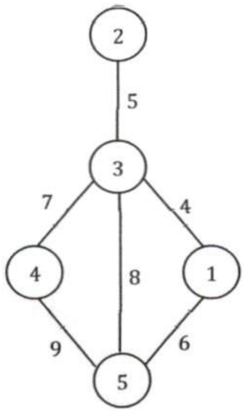


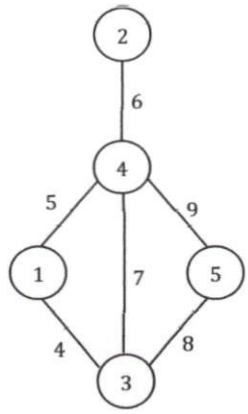
Gambar 3.1.10 Graf G_1 yang merupakan Pelabelan *vertex-graceful*

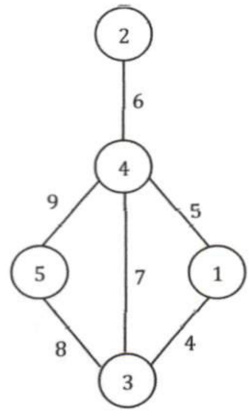
Sedangkan gambar untuk graf G_1 yang merupakan pelabelan *strong vertex-graceful* adalah sebagai berikut:

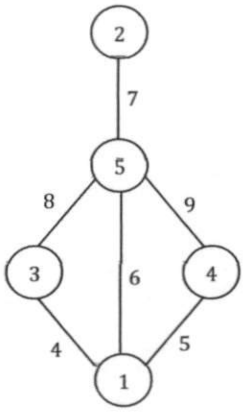


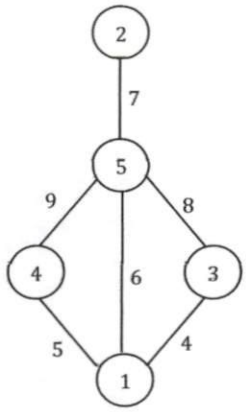

(v)

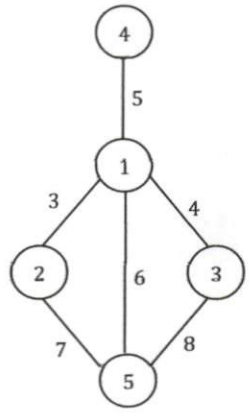

(vi)

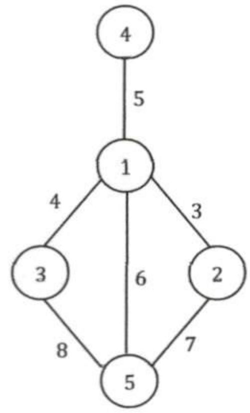

(vii)

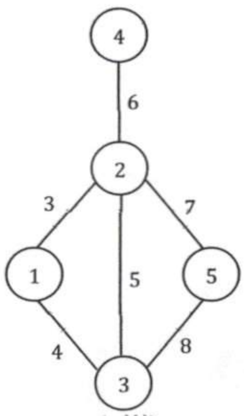

(viii)

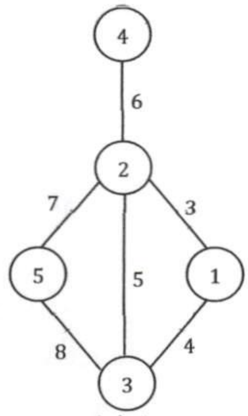

(ix)

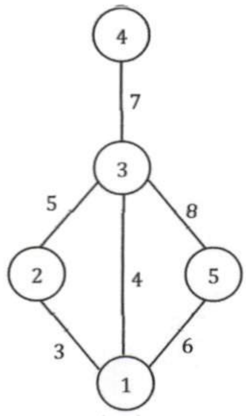

(x)

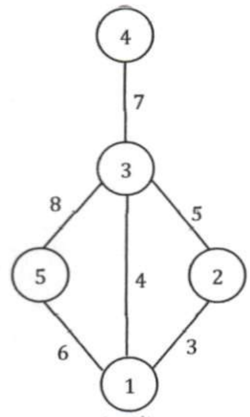

(xi)

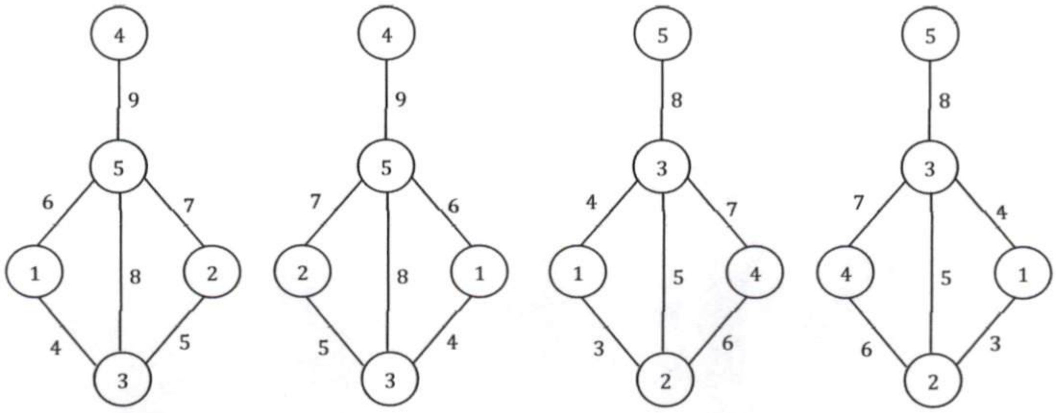

(xii)


(xiii)


(xiv)


(xv)


(xvi)

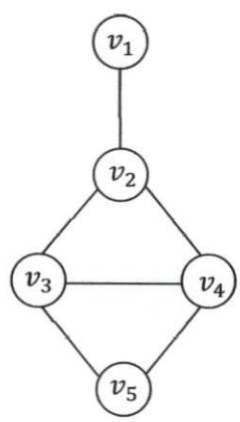


(xvii) (xviii) (xix) (xx)

Gambar 3.1.11 Graf G_1 yang merupakan Pelabelan *strong vertex-graceful*

Jadi, graf G_1 merupakan pelabelan *vertex-graceful* dan pelabelan *strong vertex-graceful.*

b) Untuk graf G_2 (ada 120 kemungkinan). Misalkan $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.



Gambar 3.1.12 Ilustrasi $V(G_2)$

– Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(G_2) \to \{1,2,3,4,5\}$.

$$v_1 \mapsto 1,$$

$$v_2 \mapsto 2,$$

$$v_3 \mapsto 3,$$

$$v_4 \mapsto 4,$$

$$v_5 \mapsto 5,$$

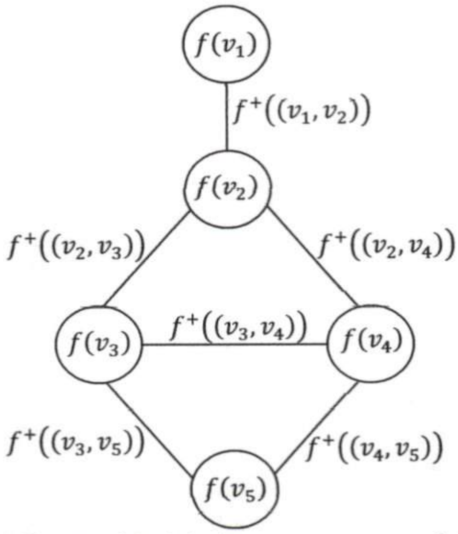
dan $f^+: E(G_2) \to Z_q$ dimana $q = 6$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \, mod \, 6, \qquad j \neq k$$

dan $f^+(\neg mod): E(G_2) \to \left\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\right\}$

$$(v_j, v_k) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful.*



Gambar 3.1.13 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_2 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+((v_1, v_2)) = (f(v_1) + f(v_2)) \, mod \, 6 = (1 + 2) \, mod \, 6 = 3$$

$$f^+((v_2, v_3)) = (f(v_2) + f(v_3)) \, mod \, 6 = (2 + 3) \, mod \, 6 = 5$$

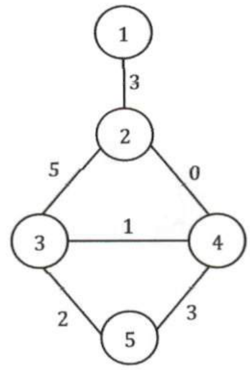
$$f^+((v_2, v_4)) = (f(v_2) + f(v_4)) \, mod \, 6 = (2 + 4) \, mod \, 6 = 0$$

$$f^+((v_3, v_4)) = (f(v_3) + f(v_4)) \, mod \, 6 = (3 + 4) \, mod \, 6 = 1$$

$$f^+((v_3, v_5)) = (f(v_3) + f(v_5)) \, mod \, 6 = (3 + 5) \, mod \, 6 = 2$$

$$f^+((v_4, v_5)) = (f(v_4) + f(v_5)) \, mod \, 6 = (4 + 5) \, mod \, 6 = 3.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.1.14 Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_2 yang sudah dilabeli (I)

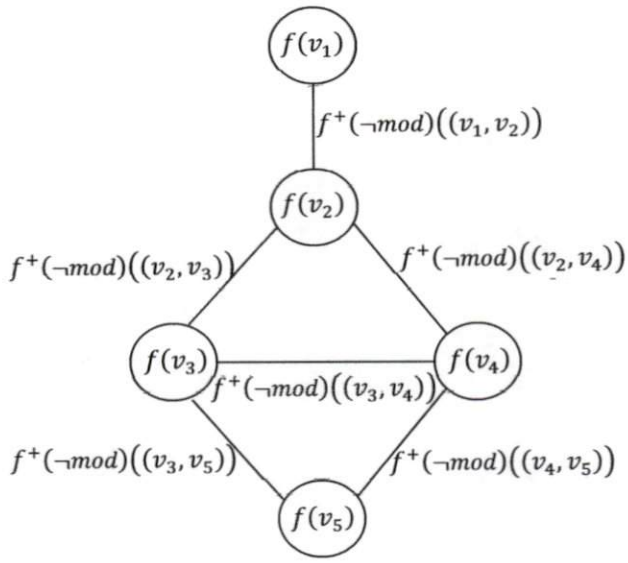
Karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1.7 Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_2 (I)

f					f^+						Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
1	2	3	4	5	3	5	0	1	2	3	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama.

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful.*



Gambar 3.1.15 Ilustrasi Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_2 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+(\neg mod)((v_1, v_2)) = f(v_1) + f(v_2) = 1 + 2 = 3$$

$$f^+(\neg mod)((v_2, v_3)) = f(v_2) + f(v_3) = 2 + 3 = 5$$

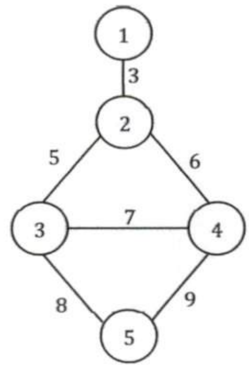
$$f^+(\neg mod)((v_2, v_4)) = f(v_2) + f(v_4) = 2 + 4 = 6$$

$$f^+(\neg mod)((v_3, v_4)) = f(v_3) + f(v_4) = 3 + 4 = 7$$

$$f^+(\neg mod)((v_3, v_5)) = f(v_3) + f(v_5) = 3 + 5 = 8$$

$$f^+(\neg mod)((v_4, v_5)) = f(v_4) + f(v_5) = 4 + 5 = 9.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.1.16 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_2 yang sudah dilabeli (I)

Karena pelabelan di atas sisinya tidak *konsekutif* maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *strong vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1.8 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_2 (I)

f					$f^+(\neg mod)$						Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
1	2	3	4	5	3	5	6	7	8	9	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif.*

- Kemungkinan kedua, definisikan $f: V(G_2) \rightarrow \{1,2,3,4,5\}$.

$$v_1 \mapsto 1,$$
$$v_2 \mapsto 3,$$
$$v_3 \mapsto 2,$$
$$v_4 \mapsto 5,$$
$$v_5 \mapsto 4,$$

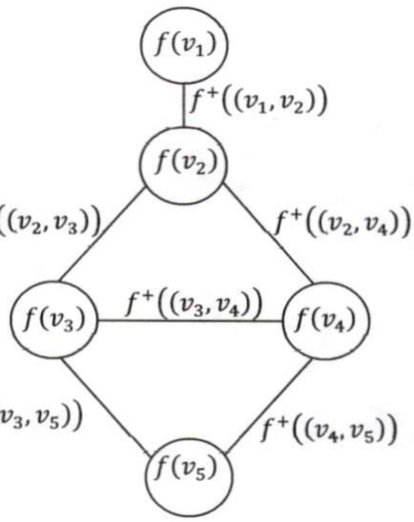
dan $f^+: E(G_2) \rightarrow Z_q$ dimana $q = 6$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \, mod \, 6, \qquad j \neq k$$

dan $f^+(\neg mod): E(G_2) \rightarrow \left\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\right\}$

$$(v_j, v_k) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful.*



Gambar 3.1.17 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_2 (II)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+((v_1, v_2)) = (f(v_1) + f(v_2))\ mod\ 6 = (1 + 3)\ mod\ 6 = 4$$

$$f^+((v_2, v_3)) = (f(v_2) + f(v_3))\ mod\ 6 = (3 + 2)\ mod\ 6 = 5$$

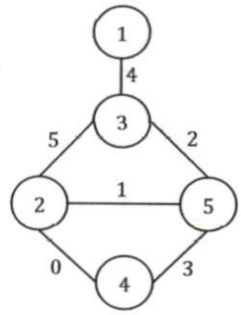
$$f^+((v_2, v_4)) = (f(v_2) + f(v_4))\ mod\ 6 = (3 + 5)\ mod\ 6 = 2$$

$$f^+((v_3, v_4)) = (f(v_3) + f(v_4))\ mod\ 6 = (2 + 5)\ mod\ 6 = 1$$

$$f^+((v_3, v_5)) = (f(v_3) + f(v_5))\ mod\ 6 = (2 + 4)\ mod\ 6 = 0$$

$$f^+((v_4, v_5)) = (f(v_4) + f(v_5))\ mod\ 6 = (5 + 4)\ mod\ 6 = 3.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.1.18 Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_2 yang sudah dilabeli (II)

Karena $f^+: E(G_2) \to Z_6$ merupakan pemetaan *bijektif* maka pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful*. Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

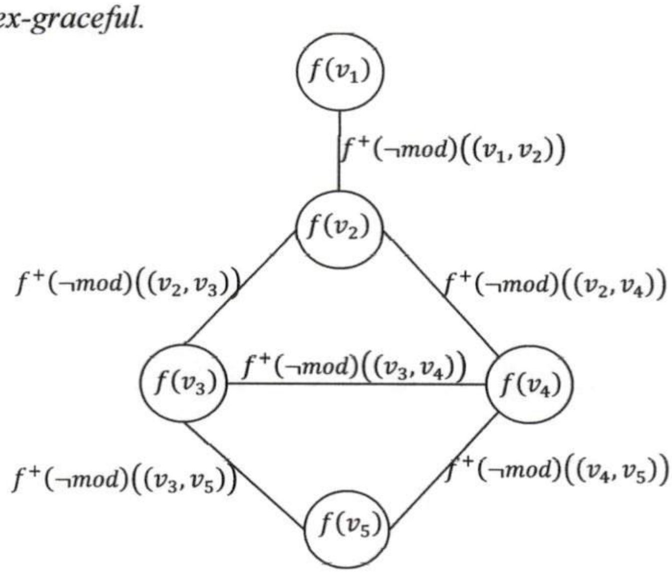
Tabel 3.1.9 Pelabelan *vertex-graceful* Graf G2 (II)

f					f^+						Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
1	3	2	5	4	4	5	2	1	0	3	Ya

Keterangan:

"Ya" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *vertex-graceful* karena $f^+: E(G_2) \to Z_6$ merupakan pemetaan *bijektif*.

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful*.



Gambar 3.1.19 Ilustrasi Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G2 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+(\neg mod)((v_1, v_2)) = f(v_1) + f(v_2) = 1 + 3 = 4$$

$$f^+(\neg mod)((v_2, v_3)) = f(v_2) + f(v_3) = 3 + 2 = 5$$

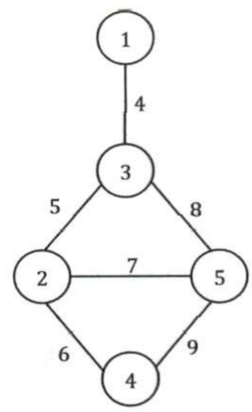
$$f^+(\neg mod)((v_2, v_4)) = f(v_2) + f(v_4) = 3 + 5 = 8$$

$$f^+(\neg mod)((v_3, v_4)) = f(v_3) + f(v_4) = 2 + 5 = 7$$

$$f^+(\neg mod)((v_3, v_5)) = f(v_3) + f(v_5) = 2 + 4 = 6$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_4, v_5)\big) = f(v_4) + f(v_5) = 5 + 4 = 9$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.1.20 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_2 yang sudah dilabeli (II)

Karena pelabelan di atas sisinya *konsekutif* maka pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1.10 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_2 (II)

f					$f^{+}(\neg mod)$						Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
1	3	2	5	4	4	5	8	7	6	9	Ya

Keterangan:
"Ya" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya *konsekutif.*

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *vertex-graceful* atau tidak.

Tabel 3.1.11 Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_2

No	f					f^{+}						Ket
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
1	1	2	3	4	5	3	5	0	1	2	3	Tidak
2	1	2	3	5	4	3	5	1	2	1	3	Tidak
3	1	2	4	3	5	3	0	5	1	3	2	Tidak
4	1	2	4	5	3	3	0	1	3	1	2	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
5	1	2	5	3	4	3	1	5	2	3	1	Tidak
6	1	2	5	4	3	3	1	0	3	2	1	Tidak
7	1	3	2	4	5	4	5	1	0	1	3	Tidak
8	1	3	2	5	4	4	5	2	1	0	3	Ya
9	1	3	4	2	5	4	1	5	0	3	1	Tidak
10	1	3	4	5	2	4	1	2	3	0	1	Tidak
11	1	3	5	2	4	4	2	5	1	3	0	Ya
12	1	3	5	4	2	4	2	1	3	1	0	Tidak
13	1	4	2	3	5	5	0	1	5	1	2	Tidak
14	1	4	2	5	3	5	0	3	1	5	2	Tidak
15	1	4	3	2	5	5	1	0	5	2	1	Tidak
16	1	4	3	5	2	5	1	3	2	5	1	Tidak
17	1	4	5	2	3	5	3	0	1	2	5	Tidak
18	1	4	5	3	2	5	3	1	2	1	5	Tidak
19	1	5	2	3	4	0	1	2	5	0	1	Tidak
20	1	5	2	4	3	0	1	3	0	5	1	Tidak
21	1	5	3	2	4	0	2	1	5	1	0	Tidak
22	1	5	3	4	2	0	2	3	1	5	0	Tidak
23	1	5	4	2	3	0	3	1	0	1	5	Tidak
24	1	5	4	3	2	0	3	2	1	0	5	Tidak
25	2	1	3	4	5	3	4	5	1	2	3	Tidak
26	2	1	3	5	4	3	4	0	2	1	3	Tidak
27	2	1	4	3	5	3	5	4	1	3	2	Tidak
28	2	1	4	5	3	3	5	0	3	1	2	Tidak
29	2	1	5	3	4	3	0	4	2	3	1	Tidak
30	2	1	5	4	3	3	0	5	3	2	1	Tidak
31	2	3	1	4	5	5	4	1	5	0	3	Tidak
32	2	3	1	5	4	5	4	2	0	5	3	Tidak
33	2	3	4	1	5	5	1	4	5	3	0	Tidak
34	2	3	4	5	1	5	1	2	3	5	0	Tidak
35	2	3	5	1	4	5	2	4	0	3	5	Tidak
36	2	3	5	4	1	5	2	1	3	0	5	Tidak
37	2	4	1	3	5	0	5	1	4	0	2	Tidak
38	2	4	1	5	3	0	5	3	0	4	2	Tidak
39	2	4	3	1	5	0	1	5	4	2	0	Tidak
40	2	4	3	5	1	0	1	3	2	4	0	Tidak
41	2	4	5	1	3	0	3	5	0	2	4	Tidak
42	2	4	5	3	1	0	3	1	2	0	4	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
43	2	5	1	3	4	1	0	2	4	5	1	Tidak
44	2	5	1	4	3	1	0	3	5	4	1	Tidak
45	2	5	3	1	4	1	2	0	4	1	5	Tidak
46	2	5	3	4	1	1	2	3	1	4	5	Tidak
47	2	5	4	1	3	1	3	0	5	1	4	Tidak
48	2	5	4	3	1	1	3	2	1	5	4	Tidak
49	3	1	2	4	5	4	3	5	0	1	3	Tidak
50	3	1	2	5	4	4	3	0	1	0	3	Tidak
51	3	1	4	2	5	4	5	3	0	3	1	Tidak
52	3	1	4	5	2	4	5	0	3	0	1	Tidak
53	3	1	5	2	4	4	0	3	1	3	0	Tidak
54	3	1	5	4	2	4	0	5	3	1	0	Tidak
55	3	2	1	4	5	5	3	0	5	0	3	Tidak
56	3	2	1	5	4	5	3	1	0	5	3	Tidak
57	3	2	4	1	5	5	0	3	5	3	0	Tidak
58	3	2	4	5	1	5	0	1	3	5	0	Tidak
59	3	2	5	1	4	5	1	3	0	3	5	Tidak
60	3	2	5	4	1	5	1	0	3	0	5	Tidak
61	3	4	1	2	5	1	5	0	3	0	1	Tidak
62	3	4	1	5	2	1	5	3	0	3	1	Tidak
63	3	4	2	1	5	1	0	5	3	1	0	Tidak
64	3	4	2	5	1	1	0	3	1	3	0	Tidak
65	3	4	5	1	2	1	3	5	0	1	3	Tidak
66	3	4	5	2	1	1	3	0	1	0	3	Tidak
67	3	5	1	2	4	2	0	1	3	5	0	Tidak
68	3	5	1	4	2	2	0	3	5	3	0	Tidak
69	3	5	2	1	4	2	1	0	3	0	5	Tidak
70	3	5	2	4	1	2	1	3	0	3	5	Tidak
71	3	5	4	1	2	2	3	0	5	0	3	Tidak
72	3	5	4	2	1	2	3	1	0	5	3	Tidak
73	4	1	2	3	5	5	3	4	5	1	2	Tidak
74	4	1	2	5	3	5	3	0	1	5	2	Tidak
75	4	1	3	2	5	5	4	3	5	2	1	Tidak
76	4	1	3	5	2	5	4	0	2	5	1	Tidak
77	4	1	5	2	3	5	0	3	1	2	5	Tidak
78	4	1	5	3	2	5	0	4	2	1	5	Tidak
79	4	2	1	3	5	0	3	5	4	0	2	Tidak
80	4	2	1	5	3	0	3	1	0	4	2	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
81	4	2	3	1	5	0	5	3	4	2	0	Tidak
82	4	2	3	5	1	0	5	1	2	4	0	Tidak
83	4	2	5	1	3	0	1	3	0	2	4	Tidak
84	4	2	5	3	1	0	1	5	2	0	4	Tidak
85	4	3	1	2	5	1	4	5	3	0	1	Tidak
86	4	3	1	5	2	1	4	2	0	3	1	Tidak
87	4	3	2	1	5	1	5	4	3	1	0	Tidak
88	4	3	2	5	1	1	5	2	1	3	0	Tidak
89	4	3	5	1	2	1	2	4	0	1	3	Tidak
90	4	3	5	2	1	1	2	5	1	0	3	Tidak
91	4	5	1	2	3	3	0	1	3	4	5	Tidak
92	4	5	1	3	2	3	0	2	4	3	5	Tidak
93	4	5	2	1	3	3	1	0	3	5	4	Tidak
94	4	5	2	3	1	3	1	2	5	3	4	Tidak
95	4	5	3	1	2	3	2	0	4	5	3	Tidak
96	4	5	3	2	1	3	2	1	5	4	3	Tidak
97	5	1	2	3	4	0	3	4	5	0	1	Tidak
98	5	1	2	4	3	0	3	5	0	5	1	Tidak
99	5	1	3	2	4	0	4	3	5	1	0	Tidak
100	5	1	3	4	2	0	4	5	1	5	0	Tidak
101	5	1	4	2	3	0	5	3	0	1	5	Tidak
102	5	1	4	3	2	0	5	4	1	0	5	Tidak
103	5	2	1	3	4	1	3	5	4	5	1	Tidak
104	5	2	1	4	3	1	3	0	5	4	1	Tidak
105	5	2	3	1	4	1	5	3	4	1	5	Tidak
106	5	2	3	4	1	1	5	0	1	4	5	Tidak
107	5	2	4	1	3	1	0	3	5	1	4	Tidak
108	5	2	4	3	1	1	0	5	1	5	4	Tidak
109	5	3	1	2	4	2	4	5	3	5	0	Tidak
110	5	3	1	4	2	2	4	1	5	3	0	Ya
111	5	3	2	1	4	2	5	4	3	0	5	Tidak
112	5	3	2	4	1	2	5	1	0	3	5	Tidak
113	5	3	4	1	2	2	1	4	5	0	3	Ya
114	5	3	4	2	1	2	1	5	0	5	3	Tidak
115	5	4	1	2	3	3	5	0	3	4	5	Tidak
116	5	4	1	3	2	3	5	1	4	3	5	Tidak
117	5	4	2	1	3	3	0	5	3	5	4	Tidak
118	5	4	2	3	1	3	0	1	5	3	4	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
119	5	4	3	1	2	3	1	5	4	5	3	Tidak
120	5	4	3	2	1	3	1	0	5	4	3	Tidak

Keterangan:

"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama. "Ya" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *vertex-graceful* karena $f^+: E(G_2) \rightarrow Z_6$ merupakan pemetaan *bijektif.*

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *strong vertex-graceful* atau tidak.

Tabel 3.1.12 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_2

No	f					$f^+(\neg mod)$						Ket
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
1	1	2	3	4	5	3	5	6	7	8	9	Tidak
2	1	2	3	5	4	3	5	7	8	7	9	Tidak
3	1	2	4	3	5	3	6	5	7	9	8	Tidak
4	1	2	4	5	3	3	6	7	9	7	8	Tidak
5	1	2	5	3	4	3	7	5	8	9	7	Tidak
6	1	2	5	4	3	3	7	6	9	8	7	Tidak
7	1	3	2	4	5	4	5	7	6	7	9	Tidak
8	1	3	2	5	4	4	5	8	7	6	9	Ya
9	1	3	4	2	5	4	7	5	6	9	7	Tidak
10	1	3	4	5	2	4	7	8	9	6	7	Tidak
11	1	3	5	2	4	4	8	5	7	9	6	Ya
12	1	3	5	4	2	4	8	7	9	7	6	Tidak
13	1	4	2	3	5	5	6	7	5	7	8	Tidak
14	1	4	2	5	3	5	6	9	7	5	8	Tidak
15	1	4	3	2	5	5	7	6	5	8	7	Tidak
16	1	4	3	5	2	5	7	9	8	5	7	Tidak
17	1	4	5	2	3	5	9	6	7	8	5	Tidak
18	1	4	5	3	2	5	9	7	8	7	5	Tidak
19	1	5	2	3	4	6	7	8	5	6	7	Tidak
20	1	5	2	4	3	6	7	9	6	5	7	Tidak
21	1	5	3	2	4	6	8	7	5	7	6	Tidak
22	1	5	3	4	2	6	8	9	7	5	6	Tidak
23	1	5	4	2	3	6	9	7	6	7	5	Tidak
24	1	5	4	3	2	6	9	8	7	6	5	Tidak
25	2	1	3	4	5	3	4	5	7	8	9	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
26	2	1	3	5	4	3	4	6	8	7	9	Tidak
27	2	1	4	3	5	3	5	4	7	9	8	Tidak
28	2	1	4	5	3	3	5	6	9	7	8	Tidak
29	2	1	5	3	4	3	6	4	8	9	7	Tidak
30	2	1	5	4	3	3	6	5	9	8	7	Tidak
31	2	3	1	4	5	5	4	7	5	6	9	Tidak
32	2	3	1	5	4	5	4	8	6	5	9	Tidak
33	2	3	4	1	5	5	7	4	5	9	6	Tidak
34	2	3	4	5	1	5	7	8	9	5	6	Tidak
35	2	3	5	1	4	5	8	4	6	9	5	Tidak
36	2	3	5	4	1	5	8	7	9	6	5	Tidak
37	2	4	1	3	5	6	5	7	4	6	8	Tidak
38	2	4	1	5	3	6	5	9	6	4	8	Tidak
39	2	4	3	1	5	6	7	5	4	8	6	Tidak
40	2	4	3	5	1	6	7	9	8	4	6	Tidak
41	2	4	5	1	3	6	9	5	6	8	4	Tidak
42	2	4	5	3	1	6	9	7	8	6	4	Tidak
43	2	5	1	3	4	7	6	8	4	5	7	Tidak
44	2	5	1	4	3	7	6	9	5	4	7	Tidak
45	2	5	3	1	4	7	8	6	4	7	5	Tidak
46	2	5	3	4	1	7	8	9	7	4	5	Tidak
47	2	5	4	1	3	7	9	6	5	7	4	Tidak
48	2	5	4	3	1	7	9	8	7	5	4	Tidak
49	3	1	2	4	5	4	3	5	6	7	9	Tidak
50	3	1	2	5	4	4	3	6	7	6	9	Tidak
51	3	1	4	2	5	4	5	3	6	9	7	Tidak
52	3	1	4	5	2	4	5	6	9	6	7	Tidak
53	3	1	5	2	4	4	6	3	7	9	6	Tidak
54	3	1	5	4	2	4	6	5	9	7	6	Tidak
55	3	2	1	4	5	5	3	6	5	6	9	Tidak
56	3	2	1	5	4	5	3	7	6	5	9	Tidak
57	3	2	4	1	5	5	6	3	5	9	6	Tidak
58	3	2	4	5	1	5	6	7	9	5	6	Tidak
59	3	2	5	1	4	5	7	3	6	9	5	Tidak
60	3	2	5	4	1	5	7	6	9	6	5	Tidak
61	3	4	1	2	5	7	5	6	3	6	7	Tidak
62	3	4	1	5	2	7	5	9	6	3	7	Tidak
63	3	4	2	1	5	7	6	5	3	7	6	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
64	3	4	2	5	1	7	6	9	7	3	6	Tidak
65	3	4	5	1	2	7	9	5	6	7	3	Tidak
66	3	4	5	2	1	7	9	6	7	6	3	Tidak
67	3	5	1	2	4	8	6	7	3	5	6	Tidak
68	3	5	1	4	2	8	6	9	5	3	6	Tidak
69	3	5	2	1	4	8	7	6	3	6	5	Tidak
70	3	5	2	4	1	8	7	9	6	3	5	Tidak
71	3	5	4	1	2	8	9	6	5	6	3	Tidak
72	3	5	4	2	1	8	9	7	6	5	3	Tidak
73	4	1	2	3	5	5	3	4	5	7	8	Tidak
74	4	1	2	5	3	5	3	6	7	5	8	Tidak
75	4	1	3	2	5	5	4	3	5	8	7	Tidak
76	4	1	3	5	2	5	4	6	8	5	7	Tidak
77	4	1	5	2	3	5	6	3	7	8	5	Tidak
78	4	1	5	3	2	5	6	4	8	7	5	Tidak
79	4	2	1	3	5	6	3	5	4	6	8	Tidak
80	4	2	1	5	3	6	3	7	6	4	8	Tidak
81	4	2	3	1	5	6	5	3	4	8	6	Tidak
82	4	2	3	5	1	6	5	7	8	4	6	Tidak
83	4	2	5	1	3	6	7	3	6	8	4	Tidak
84	4	2	5	3	1	6	7	5	8	6	4	Tidak
85	4	3	1	2	5	7	4	5	3	6	7	Tidak
86	4	3	1	5	2	7	4	8	6	3	7	Tidak
87	4	3	2	1	5	7	5	4	3	7	6	Tidak
88	4	3	2	5	1	7	5	8	7	3	6	Tidak
89	4	3	5	1	2	7	8	4	6	7	3	Tidak
90	4	3	5	2	1	7	8	5	7	6	3	Tidak
91	4	5	1	2	3	9	6	7	3	4	5	Tidak
92	4	5	1	3	2	9	6	8	4	3	5	Tidak
93	4	5	2	1	3	9	7	6	3	5	4	Tidak
94	4	5	2	3	1	9	7	8	5	3	4	Tidak
95	4	5	3	1	2	9	8	6	4	5	3	Tidak
96	4	5	3	2	1	9	8	7	5	4	3	Tidak
97	5	1	2	3	4	6	3	4	5	6	7	Tidak
98	5	1	2	4	3	6	3	5	6	5	7	Tidak
99	5	1	3	2	4	6	4	3	5	7	6	Tidak
100	5	1	3	4	2	6	4	5	7	5	6	Tidak
101	5	1	4	2	3	6	5	3	6	7	5	Tidak

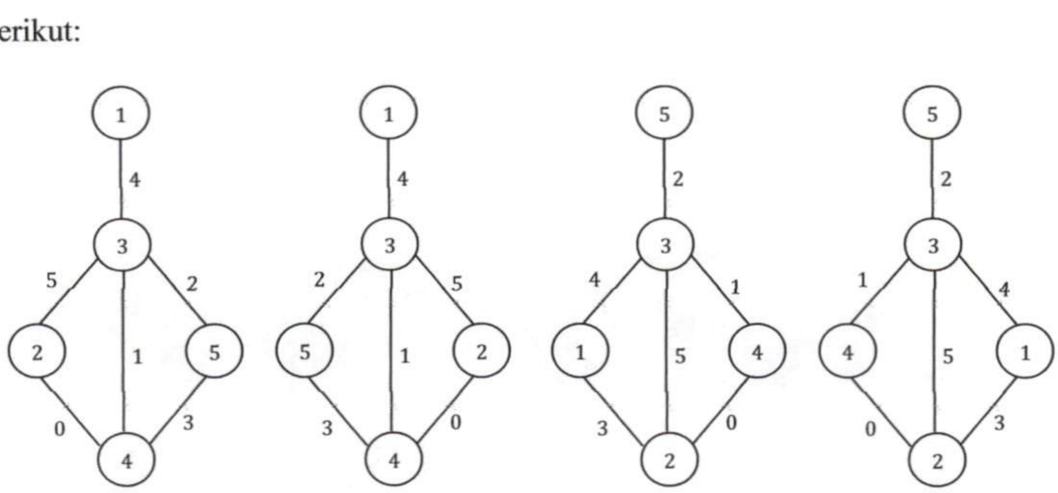
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
102	5	1	4	3	2	6	5	4	7	6	5	Tidak
103	5	2	1	3	4	7	3	5	4	5	7	Tidak
104	5	2	1	4	3	7	3	6	5	4	7	Tidak
105	5	2	3	1	4	7	5	3	4	7	5	Tidak
106	5	2	3	4	1	7	5	6	7	4	5	Tidak
107	5	2	4	1	3	7	6	3	5	7	4	Tidak
108	5	2	4	3	1	7	6	5	7	5	4	Tidak
109	5	3	1	2	4	8	4	5	3	5	6	Tidak
110	5	3	1	4	2	8	4	7	5	3	6	Ya
111	5	3	2	1	4	8	5	4	3	6	5	Tidak
112	5	3	2	4	1	8	5	7	6	3	5	Tidak
113	5	3	4	1	2	8	7	4	5	6	3	Ya
114	5	3	4	2	1	8	7	5	6	5	3	Tidak
115	5	4	1	2	3	9	5	6	3	4	5	Tidak
116	5	4	1	3	2	9	5	7	4	3	5	Tidak
117	5	4	2	1	3	9	6	5	3	5	4	Tidak
118	5	4	2	3	1	9	6	7	5	3	4	Tidak
119	5	4	3	1	2	9	7	5	4	5	3	Tidak
120	5	4	3	2	1	9	7	6	5	4	3	Tidak

Keterangan:

"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif*. "Ya" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya *konsekutif*.

Dari tabel, dapat dilihat bahwa pada graf G_2 terdapat 4 pelabelan *vertex-graceful* yang juga pelabelan *strong vertex-graceful*.

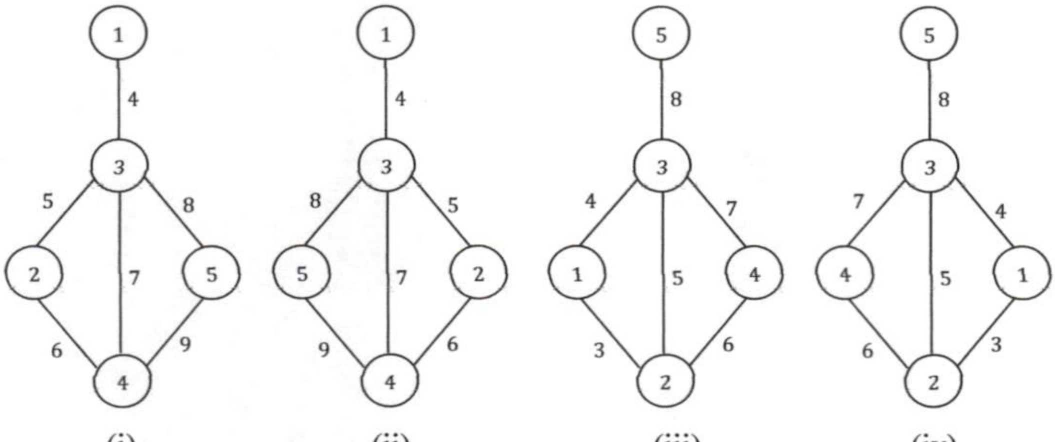
Gambar untuk graf G_2 yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* adalah sebagai berikut:



(i) (ii) (iii) (iv)

Gambar 3.1.21 Graf G_2 yang merupakan Pelabelan *vertex-graceful*

Sedangkan gambar untuk graf G_2 yang merupakan pelabelan *strong vertex-graceful* adalah sebagai berikut:

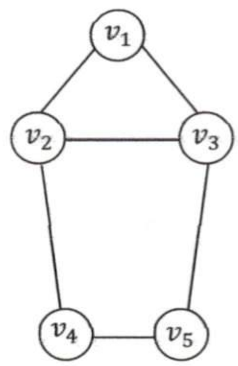


(i) (ii) (iii) (iv)

Gambar 3.1.22 Graf G_2 yang merupakan Pelabelan *strong vertex-graceful*

Jadi, graf G_2 merupakan pelabelan *vertex-graceful* dan pelabelan *strong vertex-graceful.*

c) Untuk graf G_3 (ada 120 kemungkinan). Misalkan $V(G_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.



Gambar 3.1.23 Ilustrasi $V(G_3)$

- Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(G_3) \to \{1,2,3,4,5\}$.

$$v_1 \mapsto 1,$$
$$v_2 \mapsto 2,$$
$$v_3 \mapsto 3,$$
$$v_4 \mapsto 4,$$
$$v_5 \mapsto 5,$$

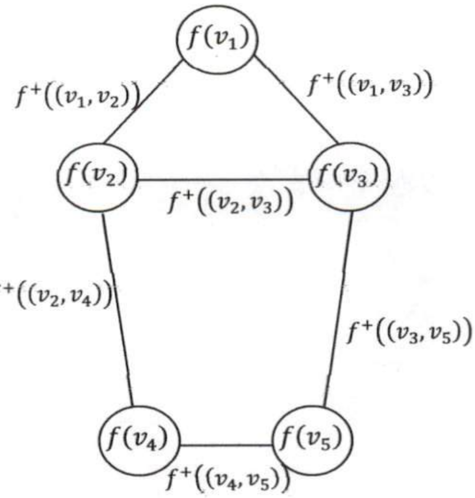
dan $f^+: E(G_3) \to Z_q$ dimana $q = 6$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \, mod \, 6, \qquad j \neq k$$

dan $f^+(\neg mod): E(G_3) \to \left\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\right\}$

$$(v_j, v_k) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful.*



Gambar 3.1.24 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_3 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+((v_1, v_2)) = (f(v_1) + f(v_2))\ mod\ 6 = (1 + 2)\ mod\ 6 = 3$$

$$f^+((v_1, v_3)) = (f(v_1) + f(v_3))\ mod\ 6 = (1 + 3)\ mod\ 6 = 4$$

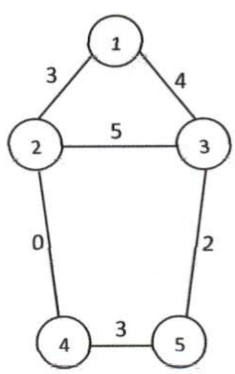
$$f^+((v_2, v_3)) = (f(v_2) + f(v_3))\ mod\ 6 = (2 + 3)\ mod\ 6 = 5$$

$$f^+((v_2, v_4)) = (f(v_2) + f(v_4))\ mod\ 6 = (2 + 4)\ mod\ 6 = 0$$

$$f^+((v_3, v_5)) = (f(v_3) + f(v_5))\ mod\ 6 = (3 + 5)\ mod\ 6 = 2$$

$$f^+((v_4, v_5)) = (f(v_4) + f(v_5))\ mod\ 6 = (4 + 5)\ mod\ 6 = 3.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.1.25 Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_3 yang sudah dilabeli (I)

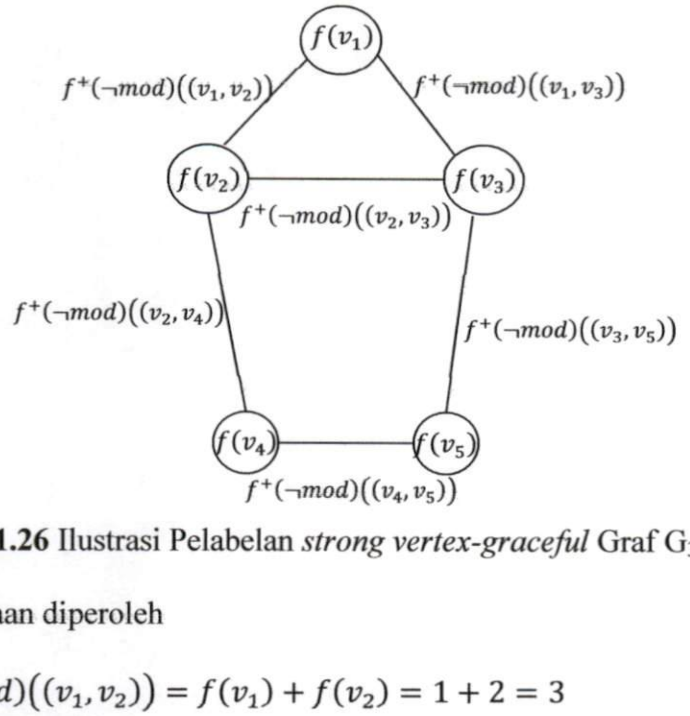
Karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1.13 Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_3 (I)

f					f^+						Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
1	2	3	4	5	3	4	0	0	2	3	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful.* Karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama.

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful.*



Gambar 3.1.26 Ilustrasi Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_3 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+(\neg mod)((v_1, v_2)) = f(v_1) + f(v_2) = 1 + 2 = 3$$

$$f^+(\neg mod)((v_1, v_3)) = f(v_1) + f(v_3) = 1 + 3 = 4$$

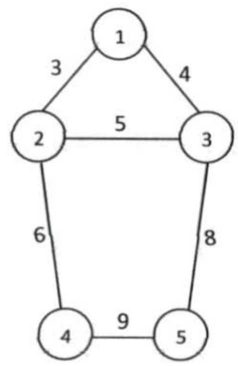
$$f^+(\neg mod)((v_2, v_3)) = f(v_2) + f(v_3) = 2 + 3 = 5$$

$$f^+(\neg mod)((v_2, v_4)) = f(v_2) + f(v_4) = 2 + 4 = 6$$

$$f^+(\neg mod)((v_3, v_5)) = f(v_3) + f(v_5) = 3 + 5 = 8$$

$$f^+(\neg mod)((v_4, v_5)) = f(v_4) + f(v_5) = 4 + 5 = 9.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.1.27 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_3 yang sudah dilabeli (I)

Karena pelabelan di atas sisinya tidak *konsekutif* maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *strong vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1.14 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_3 (I)

f					$f^+(\neg mod)$						Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
1	2	3	4	5	3	4	6	6	8	9	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif.*

- Kemungkinan kedua, definisikan $f: V(G_3) \to \{1,2,3,4,5\}$.

$$v_1 \mapsto 2,$$
$$v_2 \mapsto 4,$$
$$v_3 \mapsto 5,$$
$$v_4 \mapsto 1,$$
$$v_5 \mapsto 3,$$

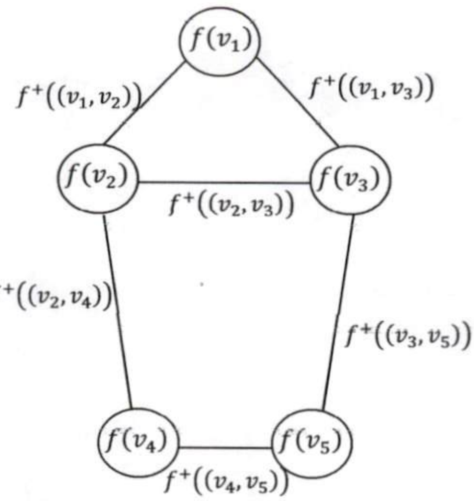
dan $f^+: E(G_3) \to Z_q$ dimana $q = 6$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \, mod \, 6, \qquad j \neq k$$

dan $f^+(\neg mod): E(G_3) \to \left\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\right\}$

$$(v_j, v_k) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful.*



Gambar 3.1.28 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_3 (II)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+((v_1, v_2)) = (f(v_1) + f(v_2))\ mod\ 6 = (2 + 4)\ mod\ 6 = 0$$

$$f^+((v_1, v_3)) = (f(v_1) + f(v_3))\ mod\ 6 = (2 + 5)\ mod\ 6 = 1$$

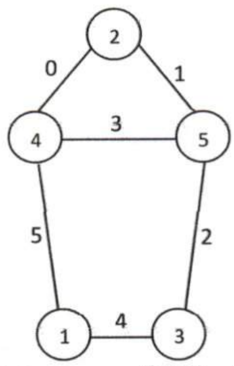
$$f^+((v_2, v_3)) = (f(v_2) + f(v_3))\ mod\ 6 = (4 + 5)\ mod\ 6 = 3$$

$$f^+((v_2, v_4)) = (f(v_2) + f(v_4))\ mod\ 6 = (4 + 1)\ mod\ 6 = 5$$

$$f^+((v_3, v_5)) = (f(v_3) + f(v_5))\ mod\ 6 = (5 + 3)\ mod\ 6 = 2$$

$$f^+((v_4, v_5)) = (f(v_4) + f(v_5))\ mod\ 6 = (1 + 3)\ mod\ 6 = 4.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.1.29 Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_3 yang sudah dilabeli (II)

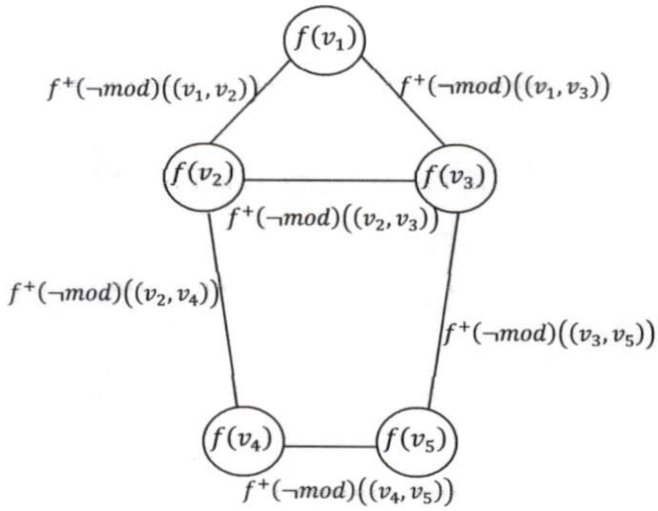
Karena $f^+: E(G_3) \to Z_6$ merupakan pemetaan *bijektif* maka pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful*. Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1.15 Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_3 (II)

f					f^+						Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
2	4	5	1	3	0	1	3	5	2	4	Ya

Keterangan:
"Ya" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *vertex-graceful* karena $f^+: E(G_3) \to Z_6$ merupakan pemetaan *bijektif.*

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful.*



Gambar 3.1.30 Ilustrasi Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_3 (II)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+(\neg mod)((v_1, v_2)) = f(v_1) + f(v_2) = 2 + 4 = 6$$

$$f^+(\neg mod)((v_1, v_3)) = f(v_1) + f(v_3) = 2 + 5 = 7$$

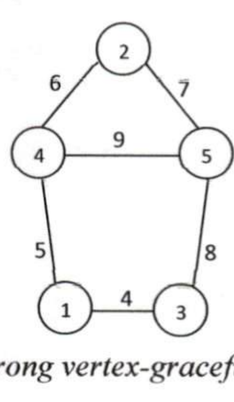
$$f^+(\neg mod)((v_2, v_3)) = f(v_2) + f(v_3) = 4 + 5 = 9$$

$$f^+(\neg mod)((v_2, v_4)) = f(v_2) + f(v_4) = 4 + 1 = 5$$

$$f^+(\neg mod)((v_3, v_5)) = f(v_3) + f(v_5) = 5 + 3 = 8$$

$$f^+(\neg mod)((v_4, v_5)) = f(v_4) + f(v_5) = 1 + 3 = 4.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.1.31 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_3 yang sudah dilabeli (II)

Karena pelabelan di atas sisinya *konsekutif* maka pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful*. Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1.16 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_3 (II)

f					$f^+(\neg mod)$						Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
2	4	5	1	3	6	7	9	5	8	4	Ya

Keterangan:
"Ya" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya *konsekutif*.

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *vertex-graceful* atau tidak.

Tabel 3.1.17 Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_3

No	f					f^+						Ket
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
1	1	2	3	4	5	3	4	0	0	2	3	Tidak
2	1	2	3	5	4	3	4	1	1	1	3	Tidak
3	1	2	4	3	5	3	5	5	5	3	2	Tidak
4	1	2	4	5	3	3	5	1	1	1	2	Tidak
5	1	2	5	3	4	3	0	5	5	3	1	Tidak
6	1	2	5	4	3	3	0	0	0	2	1	Tidak
7	1	3	2	4	5	4	3	1	1	1	3	Tidak
8	1	3	2	5	4	4	3	2	2	0	3	Tidak
9	1	3	4	2	5	4	5	5	5	3	1	Tidak
10	1	3	4	5	2	4	5	2	2	0	1	Tidak
11	1	3	5	2	4	4	0	5	5	3	0	Tidak
12	1	3	5	4	2	4	0	1	1	1	0	Tidak
13	1	4	2	3	5	5	3	1	1	1	2	Tidak
14	1	4	2	5	3	5	3	3	3	5	2	Tidak
15	1	4	3	2	5	5	4	0	0	2	1	Tidak
16	1	4	3	5	2	5	4	3	3	5	1	Tidak
17	1	4	5	2	3	5	0	0	0	2	5	Tidak
18	1	4	5	3	2	5	0	1	1	1	5	Tidak
19	1	5	2	3	4	0	3	2	2	0	1	Tidak
20	1	5	2	4	3	0	3	3	3	5	1	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
21	1	5	3	2	4	0	4	1	1	1	0	Tidak
22	1	5	3	4	2	0	4	3	3	5	0	Tidak
23	1	5	4	2	3	0	5	1	1	1	5	Tidak
24	1	5	4	3	2	0	5	2	2	0	5	Tidak
25	2	1	3	4	5	3	5	4	5	2	3	Tidak
26	2	1	3	5	4	3	5	4	0	1	3	Tidak
27	2	1	4	3	5	3	0	5	4	3	2	Tidak
28	2	1	4	5	3	3	0	5	0	1	2	Tidak
29	2	1	5	3	4	3	1	0	4	3	1	Tidak
30	2	1	5	4	3	3	1	0	5	2	1	Tidak
31	2	3	1	4	5	5	3	4	1	0	3	Tidak
32	2	3	1	5	4	5	3	4	2	5	3	Tidak
33	2	3	4	1	5	5	0	1	4	3	0	Tidak
34	2	3	4	5	1	5	0	1	2	5	0	Tidak
35	2	3	5	1	4	5	1	2	4	3	5	Tidak
36	2	3	5	4	1	5	1	2	1	0	5	Tidak
37	2	4	1	3	5	0	3	5	1	0	2	Tidak
38	2	4	1	5	3	0	3	5	3	4	2	Tidak
39	2	4	3	1	5	0	5	1	5	2	0	Tidak
40	2	4	3	5	1	0	5	1	3	4	0	Tidak
41	2	4	5	1	3	0	1	3	5	2	4	Ya
42	2	4	5	3	1	0	1	3	1	0	4	Tidak
43	2	5	1	3	4	1	3	0	2	5	1	Tidak
44	2	5	1	4	3	1	3	0	3	4	1	Tidak
45	2	5	3	1	4	1	5	2	0	1	5	Tidak
46	2	5	3	4	1	1	5	2	3	4	5	Tidak
47	2	5	4	1	3	1	0	3	0	1	4	Tidak
48	2	5	4	3	1	1	0	3	2	5	4	Ya
49	3	1	2	4	5	4	5	3	5	1	3	Tidak
50	3	1	2	5	4	4	5	3	0	0	3	Tidak
51	3	1	4	2	5	4	1	5	3	3	1	Tidak
52	3	1	4	5	2	4	1	5	0	0	1	Tidak
53	3	1	5	2	4	4	2	0	3	3	0	Tidak
54	3	1	5	4	2	4	2	0	5	1	0	Tidak
55	3	2	1	4	5	5	4	3	0	0	3	Tidak
56	3	2	1	5	4	5	4	3	1	5	3	Tidak
57	3	2	4	1	5	5	1	0	3	3	0	Tidak
58	3	2	4	5	1	5	1	0	1	5	0	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
59	3	2	5	1	4	5	2	1	3	3	5	Tidak
60	3	2	5	4	1	5	2	1	0	0	5	Tidak
61	3	4	1	2	5	1	4	5	0	0	1	Tidak
62	3	4	1	5	2	1	4	5	3	3	1	Tidak
63	3	4	2	1	5	1	5	0	5	1	0	Tidak
64	3	4	2	5	1	1	5	0	3	3	0	Tidak
65	3	4	5	1	2	1	2	3	5	1	3	Tidak
66	3	4	5	2	1	1	2	3	0	0	3	Tidak
67	3	5	1	2	4	2	4	0	1	5	0	Tidak
68	3	5	1	4	2	2	4	0	3	3	0	Tidak
69	3	5	2	1	4	2	5	1	0	0	5	Tidak
70	3	5	2	4	1	2	5	1	3	3	5	Tidak
71	3	5	4	1	2	2	1	3	0	0	3	Tidak
72	3	5	4	2	1	2	1	3	1	5	3	Tidak
73	4	1	2	3	5	5	0	3	4	1	2	Ya
74	4	1	2	5	3	5	0	3	0	5	2	Tidak
75	4	1	3	2	5	5	1	4	3	2	1	Tidak
76	4	1	3	5	2	5	1	4	0	5	1	Tidak
77	4	1	5	2	3	5	3	0	3	2	5	Tidak
78	4	1	5	3	2	5	3	0	4	1	5	Tidak
79	4	2	1	3	5	0	5	3	5	0	2	Tidak
80	4	2	1	5	3	0	5	3	1	4	2	Ya
81	4	2	3	1	5	0	1	5	3	2	0	Tidak
82	4	2	3	5	1	0	1	5	1	4	0	Tidak
83	4	2	5	1	3	0	3	1	3	2	4	Tidak
84	4	2	5	3	1	0	3	1	5	0	4	Tidak
85	4	3	1	2	5	1	5	4	5	0	1	Tidak
86	4	3	1	5	2	1	5	4	2	3	1	Tidak
87	4	3	2	1	5	1	0	5	4	1	0	Tidak
88	4	3	2	5	1	1	0	5	2	3	0	Tidak
89	4	3	5	1	2	1	3	2	4	1	3	Tidak
90	4	3	5	2	1	1	3	2	5	0	3	Tidak
91	4	5	1	2	3	3	5	0	1	4	5	Tidak
92	4	5	1	3	2	3	5	0	2	3	5	Tidak
93	4	5	2	1	3	3	0	1	0	5	4	Tidak
94	4	5	2	3	1	3	0	1	2	3	4	Tidak
95	4	5	3	1	2	3	1	2	0	5	3	Tidak
96	4	5	3	2	1	3	1	2	1	4	3	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
97	5	1	2	3	4	0	1	3	4	0	1	Tidak
98	5	1	2	4	3	0	1	3	5	5	1	Tidak
99	5	1	3	2	4	0	2	4	3	1	0	Tidak
100	5	1	3	4	2	0	2	4	5	5	0	Tidak
101	5	1	4	2	3	0	3	5	3	1	5	Tidak
102	5	1	4	3	2	0	3	5	4	0	5	Tidak
103	5	2	1	3	4	1	0	3	5	5	1	Tidak
104	5	2	1	4	3	1	0	3	0	4	1	Tidak
105	5	2	3	1	4	1	2	5	3	1	5	Tidak
106	5	2	3	4	1	1	2	5	0	4	5	Tidak
107	5	2	4	1	3	1	3	0	3	1	4	Tidak
108	5	2	4	3	1	1	3	0	5	5	4	Tidak
109	5	3	1	2	4	2	0	4	5	5	0	Tidak
110	5	3	1	4	2	2	0	4	1	3	0	Tidak
111	5	3	2	1	4	2	1	5	4	0	5	Tidak
112	5	3	2	4	1	2	1	5	1	3	5	Tidak
113	5	3	4	1	2	2	3	1	4	0	3	Tidak
114	5	3	4	2	1	2	3	1	5	5	3	Tidak
115	5	4	1	2	3	3	0	5	0	4	5	Tidak
116	5	4	1	3	2	3	0	5	1	3	5	Tidak
117	5	4	2	1	3	3	1	0	5	5	4	Tidak
118	5	4	2	3	1	3	1	0	1	3	4	Tidak
119	5	4	3	1	2	3	2	1	5	5	3	Tidak
120	5	4	3	2	1	3	2	1	2	4	3	Tidak

Keterangan:

"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama. "Ya" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *vertex-graceful* karena $f^+: E(G_3) \to Z_6$ merupakan pemetaan *bijektif.*

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *strong vertex-graceful* atau tidak.

Tabel 3.1.18 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_3

No	f					$f^+(\neg mod)$						Ket
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
1	1	2	3	4	5	3	4	6	6	8	9	Tidak
2	1	2	3	5	4	3	4	7	7	7	9	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
3	1	2	4	3	5	3	5	5	5	9	8	Tidak
4	1	2	4	5	3	3	5	7	7	7	8	Tidak
5	1	2	5	3	4	3	6	5	5	9	7	Tidak
6	1	2	5	4	3	3	6	6	6	8	7	Tidak
7	1	3	2	4	5	4	3	7	7	7	9	Tidak
8	1	3	2	5	4	4	3	8	8	6	9	Tidak
9	1	3	4	2	5	4	5	5	5	9	7	Tidak
10	1	3	4	5	2	4	5	8	8	6	7	Tidak
11	1	3	5	2	4	4	6	5	5	9	6	Tidak
12	1	3	5	4	2	4	6	7	7	7	6	Tidak
13	1	4	2	3	5	5	3	7	7	7	8	Tidak
14	1	4	2	5	3	5	3	9	9	5	8	Tidak
15	1	4	3	2	5	5	4	6	6	8	7	Tidak
16	1	4	3	5	2	5	4	9	9	5	7	Tidak
17	1	4	5	2	3	5	6	6	6	8	5	Tidak
18	1	4	5	3	2	5	6	9	7	7	5	Tidak
19	1	5	2	3	4	6	3	7	8	6	7	Tidak
20	1	5	2	4	3	6	3	7	9	5	7	Tidak
21	1	5	3	2	4	6	4	8	7	7	6	Tidak
22	1	5	3	4	2	6	4	8	9	5	6	Tidak
23	1	5	4	2	3	6	5	9	7	7	5	Tidak
24	1	5	4	3	2	6	5	9	8	6	5	Tidak
25	2	1	3	4	5	3	5	4	5	8	9	Tidak
26	2	1	3	5	4	3	5	4	6	7	9	Tidak
27	2	1	4	3	5	3	6	5	4	9	8	Tidak
28	2	1	4	5	3	3	6	5	6	7	8	Tidak
29	2	1	5	3	4	3	7	6	4	9	7	Tidak
30	2	1	5	4	3	3	7	6	5	8	7	Tidak
31	2	3	1	4	5	5	3	4	7	6	9	Tidak
32	2	3	1	5	4	5	3	4	8	5	9	Tidak
33	2	3	4	1	5	5	6	7	4	9	6	Tidak
34	2	3	4	5	1	5	6	7	8	5	6	Tidak
35	2	3	5	1	4	5	7	8	4	9	5	Tidak
36	2	3	5	4	1	5	7	8	7	6	5	Tidak
37	2	4	1	3	5	6	3	5	7	6	8	Tidak
38	2	4	1	5	3	6	3	5	9	4	8	Tidak
39	2	4	3	1	5	6	5	7	5	8	6	Tidak
40	2	4	3	5	1	6	5	7	9	4	6	Tidak

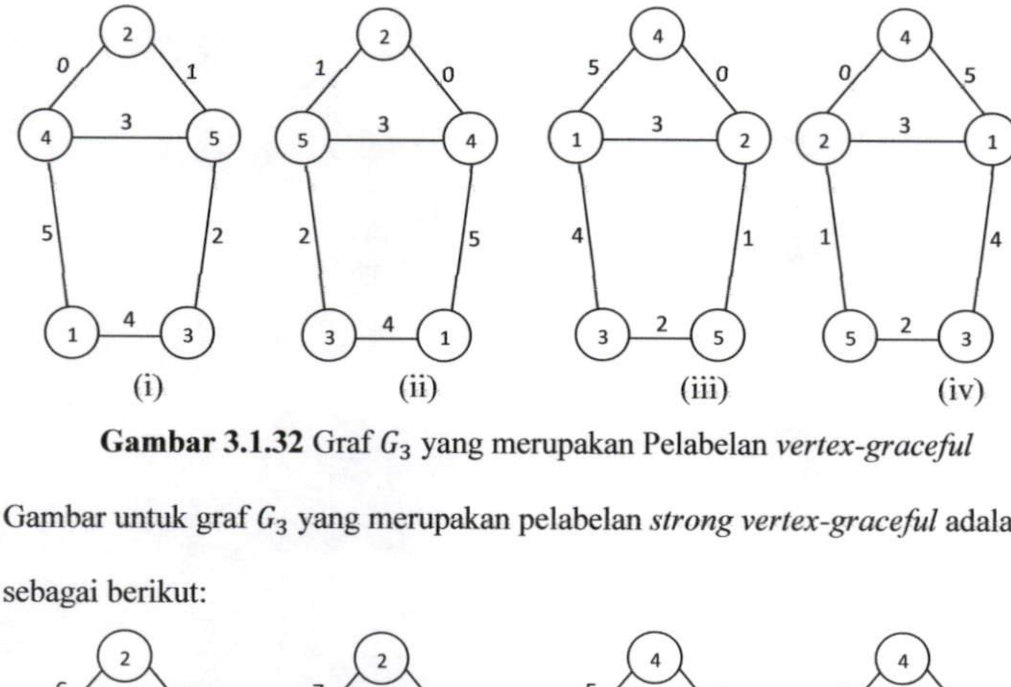
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
41	2	4	5	1	3	6	7	9	5	8	4	Ya
42	2	4	5	3	1	6	7	9	7	6	4	Tidak
43	2	5	1	3	4	7	3	6	8	5	7	Tidak
44	2	5	1	4	3	7	3	6	9	4	7	Tidak
45	2	5	3	1	4	7	5	8	6	7	5	Tidak
46	2	5	3	4	1	7	5	8	9	4	5	Tidak
47	2	5	4	1	3	7	6	9	6	7	4	Tidak
48	2	5	4	3	1	7	6	9	8	5	4	Ya
49	3	1	2	4	5	4	5	3	5	7	9	Tidak
50	3	1	2	5	4	4	5	3	6	6	9	Tidak
51	3	1	4	2	5	4	7	5	3	9	7	Tidak
52	3	1	4	5	2	4	7	5	6	6	7	Tidak
53	3	1	5	2	4	4	8	6	3	9	6	Tidak
54	3	1	5	4	2	4	8	6	5	7	6	Tidak
55	3	2	1	4	5	5	4	3	6	6	9	Tidak
56	3	2	1	5	4	5	4	3	7	5	9	Tidak
57	3	2	4	1	5	5	7	6	3	9	6	Tidak
58	3	2	4	5	1	5	7	6	7	5	6	Tidak
59	3	2	5	1	4	5	8	7	3	9	5	Tidak
60	3	2	5	4	1	5	8	7	6	6	5	Tidak
61	3	4	1	2	5	7	4	5	6	6	7	Tidak
62	3	4	1	5	2	7	4	5	9	3	7	Tidak
63	3	4	2	1	5	7	5	6	5	7	6	Tidak
64	3	4	2	5	1	7	5	6	9	3	6	Tidak
65	3	4	5	1	2	7	8	9	5	7	3	Tidak
66	3	4	5	2	1	7	8	9	6	6	3	Tidak
67	3	5	1	2	4	8	4	6	7	5	6	Tidak
68	3	5	1	4	2	8	4	6	9	3	6	Tidak
69	3	5	2	1	4	8	5	7	6	6	5	Tidak
70	3	5	2	4	1	8	5	7	9	3	5	Tidak
71	3	5	4	1	2	8	7	9	6	6	3	Tidak
72	3	5	4	2	1	8	7	9	7	5	3	Tidak
73	4	1	2	3	5	5	6	3	4	7	8	Ya
74	4	1	2	5	3	5	6	3	6	5	8	Tidak
75	4	1	3	2	5	5	7	4	3	8	7	Tidak
76	4	1	3	5	2	5	7	4	6	5	7	Tidak
77	4	1	5	2	3	5	9	6	3	8	5	Tidak
78	4	1	5	3	2	5	9	6	4	7	5	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
79	4	2	1	3	5	6	5	3	5	6	8	Tidak
80	4	2	1	5	3	6	5	3	7	4	8	Ya
81	4	2	3	1	5	6	7	5	3	8	6	Tidak
82	4	2	3	5	1	6	7	5	7	4	6	Tidak
83	4	2	5	1	3	6	9	7	3	8	4	Tidak
84	4	2	5	3	1	6	9	7	5	6	4	Tidak
85	4	3	1	2	5	7	5	4	5	6	7	Tidak
86	4	3	1	5	2	7	5	4	8	3	7	Tidak
87	4	3	2	1	5	7	6	5	4	7	6	Tidak
88	4	3	2	5	1	7	6	5	8	3	6	Tidak
89	4	3	5	1	2	7	9	8	4	7	3	Tidak
90	4	3	5	2	1	7	9	8	5	6	3	Tidak
91	4	5	1	2	3	9	5	6	7	4	5	Tidak
92	4	5	1	3	2	9	5	6	8	3	5	Tidak
93	4	5	2	1	3	9	6	7	6	5	4	Tidak
94	4	5	2	3	1	9	6	7	8	3	4	Tidak
95	4	5	3	1	2	9	7	8	6	5	3	Tidak
96	4	5	3	2	1	9	7	8	7	4	3	Tidak
97	5	1	2	3	4	6	7	3	4	6	7	Tidak
98	5	1	2	4	3	6	7	3	5	5	7	Tidak
99	5	1	3	2	4	6	8	4	3	7	6	Tidak
100	5	1	3	4	2	6	8	4	5	5	6	Tidak
101	5	1	4	2	3	6	9	5	3	7	5	Tidak
102	5	1	4	3	2	6	9	5	4	6	5	Tidak
103	5	2	1	3	4	7	6	3	5	5	7	Tidak
104	5	2	1	4	3	7	6	3	6	4	7	Tidak
105	5	2	3	1	4	7	8	5	3	7	5	Tidak
106	5	2	3	4	1	7	8	5	6	4	5	Tidak
107	5	2	4	1	3	7	9	6	3	7	4	Tidak
108	5	2	4	3	1	7	9	6	5	5	4	Tidak
109	5	3	1	2	4	8	6	4	5	5	6	Tidak
110	5	3	1	4	2	8	6	4	7	3	6	Tidak
111	5	3	2	1	4	8	7	5	4	6	5	Tidak
112	5	3	2	4	1	8	7	5	7	3	5	Tidak
113	5	3	4	1	2	8	9	7	4	6	3	Tidak
114	5	3	4	2	1	8	9	7	5	5	3	Tidak
115	5	4	1	2	3	9	6	5	6	4	5	Tidak
116	5	4	1	3	2	9	6	5	7	3	5	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
117	5	4	2	1	3	9	7	6	5	5	4	Tidak
118	5	4	2	3	1	9	7	6	7	3	4	Tidak
119	5	4	3	1	2	9	8	7	5	5	3	Tidak
120	5	4	3	2	1	9	8	7	6	4	3	Tidak

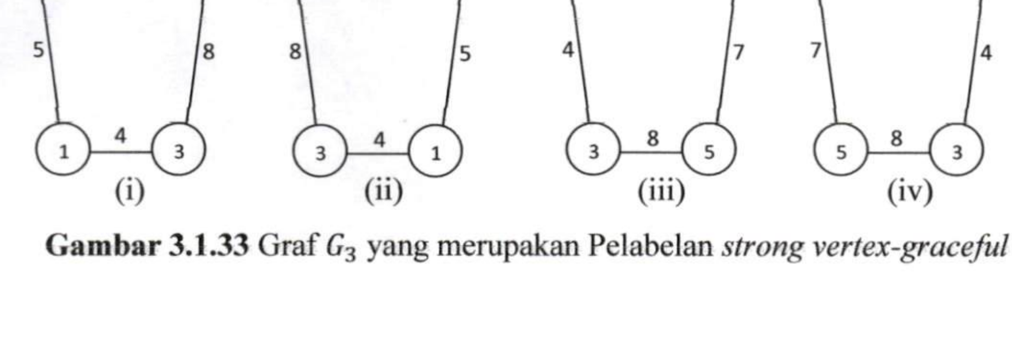
Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif*. "Ya" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya *konsekutif*.

Dari tabel, dapat dilihat bahwa pada graf G_3 terdapat 4 pelabelan *vertex-graceful* yang juga pelabelan *strong vertex-graceful*. Gambar untuk graf G_3 yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1.32 Graf G_3 yang merupakan Pelabelan *vertex-graceful*

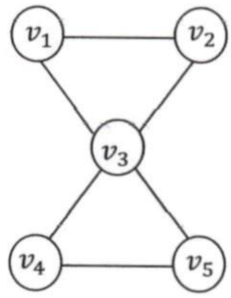
Gambar untuk graf G_3 yang merupakan pelabelan *strong vertex-graceful* adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1.33 Graf G_3 yang merupakan Pelabelan *strong vertex-graceful*

Jadi, graf G_3 merupakan pelabelan *vertex-graceful* dan pelabelan *strong vertex-graceful.*

d) Untuk graf G_4 (ada 120 kemungkinan). Misalkan $V(G_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.



Gambar 3.1.34 Ilustrasi $V(G_4)$

- Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(G_4) \to \{1,2,3,4,5\}$.

$$v_1 \mapsto 1,$$
$$v_2 \mapsto 2,$$
$$v_3 \mapsto 3,$$
$$v_4 \mapsto 4,$$
$$v_5 \mapsto 5,$$

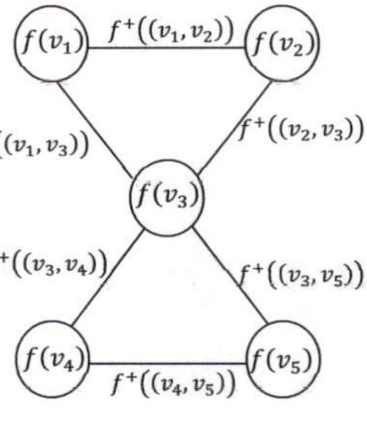
dan $f^+: E(G_4) \to Z_q$ dimana $q = 6$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \big(f(v_j) + f(v_k)\big) \; mod\ 6, \qquad j \neq k$$

dan $f^+(\neg mod): E(G_4) \to \big\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\big\}$

$$(v_j, v_k) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful*.



Gambar 3.1.35 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_4 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+((v_1, v_2)) = (f(v_1) + f(v_2))\, mod\ 6 = (1 + 2)\, mod\ 6 = 3$$

$$f^+((v_1, v_3)) = (f(v_1) + f(v_3))\, mod\ 6 = (1 + 3)\, mod\ 6 = 4$$

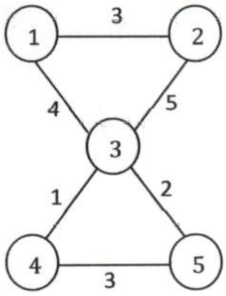
$$f^+((v_2, v_3)) = (f(v_2) + f(v_3))\, mod\ 6 = (2 + 3)\, mod\ 6 = 5$$

$$f^+((v_2, v_4)) = (f(v_2) + f(v_4))\, mod\ 6 = (2 + 4)\, mod\ 6 = 0$$

$$f^+((v_3, v_5)) = (f(v_3) + f(v_5))\, mod\ 6 = (3 + 5)\, mod\ 6 = 2$$

$$f^+((v_4, v_5)) = (f(v_4) + f(v_5))\, mod\ 6 = (4 + 5)\, mod\ 6 = 3.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.1.36 Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_4 yang sudah dilabeli (I)

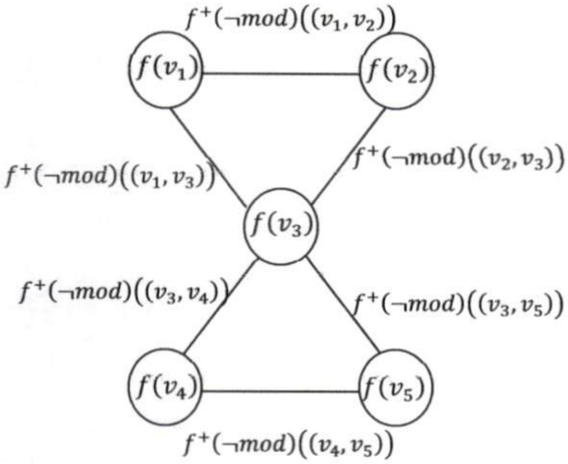
Karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama maka pelabelan di atas bukan pelabelan *vertex-graceful*. Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1.19 Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_4 (I)

f					f^+						Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
1	2	3	4	5	3	4	5	1	2	3	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama.

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful.*



Gambar 3.1.37 Ilustrasi Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_4 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+(\neg mod)((v_1, v_2)) = f(v_1) + f(v_2) = 1 + 2 = 3$$

$$f^+(\neg mod)((v_1, v_3)) = f(v_1) + f(v_3) = 1 + 3 = 4$$

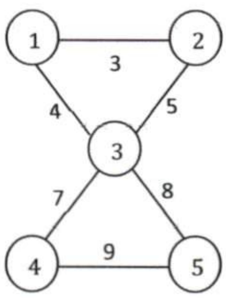
$$f^+(\neg mod)((v_2, v_3)) = f(v_2) + f(v_3) = 2 + 3 = 5$$

$$f^+(\neg mod)((v_3, v_4)) = f(v_3) + f(v_4) = 3 + 4 = 7$$

$$f^+(\neg mod)((v_3, v_5)) = f(v_3) + f(v_5) = 3 + 5 = 8$$

$$f^+(\neg mod)((v_4, v_5)) = f(v_4) + f(v_5) = 4 + 5 = 9.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.1.38 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_4 yang sudah dilabeli (I)

Karena pelabelan di atas sisinya tidak *konsekutif* maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *strong vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1.20 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_4 (I)

f					$f^+(\neg mod)$						Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
1	2	3	4	5	3	4	5	7	8	9	Tidak

Keterangan:

"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif.*

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *vertex-graceful* atau tidak.

Tabel 3.1.21 Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_4

No	f					f^+						Ket
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
1	1	2	3	4	5	3	4	5	1	2	3	Tidak
2	1	2	3	5	4	3	4	5	2	1	3	Tidak
3	1	2	4	3	5	3	5	0	1	3	2	Tidak
4	1	2	4	5	3	3	5	0	3	1	2	Tidak
5	1	2	5	3	4	3	0	1	2	3	1	Tidak
6	1	2	5	4	3	3	0	1	3	2	1	Tidak
7	1	3	2	4	5	4	3	5	0	1	3	Tidak
8	1	3	2	5	4	4	3	5	1	0	3	Tidak
9	1	3	4	2	5	4	5	1	0	3	1	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
10	1	3	4	5	2	4	5	1	3	0	1	Tidak
11	1	3	5	2	4	4	0	2	1	3	0	Tidak
12	1	3	5	4	2	4	0	2	3	1	0	Tidak
13	1	4	2	3	5	5	3	0	5	1	2	Tidak
14	1	4	2	5	3	5	3	0	1	5	2	Tidak
15	1	4	3	2	5	5	4	1	5	2	1	Tidak
16	1	4	3	5	2	5	4	1	2	5	1	Tidak
17	1	4	5	2	3	5	0	3	1	2	5	Tidak
18	1	4	5	3	2	5	0	3	2	1	5	Tidak
19	1	5	2	3	4	0	3	1	5	0	1	Tidak
20	1	5	2	4	3	0	3	1	0	5	1	Tidak
21	1	5	3	2	4	0	4	2	5	1	0	Tidak
22	1	5	3	4	2	0	4	2	1	5	0	Tidak
23	1	5	4	2	3	0	5	3	0	1	5	Tidak
24	1	5	4	3	2	0	5	3	1	0	5	Tidak
25	2	1	3	4	5	3	5	4	1	2	3	Tidak
26	2	1	3	5	4	3	5	4	2	1	3	Tidak
27	2	1	4	3	5	3	0	5	1	3	2	Tidak
28	2	1	4	5	3	3	0	5	3	1	2	Tidak
29	2	1	5	3	4	3	1	0	2	3	1	Tidak
30	2	1	5	4	3	3	1	0	3	2	1	Tidak
31	2	3	1	4	5	5	3	4	5	0	3	Tidak
32	2	3	1	5	4	5	3	4	1	5	3	Tidak
33	2	3	4	1	5	5	0	1	5	3	0	Tidak
34	2	3	4	5	1	5	0	1	3	5	0	Tidak
35	2	3	5	1	4	5	1	2	0	3	5	Tidak
36	2	3	5	4	1	5	1	2	3	0	5	Tidak
37	2	4	1	3	5	0	3	5	4	0	2	Tidak
38	2	4	1	5	3	0	3	5	0	4	2	Tidak
39	2	4	3	1	5	0	5	1	4	2	0	Tidak
40	2	4	3	5	1	0	5	1	2	4	0	Tidak
41	2	4	5	1	3	0	1	3	0	2	4	Tidak
42	2	4	5	3	1	0	1	3	2	0	4	Tidak
43	2	5	1	3	4	1	3	0	4	5	1	Tidak
44	2	5	1	4	3	1	3	0	5	4	1	Tidak
45	2	5	3	1	4	1	5	2	4	1	5	Tidak
46	2	5	3	4	1	1	5	2	1	4	5	Tidak
47	2	5	4	1	3	1	0	3	5	1	4	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
48	2	5	4	3	1	1	0	3	1	5	4	Tidak
49	3	1	2	4	5	4	5	3	0	1	3	Tidak
50	3	1	2	5	4	4	5	3	1	0	3	Tidak
51	3	1	4	2	5	4	1	5	0	3	1	Tidak
52	3	1	4	5	2	4	1	5	3	0	1	Tidak
53	3	1	5	2	4	4	2	0	1	3	0	Tidak
54	3	1	5	4	2	4	2	0	3	1	0	Tidak
55	3	2	1	4	5	5	4	3	5	0	3	Tidak
56	3	2	1	5	4	5	4	3	0	5	3	Tidak
57	3	2	4	1	5	5	1	0	5	3	0	Tidak
58	3	2	4	5	1	5	1	0	3	5	0	Tidak
59	3	2	5	1	4	5	2	1	0	3	5	Tidak
60	3	2	5	4	1	5	2	1	3	0	5	Tidak
61	3	4	1	2	5	1	4	5	3	0	1	Tidak
62	3	4	1	5	2	1	4	5	0	3	1	Tidak
63	3	4	2	1	5	1	5	0	3	1	0	Tidak
64	3	4	2	5	1	1	5	0	1	3	0	Tidak
65	3	4	5	1	2	1	2	3	0	1	3	Tidak
66	3	4	5	2	1	1	2	3	1	0	3	Tidak
67	3	5	1	2	4	2	4	0	3	5	0	Tidak
68	3	5	1	4	2	2	4	0	5	3	0	Tidak
69	3	5	2	1	4	2	5	1	3	0	5	Tidak
70	3	5	2	4	1	2	5	1	0	3	5	Tidak
71	3	5	4	1	2	2	1	3	5	0	3	Tidak
72	3	5	4	2	1	2	1	3	0	5	3	Tidak
73	4	1	2	3	5	5	0	3	5	1	2	Tidak
74	4	1	2	5	3	5	0	3	1	5	2	Tidak
75	4	1	3	2	5	5	1	4	5	2	1	Tidak
76	4	1	3	5	2	5	1	4	2	5	1	Tidak
77	4	1	5	2	3	5	3	0	1	2	5	Tidak
78	4	1	5	3	2	5	3	0	2	1	5	Tidak
79	4	2	1	3	5	0	5	3	4	0	2	Tidak
80	4	2	1	5	3	0	5	3	0	4	2	Tidak
81	4	2	3	1	5	0	1	5	4	2	0	Tidak
82	4	2	3	5	1	0	1	5	2	4	0	Tidak
83	4	2	5	1	3	0	3	1	0	2	4	Tidak
84	4	2	5	3	1	0	3	1	2	0	4	Tidak
85	4	3	1	2	5	1	5	4	3	0	1	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
86	4	3	1	5	2	1	5	4	0	3	1	Tidak
87	4	3	2	1	5	1	0	5	3	1	0	Tidak
88	4	3	2	5	1	1	0	5	1	3	0	Tidak
89	4	3	5	1	2	1	3	2	0	1	3	Tidak
90	4	3	5	2	1	1	3	2	1	0	3	Tidak
91	4	5	1	2	3	3	5	0	3	4	5	Tidak
92	4	5	1	3	2	3	5	0	4	3	5	Tidak
93	4	5	2	1	3	3	0	1	3	5	4	Tidak
94	4	5	2	3	1	3	0	1	5	3	4	Tidak
95	4	5	3	1	2	3	1	2	4	5	3	Tidak
96	4	5	3	2	1	3	1	2	5	4	3	Tidak
97	5	1	2	3	4	0	1	3	5	0	1	Tidak
98	5	1	2	4	3	0	1	3	0	5	1	Tidak
99	5	1	3	2	4	0	2	4	5	1	0	Tidak
100	5	1	3	4	2	0	2	4	1	5	0	Tidak
101	5	1	4	2	3	0	3	5	0	1	5	Tidak
102	5	1	4	3	2	0	3	5	1	0	5	Tidak
103	5	2	1	3	4	1	0	3	4	5	1	Tidak
104	5	2	1	4	3	1	0	3	5	4	1	Tidak
105	5	2	3	1	4	1	2	5	4	1	5	Tidak
106	5	2	3	4	1	1	2	5	1	4	5	Tidak
107	5	2	4	1	3	1	3	0	5	1	4	Tidak
108	5	2	4	3	1	1	3	0	1	5	4	Tidak
109	5	3	1	2	4	2	0	4	3	5	0	Tidak
110	5	3	1	4	2	2	0	4	5	3	0	Tidak
111	5	3	2	1	4	2	1	5	3	0	5	Tidak
112	5	3	2	4	1	2	1	5	0	3	5	Tidak
113	5	3	4	1	2	2	3	1	5	0	3	Tidak
114	5	3	4	2	1	2	3	1	0	5	3	Tidak
115	5	4	1	2	3	3	0	5	3	4	5	Tidak
116	5	4	1	3	2	3	0	5	4	3	5	Tidak
117	5	4	2	1	3	3	1	0	3	5	4	Tidak
118	5	4	2	3	1	3	1	0	5	3	4	Tidak
119	5	4	3	1	2	3	2	1	4	5	3	Tidak
120	5	4	3	2	1	3	2	1	5	4	3	Tidak

Keterangan:

"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama.

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *strong vertex-graceful* atau tidak.

Tabel 3.1.22 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_4

No	f					$f^{+}(\neg mod)$						Ket
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
1	1	2	3	4	5	3	4	5	7	8	9	Tidak
2	1	2	3	5	4	3	4	5	8	7	9	Tidak
3	1	2	4	3	5	3	5	6	7	9	8	Tidak
4	1	2	4	5	3	3	5	6	9	7	8	Tidak
5	1	2	5	3	4	3	6	7	8	9	7	Tidak
6	1	2	5	4	3	3	6	7	9	8	7	Tidak
7	1	3	2	4	5	4	3	5	6	7	9	Tidak
8	1	3	2	5	4	4	3	5	7	6	9	Tidak
9	1	3	4	2	5	4	5	7	6	9	7	Tidak
10	1	3	4	5	2	4	5	7	9	6	7	Tidak
11	1	3	5	2	4	4	6	8	7	9	6	Tidak
12	1	3	5	4	2	4	6	8	9	7	6	Tidak
13	1	4	2	3	5	5	3	6	5	7	8	Tidak
14	1	4	2	5	3	5	3	6	7	5	8	Tidak
15	1	4	3	2	5	5	4	7	5	8	7	Tidak
16	1	4	3	5	2	5	4	7	8	5	7	Tidak
17	1	4	5	2	3	5	6	9	7	8	5	Tidak
18	1	4	5	3	2	5	6	9	8	7	5	Tidak
19	1	5	2	3	4	6	3	7	5	6	7	Tidak
20	1	5	2	4	3	6	3	7	6	5	7	Tidak
21	1	5	3	2	4	6	4	8	5	7	6	Tidak
22	1	5	3	4	2	6	4	8	7	5	6	Tidak
23	1	5	4	2	3	6	5	9	6	7	5	Tidak
24	1	5	4	3	2	6	5	9	7	6	5	Tidak
25	2	1	3	4	5	3	5	4	7	8	9	Tidak
26	2	1	3	5	4	3	5	4	8	7	9	Tidak
27	2	1	4	3	5	3	6	5	7	9	8	Tidak
28	2	1	4	5	3	3	6	5	9	7	8	Tidak
29	2	1	5	3	4	3	7	6	8	9	7	Tidak
30	2	1	5	4	3	3	7	6	9	8	7	Tidak
31	2	3	1	4	5	5	3	4	5	6	9	Tidak
32	2	3	1	5	4	5	3	4	6	5	9	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
33	2	3	4	1	5	5	6	7	5	9	6	Tidak
34	2	3	4	5	1	5	6	7	9	5	6	Tidak
35	2	3	5	1	4	5	7	8	6	9	5	Tidak
36	2	3	5	4	1	5	7	8	9	6	5	Tidak
37	2	4	1	3	5	6	3	5	4	6	8	Tidak
38	2	4	1	5	3	6	3	5	6	4	8	Tidak
39	2	4	3	1	5	6	5	7	4	8	6	Tidak
40	2	4	3	5	1	6	5	7	8	4	6	Tidak
41	2	4	5	1	3	6	7	9	6	8	4	Tidak
42	2	4	5	3	1	6	7	9	8	6	4	Tidak
43	2	5	1	3	4	7	3	6	4	5	7	Tidak
44	2	5	1	4	3	7	3	6	5	4	7	Tidak
45	2	5	3	1	4	7	5	8	4	7	5	Tidak
46	2	5	3	4	1	7	5	8	7	4	5	Tidak
47	2	5	4	1	3	7	6	9	5	7	4	Tidak
48	2	5	4	3	1	7	6	9	7	5	4	Tidak
49	3	1	2	4	5	4	5	3	6	7	9	Tidak
50	3	1	2	5	4	4	5	3	7	6	9	Tidak
51	3	1	4	2	5	4	7	5	6	9	7	Tidak
52	3	1	4	5	2	4	7	5	9	6	7	Tidak
53	3	1	5	2	4	4	8	6	7	9	6	Tidak
54	3	1	5	4	2	4	8	6	9	7	6	Tidak
55	3	2	1	4	5	5	4	3	5	6	9	Tidak
56	3	2	1	5	4	5	4	3	6	5	9	Tidak
57	3	2	4	1	5	5	7	6	5	9	6	Tidak
58	3	2	4	5	1	5	7	6	9	5	6	Tidak
59	3	2	5	1	4	5	8	7	6	9	5	Tidak
60	3	2	5	4	1	5	8	7	9	6	5	Tidak
61	3	4	1	2	5	7	4	5	3	6	7	Tidak
62	3	4	1	5	2	7	4	5	6	3	7	Tidak
63	3	4	2	1	5	7	5	6	3	7	6	Tidak
64	3	4	2	5	1	7	5	6	7	3	6	Tidak
65	3	4	5	1	2	7	8	9	6	7	3	Tidak
66	3	4	5	2	1	7	8	9	7	6	3	Tidak
67	3	5	1	2	4	8	4	6	3	5	6	Tidak
68	3	5	1	4	2	8	4	6	5	3	6	Tidak
69	3	5	2	1	4	8	5	7	3	6	5	Tidak
70	3	5	2	4	1	8	5	7	6	3	5	Tidak

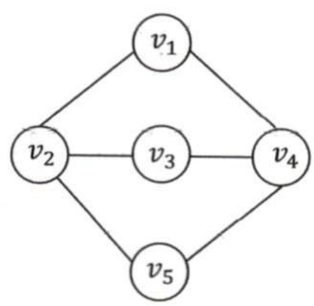
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
71	3	5	4	1	2	8	7	9	5	6	3	Tidak
72	3	5	4	2	1	8	7	9	6	5	3	Tidak
73	4	1	2	3	5	5	6	3	5	7	8	Tidak
74	4	1	2	5	3	5	6	3	7	5	8	Tidak
75	4	1	3	2	5	5	7	4	5	8	7	Tidak
76	4	1	3	5	2	5	7	4	8	5	7	Tidak
77	4	1	5	2	3	5	9	6	7	8	5	Tidak
78	4	1	5	3	2	5	9	6	8	7	5	Tidak
79	4	2	1	3	5	6	5	3	4	6	8	Tidak
80	4	2	1	5	3	6	5	3	6	4	8	Tidak
81	4	2	3	1	5	6	7	5	4	8	6	Tidak
82	4	2	3	5	1	6	7	5	8	4	6	Tidak
83	4	2	5	1	3	6	9	7	6	8	4	Tidak
84	4	2	5	3	1	6	9	7	8	6	4	Tidak
85	4	3	1	2	5	7	5	4	3	6	7	Tidak
86	4	3	1	5	2	7	5	4	6	3	7	Tidak
87	4	3	2	1	5	7	6	5	3	7	6	Tidak
88	4	3	2	5	1	7	6	5	7	3	6	Tidak
89	4	3	5	1	2	7	9	8	6	7	3	Tidak
90	4	3	5	2	1	7	9	8	7	6	3	Tidak
91	4	5	1	2	3	9	5	6	3	4	5	Tidak
92	4	5	1	3	2	9	5	6	4	3	5	Tidak
93	4	5	2	1	3	9	6	7	3	5	4	Tidak
94	4	5	2	3	1	9	6	7	5	3	4	Tidak
95	4	5	3	1	2	9	7	8	4	5	3	Tidak
96	4	5	3	2	1	9	7	8	5	4	3	Tidak
97	5	1	2	3	4	6	7	3	5	6	7	Tidak
98	5	1	2	4	3	6	7	3	6	5	7	Tidak
99	5	1	3	2	4	6	8	4	5	7	6	Tidak
100	5	1	3	4	2	6	8	4	7	5	6	Tidak
101	5	1	4	2	3	6	9	5	6	7	5	Tidak
102	5	1	4	3	2	6	9	5	7	6	5	Tidak
103	5	2	1	3	4	7	6	3	4	5	7	Tidak
104	5	2	1	4	3	7	6	3	5	4	7	Tidak
105	5	2	3	1	4	7	8	5	4	7	5	Tidak
106	5	2	3	4	1	7	8	5	7	4	5	Tidak
107	5	2	4	1	3	7	9	6	5	7	4	Tidak
108	5	2	4	3	1	7	9	6	7	5	4	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
109	5	3	1	2	4	8	6	4	3	5	6	Tidak
110	5	3	1	4	2	8	6	4	5	3	6	Tidak
111	5	3	2	1	4	8	7	5	3	6	5	Tidak
112	5	3	2	4	1	8	7	5	6	3	5	Tidak
113	5	3	4	1	2	8	9	7	5	6	3	Tidak
114	5	3	4	2	1	8	9	7	6	5	3	Tidak
115	5	4	1	2	3	9	6	5	3	4	5	Tidak
116	5	4	1	3	2	9	6	5	4	3	5	Tidak
117	5	4	2	1	3	9	7	6	3	5	4	Tidak
118	5	4	2	3	1	9	7	6	5	3	4	Tidak
119	5	4	3	1	2	9	8	7	4	5	3	Tidak
120	5	4	3	2	1	9	8	7	5	4	3	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif.*

Dari tabel, dapat dilihat bahwa graf G_4 bukan pelabelan *vertex-graceful* juga bukan pelabelan *strong vertex-graceful*.

e) Untuk graf G_5 (ada 120 kemungkinan). Misalkan $V(G_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.



Gambar 3.1.39 Ilustrasi $V(G_5)$

– Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(G_5) \to \{1,2,3,4,5\}$

$$v_1 \mapsto 1,$$
$$v_2 \mapsto 2,$$
$$v_3 \mapsto 3,$$
$$v_4 \mapsto 4,$$
$$v_5 \mapsto 5,$$

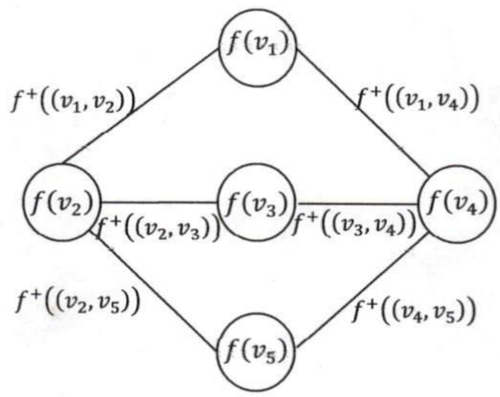
dan $f^+: E(G_5) \to Z_q$ dimana $q = 6$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \ mod\ 6, \qquad j \neq k$$

dan $f^{+}(\neg mod): E(G_5) \rightarrow \left\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\right\}$

$$(v_j, v_k) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful.*



Gambar 3.1.40 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_5 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^{+}((v_1, v_2)) = (f(v_1) + f(v_2)) \ mod\ 6 = (1 + 2) \ mod\ 6 = 3$$

$$f^{+}((v_1, v_4)) = (f(v_1) + f(v_4)) \ mod\ 6 = (1 + 4) \ mod\ 6 = 5$$

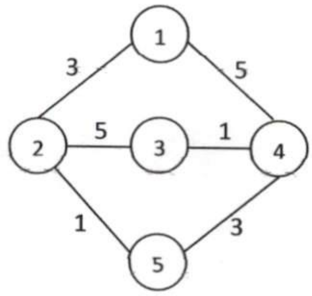
$$f^{+}((v_2, v_3)) = (f(v_2) + f(v_3)) \ mod\ 6 = (2 + 3) \ mod\ 6 = 5$$

$$f^{+}((v_2, v_5)) = (f(v_2) + f(v_5)) \ mod\ 6 = (2 + 5) \ mod\ 6 = 1$$

$$f^{+}((v_3, v_4)) = (f(v_3) + f(v_4)) \ mod\ 6 = (3 + 4) \ mod\ 6 = 1$$

$$f^{+}((v_4, v_5)) = (f(v_4) + f(v_5)) \ mod\ 6 = (4 + 5) \ mod\ 6 = 3.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.1.41 Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_5 yang sudah dilabeli (I)

Karena ada beberapa sisi yang mempunyai label yang sama maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *vertex-graceful.*

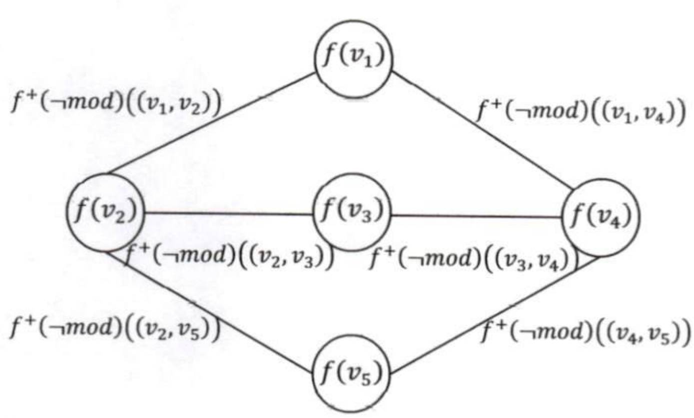
Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1.23 Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_5 (I)

f					f^+						Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_1, v_4)	(v_2, v_3)	(v_2, v_5)	(v_3, v_4)	(v_4, v_5)	
1	2	3	4	5	3	5	5	1	1	3	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama.

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful.*



Gambar 3.1.42 Ilustrasi Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_5 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_1, v_2)\big) = f(v_1) + f(v_2) = 1 + 2 = 3$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_1, v_4)\big) = f(v_1) + f(v_4) = 1 + 4 = 5$$

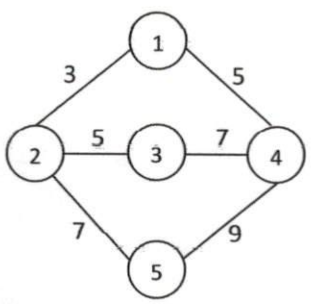
$$f^{+}(\neg mod)\big((v_2, v_3)\big) = f(v_2) + f(v_3) = 2 + 3 = 5$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_2, v_5)\big) = f(v_2) + f(v_5) = 2 + 5 = 7$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_3, v_4)\big) = f(v_3) + f(v_5) = 3 + 4 = 7$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_4, v_5)\big) = f(v_4) + f(v_5) = 4 + 5 = 9.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.1.43 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_5 yang sudah dilabeli (I)

Karena pelabelan di atas sisinya tidak *konsekutif* maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *strong vertex-graceful*. Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1.24 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_5 (I)

f					$f^{+}(\neg mod)$						Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_1, v_4)	(v_2, v_3)	(v_2, v_5)	(v_3, v_4)	(v_4, v_5)	
1	2	3	4	5	3	5	5	7	7	9	Tidak

Keterangan:

"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif*.

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *vertex-graceful* atau tidak.

Tabel 3.1.25 Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_5

No	f					f^+						Ket
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_1, v_4)	(v_2, v_3)	(v_2, v_5)	(v_3, v_4)	(v_4, v_5)	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
1	1	2	3	4	5	3	5	5	1	1	3	Tidak
2	1	2	3	5	4	3	0	5	0	2	3	Tidak
3	1	2	4	3	5	3	4	0	1	1	2	Tidak
4	1	2	4	5	3	3	0	0	5	3	2	Tidak
5	1	2	5	3	4	3	4	1	0	2	1	Tidak
6	1	2	5	4	3	3	5	1	5	3	1	Tidak
7	1	3	2	4	5	4	5	5	2	0	3	Tidak
8	1	3	2	5	4	4	0	5	1	1	3	Tidak
9	1	3	4	2	5	4	3	1	2	0	1	Tidak
10	1	3	4	5	2	4	0	1	5	3	1	Tidak
11	1	3	5	2	4	4	3	2	1	1	0	Tidak
12	1	3	5	4	2	4	5	2	5	3	0	Tidak
13	1	4	2	3	5	5	4	0	3	5	2	Tidak
14	1	4	2	5	3	5	0	0	1	1	2	Tidak
15	1	4	3	2	5	5	3	1	3	5	1	Tidak
16	1	4	3	5	2	5	0	1	0	2	1	Tidak
17	1	4	5	2	3	5	3	3	1	1	5	Tidak
18	1	4	5	3	2	5	4	3	0	2	5	Tidak
19	1	5	2	3	4	0	4	1	3	5	1	Tidak
20	1	5	2	4	3	0	5	1	2	0	1	Tidak
21	1	5	3	2	4	0	3	2	3	5	0	Tidak
22	1	5	3	4	2	0	5	2	1	1	0	Tidak
23	1	5	4	2	3	0	3	3	2	0	5	Tidak
24	1	5	4	3	2	0	4	3	1	1	5	Tidak
25	2	1	3	4	5	3	0	4	0	1	3	Tidak
26	2	1	3	5	4	3	1	4	5	2	3	Tidak
27	2	1	4	3	5	3	5	5	0	1	2	Tidak
28	2	1	4	5	3	3	1	5	4	3	2	Tidak
29	2	1	5	3	4	3	5	0	5	2	1	Tidak
30	2	1	5	4	3	3	0	0	4	3	1	Tidak
31	2	3	1	4	5	5	0	4	2	5	3	Tidak
32	2	3	1	5	4	5	1	4	1	0	3	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
33	2	3	4	1	5	5	3	1	2	5	0	Tidak
34	2	3	4	5	1	5	1	1	4	3	0	Tidak
35	2	3	5	1	4	5	3	2	1	0	5	Tidak
36	2	3	5	4	1	5	0	2	4	3	5	Tidak
37	2	4	1	3	5	0	5	5	3	4	2	Tidak
38	2	4	1	5	3	0	1	5	1	0	2	Tidak
39	2	4	3	1	5	0	3	1	3	4	0	Tidak
40	2	4	3	5	1	0	1	1	5	2	0	Tidak
41	2	4	5	1	3	0	3	3	1	0	4	Tidak
42	2	4	5	3	1	0	5	3	5	2	4	Tidak
43	2	5	1	3	4	1	5	0	3	4	1	Tidak
44	2	5	1	4	3	1	0	0	2	5	1	Tidak
45	2	5	3	1	4	1	3	2	3	4	5	Tidak
46	2	5	3	4	1	1	0	2	0	1	5	Tidak
47	2	5	4	1	3	1	3	3	2	5	4	Tidak
48	2	5	4	3	1	1	5	3	0	1	4	Tidak
49	3	1	2	4	5	4	1	3	0	0	3	Tidak
50	3	1	2	5	4	4	2	3	5	1	3	Tidak
51	3	1	4	2	5	4	5	5	0	0	1	Tidak
52	3	1	4	5	2	4	2	5	3	3	1	Tidak
53	3	1	5	2	4	4	5	0	5	1	0	Tidak
54	3	1	5	4	2	4	1	0	3	3	0	Tidak
55	3	2	1	4	5	5	1	3	1	5	3	Tidak
56	3	2	1	5	4	5	2	3	0	0	3	Tidak
57	3	2	4	1	5	5	4	0	1	5	0	Tidak
58	3	2	4	5	1	5	2	0	3	3	0	Tidak
59	3	2	5	1	4	5	4	1	0	0	5	Tidak
60	3	2	5	4	1	5	1	1	3	3	5	Tidak
61	3	4	1	2	5	1	5	5	3	3	1	Tidak
62	3	4	1	5	2	1	2	5	0	0	1	Tidak
63	3	4	2	1	5	1	4	0	3	3	0	Tidak
64	3	4	2	5	1	1	2	0	5	1	0	Tidak
65	3	4	5	1	2	1	4	3	0	0	3	Tidak
66	3	4	5	2	1	1	5	3	5	1	3	Tidak
67	3	5	1	2	4	2	5	0	3	3	0	Tidak
68	3	5	1	4	2	2	1	0	1	5	0	Tidak
69	3	5	2	1	4	2	4	1	3	3	5	Tidak
70	3	5	2	4	1	2	1	1	0	0	5	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
71	3	5	4	1	2	2	4	3	1	5	3	Tidak
72	3	5	4	2	1	2	5	3	0	0	3	Tidak
73	4	1	2	3	5	5	1	3	0	5	2	Tidak
74	4	1	2	5	3	5	3	3	4	1	2	Tidak
75	4	1	3	2	5	5	0	4	0	5	1	Tidak
76	4	1	3	5	2	5	3	4	3	2	1	Tidak
77	4	1	5	2	3	5	0	0	4	1	5	Tidak
78	4	1	5	3	2	5	1	0	3	2	5	Tidak
79	4	2	1	3	5	0	1	3	1	4	2	Tidak
80	4	2	1	5	3	0	3	3	5	0	2	Tidak
81	4	2	3	1	5	0	5	5	1	4	0	Tidak
82	4	2	3	5	1	0	3	5	3	2	0	Tidak
83	4	2	5	1	3	0	5	1	5	0	4	Tidak
84	4	2	5	3	1	0	1	1	3	2	4	Tidak
85	4	3	1	2	5	1	0	4	2	3	1	Tidak
86	4	3	1	5	2	1	3	4	5	0	1	Tidak
87	4	3	2	1	5	1	5	5	2	3	0	Tidak
88	4	3	2	5	1	1	3	5	4	1	0	Tidak
89	4	3	5	1	2	1	5	2	5	0	3	Tidak
90	4	3	5	2	1	1	0	2	4	1	3	Tidak
91	4	5	1	2	3	3	0	0	2	3	5	Tidak
92	4	5	1	3	2	3	1	0	1	4	5	Tidak
93	4	5	2	1	3	3	5	1	2	3	4	Tidak
94	4	5	2	3	1	3	1	1	0	5	4	Tidak
95	4	5	3	1	2	3	5	2	1	4	3	Tidak
96	4	5	3	2	1	3	0	2	0	5	3	Tidak
97	5	1	2	3	4	0	2	3	5	5	1	Tidak
98	5	1	2	4	3	0	3	3	4	0	1	Tidak
99	5	1	3	2	4	0	1	4	5	5	0	Tidak
100	5	1	3	4	2	0	3	4	3	1	0	Tidak
101	5	1	4	2	3	0	1	5	4	0	5	Tidak
102	5	1	4	3	2	0	2	5	3	1	5	Tidak
103	5	2	1	3	4	1	2	3	0	4	1	Tidak
104	5	2	1	4	3	1	3	3	5	5	1	Tidak
105	5	2	3	1	4	1	0	5	0	4	5	Tidak
106	5	2	3	4	1	1	3	5	3	1	5	Tidak
107	5	2	4	1	3	1	0	0	5	5	4	Tidak
108	5	2	4	3	1	1	2	0	3	1	4	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
109	5	3	1	2	4	2	1	4	1	3	0	Tidak
110	5	3	1	4	2	2	3	4	5	5	0	Tidak
111	5	3	2	1	4	2	0	5	1	3	5	Tidak
112	5	3	2	4	1	2	3	5	4	0	5	Tidak
113	5	3	4	1	2	2	0	1	5	5	3	Tidak
114	5	3	4	2	1	2	1	1	4	0	3	Tidak
115	5	4	1	2	3	3	1	5	1	3	5	Tidak
116	5	4	1	3	2	3	2	5	0	4	5	Tidak
117	5	4	2	1	3	3	0	0	1	3	4	Tidak
118	5	4	2	3	1	3	2	0	5	5	4	Tidak
119	5	4	3	1	2	3	0	1	0	4	3	Tidak
120	5	4	3	2	1	3	1	1	5	5	3	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama.

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *strong vertex-graceful* atau tidak.

Tabel 3.1.26 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf G_5

No	f					$f^+(\neg mod)$						Ket
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_1, v_4)	(v_2, v_3)	(v_2, v_5)	(v_3, v_4)	(v_4, v_5)	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
1	1	2	3	4	5	3	5	5	7	7	9	Tidak
2	1	2	3	5	4	3	6	5	6	8	9	Tidak
3	1	2	4	3	5	3	4	6	7	7	8	Tidak
4	1	2	4	5	3	3	6	6	5	9	8	Tidak
5	1	2	5	3	4	3	4	7	6	8	7	Tidak
6	1	2	5	4	3	3	5	7	5	9	7	Tidak
7	1	3	2	4	5	4	5	5	8	6	9	Tidak
8	1	3	2	5	4	4	6	5	7	7	9	Tidak
9	1	3	4	2	5	4	3	7	8	6	7	Tidak
10	1	3	4	5	2	4	6	7	5	9	7	Tidak
11	1	3	5	2	4	4	3	8	7	7	6	Tidak
12	1	3	5	4	2	4	5	8	5	9	6	Tidak
13	1	4	2	3	5	5	4	6	9	5	8	Tidak
14	1	4	2	5	3	5	6	6	7	7	8	Tidak
15	1	4	3	2	5	5	3	7	9	5	7	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
16	1	4	3	5	2	5	6	7	6	8	7	Tidak
17	1	4	5	2	3	5	3	9	7	7	5	Tidak
18	1	4	5	3	2	5	4	9	6	8	5	Tidak
19	1	5	2	3	4	6	4	7	9	5	7	Tidak
20	1	5	2	4	3	6	5	7	8	6	7	Tidak
21	1	5	3	2	4	6	3	8	9	5	6	Tidak
22	1	5	3	4	2	6	5	8	7	7	6	Tidak
23	1	5	4	2	3	6	3	9	8	6	5	Tidak
24	1	5	4	3	2	6	4	9	7	7	5	Tidak
25	2	1	3	4	5	3	6	4	6	7	9	Tidak
26	2	1	3	5	4	3	7	4	5	8	9	Tidak
27	2	1	4	3	5	3	5	5	6	7	8	Tidak
28	2	1	4	5	3	3	7	5	4	9	8	Tidak
29	2	1	5	3	4	3	5	6	5	8	7	Tidak
30	2	1	5	4	3	3	6	6	4	9	7	Tidak
31	2	3	1	4	5	5	6	4	8	5	9	Tidak
32	2	3	1	5	4	5	7	4	7	6	9	Tidak
33	2	3	4	1	5	5	3	7	8	5	6	Tidak
34	2	3	4	5	1	5	7	7	4	9	6	Tidak
35	2	3	5	1	4	5	3	8	7	6	5	Tidak
36	2	3	5	4	1	5	6	8	4	9	5	Tidak
37	2	4	1	3	5	6	5	5	9	4	8	Tidak
38	2	4	1	5	3	6	7	5	7	6	8	Tidak
39	2	4	3	1	5	6	3	7	9	4	6	Tidak
40	2	4	3	5	1	6	7	7	5	8	6	Tidak
41	2	4	5	1	3	6	3	9	7	6	4	Tidak
42	2	4	5	3	1	6	5	9	5	8	4	Tidak
43	2	5	1	3	4	7	5	6	9	4	7	Tidak
44	2	5	1	4	3	7	6	6	8	5	7	Tidak
45	2	5	3	1	4	7	3	8	9	4	5	Tidak
46	2	5	3	4	1	7	6	8	6	7	5	Tidak
47	2	5	4	1	3	7	3	9	8	5	4	Tidak
48	2	5	4	3	1	7	5	9	6	7	4	Tidak
49	3	1	2	4	5	4	7	3	6	6	9	Tidak
50	3	1	2	5	4	4	8	3	5	7	9	Tidak
51	3	1	4	2	5	4	5	5	6	6	7	Tidak
52	3	1	4	5	2	4	8	5	3	9	7	Tidak
53	3	1	5	2	4	4	5	6	5	7	6	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
54	3	1	5	4	2	4	7	6	3	9	6	Tidak
55	3	2	1	4	5	5	7	3	7	5	9	Tidak
56	3	2	1	5	4	5	8	3	6	6	9	Tidak
57	3	2	4	1	5	5	4	6	7	5	6	Tidak
58	3	2	4	5	1	5	8	6	3	9	6	Tidak
59	3	2	5	1	4	5	4	7	6	6	5	Tidak
60	3	2	5	4	1	5	7	7	3	9	5	Tidak
61	3	4	1	2	5	7	5	5	9	3	7	Tidak
62	3	4	1	5	2	7	8	5	6	6	7	Tidak
63	3	4	2	1	5	7	4	6	9	3	6	Tidak
64	3	4	2	5	1	7	8	6	5	7	6	Tidak
65	3	4	5	1	2	7	4	9	6	6	3	Tidak
66	3	4	5	2	1	7	5	9	5	7	3	Tidak
67	3	5	1	2	4	8	5	6	9	3	6	Tidak
68	3	5	1	4	2	8	7	6	7	5	6	Tidak
69	3	5	2	1	4	8	4	7	9	3	5	Tidak
70	3	5	2	4	1	8	7	7	6	6	5	Tidak
71	3	5	4	1	2	8	4	9	7	5	3	Tidak
72	3	5	4	2	1	8	5	9	6	6	3	Tidak
73	4	1	2	3	5	5	7	3	6	5	8	Tidak
74	4	1	2	5	3	5	9	3	4	7	8	Tidak
75	4	1	3	2	5	5	6	4	6	5	7	Tidak
76	4	1	3	5	2	5	9	4	3	8	7	Tidak
77	4	1	5	2	3	5	6	6	4	7	5	Tidak
78	4	1	5	3	2	5	7	6	3	8	5	Tidak
79	4	2	1	3	5	6	7	3	7	4	8	Tidak
80	4	2	1	5	3	6	9	3	5	6	8	Tidak
81	4	2	3	1	5	6	5	5	7	4	6	Tidak
82	4	2	3	5	1	6	9	5	3	8	6	Tidak
83	4	2	5	1	3	6	5	7	5	6	4	Tidak
84	4	2	5	3	1	6	7	7	3	8	4	Tidak
85	4	3	1	2	5	7	6	4	8	3	7	Tidak
86	4	3	1	5	2	7	9	4	5	6	7	Tidak
87	4	3	2	1	5	7	5	5	8	3	6	Tidak
88	4	3	2	5	1	7	9	5	4	7	6	Tidak
89	4	3	5	1	2	7	5	8	5	6	3	Tidak
90	4	3	5	2	1	7	6	8	4	7	3	Tidak
91	4	5	1	2	3	9	6	6	8	3	5	Tidak

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
92	4	5	1	3	2	9	7	6	7	4	5	Tidak
93	4	5	2	1	3	9	5	7	8	3	4	Tidak
94	4	5	2	3	1	9	7	7	6	5	4	Tidak
95	4	5	3	1	2	9	5	8	7	4	3	Tidak
96	4	5	3	2	1	9	6	8	6	5	3	Tidak
97	5	1	2	3	4	6	8	3	5	5	7	Tidak
98	5	1	2	4	3	6	9	3	4	6	7	Tidak
99	5	1	3	2	4	6	7	4	5	5	6	Tidak
100	5	1	3	4	2	6	9	4	3	7	6	Tidak
101	5	1	4	2	3	6	7	5	4	6	5	Tidak
102	5	1	4	3	2	6	8	5	3	7	5	Tidak
103	5	2	1	3	4	7	8	3	6	4	7	Tidak
104	5	2	1	4	3	7	9	3	5	5	7	Tidak
105	5	2	3	1	4	7	6	5	6	4	5	Tidak
106	5	2	3	4	1	7	9	5	3	7	5	Tidak
107	5	2	4	1	3	7	6	6	5	5	4	Tidak
108	5	2	4	3	1	7	8	6	3	7	4	Tidak
109	5	3	1	2	4	8	7	4	7	3	6	Tidak
110	5	3	1	4	2	8	9	4	5	5	6	Tidak
111	5	3	2	1	4	8	6	5	7	3	5	Tidak
112	5	3	2	4	1	8	9	5	4	6	5	Tidak
113	5	3	4	1	2	8	6	7	5	5	3	Tidak
114	5	3	4	2	1	8	7	7	4	6	3	Tidak
115	5	4	1	2	3	9	7	5	7	3	5	Tidak
116	5	4	1	3	2	9	8	5	6	4	5	Tidak
117	5	4	2	1	3	9	6	6	7	3	4	Tidak
118	5	4	2	3	1	9	8	6	5	5	4	Tidak
119	5	4	3	1	2	9	6	7	6	4	3	Tidak
120	5	4	3	2	1	9	7	7	5	5	3	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif.*

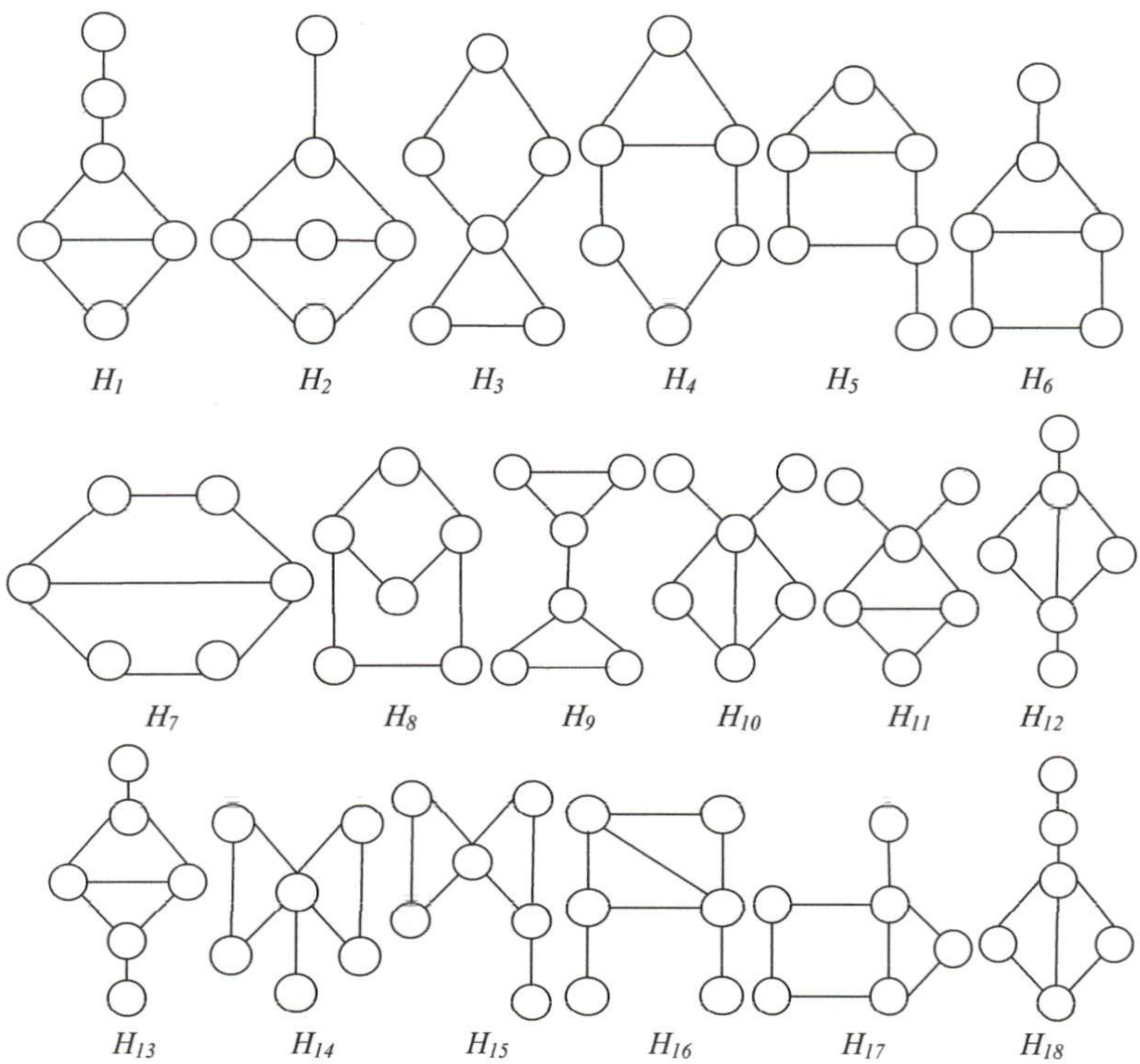
Dari tabel, dapat dilihat bahwa graf G_5 bukan pelabelan *vertex-graceful* dan bukan pelabelan *strong vertex-graceful*.

Jadi, di antara lima graf-(5,6) seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.1 hanya tiga graf yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* sekaligus pelabelan *strong vertex-graceful* yaitu G_1, G_2, dan G_3.

Selanjutnya, akan diselidiki bahwa untuk graf-(6,7) terdapat 18 bentuk graf yang saling tidak *isomorf*. Dari 18 graf ini hanya empat yang bukan pelabelan *vertex-graceful* seperti dinyatakan dalam Teorema 3.2 berikut,

Teorema 3.2

Di antara 18 graf-(6,7) seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.2 hanya empat graf yang bukan pelabelan vertex-graceful.

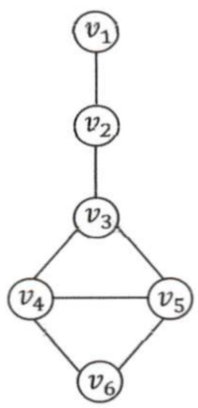


Gambar 3.2 18 Graf-(6,7)

Bukti:

a) Untuk graf H_1 (ada 720 kemungkinan).

Misalkan $V(H_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.



Gambar 3.2.1 Ilustrasi $V(H_1)$

– Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(H_1) \to \{1,2,3,4,5,6\}$

$$v_1 \mapsto 1,$$

$$v_2 \mapsto 2,$$

$$v_3 \mapsto 3,$$

$$v_4 \mapsto 4,$$

$$v_5 \mapsto 5,$$

$$v_6 \mapsto 6,$$

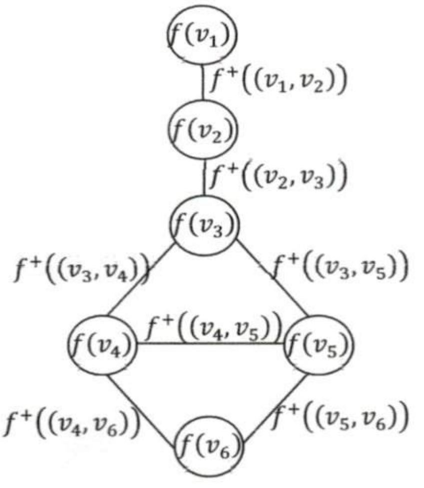
dan $f^+: E(H_1) \to Z_q$ dimana $q = 7$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \; mod \; 7, \qquad j \neq k$$

dan $f^+(\neg mod): E(H_1) \to \left\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\right\}$

$$(v_j, v_k) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful*.



Gambar 3.2.2 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_1 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+((v_1,v_2)) = (f(v_1)+f(v_2)) \; mod\; 7 = (1+2) \; mod\; 7 = 3$$

$$f^+((v_2,v_3)) = (f(v_2)+f(v_3)) \; mod\; 7 = (2+3) \; mod\; 7 = 5$$

$$f^+((v_3,v_4)) = (f(v_3)+f(v_4)) \; mod\; 7 = (3+4) \; mod\; 7 = 0$$

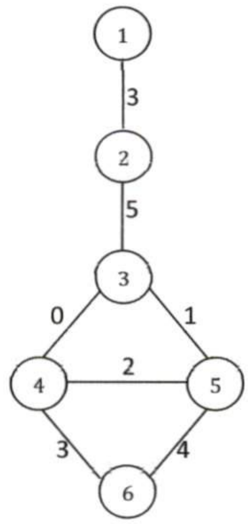
$$f^+((v_3,v_5)) = (f(v_3)+f(v_5)) \; mod\; 7 = (3+5) \; mod\; 7 = 1$$

$$f^+((v_4,v_5)) = (f(v_4)+f(v_5)) \; mod\; 7 = (4+5) \; mod\; 7 = 2$$

$$f^+((v_4,v_6)) = (f(v_4)+f(v_6)) \; mod\; 7 = (4+6) \; mod\; 7 = 3$$

$$f^+((v_5,v_6)) = (f(v_5)+f(v_6)) \; mod\; 7 = (5+6) \; mod\; 7 = 4.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.3 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_1 yang sudah dilabeli (I)

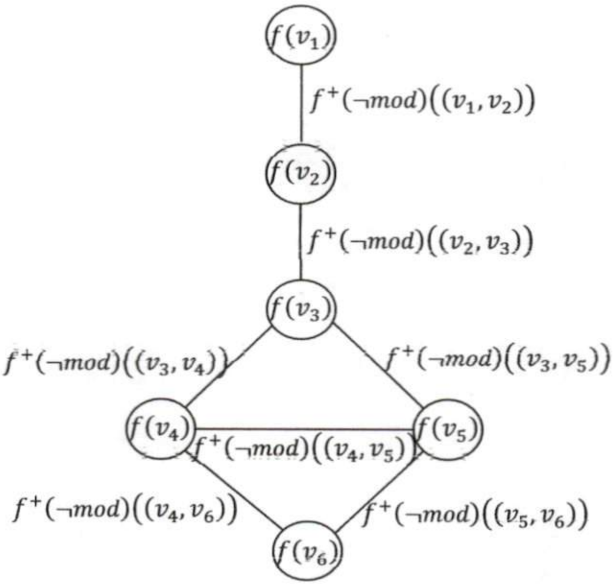
Karena ada dua sisi yang mempunyai label sama maka pelabelan di atas bukan pelabelan *vertex-graceful*. Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.1 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_1 (I)

f						f^+							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)	
1	2	3	4	5	6	3	5	0	1	2	3	4	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama.

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful.*



Gambar 3.2.4 Ilustrasi Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_1 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+(\neg mod)((v_1, v_2)) = f(v_1) + f(v_2) = 1 + 2 = 3$$

$$f^+(\neg mod)((v_2, v_3)) = f(v_2) + f(v_3) = 2 + 3 = 5$$

$$f^+(\neg mod)((v_3, v_4)) = f(v_3) + f(v_4) = 3 + 4 = 7$$

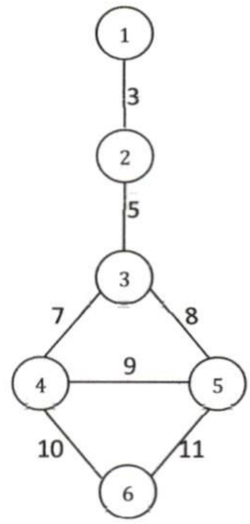
$$f^+(\neg mod)((v_3, v_5)) = f(v_3) + f(v_5) = 3 + 5 = 8$$

$$f^+(\neg mod)((v_4, v_5)) = f(v_4) + f(v_5) = 4 + 5 = 9$$

$$f^+(\neg mod)((v_4, v_6)) = f(v_4) + f(v_6) = 4 + 6 = 10$$

$$f^+(\neg mod)((v_5, v_6)) = f(v_5) + f(v_6) = 5 + 6 = 11.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.5 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_1 yang sudah dilabeli(I)

Karena pelabelan di atas sisinya tidak *konsekutif* maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *strong vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.2 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_1 (I)

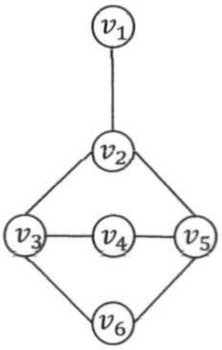
f						$f^+(\neg mod)$							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)	
1	2	3	4	5	6	3	5	7	8	9	10	11	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif.*

Dengan cara yang sama seperti di atas, di antara 720 kemungkinan pada graf H_1 tidak ada satu pun yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* dan pelabelan *strong vertex-graceful.*

b) Untuk graf H_2 (ada 720 kemungkinan).

Misalkan $V(H_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.



Gambar 3.2.6 Ilustrasi $V(H_2)$

- Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(H_2) \to \{1,2,3,4,5,6\}$.

$$v_1 \mapsto 1,$$

$$v_2 \mapsto 2,$$

$$v_3 \mapsto 3,$$

$$v_4 \mapsto 4,$$

$$v_5 \mapsto 5,$$

$$v_6 \mapsto 6,$$

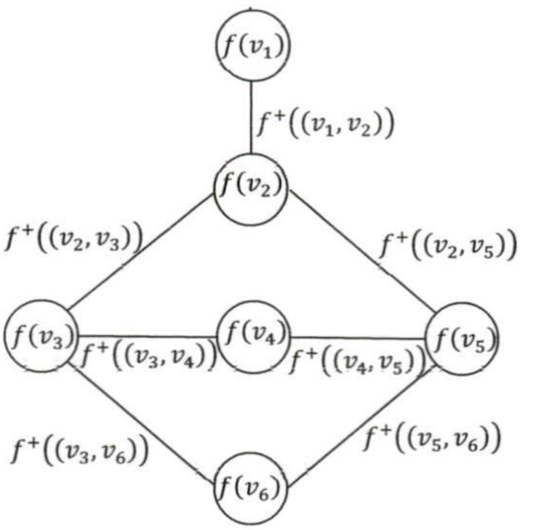
dan $f^+: E(H_2) \to Z_q$ dimana $q = 7$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \; mod \; 7, \qquad j \neq k$$

dan $f^+(\neg mod): E(H_2) \to \left\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\right\}$

$$(v_j, v_k) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful.*



Gambar 3.2.7 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_2 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+((v_1, v_2)) = (f(v_1) + f(v_2))\ mod\ 7 = (1 + 2)\ mod\ 7 = 3$$

$$f^+((v_2, v_3)) = (f(v_2) + f(v_3))\ mod\ 7 = (2 + 3)\ mod\ 7 = 5$$

$$f^+((v_2, v_5)) = (f(v_2) + f(v_5))\ mod\ 7 = (2 + 5)\ mod\ 7 = 0$$

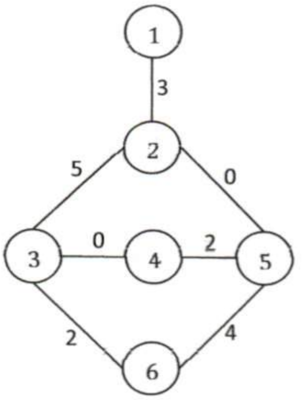
$$f^+((v_3, v_4)) = (f(v_3) + f(v_4))\ mod\ 7 = (3 + 4)\ mod\ 7 = 0$$

$$f^+((v_3, v_6)) = (f(v_3) + f(v_6))\ mod\ 7 = (3 + 6)\ mod\ 7 = 2$$

$$f^+((v_4, v_5)) = (f(v_4) + f(v_5))\ mod\ 7 = (4 + 5)\ mod\ 7 = 2$$

$$f^+((v_5, v_6)) = (f(v_5) + f(v_6))\ mod\ 7 = (5 + 6)\ mod\ 7 = 4.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.8 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_2 yang sudah dilabeli (I)

Karena ada beberapa sisi yang mempunyai label yang sama maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

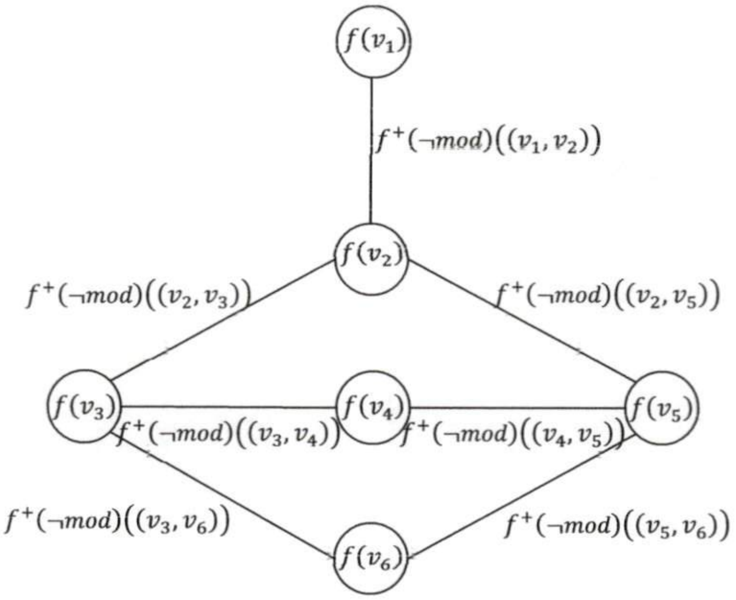
Tabel 3.2.3 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_2 (I)

f						f^+							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_2, v_5)	(v_3, v_4)	(v_3, v_6)	(v_4, v_5)	(v_5, v_6)	
1	2	3	4	5	6	3	5	0	0	2	2	4	Tidak

Keterangan:

"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada beberapa sisi yang mempunyai label yang sama.

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful.*



Gambar 3.2.9 Ilustrasi Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_2 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+(\neg mod)((v_1, v_2)) = f(v_1) + f(v_2) = 1 + 2 = 3$$

$$f^+(\neg mod)((v_2, v_3)) = f(v_2) + f(v_3) = 2 + 3 = 5$$

$$f^+(\neg mod)((v_2, v_5)) = f(v_2) + f(v_5) = 2 + 5 = 7$$

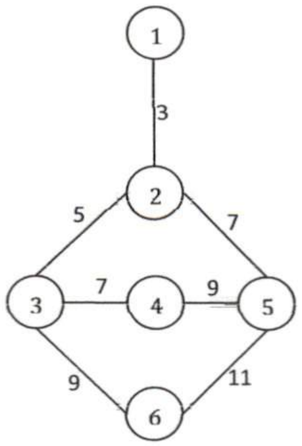
$$f^+(\neg mod)((v_3, v_4)) = f(v_3) + f(v_4) = 3 + 4 = 7$$

$$f^+(\neg mod)((v_3, v_6)) = f(v_3) + f(v_6) = 3 + 6 = 9$$

$$f^+(\neg mod)((v_4, v_5)) = f(v_4) + f(v_5) = 4 + 5 = 9$$

$$f^+(\neg mod)((v_5, v_6)) = f(v_5) + f(v_6) = 5 + 6 = 11.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.10 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_2 yang sudah dilabeli(I)

Karena pelabelan di atas sisinya tidak *konsekutif* maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *strong vertex-graceful*. Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.4 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_2 (I)

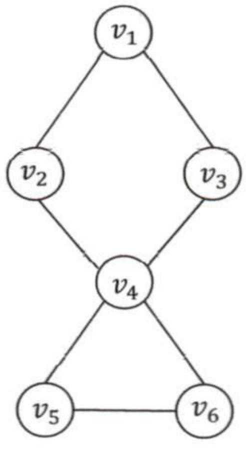
f						$f^+(\neg mod)$							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1,v_2)	(v_2,v_3)	(v_2,v_5)	(v_3,v_4)	(v_3,v_6)	(v_4,v_5)	(v_5,v_6)	
1	2	3	4	5	6	3	5	7	7	9	9	11	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif*.

Dengan cara yang sama seperti di atas, di antara 720 kemungkinan pada graf H_2 tidak ada satu pun yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* dan pelabelan *strong vertex-graceful*.

c) Untuk graf H_3 (ada 720 kemungkinan).

Misalkan $V(H_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.



Gambar 3.2.11 Ilustrasi $V(H_3)$

- Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(H_3) \to \{1,2,3,4,5,6\}$.

$$v_1 \mapsto 1,$$

$$v_2 \mapsto 2,$$

$$v_3 \mapsto 3,$$

$$v_4 \mapsto 4,$$

$$v_5 \mapsto 5,$$

$$v_6 \mapsto 6,$$

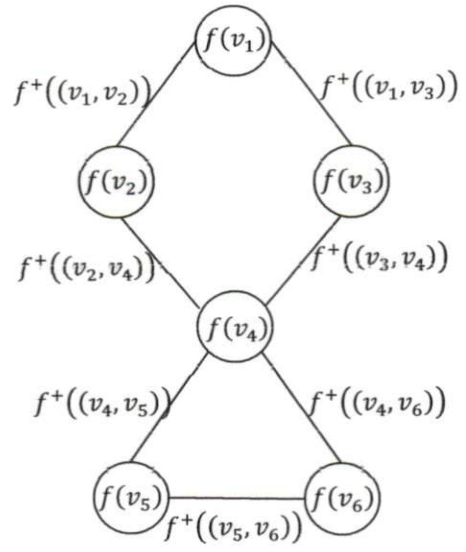
dan $f^+: E(H_3) \to Z_q$ dimana $q = 7$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \, mod \, 7, \qquad j \neq k$$

dan $f^+(\neg mod): E(H_3) \to \left\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\right\}$

$$\left(v_j, v_k\right) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful*.



Gambar 3.2.12 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_3 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+((v_1, v_2)) = (f(v_1) + f(v_2)) \; mod \; 7 = (1 + 2) \; mod \; 7 = 3$$

$$f^+((v_1, v_3)) = (f(v_1) + f(v_3)) \; mod \; 7 = (1 + 3) \; mod \; 7 = 4$$

$$f^+((v_2, v_4)) = (f(v_2) + f(v_4)) \; mod \; 7 = (2 + 4) \; mod \; 7 = 6$$

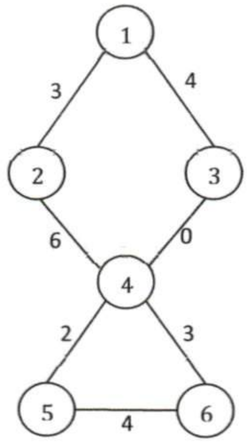
$$f^+((v_3, v_4)) = (f(v_3) + f(v_4)) \; mod \; 7 = (3 + 4) \; mod \; 7 = 0$$

$$f^+((v_4, v_5)) = (f(v_4) + f(v_5)) \; mod \; 7 = (4 + 5) \; mod \; 7 = 2$$

$$f^+((v_4, v_6)) = (f(v_4) + f(v_6)) \; mod \; 7 = (4 + 6) \; mod \; 7 = 3$$

$$f^+((v_5, v_6)) = (f(v_5) + f(v_6)) \; mod \; 7 = (5 + 6) \; mod \; 7 = 4.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.13 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_3 yang sudah dilabeli (I)

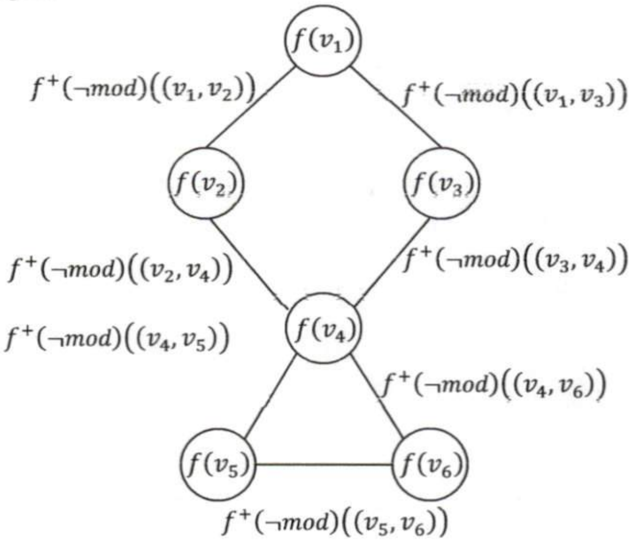
Karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.5 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_3 (I)

f						f^+							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_4)	(v_4, v_5)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)	
1	2	3	4	5	6	3	4	6	0	2	3	4	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama.

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful.*



Gambar 3.2.14 Ilustrasi Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_3 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+(\neg mod)((v_1, v_2)) = f(v_1) + f(v_2) = 1 + 2 = 3$$

$$f^+(\neg mod)((v_1, v_3)) = f(v_1) + f(v_3) = 1 + 3 = 4$$

$$f^+(\neg mod)((v_2, v_4)) = f(v_2) + f(v_4) = 2 + 4 = 6$$

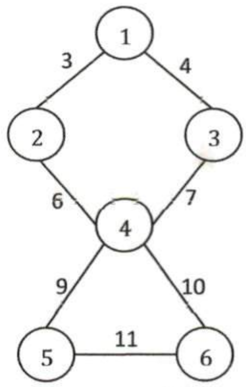
$$f^+(\neg mod)((v_3, v_4)) = f(v_3) + f(v_4) = 3 + 4 = 7$$

$$f^+(\neg mod)((v_4, v_5)) = f(v_4) + f(v_5) = 4 + 5 = 9$$

$$f^+(\neg mod)((v_4, v_6)) = f(v_4) + f(v_6) = 4 + 6 = 10$$

$$f^+(\neg mod)((v_5, v_6)) = f(v_5) + f(v_6) = 5 + 6 = 11$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.15 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_3 yang sudah dilabeli (I)

Karena pelabelan di atas sisinya tidak *konsekutif* maka pelabelan di atas bukalah pelabelan *strong vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.6 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_3 (I)

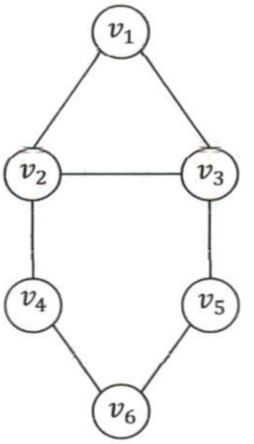
f						$f^*(\neg mod)$							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1,v_2)	(v_1,v_3)	(v_2,v_4)	(v_3,v_4)	(v_4,v_5)	(v_4,v_6)	(v_5,v_6)	
1	2	3	4	5	6	3	4	6	7	9	10	11	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif.*

Dengan cara yang sama seperti di atas, di antara 720 kemungkinan pada graf H_3 tidak ada satu pun yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* dan pelabelan *strong vertex-graceful.*

d) Untuk graf H_4 (ada 720 kemungkinan)

Misalkan $V(H_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.



Gambar 3.2.16 Ilustrasi $V(H_4)$

- Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(H_4) \to \{1,2,3,4,5,6\}$.

$$v_1 \mapsto 1,$$

$$v_2 \mapsto 2,$$

$$v_3 \mapsto 3,$$

$$v_4 \mapsto 4,$$

$$v_5 \mapsto 5,$$

$$v_6 \mapsto 6,$$

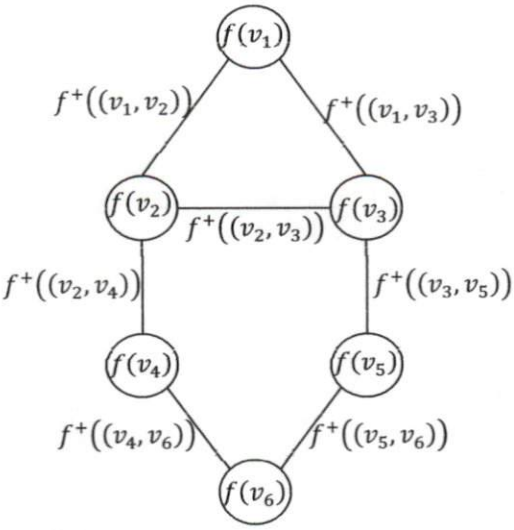
dan $f^+: E(H_4) \to Z_q$ dimana $q = 7$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \bmod 7, \qquad j \neq k$$

dan $f^+(\neg mod): E(H_4) \to \left\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\right\}$

$$\left(v_j, v_k\right) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful*.



Gambar 3.2.17 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_4 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+((v_1, v_2)) = (f(v_1) + f(v_2)) \, mod \, 7 = (1+2) \, mod \, 7 = 3$$

$$f^+((v_1, v_3)) = (f(v_1) + f(v_3)) \, mod \, 7 = (1+3) \, mod \, 7 = 4$$

$$f^+((v_2, v_3)) = (f(v_2) + f(v_3)) \, mod \, 7 = (2+3) \, mod \, 7 = 5$$

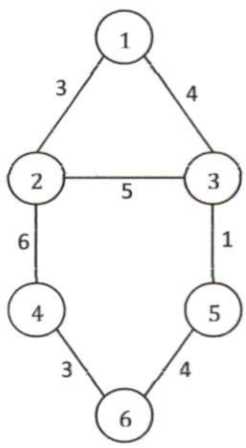
$$f^+((v_2, v_4)) = (f(v_2) + f(v_4)) \, mod \, 7 = (2+4) \, mod \, 7 = 6$$

$$f^+((v_3, v_5)) = (f(v_3) + f(v_5)) \, mod \, 7 = (3+5) \, mod \, 7 = 1$$

$$f^+((v_4, v_6)) = (f(v_4) + f(v_6)) \, mod \, 7 = (4+6) \, mod \, 7 = 3$$

$$f^+((v_5, v_6)) = (f(v_5) + f(v_6)) \, mod \, 7 = (5+6) \, mod \, 7 = 4.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.18 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_4 yang sudah dilabeli (I)

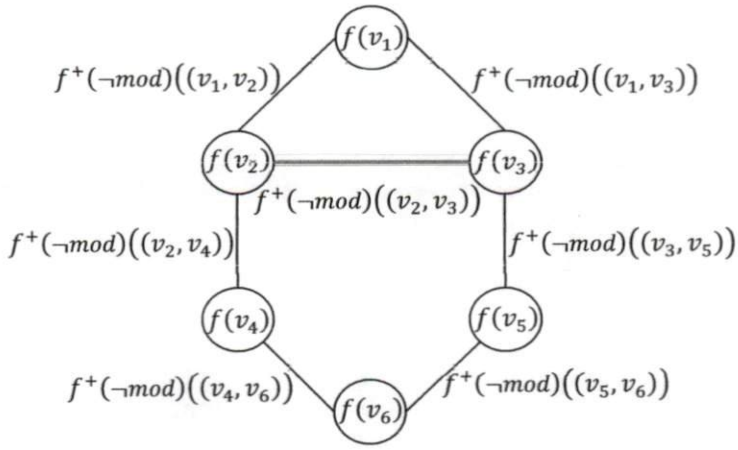
Karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.7 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_4 (I)

f						f^+							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)	
1	2	3	4	5	6	3	4	5	6	1	3	4	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama.

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful*.



Gambar 3.2.19 Ilustrasi Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_4 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+(\neg mod)((v_1, v_2)) = f(v_1) + f(v_2) = 1 + 2 = 3$$

$$f^+(\neg mod)((v_1, v_3)) = f(v_1) + f(v_3) = 1 + 3 = 4$$

$$f^+(\neg mod)((v_2, v_3)) = f(v_2) + f(v_3) = 2 + 3 = 5$$

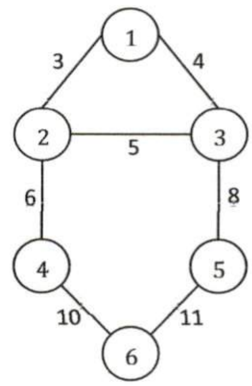
$$f^+(\neg mod)((v_2, v_4)) = f(v_2) + f(v_4) = 2 + 4 = 6$$

$$f^+(\neg mod)((v_3, v_5)) = f(v_3) + f(v_5) = 3 + 5 = 8$$

$$f^+(\neg mod)((v_4, v_6)) = f(v_4) + f(v_6) = 4 + 6 = 10$$

$$f^+(\neg mod)((v_5, v_6)) = f(v_5) + f(v_6) = 5 + 6 = 11.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.20 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_4 yang sudah dilabeli(I)

Karena pelabelan di atas sisinya tidak *konsekutif* maka pelabelan di atas bukan pelabelan *strong vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.8 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_4 (I)

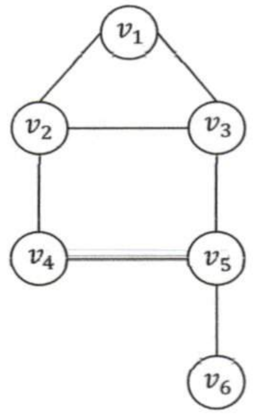
f						$f^*(\neg mod)$							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)	
1	2	3	4	5	6	3	4	5	6	8	10	11	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif.*

Dengan cara yang sama seperti di atas, di antara 720 kemungkinan pada graf H_4 tidak ada satu pun yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* dan pelabelan *strong vertex-graceful.*

e) Untuk graf H_5 (ada 720 kemungkinan).

Misalkan $V(H_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.



Gambar 3.2.21 Ilustrasi $V(H_5)$

- Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(H_5) \to \{1,2,3,4,5,6\}$.

$$v_1 \mapsto 1,$$

$$v_2 \mapsto 4,$$

$$v_3 \mapsto 2,$$

$$v_4 \mapsto 3,$$

$$v_5 \mapsto 6,$$

$$v_6 \mapsto 5,$$

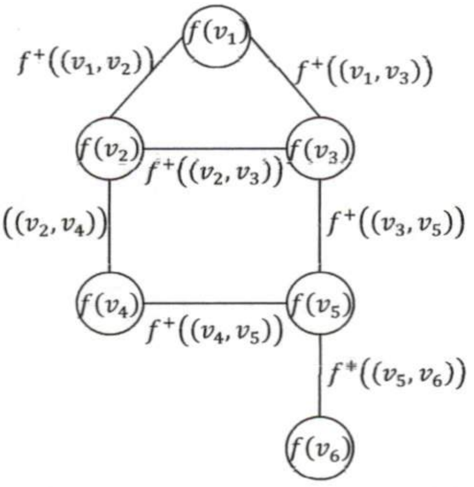
dan $f^+: E(H_5) \to Z_q$ dimana $q = 7$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \, mod \; 7, \qquad j \neq k$$

dan $f^+(\neg mod): E(H_5) \to \left\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\right\}$

$$(v_j, v_k) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful*.



Gambar 3.2.22 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_5 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+((v_1, v_2)) = (f(v_1) + f(v_2)) \; mod \; 7 = (1 + 4) \; mod \; 7 = 5$$

$$f^+((v_1, v_3)) = (f(v_1) + f(v_3)) \; mod \; 7 = (1 + 2) \; mod \; 7 = 3$$

$$f^+((v_2, v_3)) = (f(v_2) + f(v_3)) \; mod \; 7 = (4 + 2) \; mod \; 7 = 6$$

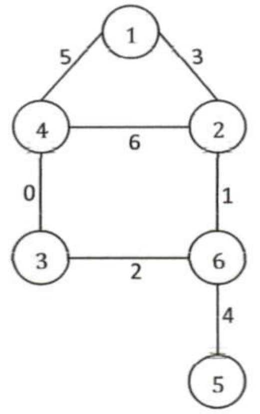
$$f^+((v_2, v_4)) = (f(v_2) + f(v_4)) \; mod \; 7 = (4 + 3) \; mod \; 7 = 0$$

$$f^+((v_3, v_5)) = (f(v_3) + f(v_5)) \; mod \; 7 = (2 + 6) \; mod \; 7 = 1$$

$$f^+((v_4, v_5)) = (f(v_4) + f(v_5)) \; mod \; 7 = (3 + 6) \; mod \; 7 = 2$$

$$f^+((v_5, v_6)) = (f(v_5) + f(v_6)) \; mod \; 7 = (6 + 5) \; mod \; 7 = 4.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



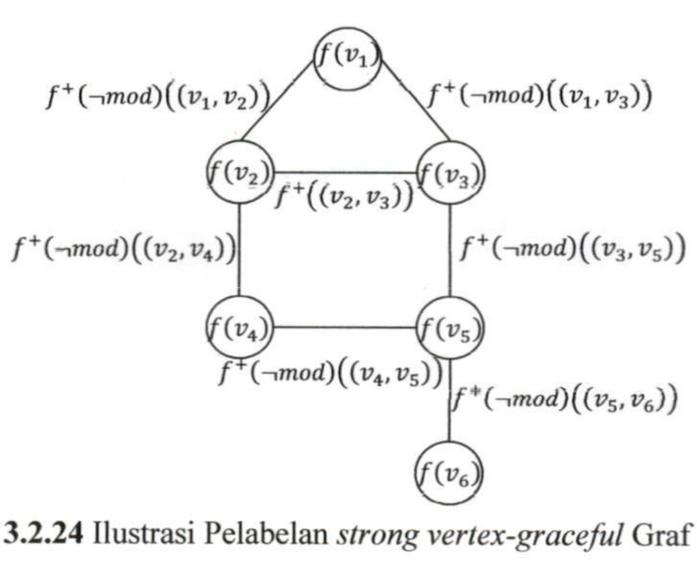
Gambar 3.2.23 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_5 yang sudah dilabeli (I)

Karena $f^+ : E(H_5) \to Z_7$ merupakan pemetaan *bijektif* maka pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful*. Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.9 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_5 (I)

f						f^+						
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	(v_5, v_6)
1	4	2	3	6	5	5	3	6	0	1	2	4

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful*.



Gambar 3.2.24 Ilustrasi Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_5 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_1, v_2)\big) = f(v_1) + f(v_2) = 1 + 4 = 5$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_1, v_3)\big) = f(v_1) + f(v_3) = 1 + 2 = 3$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_2, v_3)\big) = f(v_2) + f(v_3) = 4 + 2 = 6$$

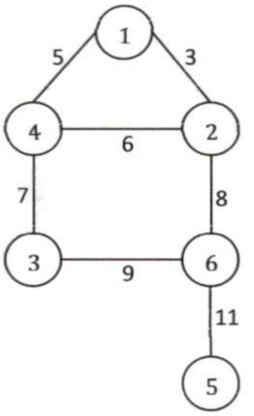
$$f^{+}(\neg mod)\big((v_2, v_4)\big) = f(v_2) + f(v_4) = 4 + 3 = 7$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_3, v_5)\big) = f(v_3) + f(v_5) = 2 + 6 = 8$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_4, v_5)\big) = f(v_4) + f(v_6) = 3 + 6 = 9$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_5, v_6)\big) = f(v_5) + f(v_6) = 6 + 5 = 11.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.25 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_5 yang sudah dilabeli (I)

Karena pelabelan di atas sisinya tidak *konsekutif* maka pelabelan di atas bukan pelabelan *strong vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.10 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_5 (I)

f						$f^{+}(\neg mod)$						
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	(v_5, v_6)
1	4	2	3	6	5	5	3	6	7	8	9	11

Dengan cara sama seperti cara di atas, untuk pelabelan yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* pada graf H_5 dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 3.2.11 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_5

No	f						f^+						
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	(v_5, v_6)
1	1	4	2	3	6	5	5	3	6	0	1	2	4
2	2	1	4	6	5	3	3	6	5	0	2	4	1
3	3	5	6	2	4	1	1	2	4	0	3	6	5
4	4	2	1	5	3	6	6	5	3	0	4	1	2
5	5	6	3	1	2	4	4	1	2	0	5	3	6
6	6	3	5	4	1	2	2	4	1	0	6	5	3

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah graf yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* tersebut, pelabelan *strong vertex-graceful* atau tidak.

Tabel 3.2.12 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_5

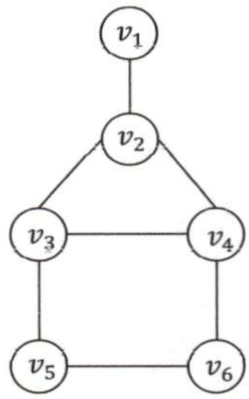
No	f						$f^+(\neg mod)$							Ket
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	(v_5, v_6)	
1	1	4	2	3	6	5	5	3	6	7	8	9	11	
2	2	1	4	6	5	3	3	6	5	7	9	11	8	
3	3	5	6	2	4	1	8	9	11	7	10	6	5	*
4	4	2	1	5	3	6	6	5	3	7	4	8	9	*
5	5	6	3	1	2	4	11	8	9	7	5	3	6	
6	6	3	5	4	1	2	9	11	4	7	6	5	3	

Keterangan:
"*" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *vertex-graceful* karena $f^+: E(H_5) \to Z_7$ dan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya *konsekutif.*

Jadi, graf H_5 merupakan pelabelan *vertex-graceful.*

f) Untuk graf H_6 (ada 720 kemungkinan).

Misalkan $V(H_6) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.



Gambar 3.2.26 Ilustrasi $V(H_6)$

– Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(H_6) \to \{1,2,3,4,5,6\}$.

$$v_1 \mapsto 1,$$

$$v_2 \mapsto 2,$$

$$v_3 \mapsto 3,$$

$$v_4 \mapsto 4,$$

$$v_5 \mapsto 5,$$

$$v_6 \mapsto 6,$$

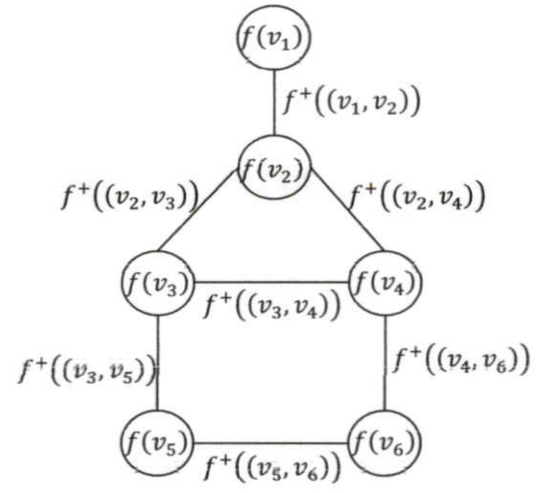
dan $f^+: E(H_6) \to Z_q$ dimana $q = 7$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \, mod \, 7, \qquad j \neq k$$

dan $f^+(\neg mod): E(H_6) \to \left\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\right\}$

$$(v_j, v_k) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful*.



Gambar 3.2.27 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_6 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+((v_1, v_2)) = (f(v_1) + f(v_2))\ mod\ 7 = (1 + 2)\ mod\ 7 = 3$$

$$f^+((v_2, v_3)) = (f(v_2) + f(v_3))\ mod\ 7 = (2 + 3)\ mod\ 7 = 5$$

$$f^+((v_2, v_4)) = (f(v_2) + f(v_4))\ mod\ 7 = (2 + 4)\ mod\ 7 = 6$$

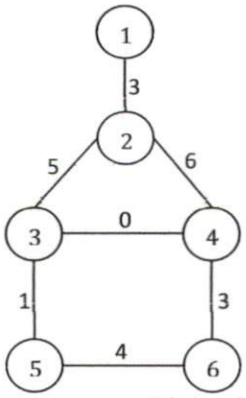
$$f^+((v_3, v_4)) = (f(v_3) + f(v_4))\ mod\ 7 = (3 + 4)\ mod\ 7 = 0$$

$$f^+((v_3, v_5)) = (f(v_3) + f(v_5))\ mod\ 7 = (3 + 5)\ mod\ 7 = 1$$

$$f^+((v_4, v_6)) = (f(v_4) + f(v_6))\ mod\ 7 = (4 + 6)\ mod\ 7 = 3$$

$$f^+((v_5, v_6)) = (f(v_5) + f(v_6))\ mod\ 7 = (5 + 6)\ mod\ 7 = 4.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.28 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_6 yang sudah dilabeli (I)

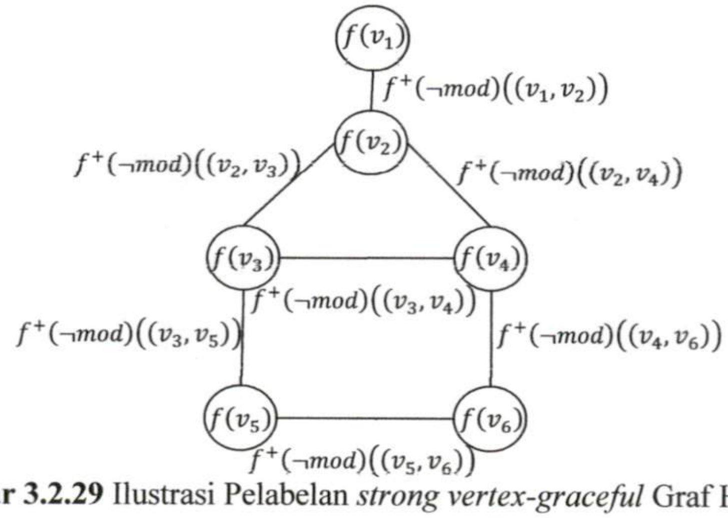
Karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.13 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_6 (I)

f						f^+							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1,v_2)	(v_2,v_3)	(v_2,v_4)	(v_3,v_4)	(v_3,v_5)	(v_4,v_6)	(v_5,v_6)	
1	2	3	4	5	6	3	5	6	0	1	3	4	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama.

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful.*



Gambar 3.2.29 Ilustrasi Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_6 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_1, v_2)\big) = f(v_1) + f(v_2) = 1 + 2 = 3$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_2, v_3)\big) = f(v_2) + f(v_3) = 2 + 3 = 5$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_2, v_4)\big) = f(v_2) + f(v_4) = 2 + 4 = 6$$

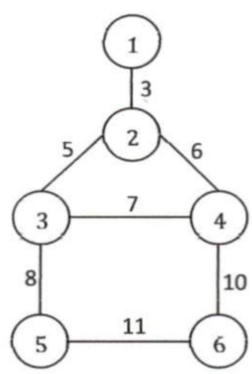
$$f^{+}(\neg mod)\big((v_3, v_4)\big) = f(v_3) + f(v_4) = 3 + 4 = 7$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_3, v_5)\big) = f(v_3) + f(v_5) = 3 + 5 = 8$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_4, v_6)\big) = f(v_4) + f(v_6) = 4 + 6 = 10$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_5, v_6)\big) = f(v_5) + f(v_6) = 5 + 6 = 11.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.30 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_6 yang sudah dilabeli (I)

Karena pelabelan di atas sisinya tidak *konsekutif* maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *strong vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.14 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_6 (I)

f						$f^{+}(\neg mod)$							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)	
1	2	3	4	5	6	3	5	6	7	8	10	11	Tidak

Keterangan:

"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif.*

Dengan cara sama seperti cara di atas, untuk pelabelan yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* pada graf H_6 dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 3.2.15 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_6

No	f						f^+						
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)
1	1	5	4	6	3	2	6	2	4	3	0	1	5
2	1	5	6	4	2	3	6	4	2	3	1	0	5
3	1	6	4	5	2	3	0	3	4	2	6	1	5
4	1	6	5	4	3	2	0	4	3	2	1	6	5
5	2	3	1	5	6	4	5	4	1	6	0	2	3
6	2	3	5	1	4	6	5	1	4	6	2	0	3
7	2	5	1	3	4	6	0	6	1	4	5	2	3
8	2	5	3	1	6	4	0	1	6	4	2	5	3
9	3	1	4	5	6	2	4	5	6	2	3	0	1
10	3	1	5	4	2	6	4	6	5	2	0	3	1
11	3	4	1	5	2	6	0	5	2	6	3	4	1
12	3	4	5	1	6	2	0	2	5	6	4	3	1
13	4	3	2	6	1	5	0	5	2	1	3	4	6
14	4	3	6	2	5	1	0	2	5	1	4	3	6
15	4	6	2	3	5	1	3	1	2	5	0	4	6
16	4	6	3	2	1	5	3	2	1	5	4	0	6
17	5	2	4	6	1	3	0	6	1	3	5	2	4
18	5	2	6	4	3	1	0	1	6	3	2	5	4
19	5	4	2	6	3	1	2	6	3	1	5	0	4
20	5	4	6	2	1	3	2	3	6	1	0	5	4
21	6	1	2	3	4	5	0	3	4	5	6	1	2
22	6	1	3	2	5	4	0	4	3	5	1	6	2
23	6	2	1	3	5	4	1	3	5	4	6	0	2
24	6	2	3	1	4	5	1	5	3	4	0	6	2

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah graf yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* tersebut, pelabelan *strong vertex-graceful* atau tidak.

Tabel 3.2.16 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_6

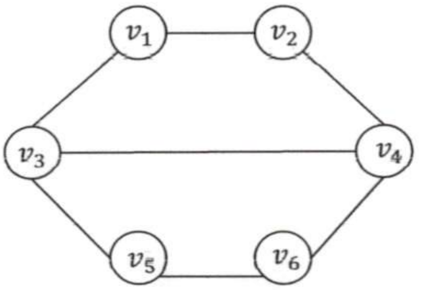
No	f						$f^{+}(\neg mod)$							Ket
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)	
1	1	5	4	6	3	2	6	9	11	10	7	8	5	*
2	1	5	6	4	2	3	6	11	9	10	8	7	5	*
3	1	6	4	5	2	3	7	10	11	9	6	8	5	*
4	1	6	5	4	3	2	7	11	10	9	8	6	5	*
5	2	3	1	5	6	4	5	4	8	6	7	9	10	*
6	2	3	5	1	4	6	5	8	4	6	9	7	10	*
7	2	5	1	3	4	6	7	6	8	4	5	9	10	*
8	2	5	3	1	6	4	7	8	6	4	9	5	10	*
9	3	1	4	5	6	2	4	5	6	9	10	7	8	*
10	3	1	5	4	2	6	4	6	5	9	7	10	8	*
11	3	4	1	5	2	6	7	5	9	6	3	11	8	
12	3	4	5	1	6	2	7	9	5	6	11	3	8	
13	4	3	2	6	1	5	7	5	9	8	3	11	6	
14	4	3	6	2	5	1	7	9	5	8	11	3	6	
15	4	6	2	3	5	1	10	8	9	5	7	4	6	*
16	4	6	3	2	1	5	10	9	8	5	4	7	6	*
17	5	2	4	6	1	3	7	6	8	10	5	9	4	*
18	5	2	6	4	3	1	7	8	6	10	9	5	4	*
19	5	4	2	6	3	1	9	6	10	8	5	7	4	*
20	5	4	6	2	1	3	9	10	6	8	7	5	4	*
21	6	1	2	3	4	5	7	3	4	5	6	8	9	*
22	6	1	3	2	5	4	7	4	3	5	8	6	9	*
23	6	2	1	3	5	4	8	3	5	4	6	7	9	*
24	6	2	3	1	4	5	8	5	3	4	7	6	9	*

Keterangan:
"*" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *vertex-graceful* karena $f^{+}: E(H_6) \to Z_7$ merupakan pemetaan *bijektif* dan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya *konsekutif*.

Jadi, graf H_6 merupakan pelabelan *vertex-graceful*.

g) Untuk graf H_7 (ada 720 kemungkinan).

Misalkan $V(H_7) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.



Gambar 3.2.31 Ilustrasi $V(H_7)$

- Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(H_7) \to \{1,2,3,4,5,6\}$.

$$v_1 \mapsto 1,$$

$$v_2 \mapsto 2,$$

$$v_3 \mapsto 3,$$

$$v_4 \mapsto 4,$$

$$v_5 \mapsto 5,$$

$$v_6 \mapsto 6,$$

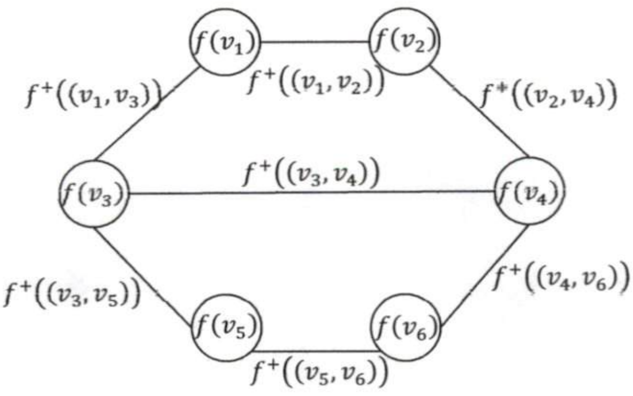
dan $f^+: E(H_7) \to Z_q$ dimana $q = 7$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \, mod \, 7, \qquad j \neq k$$

dan $f^+(\neg mod): E(H_7) \to \left\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\right\}$

$$(v_j, v_k) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful*.



Gambar 3.2.32 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_7 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+((v_1,v_2)) = (f(v_1)+f(v_2))\ mod\ 7 = (1+2)\ mod\ 7 = 3$$

$$f^+((v_1,v_3)) = (f(v_1)+f(v_3))\ mod\ 7 = (1+3)\ mod\ 7 = 4$$

$$f^+((v_2,v_4)) = (f(v_2)+f(v_4))\ mod\ 7 = (2+4)\ mod\ 7 = 6$$

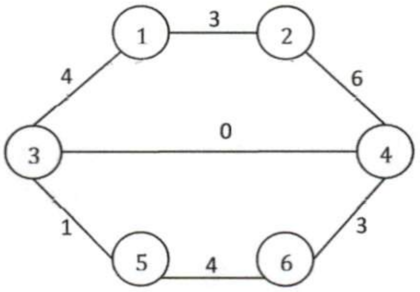
$$f^+((v_3,v_4)) = (f(v_3)+f(v_4))\ mod\ 7 = (3+4)\ mod\ 7 = 0$$

$$f^+((v_3,v_5)) = (f(v_3)+f(v_5))\ mod\ 7 = (3+5)\ mod\ 7 = 1$$

$$f^+((v_4,v_6)) = (f(v_4)+f(v_6))\ mod\ 7 = (4+6)\ mod\ 7 = 3$$

$$f^+((v_5,v_6)) = (f(v_5)+f(v_6))\ mod\ 7 = (5+6)\ mod\ 7 = 4.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.33 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_7 yang sudah dilabeli (I)

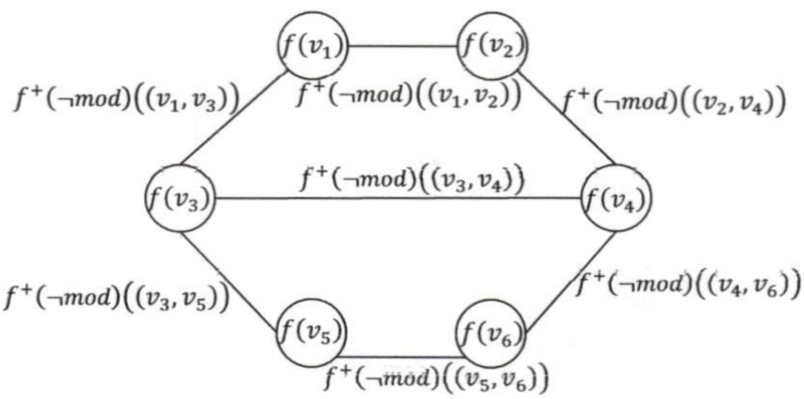
Karena ada beberapa sisi yang mempunyai label yang sama maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.17 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_7 (I)

f						f^+							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1,v_2)	(v_1,v_3)	(v_2,v_4)	(v_3,v_4)	(v_3,v_5)	(v_4,v_6)	(v_5,v_6)	
1	2	3	4	5	6	3	4	6	0	1	3	4	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada beberapa sisi yang mempunyai label yang sama.

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful.*



Gambar 3.2.34 Ilustrasi Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_7 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+(\neg mod)((v_1,v_2)) = f(v_1) + f(v_2) = 1 + 2 = 3$$

$$f^+(\neg mod)((v_1,v_3)) = f(v_1) + f(v_3) = 1 + 3 = 4$$

$$f^+(\neg mod)((v_2,v_4)) = f(v_2) + f(v_4) = 2 + 4 = 6$$

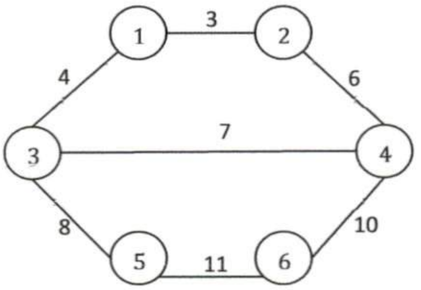
$$f^+(\neg mod)((v_3,v_4)) = f(v_3) + f(v_4) = 3 + 4 = 7$$

$$f^+(\neg mod)((v_3,v_5)) = f(v_3) + f(v_5) = 3 + 5 = 8$$

$$f^+(\neg mod)((v_4,v_6)) = f(v_4) + f(v_6) = 4 + 6 = 10$$

$$f^+(\neg mod)((v_5,v_6)) = f(v_5) + f(v_6) = 5 + 6 = 11.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.35 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_7 yang sudah dilabeli (I)

Karena pelabelan di atas sisinya tidak *konsekutif* maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *strong vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.18 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_7 (I)

f						$f^+(\neg mod)$							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)	
1	2	3	4	5	6	3	4	6	7	8	10	11	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif.*

Dengan cara sama seperti cara di atas, untuk pelabelan yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* pada graf H_7 dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 3.2.19 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_7

No	f						f^+						
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
1	1	3	5	2	4	6	4	6	5	0	2	1	3
2	1	5	3	4	2	6	6	4	2	0	5	3	1
3	2	3	6	1	4	5	5	1	4	0	3	6	2
4	2	6	3	4	1	5	1	5	3	0	4	2	6
5	3	1	2	5	6	4	4	5	6	0	1	2	3
6	3	2	1	6	5	4	5	4	1	0	6	3	2
7	4	5	6	1	2	3	2	3	6	0	1	4	5
8	4	6	5	2	1	3	3	2	1	0	6	5	4

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
9	5	1	4	3	6	2	6	2	4	0	3	5	1
10	5	4	1	6	3	2	2	6	3	0	4	1	5
11	6	2	4	3	5	1	1	3	5	0	2	4	6
12	6	4	2	5	3	1	3	1	2	0	5	6	4

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah graf yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* tersebut, pelabelan *strong vertex-graceful* atau tidak.

Tabel 3.2.20 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_7

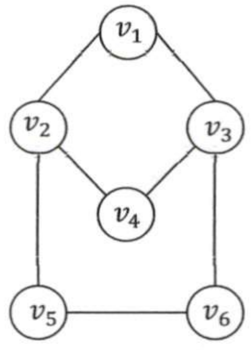
No	f						$f^+(\neg mod)$							Ket
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)	
1	1	3	5	2	4	6	4	6	5	7	9	8	10	*
2	1	5	3	4	2	6	6	4	9	7	5	10	8	*
3	2	3	6	1	4	5	5	8	4	7	10	6	9	*
4	2	6	3	4	1	5	8	5	10	7	4	9	6	*
5	3	1	2	5	6	4	4	5	6	7	8	9	10	*
6	3	2	1	6	5	4	5	4	8	7	6	10	9	*
7	4	5	6	1	2	3	9	10	6	7	8	4	5	*
8	4	6	5	2	1	3	10	9	8	7	6	5	4	*
9	5	1	4	3	6	2	6	9	4	7	10	5	8	*
10	5	4	1	6	3	2	9	6	10	7	4	8	5	*
11	6	2	4	3	5	1	8	10	5	7	9	4	6	*
12	6	4	2	5	3	1	10	8	9	7	5	6	4	*

Keterangan:
"*" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *vertex-graceful* karena $f^+: E(H_7) \rightarrow Z_7$ merupakan pemetaan *bijektif* dan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya *konsekutif*.

Jadi, graf H_7 merupakan pelabelan *vertex-graceful* dan pelabelan *strong vertex-graceful*.

h) Untuk graf H_8 (ada 720 kemungkinan).

Misalkan $V(H_8) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.



Gambar 3.2.36 Ilustrasi $V(H_8)$

– Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(H_8) \to \{1,2,3,4,5,6\}$.

$$v_1 \mapsto 1,$$

$$v_2 \mapsto 2,$$

$$v_3 \mapsto 3,$$

$$v_4 \mapsto 4,$$

$$v_5 \mapsto 5,$$

$$v_6 \mapsto 6,$$

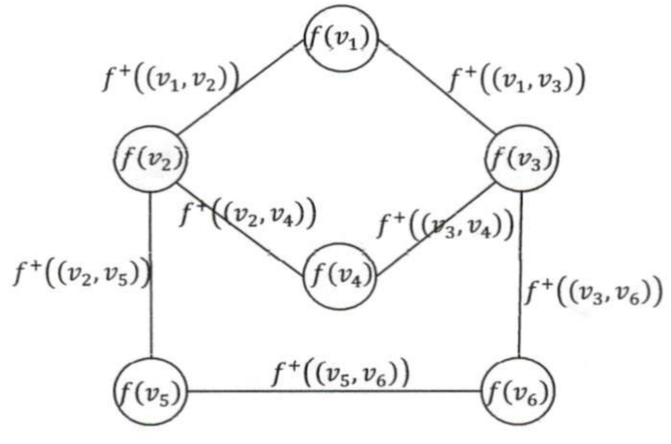
dan $f^+: E(H_8) \to Z_q$ dimana $q = 7$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \, mod \, 7, \qquad j \neq k$$

dan $f^+(\neg mod): E(H_8) \to \left\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\right\}$

$$\left(v_j, v_k\right) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful.*



Gambar 3.2.37 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_8 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+((v_1, v_2)) = (f(v_1) + f(v_2))\ mod\ 7 = (1 + 2)\ mod\ 7 = 3$$

$$f^+((v_1, v_3)) = (f(v_1) + f(v_3))\ mod\ 7 = (1 + 3)\ mod\ 7 = 4$$

$$f^+((v_2, v_4)) = (f(v_2) + f(v_4))\ mod\ 7 = (2 + 4)\ mod\ 7 = 6$$

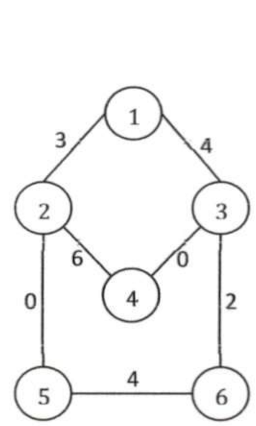
$$f^+((v_2, v_5)) = (f(v_2) + f(v_5))\ mod\ 7 = (2 + 5)\ mod\ 7 = 0$$

$$f^+((v_3, v_4)) = (f(v_3) + f(v_4))\ mod\ 7 = (3 + 4)\ mod\ 7 = 0$$

$$f^+((v_3, v_6)) = (f(v_3) + f(v_6))\ mod\ 7 = (3 + 6)\ mod\ 7 = 2$$

$$f^+((v_5, v_6)) = (f(v_5) + f(v_6))\ mod\ 7 = (5 + 6)\ mod\ 7 = 4.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.38 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_8 yang sudah dilabeli (I)

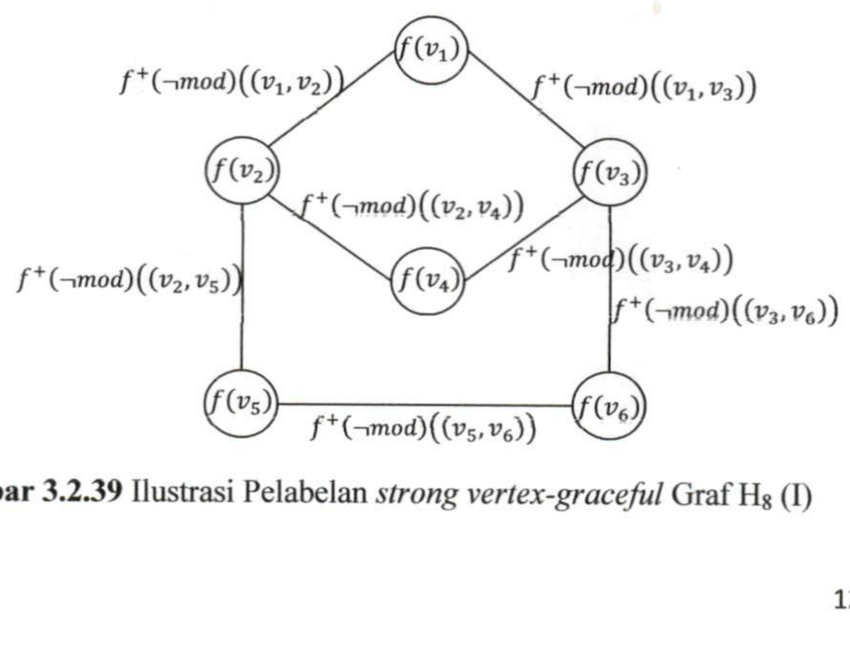
Karena ada beberapa sisi yang mempunyai label yang sama maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.21 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_8 (I)

f						f^+							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_4)	(v_2, v_5)	(v_3, v_4)	(v_3, v_6)	(v_5, v_6)	
1	2	3	4	5	6	3	4	6	0	0	2	4	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada beberapa sisi yang mempunyai label yang sama.

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful.*



Gambar 3.2.39 Ilustrasi Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_8 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_1, v_2)\big) = f(v_1) + f(v_2) = 1 + 2 = 3$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_1, v_3)\big) = f(v_1) + f(v_3) = 1 + 3 = 4$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_2, v_4)\big) = f(v_2) + f(v_4) = 2 + 4 = 6$$

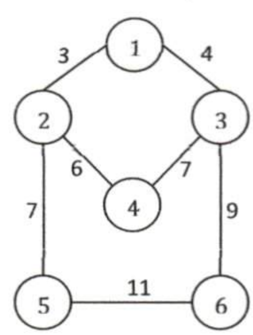
$$f^{+}(\neg mod)\big((v_2, v_5)\big) = f(v_2) + f(v_5) = 2 + 5 = 7$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_3, v_4)\big) = f(v_3) + f(v_4) = 3 + 4 = 7$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_3, v_6)\big) = f(v_3) + f(v_6) = 3 + 6 = 9$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_5, v_6)\big) = f(v_5) + f(v_6) = 5 + 6 = 11.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.40 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_8 yang sudah dilabeli (I)

Karena pelabelan di atas sisinya tidak *konsekutif* maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *strong vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.22 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_8 (I)

f						$f^{+}(\neg mod)$							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_4)	(v_2, v_5)	(v_3, v_4)	(v_3, v_6)	(v_5, v_6)	
1	2	3	4	5	6	3	4	6	7	7	9	11	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif.*

Dengan cara sama seperti cara di atas, untuk pelabelan yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* pada graf H_8 dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 3.2.23 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_8

No	f						f^+						
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_4)	(v_2, v_5)	(v_3, v_4)	(v_3, v_6)	(v_5, v_6)
1	1	2	5	6	3	4	3	6	1	5	4	2	0
2	1	3	4	6	5	2	4	5	2	1	3	6	0
3	1	4	3	6	2	5	5	4	3	6	2	1	0
4	1	5	2	6	4	3	6	3	4	2	1	5	0
5	2	1	6	5	4	3	3	1	6	5	4	2	0
6	2	3	4	5	1	6	5	6	1	4	2	3	0
7	2	4	3	5	6	1	6	5	2	3	1	4	0
8	2	6	1	5	3	4	1	3	4	2	6	5	0
9	3	1	6	4	5	2	4	2	5	6	3	1	0
10	3	2	5	4	1	6	5	1	6	3	2	4	0
11	3	5	2	4	6	1	1	5	2	4	6	3	0
12	3	6	1	4	2	5	2	4	3	1	5	6	0
13	4	1	6	3	5	2	5	3	4	6	2	1	0
14	4	2	5	3	1	6	6	2	5	3	1	4	0
15	4	5	2	3	6	1	2	6	1	4	5	3	0
16	4	6	1	3	2	5	3	5	2	1	4	6	0
17	5	1	6	2	4	3	6	4	3	5	1	2	0
18	5	3	4	2	1	6	1	2	5	4	6	3	0
19	5	4	3	2	6	1	2	1	6	3	5	4	0
20	5	6	1	2	3	4	4	6	1	2	3	5	0
21	6	2	5	1	3	4	1	4	3	5	6	2	0
22	6	3	4	1	5	2	2	3	4	1	5	6	0
23	6	4	3	1	2	5	3	2	5	6	4	1	0
24	6	5	2	1	4	3	4	1	6	2	3	5	0

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah graf yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* tersebut, pelabelan *strong vertex-graceful* atau tidak.

Tabel 3.2.24 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_8

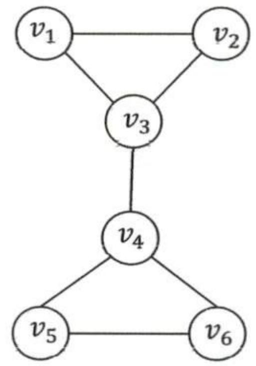
No	f						$f^{+}(\neg mod)$							Ket
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_4)	(v_2, v_5)	(v_3, v_4)	(v_3, v_6)	(v_5, v_6)	
1	1	2	5	6	3	4	3	6	8	5	11	9	7	
2	1	3	4	6	5	2	4	5	9	8	10	6	7	*
3	1	4	3	6	2	5	5	4	10	6	9	8	7	*
4	1	5	2	6	4	3	6	3	11	9	8	5	7	
5	2	1	6	5	4	3	3	8	6	5	11	9	7	
6	2	3	4	5	1	6	5	6	8	4	9	10	7	*
7	2	4	3	5	6	1	6	5	9	10	8	4	7	*
8	2	6	1	5	3	4	8	3	11	9	6	5	7	
9	3	1	6	4	5	2	4	9	5	6	10	8	7	*
10	3	2	5	4	1	6	5	8	6	3	9	11	7	
11	3	5	2	4	6	1	8	5	9	11	6	3	7	
12	3	6	1	4	2	5	9	4	10	8	5	6	7	*
13	4	1	6	3	5	2	5	10	4	6	9	8	7	*
14	4	2	5	3	1	6	6	9	5	3	8	11	7	
15	4	5	2	3	6	1	9	6	8	11	5	3	7	
16	4	6	1	3	2	5	10	5	9	8	4	6	7	*
17	5	1	6	2	4	3	6	11	3	5	8	9	7	
18	5	3	4	2	1	6	8	9	5	4	6	10	7	*
19	5	4	3	2	6	1	9	8	6	10	5	4	7	*
20	5	6	1	2	3	4	11	6	8	9	3	5	7	
21	6	2	5	1	3	4	8	11	3	5	6	9	7	
22	6	3	4	1	5	2	9	10	4	8	5	6	7	*
23	6	4	3	1	2	5	10	9	5	6	4	8	7	*
24	6	5	2	1	4	3	11	8	6	9	3	5	7	

Keterangan:
"*" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *vertex-graceful* karena $f^{+}: E(H_8) \rightarrow Z_7$ merupakan pemetaan *bijektif* dan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya *konsekutif*.

Jadi, graf H_8 merupakan pelabelan *vertex-graceful*.

i) Untuk graf H_9 (ada 720 kemungkinan).

Misalkan $V(H_9) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.



Gambar 3.2.41 Ilustrasi $V(H_9)$

- Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(H_9) \to \{1,2,3,4,5,6\}$.

$$v_1 \mapsto 1,$$

$$v_2 \mapsto 2,$$

$$v_3 \mapsto 3,$$

$$v_4 \mapsto 4,$$

$$v_5 \mapsto 5,$$

$$v_6 \mapsto 6,$$

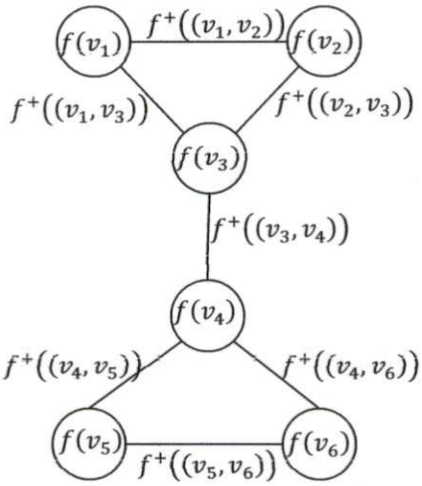
dan $f^+: E(H_9) \to Z_q$ dimana $q = 7$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \; mod\; 7, \qquad j \neq k$$

dan $f^+(\neg mod): E(H_9) \to \left\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\right\}$

$$(v_j, v_k) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful.*



Gambar 3.2.42 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_9 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+((v_1, v_2)) = (f(v_1) + f(v_2))\ mod\ 7 = (1 + 2)\ mod\ 7 = 3$$

$$f^+((v_1, v_3)) = (f(v_1) + f(v_3))\ mod\ 7 = (1 + 3)\ mod\ 7 = 4$$

$$f^+((v_2, v_3)) = (f(v_2) + f(v_3))\ mod\ 7 = (2 + 3)\ mod\ 7 = 5$$

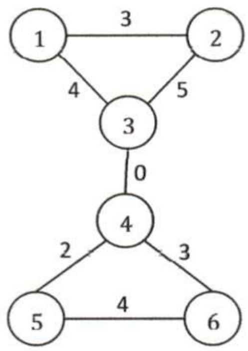
$$f^+((v_3, v_4)) = (f(v_3) + f(v_4))\ mod\ 7 = (3 + 4)\ mod\ 7 = 0$$

$$f^+((v_4, v_5)) = (f(v_4) + f(v_5))\ mod\ 7 = (4 + 5)\ mod\ 7 = 2$$

$$f^+((v_4, v_6)) = (f(v_4) + f(v_6))\ mod\ 7 = (4 + 6)\ mod\ 7 = 3$$

$$f^+((v_5, v_6)) = (f(v_5) + f(v_6))\ mod\ 7 = (5 + 6)\ mod\ 7 = 4.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.43 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_9 yang sudah dilabeli (I)

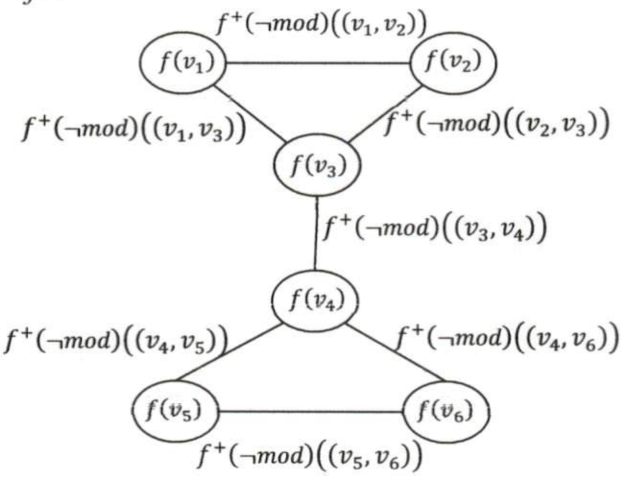
Karena ada beberapa sisi yang mempunyai label yang sama maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.25 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_9 (I)

f						f^+							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1,v_2)	(v_1,v_3)	(v_2,v_3)	(v_3,v_4)	(v_4,v_5)	(v_4,v_6)	(v_5,v_6)	
1	2	3	4	5	6	3	4	5	0	2	3	4	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada beberapa sisi yang mempunyai label yang sama.

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful.*



Gambar 3.2.44 Ilustrasi Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_9 (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_1, v_2)\big) = f(v_1) + f(v_2) = 1 + 2 = 3$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_1, v_3)\big) = f(v_1) + f(v_3) = 1 + 3 = 4$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_2, v_3)\big) = f(v_2) + f(v_3) = 2 + 3 = 5$$

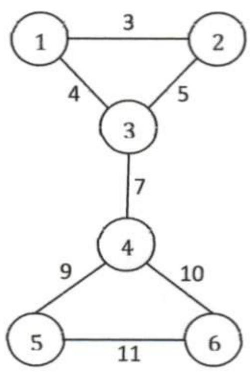
$$f^{+}(\neg mod)\big((v_3, v_4)\big) = f(v_3) + f(v_4) = 3 + 4 = 7$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_4, v_5)\big) = f(v_4) + f(v_5) = 4 + 5 = 9$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_4, v_6)\big) = f(v_4) + f(v_6) = 4 + 6 = 10$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_5, v_6)\big) = f(v_5) + f(v_6) = 5 + 6 = 11.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.45 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_9 yang sudah dilabeli (I)

Karena pelabelan di atas sisinya tidak *konsekutif* maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *strong vertex-graceful*. Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.26 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_9 (I)

f						$f^{+}(\neg mod)$							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_3, v_4)	(v_4, v_5)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)	
1	2	3	4	5	6	3	4	5	7	9	10	11	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif*.

Dengan cara sama seperti cara di atas, untuk pelabelan yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* pada graf H_9 dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 3.2.27 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_9

No	f						f^+						
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_3, v_4)	(v_4, v_5)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)
1	1	2	4	3	5	6	3	5	6	0	1	2	4
2	1	2	4	3	6	5	3	5	6	0	2	1	4
3	1	4	2	5	3	6	5	3	6	0	1	4	2
4	1	4	2	5	6	3	5	3	6	0	4	1	2
5	2	1	4	3	5	6	3	6	5	0	1	2	4
6	2	1	4	3	6	5	3	6	5	0	2	1	4
7	2	4	1	6	3	5	6	3	5	0	2	4	1
8	2	4	1	6	5	3	6	3	5	0	4	2	1
9	3	5	6	1	2	4	1	2	4	0	3	5	6
10	3	5	6	1	4	2	1	2	4	0	5	3	6
11	3	6	5	2	1	4	2	1	4	0	3	6	5
12	3	6	5	2	4	1	2	1	4	0	6	3	5
13	4	1	2	5	3	6	5	6	3	0	1	4	2
14	4	1	2	5	6	3	5	6	3	0	4	1	2
15	4	2	1	6	3	5	6	5	3	0	2	4	1
16	4	2	1	6	5	3	6	5	3	0	4	2	1
17	5	3	6	1	2	4	1	4	2	0	3	5	6
18	5	3	6	1	4	2	1	4	2	0	5	3	6
19	5	6	3	4	2	1	4	1	2	0	6	5	3
20	5	6	3	4	1	2	4	1	2	0	5	6	3
21	6	3	5	2	1	4	2	4	1	0	3	6	5
22	6	3	5	2	4	1	2	4	1	0	6	3	5
23	6	5	3	4	1	2	4	2	1	0	5	6	3
24	6	5	3	4	2	1	4	2	1	0	6	5	3

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah graf yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* tersebut, pelabelan *strong vertex-graceful* atau tidak.

Tabel 3.2.28 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H9

No	f						$f^{+}(\neg mod)$							Ket
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1,v_2)	(v_1,v_3)	(v_2,v_3)	(v_3,v_4)	(v_4,v_5)	(v_4,v_6)	(v_5,v_6)	
1	1	2	4	3	5	6	3	5	6	7	8	9	11	Tidak
2	1	2	4	3	6	5	3	5	6	7	9	8	11	Tidak
3	1	4	2	5	3	6	5	3	6	7	8	11	9	Tidak
4	1	4	2	5	6	3	5	3	6	7	11	8	9	Tidak
5	2	1	4	3	5	6	3	6	5	7	8	9	11	Tidak
6	2	1	4	3	6	5	3	6	5	7	9	8	11	Tidak
7	2	4	1	6	3	5	6	3	5	7	9	11	8	Tidak
8	2	4	1	6	5	3	6	3	5	7	11	9	8	Tidak
9	3	5	6	1	2	4	8	9	11	7	3	5	6	Tidak
10	3	5	6	1	4	2	8	9	11	7	5	3	6	Tidak
11	3	6	5	2	1	4	9	8	11	7	3	6	5	Tidak
12	3	6	5	2	4	1	9	8	11	7	6	3	5	Tidak
13	4	1	2	5	3	6	5	6	3	7	8	11	9	Tidak
14	4	1	2	5	6	3	5	6	3	7	11	8	9	Tidak
15	4	2	1	6	3	5	6	5	3	7	9	11	8	Tidak
16	4	2	1	6	5	3	6	5	3	7	11	9	8	Tidak
17	5	3	6	1	2	4	8	11	9	7	3	5	6	Tidak
18	5	3	6	1	4	2	8	11	9	7	5	3	6	Tidak
19	5	6	3	4	2	1	11	8	9	7	6	5	3	Tidak
20	5	6	3	4	1	2	11	8	9	7	5	6	3	Tidak
21	6	3	5	2	1	4	9	11	8	7	3	6	5	Tidak
22	6	3	5	2	4	1	9	11	8	7	6	3	5	Tidak
23	6	5	3	4	1	2	11	9	8	7	5	6	3	Tidak
24	6	5	3	4	2	1	11	9	8	7	6	5	3	Tidak

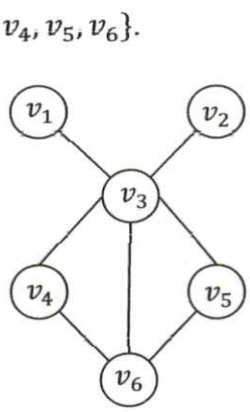
Keterangan:

"Tidak" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *vertex-graceful* karena $f^{+}: E(H_9) \rightarrow Z_7$ merupakan pemetaan *bijektif*. Tetapi bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif*.

Jadi, graf H_9 merupakan pelabelan *vertex-graceful*.

j) Untuk graf H_{10} (ada 720 kemungkinan).

Misalkan $V(H_{10}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.



Gambar 3.2.46 Ilustrasi $V(H_{10})$

- Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(H_{10}) \to \{1,2,3,4,5,6\}$.

$$v_1 \mapsto 1,$$

$$v_2 \mapsto 2,$$

$$v_3 \mapsto 3,$$

$$v_4 \mapsto 4,$$

$$v_5 \mapsto 5,$$

$$v_6 \mapsto 6,$$

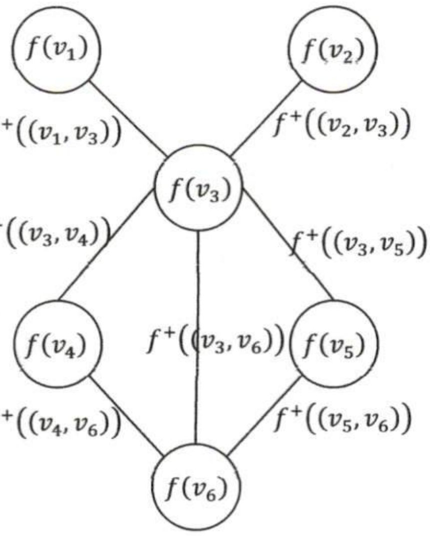
dan $f^+: E(H_{10}) \to Z_q$ dimana $q = 7$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \big(f(v_j) + f(v_k)\big)\ mod\ 7, \qquad j \neq k$$

dan $f^+(\neg mod): E(H_{10}) \to \big\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\big\}$

$$(v_j, v_k) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful.*



Gambar 3.2.47 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{10} (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+((v_1, v_3)) = (f(v_1) + f(v_2)) \; mod \; 7 = (1 + 2) \; mod \; 7 = 3$$

$$f^+((v_2, v_3)) = (f(v_2) + f(v_3)) \; mod \; 7 = (2 + 3) \; mod \; 7 = 5$$

$$f^+((v_3, v_4)) = (f(v_3) + f(v_4)) \; mod \; 7 = (3 + 4) \; mod \; 7 = 0$$

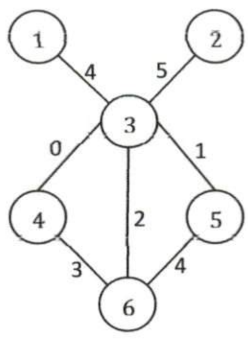
$$f^+((v_3, v_5)) = (f(v_3) + f(v_5)) \; mod \; 7 = (3 + 5) \; mod \; 7 = 1$$

$$f^+((v_3, v_6)) = (f(v_3) + f(v_6)) \; mod \; 7 = (3 + 6) \; mod \; 7 = 2$$

$$f^+((v_4, v_6)) = (f(v_4) + f(v_6)) \; mod \; 7 = (4 + 6) \; mod \; 7 = 3$$

$$f^+((v_5, v_6)) = (f(v_5) + f(v_6)) \; mod \; 7 = (5 + 6) \; mod \; 7 = 4.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.48 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{10} yang sudah dilabeli (I)

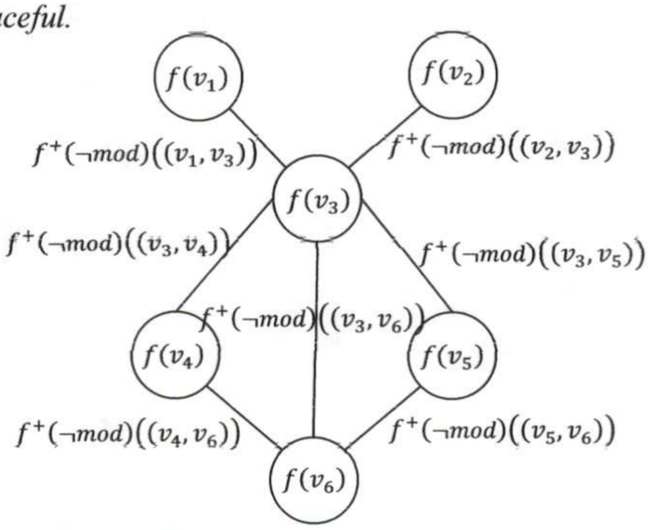
Karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.29 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{10} (I)

f						f^+							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_3, v_6)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)	
1	2	3	4	5	6	4	5	0	1	2	3	4	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama.

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful.*



Gambar 3.2.49 Ilustrasi Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{10} (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_1, v_3)\big) = f(v_1) + f(v_3) = 1 + 3 = 4$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_2, v_3)\big) = f(v_2) + f(v_3) = 2 + 3 = 5$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_3, v_4)\big) = f(v_3) + f(v_4) = 3 + 4 = 7$$

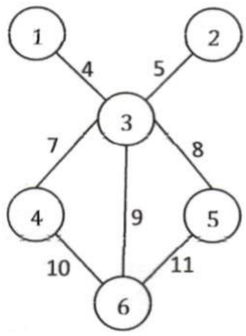
$$f^{+}(\neg mod)\big((v_3, v_5)\big) = f(v_3) + f(v_5) = 3 + 5 = 8$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_3, v_6)\big) = f(v_3) + f(v_6) = 3 + 6 = 9$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_4, v_6)\big) = f(v_4) + f(v_6) = 4 + 6 = 10$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_5, v_6)\big) = f(v_5) + f(v_6) = 5 + 6 = 11.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.50 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{10} yang sudah dilabeli(I)

Karena pelabelan di atas sisinya tidak *konsekutif* maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *strong vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.30 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{10} (I)

f						$f^{+}(\neg mod)$							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_3, v_6)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)	
1	2	3	4	5	6	4	5	7	8	9	10	11	Tidak

Keterangan:

"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif.*

Dengan cara sama seperti cara di atas, untuk pelabelan yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* pada graf H_{10} dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 3.2.31 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{10}

No	f						f^+						
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_3, v_6)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
1	1	2	4	3	6	5	5	6	0	3	2	1	4
2	1	2	4	6	3	5	5	6	3	0	2	4	1
3	1	3	2	4	6	5	3	5	6	1	0	2	4
4	1	3	2	6	4	5	3	5	1	6	0	4	2
5	1	3	4	2	5	6	5	0	6	2	3	1	4
6	1	3	4	5	2	6	5	0	2	6	3	4	1
7	1	4	2	3	5	6	3	6	5	0	1	2	4
8	1	4	2	5	3	6	3	6	0	5	1	4	2
9	1	5	3	2	6	4	4	1	5	2	0	6	3
10	1	5	3	6	2	4	4	1	2	5	0	3	6
11	1	5	6	3	4	2	0	4	2	3	1	5	6
12	1	5	6	4	3	2	0	4	3	2	1	6	5
13	2	1	4	3	6	2	6	5	0	3	6	5	8
14	2	1	4	6	3	5	6	5	3	0	2	4	1
15	2	3	5	1	6	4	0	1	6	4	2	5	3
16	2	3	5	6	1	4	0	1	4	6	2	3	5
17	2	3	6	4	5	1	1	2	3	4	0	5	6
18	2	3	6	5	4	1	1	2	4	3	0	6	5
19	2	4	1	5	6	3	3	5	6	0	4	1	2
20	2	4	1	6	5	3	3	5	0	6	4	2	1
21	2	6	1	3	4	5	3	0	4	5	6	1	2
22	2	6	1	4	3	5	3	0	5	4	6	2	1
23	2	6	4	1	5	3	6	3	5	2	0	4	1
24	2	6	4	5	1	3	6	3	2	5	0	1	4
25	3	1	2	4	6	5	5	3	6	1	0	2	4
26	3	1	2	6	4	5	5	3	1	6	0	4	2
27	3	1	4	2	5	6	0	5	6	2	3	1	4
28	3	1	4	5	2	6	0	5	2	6	3	4	1
29	3	2	5	1	6	4	1	0	6	4	2	5	3
30	3	2	5	6	1	4	1	0	4	6	2	3	5
31	3	2	6	4	5	1	2	1	3	4	0	5	6
32	3	2	6	5	4	1	2	1	4	3	0	6	5

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
33	3	5	6	1	2	4	2	4	0	8	3	5	6
34	3	5	6	2	1	4	2	4	1	0	3	6	5
35	3	6	5	2	4	1	1	4	0	9	6	3	5
36	3	6	5	4	2	1	1	4	2	0	6	5	3
37	4	1	2	3	5	6	6	3	5	7	1	2	4
38	4	1	2	5	3	6	6	3	0	5	1	4	2
39	4	2	1	5	6	3	5	3	6	0	4	1	2
40	4	2	1	6	5	3	5	3	0	6	4	2	1
41	4	5	1	2	3	6	5	6	3	4	0	1	2
42	4	5	1	3	2	6	5	6	4	3	0	2	1
43	4	5	2	1	6	3	6	0	3	1	5	4	2
44	4	5	2	6	1	3	6	0	1	3	5	2	4
45	4	6	3	2	5	1	0	2	5	1	4	3	6
46	4	6	3	5	2	1	0	2	1	5	4	6	3
47	4	6	5	1	3	2	2	4	6	1	0	3	5
48	4	6	5	3	1	2	2	4	1	6	0	5	3
49	5	1	3	2	6	4	1	4	5	2	0	6	3
50	5	1	3	6	2	4	1	4	2	5	0	3	6
51	5	1	6	3	4	2	4	0	2	3	1	5	6
52	5	1	6	4	3	2	4	0	3	2	1	6	5
53	5	3	6	1	2	4	4	2	0	1	3	5	6
54	5	3	6	2	1	4	4	2	1	0	3	6	5
55	5	4	1	5	3	6	6	5	6	4	0	4	2
56	5	4	1	3	2	6	6	5	4	3	0	2	1
57	5	4	2	1	6	3	0	6	3	1	5	4	2
58	5	4	2	6	1	3	0	6	1	3	5	2	4
59	5	6	3	1	4	2	1	2	4	0	5	3	6
60	5	6	3	4	1	2	1	2	0	4	5	6	3
61	6	2	1	3	4	5	0	3	4	5	6	1	2
62	6	2	1	4	3	5	0	3	5	4	6	2	1
63	6	2	4	1	5	3	3	6	5	2	0	4	1
64	6	2	4	5	1	3	3	6	2	5	0	1	4
65	6	3	5	2	4	1	4	1	0	2	6	3	5
66	6	3	5	4	2	1	4	1	2	0	6	5	3
67	6	4	3	2	5	1	2	0	5	1	4	3	6
68	6	4	3	5	2	1	2	0	1	5	4	6	3
69	6	4	5	1	3	2	4	2	6	1	0	3	5
70	6	4	5	3	1	2	4	2	1	6	0	5	3

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
71	6	5	3	1	4	2	2	1	4	0	5	3	6
72	6	5	3	4	1	2	2	1	0	4	5	6	3

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah graf yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* tersebut, pelabelan *strong vertex-graceful* atau tidak.

Tabel 3.2.32 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{10}

No	f						$f^{+}(\neg mod)$							Ket
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1,v_3)	(v_2,v_3)	(v_3,v_4)	(v_3,v_5)	(v_3,v_6)	(v_4,v_6)	(v_5,v_6)	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
1	1	2	4	3	6	5	5	6	7	10	9	8	11	*
2	1	2	4	6	3	5	5	6	10	7	9	11	8	*
3	1	3	2	4	6	5	3	5	6	8	7	9	11	
4	1	3	2	6	4	5	3	5	8	6	7	11	9	
5	1	3	4	2	5	6	5	7	6	9	10	8	11	*
6	1	3	4	5	2	6	5	7	9	6	10	11	8	*
7	1	4	2	3	5	6	3	6	5	7	8	9	11	
8	1	4	2	5	3	6	3	6	7	5	8	11	9	
9	1	5	3	2	6	4	4	8	5	9	7	6	10	*
10	1	5	3	6	2	4	4	8	9	5	7	10	6	*
11	1	5	6	3	4	2	7	11	9	10	8	5	6	*
12	1	5	6	4	3	2	7	11	10	9	8	6	5	*
13	2	1	4	3	6	2	6	5	7	10	6	5	11	*
14	2	1	4	6	3	5	6	5	10	7	9	11	8	*
15	2	3	5	1	6	4	7	8	6	11	9	5	10	*
16	2	3	5	6	1	4	7	8	11	6	9	10	5	*
17	2	3	6	4	5	1	8	9	10	11	7	5	6	*
18	2	3	6	5	4	1	8	9	11	10	7	6	5	*
19	2	4	1	5	6	3	3	5	6	7	4	8	9	*
20	2	4	1	6	5	3	3	5	7	6	4	9	8	*
21	2	6	1	3	4	5	3	7	4	5	6	8	9	*
22	2	6	1	4	3	5	3	7	5	4	6	9	8	*
23	2	6	4	1	5	3	6	10	5	9	7	4	8	*
24	2	6	4	5	1	3	6	10	9	5	7	8	4	*
25	3	1	2	4	6	5	5	3	6	8	7	9	11	
26	3	1	2	6	4	5	5	3	8	6	7	11	9	

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
27	3	1	4	2	5	6	7	5	6	9	10	8	11	*
28	3	1	4	5	2	6	7	5	9	6	10	11	8	*
29	3	2	5	1	6	4	8	7	6	11	9	5	10	*
30	3	2	5	6	1	4	8	7	11	6	9	10	5	*
31	3	2	6	4	5	1	9	8	10	11	7	5	6	*
32	3	2	6	5	4	1	9	8	11	10	7	6	5	*
33	3	5	6	1	2	4	9	11	7	8	10	5	6	*
34	3	5	6	2	1	4	9	11	8	7	10	6	5	*
35	3	6	5	2	4	1	8	11	7	9	6	3	5	
36	3	6	5	4	2	1	8	11	9	7	6	5	3	
37	4	1	2	3	5	6	6	3	5	7	8	9	11	
38	4	1	2	5	3	6	6	3	7	5	8	11	9	
39	4	2	1	5	6	3	5	3	6	7	4	8	9	*
40	4	2	1	6	5	3	5	3	7	6	4	9	8	*
41	4	5	1	2	3	6	5	6	3	4	7	8	9	*
42	4	5	1	3	2	6	5	6	4	3	7	9	8	*
43	4	5	2	1	6	3	6	7	3	8	5	4	9	*
44	4	5	2	6	1	3	6	7	8	3	5	9	4	*
45	4	6	3	2	5	1	7	9	5	8	4	3	6	*
46	4	6	3	5	2	1	7	9	8	5	4	6	3	*
47	4	6	5	1	3	2	9	11	6	8	7	3	5	
48	4	6	5	3	1	2	9	11	8	6	7	5	3	
49	5	1	3	2	6	4	8	4	5	9	7	6	10	*
50	5	1	3	6	2	4	8	4	9	5	7	10	6	
51	5	1	6	3	4	2	11	7	9	10	8	5	6	*
52	5	1	6	4	3	2	11	7	10	9	8	6	5	*
53	5	3	6	1	2	4	11	9	7	8	10	5	6	*
54	5	3	6	2	1	4	11	9	8	7	10	6	5	*
55	5	4	1	5	3	6	6	5	6	4	7	11	9	*
56	5	4	1	3	2	6	6	5	4	3	7	9	8	*
57	5	4	2	1	6	3	7	6	3	8	5	4	9	*
58	5	4	2	6	1	3	7	6	8	3	5	9	4	*
59	5	6	3	1	4	2	8	9	4	7	5	3	6	*
60	5	6	3	4	1	2	8	9	7	4	5	6	3	*
61	6	2	1	3	4	5	7	3	4	5	6	8	9	*
62	6	2	1	4	3	5	7	3	5	4	6	9	8	*
63	6	2	4	1	5	3	10	6	5	9	7	4	8	*
64	6	2	4	5	1	3	10	6	9	5	7	8	4	*

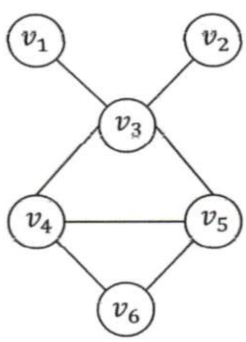
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
65	6	3	5	2	4	1	11	8	7	9	6	3	5	
66	6	3	5	4	2	1	11	8	9	7	6	5	3	
67	6	4	3	2	5	1	9	7	5	8	4	3	6	*
68	6	4	3	5	2	1	9	7	8	5	4	6	3	*
69	6	4	5	1	3	2	11	9	6	8	7	3	5	
70	6	4	5	3	1	2	11	9	8	6	7	5	3	
71	6	5	3	1	4	2	9	8	4	7	5	3	6	*
72	6	5	3	4	1	2	9	8	7	4	5	6	3	*

Keterangan:
"*" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *vertex-graceful* karena $f^+: E(H_{10}) \to Z_7$ merupakan pemetaan *bijektif* dan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya *konsekutif.*

Jadi, graf H_{10} merupakan pelabelan *vertex-graceful.*

k) Untuk graf H_{11} (ada 720 kemungkinan).

Misalkan $V(H_{11}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.



Gambar 3.2.51 Ilustrasi $V(H_{11})$

– Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(H_{11}) \to \{1,2,3,4,5,6\}$.

$$v_1 \mapsto 1,$$

$$v_2 \mapsto 2,$$

$$v_3 \mapsto 3,$$

$$v_4 \mapsto 4,$$

$$v_5 \mapsto 5,$$

$$v_6 \mapsto 6,$$

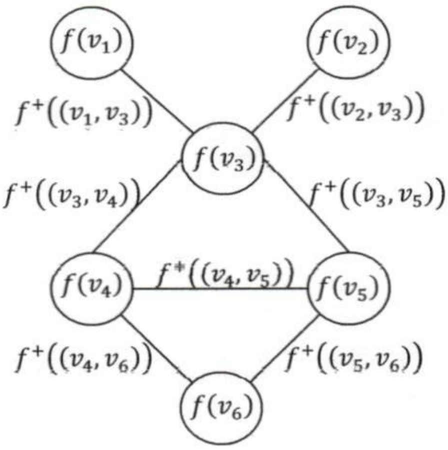
dan $f^{+}: E(H_{11}) \rightarrow Z_q$ dimana $q = 7$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \big(f(v_j) + f(v_k)\big)\ mod\ 7, \qquad j \neq k$$

dan $f^{+}(\neg mod): E(H_{11}) \rightarrow \Big\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\Big\}$

$$\big(v_j, v_k\big) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful*.



Gambar 3.2.52 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{11} (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^{+}((v_1, v_3)) = (f(v_1) + f(v_2))\ mod\ 7 = (1 + 2)\ mod\ 7 = 3$$

$$f^{+}((v_2, v_3)) = (f(v_2) + f(v_3))\ mod\ 7 = (2 + 3)\ mod\ 7 = 5$$

$$f^{+}((v_3, v_4)) = (f(v_3) + f(v_4))\ mod\ 7 = (3 + 4)\ mod\ 7 = 0$$

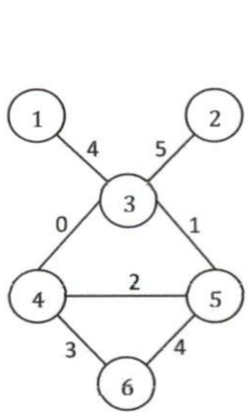
$$f^{+}((v_3, v_5)) = (f(v_3) + f(v_5))\ mod\ 7 = (3 + 5)\ mod\ 7 = 1$$

$$f^{+}((v_4, v_5)) = (f(v_4) + f(v_5))\ mod\ 7 = (4 + 5)\ mod\ 7 = 2$$

$$f^{+}((v_4, v_6)) = (f(v_4) + f(v_6))\ mod\ 7 = (4 + 6)\ mod\ 7 = 3$$

$$f^{+}((v_5, v_6)) = (f(v_5) + f(v_6))\ mod\ 7 = (5 + 6)\ mod\ 7 = 4.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.53 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{11} yang sudah dilabeli (I)

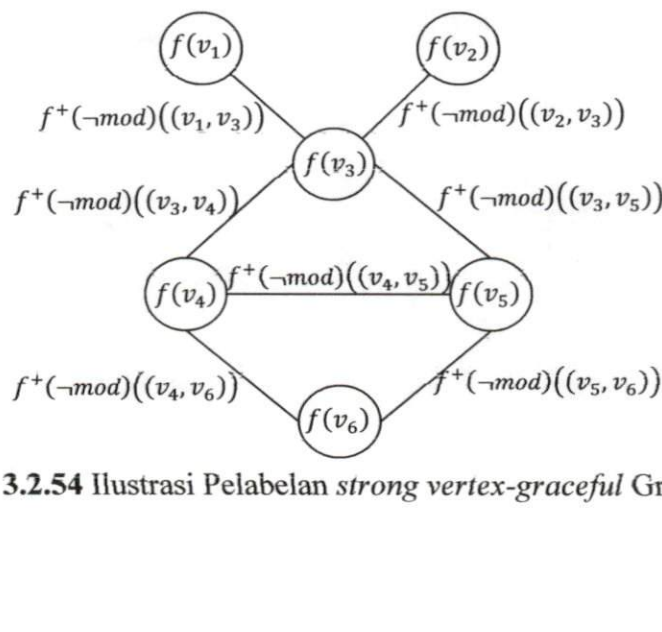
Karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.33 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{11} (I)

f						f^+							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)	
1	2	3	4	5	6	4	5	0	1	2	3	4	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama.

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful.*



Gambar 3.2.54 Ilustrasi Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{11} (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+(\neg mod)\big((v_1, v_3)\big) = f(v_1) + f(v_3) = 1 + 3 = 4$$

$$f^+(\neg mod)\big((v_2, v_3)\big) = f(v_2) + f(v_3) = 2 + 3 = 5$$

$$f^+(\neg mod)\big((v_3, v_4)\big) = f(v_3) + f(v_4) = 3 + 4 = 7$$

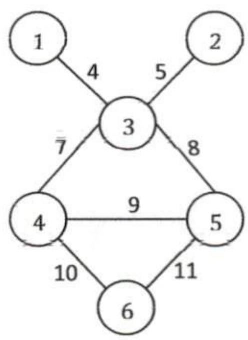
$$f^+(\neg mod)\big((v_3, v_5)\big) = f(v_3) + f(v_5) = 3 + 5 = 8$$

$$f^+(\neg mod)\big((v_4, v_5)\big) = f(v_4) + f(v_5) = 4 + 5 = 9$$

$$f^+(\neg mod)\big((v_4, v_6)\big) = f(v_4) + f(v_6) = 4 + 6 = 10$$

$$f^+(\neg mod)\big((v_5, v_6)\big) = f(v_5) + f(v_6) = 5 + 6 = 11.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.55 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{11} yang sudah dilabeli(I)

Karena pelabelan di atas sisinya tidak *konsekutif* maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *strong vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.34 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{11} (I)

f						$f^+(\neg mod)$							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)	
1	2	3	4	5	6	4	5	7	8	9	10	11	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif.*

Dengan cara sama seperti cara di atas, untuk pelabelan yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* pada graf H_{11} dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 3.2.35 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{11}

No	f						f^+						
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)
1	1	2	4	3	6	5	5	6	0	3	2	1	4
2	1	2	4	6	3	5	5	6	3	0	2	4	1
3	1	4	2	3	5	6	3	6	5	0	1	2	4
4	1	4	2	5	3	6	3	6	0	5	1	4	2
5	2	1	4	3	6	5	6	5	0	3	2	1	4
6	2	1	4	6	3	5	6	5	3	0	2	4	1
7	2	4	1	5	6	3	3	5	6	0	4	1	2
8	2	4	1	6	5	3	3	5	0	6	4	2	1
9	3	5	6	1	2	4	2	4	0	1	3	5	6
10	3	5	6	2	1	4	2	4	1	0	3	6	5
11	3	6	5	2	4	1	1	4	0	2	6	3	5
12	3	6	5	4	2	1	1	4	2	0	6	5	3
13	4	1	2	3	5	6	6	3	5	0	1	2	4
14	4	1	2	5	3	6	6	3	0	5	1	4	2
15	4	2	1	5	6	3	5	3	6	0	4	1	2
16	4	2	1	6	5	3	5	3	0	6	4	2	1
17	5	3	6	1	2	4	4	2	0	1	3	5	6
18	5	3	6	2	1	4	4	2	1	0	3	6	5
19	5	6	3	1	4	2	1	2	4	0	5	3	6
20	5	6	3	4	1	2	1	2	0	4	5	6	3
21	6	3	5	2	4	1	4	1	0	2	6	3	5
22	6	3	5	4	2	1	4	1	2	0	6	5	3
23	6	5	3	1	4	2	2	1	4	0	5	3	6
24	6	5	3	4	1	2	2	1	0	4	5	6	3

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah graf yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* tersebut, pelabelan *strong vertex-graceful* atau tidak.

Tabel 3.2.36 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{11}

No	f						$f^{+}(\neg mod)$							Ket
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)	
1	1	2	4	3	6	5	5	6	7	10	9	8	11	*
2	1	2	4	6	3	5	5	6	10	7	9	11	8	*
3	1	4	2	3	5	6	3	6	5	7	8	9	11	
4	1	4	2	5	3	6	3	6	7	5	8	11	9	
5	2	1	4	3	6	5	6	5	7	10	9	8	11	*
6	2	1	4	6	3	5	6	5	10	7	9	11	8	*
7	2	4	1	5	6	3	3	5	6	7	11	8	9	
8	2	4	1	6	5	3	3	5	7	6	11	9	8	
9	3	5	6	1	2	4	9	11	7	8	3	5	6	
10	3	5	6	2	1	4	9	11	8	7	3	6	5	
11	3	6	5	2	4	1	8	11	7	9	6	3	5	
12	3	6	5	4	2	1	8	11	9	7	6	5	3	
13	4	1	2	3	5	6	6	3	5	7	8	9	11	
14	4	1	2	5	3	6	6	3	7	5	8	11	9	
15	4	2	1	5	6	3	5	3	6	7	11	8	9	
16	4	2	1	6	5	3	5	3	7	6	11	9	8	
17	5	3	6	1	2	4	11	9	7	8	3	5	6	*
18	5	3	6	2	1	4	11	9	8	7	3	6	5	*
19	5	6	3	1	4	2	8	9	4	7	5	3	6	
20	5	6	3	4	1	2	8	9	7	4	5	6	3	
21	6	3	5	2	4	1	11	8	7	9	6	3	5	*
22	6	3	5	4	2	1	11	8	9	7	6	5	3	*
23	6	5	3	1	4	2	9	8	4	7	5	3	6	
24	6	5	3	4	1	2	9	8	7	4	5	6	3	

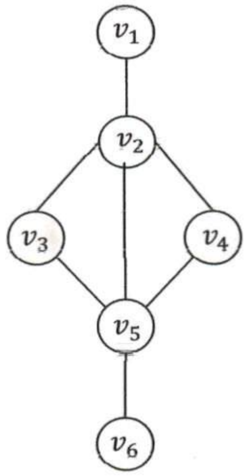
Keterangan:

"*" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *vertex-graceful* karena $f^{+}: E(H_{11}) \to Z_7$ merupakan pemetaan *bijektif* dan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya *konsekutif.*

Jadi, graf H_{11} merupakan pelabelan *vertex-graceful.*

l) Untuk graf H_{12} (ada 720 kemungkinan).

Misalkan $V(H_{12}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.



Gambar 3.2.56 Ilustrasi $V(H_{12})$

- Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(H_{12}) \to \{1,2,3,4,5,6\}$.

$$v_1 \mapsto 1,$$

$$v_2 \mapsto 2,$$

$$v_3 \mapsto 3,$$

$$v_4 \mapsto 4,$$

$$v_5 \mapsto 5,$$

$$v_6 \mapsto 6,$$

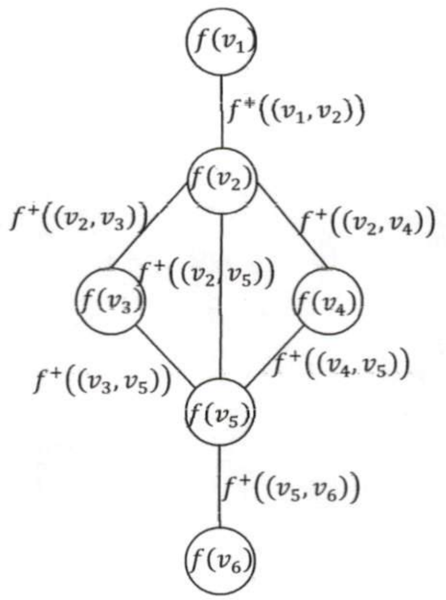
dan $f^+: E(H_{12}) \to Z_q$ dimana $q = 7$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \; mod \; 7, \qquad j \neq k$$

dan $f^+(\neg mod): E(H_{12}) \to \left\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\right\}$

$$(v_j, v_k) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful*.



Gambar 3.2.57 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{12} (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+((v_1, v_2)) = (f(v_1) + f(v_2))\ mod\ 7 = (1 + 2)\ mod\ 7 = 3$$

$$f^+((v_2, v_3)) = (f(v_2) + f(v_3))\ mod\ 7 = (2 + 3)\ mod\ 7 = 5$$

$$f^+((v_2, v_4)) = (f(v_2) + f(v_4))\ mod\ 7 = (2 + 4)\ mod\ 7 = 6$$

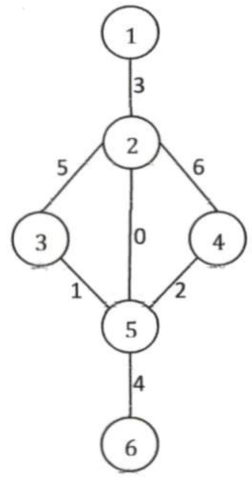
$$f^+((v_2, v_5)) = (f(v_2) + f(v_5))\ mod\ 7 = (2 + 5)\ mod\ 7 = 0$$

$$f^+((v_3, v_5)) = (f(v_3) + f(v_5))\ mod\ 7 = (3 + 5)\ mod\ 7 = 1$$

$$f^+((v_4, v_5)) = (f(v_4) + f(v_5))\ mod\ 7 = (4 + 5)\ mod\ 7 = 2$$

$$f^+((v_5, v_6)) = (f(v_5) + f(v_6))\ mod\ 7 = (5 + 6)\ mod\ 7 = 4.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.58 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{12} yang sudah dilabeli (I)

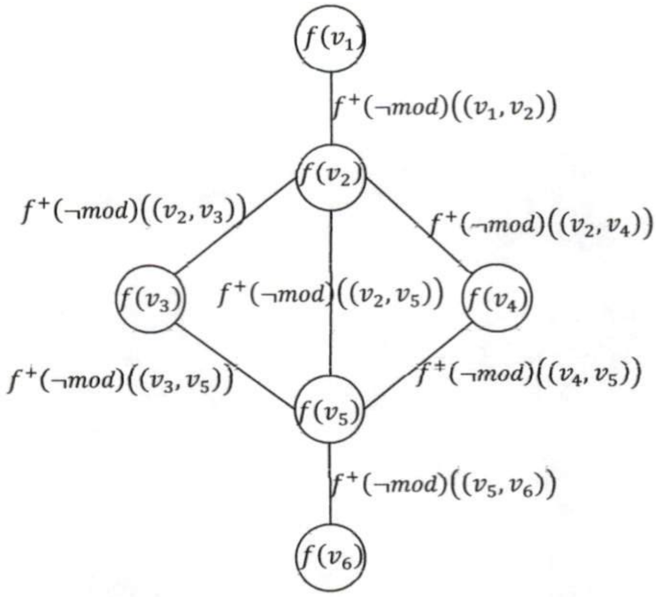
Karena $f^{+}: E(H_{12}) \rightarrow Z_7$ merupakan pemetaan *bijektif* maka pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.37 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{12} (I)

f						f^+							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_2, v_5)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	(v_5, v_6)	
1	2	3	4	5	6	3	5	6	0	1	2	4	Ya

Keterangan:
"Ya" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *vertex-graceful* karena $f^{+}: E(H_{12}) \rightarrow Z_7$ merupakan pemetaan *bijektif.*

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful*.



Gambar 3.2.59 Ilustrasi Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{12} (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+(\neg mod)((v_1, v_2)) = f(v_1) + f(v_2) = 1 + 2 = 3$$

$$f^+(\neg mod)((v_2, v_3)) = f(v_2) + f(v_3) = 2 + 3 = 5$$

$$f^+(\neg mod)((v_2, v_4)) = f(v_2) + f(v_4) = 2 + 4 = 6$$

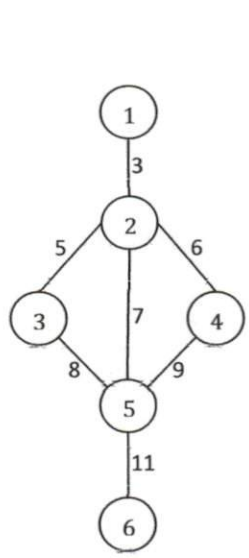
$$f^+(\neg mod)((v_2, v_5)) = f(v_2) + f(v_5) = 2 + 5 = 7$$

$$f^+(\neg mod)((v_3, v_5)) = f(v_3) + f(v_5) = 3 + 5 = 8$$

$$f^+(\neg mod)((v_4, v_5)) = f(v_4) + f(v_5) = 4 + 5 = 9$$

$$f^+(\neg mod)((v_5, v_6)) = f(v_5) + f(v_6) = 5 + 6 = 11.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.60 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{12} yang sudah dilabeli(I)

Karena pelabelan di atas sisinya tidak *konsekutif* maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *strong vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.38 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{12} (I)

f						$f^{+}(\neg mod)$							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1,v_2)	(v_2,v_3)	(v_2,v_4)	(v_2,v_5)	(v_3,v_5)	(v_4,v_5)	(v_5,v_6)	
1	2	3	4	5	6	3	5	6	7	8	9	11	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif.*

Dengan cara sama seperti cara di atas, untuk pelabelan yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* pada graf H_{12} dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 3.2.39 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{12}

No	f						f^{+}						
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1,v_2)	(v_2,v_3)	(v_2,v_4)	(v_2,v_5)	(v_3,v_5)	(v_4,v_5)	(v_5,v_6)
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
1	1	2	3	4	5	6	3	5	6	0	1	2	4
2	1	2	4	3	5	6	3	6	5	0	2	1	4
3	1	3	2	5	4	6	4	5	1	0	6	2	3
4	1	3	5	2	4	6	4	1	5	0	2	6	3

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
5	1	4	2	3	6	5	5	6	0	3	1	2	4
6	1	4	2	6	5	3	5	6	3	2	0	4	1
7	1	4	3	2	6	5	5	0	6	3	2	1	4
8	1	4	6	2	5	3	5	3	6	2	4	0	1
9	2	1	4	5	3	6	3	5	6	4	0	1	2
10	2	1	4	6	5	3	3	5	0	6	2	4	1
11	2	1	5	4	3	6	3	6	5	4	1	0	2
12	2	1	6	4	5	3	3	0	5	6	4	2	1
13	2	4	1	6	3	5	6	5	3	0	4	2	1
14	2	4	6	1	3	5	6	3	5	0	2	4	1
15	2	6	3	4	1	5	1	2	3	0	4	5	6
16	2	6	4	3	1	5	1	3	2	0	5	4	6
17	3	2	1	6	5	4	5	3	1	0	6	4	2
18	3	2	6	1	5	4	5	1	3	0	4	6	2
19	3	5	2	6	4	1	1	0	4	2	6	3	5
20	3	5	4	6	1	2	1	2	4	6	5	0	3
21	3	5	6	2	4	1	1	4	0	2	3	6	5
22	3	5	6	4	1	2	1	4	2	6	0	5	3
23	3	6	2	5	1	4	2	1	4	0	3	6	5
24	3	6	5	2	1	4	2	4	1	0	6	3	5
25	4	1	2	5	6	3	5	3	6	0	1	4	2
26	4	1	5	2	6	3	5	6	3	0	4	1	2
27	4	2	1	3	6	5	6	3	5	1	0	2	4
28	4	2	1	5	3	6	6	3	0	5	4	1	2
29	4	2	3	1	6	5	6	5	3	1	2	0	4
30	4	2	5	1	3	6	6	0	3	5	1	4	2
31	4	5	1	6	2	3	2	6	4	0	3	1	5
32	4	5	6	1	2	3	2	4	6	0	1	3	5
33	5	1	3	4	6	2	6	4	5	0	2	3	1
34	5	1	4	3	6	2	6	5	4	0	3	2	1
35	5	3	1	6	4	2	1	4	2	0	5	3	6
36	5	3	6	1	4	2	1	2	4	0	3	5	6
37	5	6	1	3	2	4	4	0	2	1	3	5	6
38	5	6	2	3	4	1	4	1	2	3	6	0	5
39	5	6	3	1	2	4	4	2	0	1	5	3	6
40	5	6	3	2	4	1	4	2	1	3	0	6	5
41	6	3	1	5	2	4	2	4	1	5	3	0	6
42	6	3	4	5	1	2	2	0	1	4	5	6	3

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
43	6	3	5	1	2	4	2	1	4	5	0	3	6
44	6	3	5	4	1	2	2	1	0	4	6	5	3
45	6	4	2	5	3	1	3	6	2	0	5	1	4
46	6	4	5	2	3	1	3	2	6	0	1	5	4
47	6	5	3	4	2	1	4	1	2	0	5	6	3
48	6	5	4	3	2	1	4	2	1	0	6	5	3

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah graf yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* tersebut, pelabelan *strong vertex-graceful* atau tidak.

Tabel 3.2.40 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{12}

No	f						$f^{+}(\neg mod)$							Ket
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_2, v_5)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	(v_5, v_6)	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
1	1	2	3	4	5	6	3	5	6	7	8	9	11	
2	1	2	4	3	5	6	3	6	5	7	9	8	11	
3	1	3	2	5	4	6	4	5	8	7	6	9	10	*
4	1	3	5	2	4	6	4	8	5	7	9	6	10	*
5	1	4	2	3	6	5	5	6	7	10	8	9	11	*
6	1	4	2	6	5	3	5	6	10	9	7	11	8	*
7	1	4	3	2	6	5	5	7	6	10	9	8	11	*
8	1	4	6	2	5	3	5	10	6	9	11	7	8	*
9	2	1	4	5	3	6	3	5	6	4	7	8	9	*
10	2	1	4	6	5	3	3	5	7	6	9	11	8	
11	2	1	5	4	3	6	3	6	5	4	8	7	9	*
12	2	1	6	4	5	3	3	7	5	6	11	9	8	
13	2	4	1	6	3	5	6	5	10	7	4	9	8	*
14	2	4	6	1	3	5	6	10	5	7	9	4	8	*
15	2	6	3	4	1	5	8	9	10	7	4	5	6	*
16	2	6	4	3	1	5	8	10	9	7	5	4	6	*
17	3	2	1	6	5	4	5	3	8	7	6	11	9	
18	3	2	6	1	5	4	5	8	3	7	11	6	9	
19	3	5	2	6	4	1	8	7	11	9	6	10	5	*
20	3	5	4	6	1	2	8	9	11	6	5	7	3	
21	3	5	6	2	4	1	8	11	7	9	10	6	5	*
22	3	5	6	4	1	2	8	11	9	6	7	5	3	

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
23	3	6	2	5	1	4	9	8	11	7	3	6	5	
24	3	6	5	2	1	4	9	11	8	7	6	3	5	
25	4	1	2	5	6	3	5	3	6	7	8	11	9	
26	4	1	5	2	6	3	5	6	3	7	11	8	9	
27	4	2	1	3	6	5	6	3	5	8	7	9	11	
28	4	2	1	5	3	6	6	3	7	5	4	8	9	*
29	4	2	3	1	6	5	6	5	3	8	9	7	11	
30	4	2	5	1	3	6	6	7	3	5	8	4	9	*
31	4	5	1	6	2	3	9	6	11	7	3	8	5	
32	4	5	6	1	2	3	9	11	6	7	8	3	5	
33	5	1	3	4	6	2	6	4	5	7	9	10	8	*
34	5	1	4	3	6	2	6	5	4	7	10	9	8	*
35	5	3	1	6	4	2	8	4	9	7	5	10	6	*
36	5	3	6	1	4	2	8	9	4	7	10	5	6	*
37	5	6	1	3	2	4	11	7	9	8	3	5	6	
38	5	6	2	3	4	1	11	8	9	10	6	7	5	*
39	5	6	3	1	2	4	11	9	7	8	5	3	6	
40	5	6	3	2	4	1	11	9	8	10	7	6	5	*
41	6	3	1	5	2	4	9	4	8	5	3	7	6	*
42	6	3	4	5	1	2	9	7	8	4	5	6	3	*
43	6	3	5	1	2	4	9	8	4	5	7	3	6	
44	6	3	5	4	1	2	9	8	7	4	6	5	3	*
45	6	4	2	5	3	1	10	6	9	7	5	8	4	*
46	6	4	5	2	3	1	10	9	6	7	8	5	4	*
47	6	5	3	4	2	1	11	8	9	7	5	6	3	
48	6	5	4	3	2	1	11	9	8	7	6	5	3	

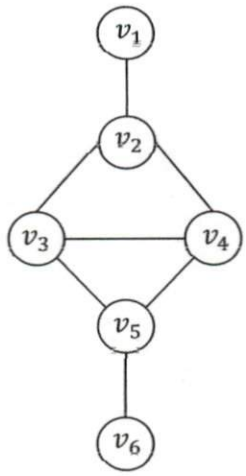
Keterangan:

"*" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *vertex-graceful* karena $f^{+}: E(H_{12}) \rightarrow Z_7$ merupakan pemetaan *bijektif* dan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya *konsekutif*.

Jadi, graf H_{12} merupakan pelabelan *vertex-graceful*.

m) Untuk graf H_{13} (ada 720 kemungkinan).

Misalkan $V(H_{13}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.



Gambar 3.2.61 Ilustrasi $V(H_{13})$

- Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(H_{13}) \rightarrow \{1,2,3,4,5,6\}$

$$v_1 \mapsto 1,$$

$$v_2 \mapsto 2,$$

$$v_3 \mapsto 3,$$

$$v_4 \mapsto 4,$$

$$v_5 \mapsto 5,$$

$$v_6 \mapsto 6,$$

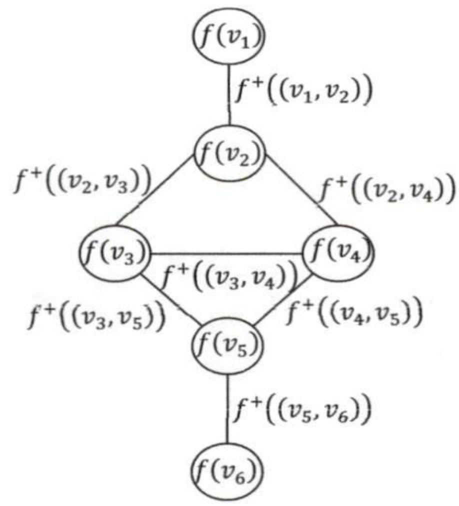
dan $f^+: E(H_{13}) \rightarrow Z_q$ dimana $q = 7$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \, mod \, 7, \qquad j \neq k$$

dan $f^+(\neg mod): E(H_{13}) \rightarrow \left\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\right\}$

$$(v_j, v_k) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful.*



Gambar 3.2.62 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{13} (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+((v_1, v_2)) = (f(v_1) + f(v_2)) \; mod \; 7 = (1 + 2) \; mod \; 7 = 3$$

$$f^+((v_2, v_3)) = (f(v_2) + f(v_3)) \; mod \; 7 = (2 + 3) \; mod \; 7 = 5$$

$$f^+((v_2, v_4)) = (f(v_2) + f(v_4)) \; mod \; 7 = (2 + 4) \; mod \; 7 = 6$$

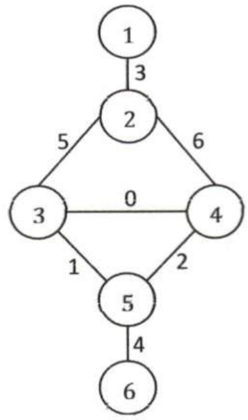
$$f^+((v_3, v_4)) = (f(v_3) + f(v_4)) \; mod \; 7 = (3 + 4) \; mod \; 7 = 0$$

$$f^+((v_3, v_5)) = (f(v_3) + f(v_5)) \; mod \; 7 = (3 + 5) \; mod \; 7 = 1$$

$$f^+((v_4, v_5)) = (f(v_4) + f(v_5)) \; mod \; 7 = (4 + 5) \; mod \; 7 = 2$$

$$f^+((v_5, v_6)) = (f(v_5) + f(v_6)) \; mod \; 7 = (5 + 6) \; mod \; 7 = 4.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.63 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{13} yang sudah dilabeli (I)

Karena $f^+: E(H_{13}) \to Z_7$ merupakan pemetaan *bijektif* maka pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

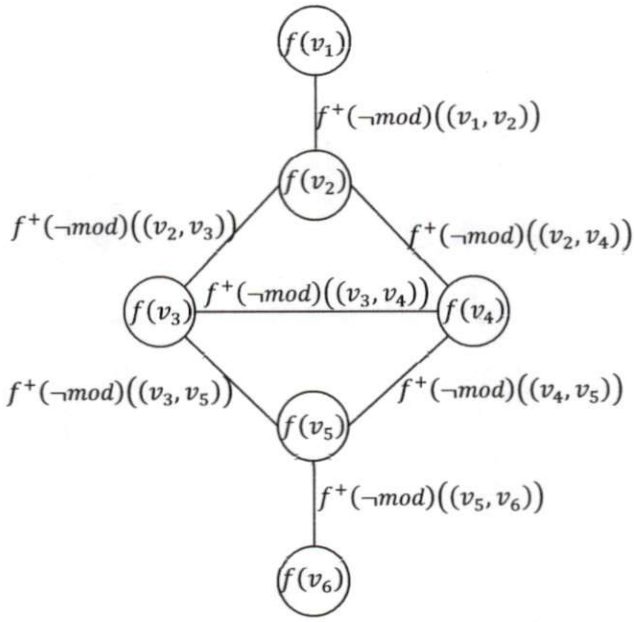
Tabel 3.2.41 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{13} (I)

f						f^+							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	(v_5, v_6)	
1	2	3	4	5	6	3	5	6	0	1	2	4	Ya

Keterangan:

"Ya" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *vertex-graceful* karena $f^+: E(H_{13}) \to Z_7$ merupakan pemetaan *bijektif.*

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful.*



Gambar 3.2.64 Ilustrasi Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{13} (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+(\neg mod)((v_1, v_2)) = f(v_1) + f(v_2) = 1 + 2 = 3$$

$$f^+(\neg mod)((v_2, v_3)) = f(v_2) + f(v_3) = 2 + 3 = 5$$

$$f^+(\neg mod)((v_2, v_4)) = f(v_2) + f(v_4) = 2 + 4 = 6$$

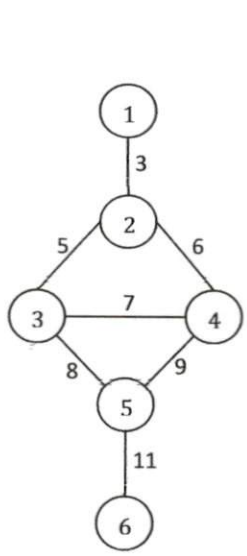
$$f^+(\neg mod)((v_3, v_4)) = f(v_3) + f(v_4) = 3 + 4 = 7$$

$$f^+(\neg mod)((v_3, v_5)) = f(v_3) + f(v_5) = 3 + 5 = 8$$

$$f^+(\neg mod)((v_4, v_5)) = f(v_4) + f(v_5) = 4 + 5 = 9$$

$$f^+(\neg mod)((v_5, v_6)) = f(v_5) + f(v_6) = 5 + 6 = 11.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.65 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{13} yang sudah dilabeli (I)

Karena pelabelan di atas sisinya tidak *konsekutif* maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *strong vertex-graceful*. Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.42 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{13} (I)

f						$f^+(\neg mod)$							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	(v_5, v_6)	
1	2	3	4	5	6	3	5	6	7	8	9	11	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif*.

Dengan cara sama seperti cara di atas, untuk pelabelan yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* pada graf H_{13} dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 3.2.43 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{13}

No	f						f^+						
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	(v_5, v_6)
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
1	1	2	3	4	5	6	3	5	6	0	1	2	4
2	1	2	4	3	5	6	3	6	5	0	2	1	4
3	1	3	2	5	4	6	4	5	1	0	6	2	3
4	1	3	5	2	4	6	4	1	5	0	2	6	3

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
5	2	4	1	6	3	5	6	5	3	0	4	2	1
6	2	4	6	1	3	5	6	3	5	0	2	4	1
7	2	6	3	4	1	5	1	2	3	0	4	5	6
8	2	6	4	3	1	5	1	3	2	0	5	4	6
9	3	2	1	6	5	4	5	3	1	0	6	4	2
10	3	2	6	1	5	4	5	1	3	0	4	6	2
11	3	6	2	5	1	4	2	1	4	0	3	6	5
12	3	6	5	2	1	4	2	4	1	0	6	3	5
13	4	1	2	5	6	3	5	3	6	0	1	4	2
14	4	1	5	2	6	3	5	6	3	0	4	1	2
15	4	5	1	6	2	3	2	6	4	0	3	1	5
16	4	5	6	1	2	3	2	4	6	0	1	3	5
17	5	1	3	4	6	2	6	4	5	0	2	3	1
18	5	1	4	3	6	2	6	5	4	0	3	2	1
19	5	3	1	6	4	2	1	4	2	0	5	3	6
20	5	3	6	1	4	2	1	2	4	0	3	5	6
21	6	4	2	5	3	1	3	6	2	0	5	1	4
22	6	4	5	2	3	1	3	2	6	0	1	5	4
23	6	5	3	4	2	1	4	1	2	0	5	6	3
24	6	5	4	3	2	1	4	2	1	0	6	5	3

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah graf yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* tersebut, pelabelan *strong vertex-graceful* atau tidak.

Tabel 3.2.44 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{13}

No	f						$f^{+}(\neg mod)$							Ket
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	(v_5, v_6)	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
1	1	2	3	4	5	6	3	5	6	7	8	9	11	
2	1	2	4	3	5	6	3	6	5	7	9	8	11	
3	1	3	2	5	4	6	4	5	8	7	6	9	10	*
4	1	3	5	2	4	6	4	8	5	7	9	6	10	*
5	2	4	1	6	3	5	6	5	10	7	4	9	8	*
6	2	4	6	1	3	5	6	10	5	7	9	4	8	*
7	2	6	3	4	1	5	8	9	10	7	4	5	6	*
8	2	6	4	3	1	5	8	10	9	7	5	4	6	*

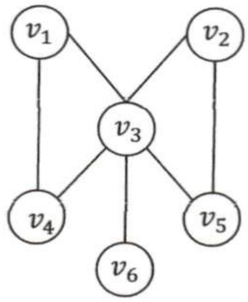
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
9	3	2	1	6	5	4	5	3	8	7	6	11	9	
10	3	2	6	1	5	4	5	8	3	7	11	6	9	
11	3	6	2	5	1	4	9	8	11	7	3	6	5	
12	3	6	5	2	1	4	9	11	8	7	6	3	5	
13	4	1	2	5	6	3	5	3	6	7	8	11	9	
14	4	1	5	2	6	3	5	6	3	7	11	8	9	
15	4	5	1	6	2	3	9	6	11	7	3	8	5	
16	4	5	6	1	2	3	9	11	6	7	8	3	5	
17	5	1	3	4	6	2	6	4	5	7	9	10	8	*
18	5	1	4	3	6	2	6	5	4	7	10	9	8	*
19	5	3	1	6	4	2	8	4	9	7	5	10	6	*
20	5	3	6	1	4	2	8	9	4	7	10	5	6	*
21	6	4	2	5	3	1	10	6	9	7	5	8	4	*
22	6	4	5	2	3	1	10	9	6	7	8	5	4	*
23	6	5	3	4	2	1	11	8	9	7	5	6	3	
24	6	5	4	3	2	1	11	9	8	7	6	5	3	

Keterangan:
"*" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *vertex-graceful* karena $f^+: E(H_{13}) \to Z_7$ merupakan pemetaan *bijektif* dan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya *konsekutif*.

Jadi, graf H_{13} merupakan pelabelan *vertex-graceful*.

n) Untuk graf H_{14} (ada 720 kemungkinan).

Misalkan $V(H_{14}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.



Gambar 3.2.66 Ilustrasi $V(H_{14})$

- Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(H_{14}) \to \{1,2,3,4,5,6\}$.

$$v_1 \mapsto 1,$$

$$v_2 \mapsto 2,$$

$$v_3 \mapsto 3,$$

$$v_4 \mapsto 4,$$

$$v_5 \mapsto 5,$$

$$v_6 \mapsto 6,$$

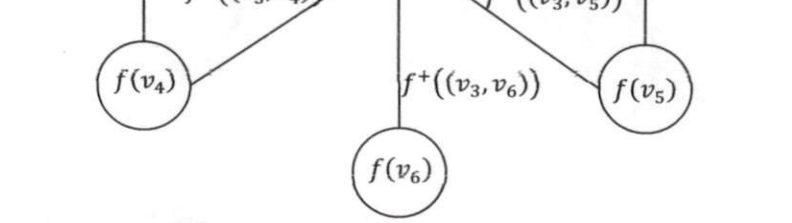
dan $f^+: E(H_{14}) \to Z_q$ dimana $q = 7$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \, mod\, 7, \qquad j \neq k$$

dan $f^+(\neg mod): E(H_{14}) \to \left\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\right\}$

$$\left(v_j, v_k\right) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful.*



Gambar 3.2.67 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{14} (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+((v_1, v_3)) = (f(v_1) + f(v_3)) \, mod\, 7 = (1+3) \, mod\, 7 = 4$$

$$f^+((v_1, v_4)) = (f(v_1) + f(v_4)) \, mod\, 7 = (1+4) \, mod\, 7 = 5$$

$$f^{+}((v_2, v_3)) = (f(v_2) + f(v_3)) \, mod \; 7 = (2 + 3) \, mod \; 7 = 5$$

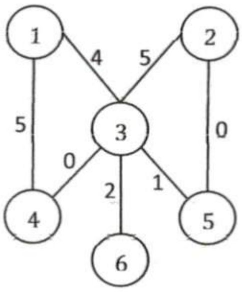
$$f^{+}((v_2, v_5)) = (f(v_2) + f(v_5)) \, mod \; 7 = (2 + 5) \, mod \; 7 = 0$$

$$f^{+}((v_3, v_4)) = (f(v_3) + f(v_4)) \, mod \; 7 = (3 + 4) \, mod \; 7 = 0$$

$$f^{+}((v_3, v_5)) = (f(v_3) + f(v_5)) \, mod \; 7 = (3 + 5) \, mod \; 7 = 1$$

$$f^{+}((v_3, v_6)) = (f(v_3) + f(v_6)) \, mod \; 7 = (3 + 6) \, mod \; 7 = 2.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.68 Pelabelan *vertex-graceful* Graf G_1 yang sudah dilabeli (I)

Karena ada beberapa sisi yang mempunyai label yang sama maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

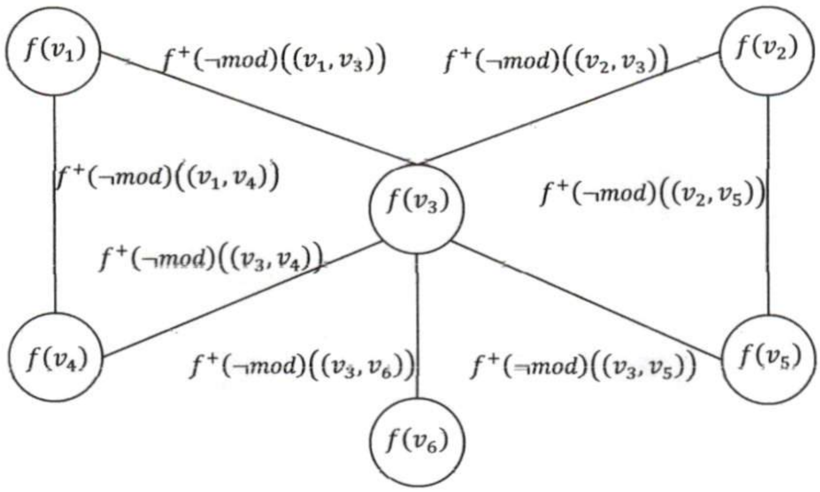
Tabel 3.2.45 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{14} (I)

f						f^{+}							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_3)	(v_1, v_4)	(v_2, v_3)	(v_2, v_5)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_3, v_6)	
1	2	3	4	5	6	4	5	5	0	0	1	2	Tidak

Keterangan:

"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada beberapa sisi yang mempunyai label yang sama.

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful*.



Gambar 3.2.69 Ilustrasi Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{14} (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+(\neg mod)((v_1, v_3)) = f(v_1) + f(v_3) = 1 + 3 = 4$$

$$f^+(\neg mod)((v_1, v_4)) = f(v_1) + f(v_4) = 1 + 4 = 5$$

$$f^+(\neg mod)((v_2, v_3)) = f(v_2) + f(v_3) = 2 + 3 = 5$$

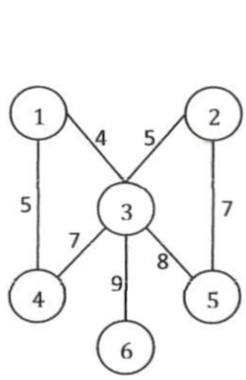
$$f^+(\neg mod)((v_2, v_5)) = f(v_2) + f(v_5) = 2 + 5 = 7$$

$$f^+(\neg mod)((v_3, v_4)) = f(v_3) + f(v_4) = 3 + 4 = 7$$

$$f^+(\neg mod)((v_3, v_5)) = f(v_3) + f(v_5) = 3 + 5 = 8$$

$$f^+(\neg mod)((v_3, v_6)) = f(v_3) + f(v_6) = 3 + 6 = 9.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.70 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{14} yang sudah dilabeli(I)

Karena pelabelan di atas sisinya tidak *konsekutif* maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *strong vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.46 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{14} (I)

f						$f^+(\neg mod)$							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_3)	(v_1, v_4)	(v_2, v_3)	(v_2, v_5)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_3, v_6)	
1	2	3	4	5	6	4	5	5	7	7	8	9	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif.*

Dengan cara sama seperti cara di atas, untuk pelabelan yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* pada graf H_{14} dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 3.2.47 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{14}

No	f						f^+						
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_3)	(v_1, v_4)	(v_2, v_3)	(v_2, v_5)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_3, v_6)
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
1	1	2	4	3	6	5	3	5	6	1	0	3	2
2	1	2	6	5	3	4	3	0	1	5	4	2	3
3	1	3	6	5	2	4	4	0	2	5	4	1	3
4	1	4	2	3	5	6	5	3	6	2	5	0	1
5	1	4	3	5	6	2	5	4	0	3	1	2	5
6	1	5	2	3	4	6	6	3	0	2	5	6	1
7	1	6	3	5	4	2	0	4	2	3	1	0	5
8	1	6	4	3	2	5	0	5	3	1	0	6	2

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
9	2	1	4	6	3	5	3	6	5	4	3	0	2
10	2	3	4	6	1	5	5	6	0	4	3	5	2
11	2	4	1	6	5	3	6	3	5	2	0	6	4
12	2	4	5	3	6	1	6	0	2	3	1	4	6
13	2	5	1	6	4	3	0	3	6	2	0	5	4
14	2	5	6	3	1	4	0	1	4	6	2	0	3
15	2	6	5	3	4	1	1	0	4	3	1	2	6
16	3	1	6	2	5	4	4	2	0	6	1	4	3
17	3	2	4	1	6	5	5	0	6	1	5	3	2
18	3	4	2	1	5	6	0	5	6	2	3	0	1
19	3	4	5	2	6	1	0	1	2	3	0	4	6
20	3	5	2	1	4	6	1	5	0	2	3	6	1
21	3	5	6	2	1	4	1	2	4	6	1	0	3
22	3	6	4	1	2	5	2	0	3	1	5	6	2
23	3	6	5	2	4	1	2	1	4	3	0	2	6
24	4	1	2	5	3	6	5	6	3	4	0	5	1
25	4	1	3	6	5	2	5	0	4	6	2	1	5
26	4	2	1	5	6	3	6	5	3	1	6	0	4
27	4	2	5	6	3	1	6	2	0	5	4	1	6
28	4	3	2	5	1	6	0	6	5	4	0	3	1
29	4	3	5	6	2	1	0	2	1	5	4	0	6
30	4	5	3	6	1	2	2	0	1	6	2	4	5
31	4	6	1	5	2	3	3	5	0	1	6	3	4
32	5	1	2	4	3	6	6	0	3	4	6	5	1
33	5	2	1	4	6	3	0	6	3	1	5	0	4
34	5	2	6	1	3	4	0	4	1	5	0	2	3
35	5	3	2	4	1	6	1	0	5	4	6	3	1
36	5	3	6	1	2	4	1	4	2	5	0	1	3
37	5	4	3	1	6	2	2	1	0	3	4	2	5
38	5	6	1	4	2	3	4	6	0	1	5	3	4
39	5	6	3	1	4	2	4	1	2	3	4	0	5
40	6	1	3	4	5	2	0	2	4	6	0	1	5
41	6	1	4	2	3	5	0	3	5	4	6	0	2
42	6	2	5	4	3	1	1	4	0	5	2	1	6
43	6	3	4	2	1	5	2	3	0	4	6	5	2
44	6	3	5	4	2	1	2	4	1	5	2	0	6

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
45	6	4	1	2	5	3	3	0	5	2	3	6	4
46	6	5	1	2	4	3	4	0	6	2	3	5	4
47	6	5	3	4	1	2	4	2	1	6	0	4	5

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah graf yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* tersebut, pelabelan *strong vertex-graceful* atau tidak.

Tabel 3.2.48 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{14}

No	f						$f^+(\neg mod)$							Ket
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1,v_3)	(v_1,v_4)	(v_2,v_3)	(v_2,v_5)	(v_3,v_4)	(v_3,v_5)	(v_3,v_6)	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
1	1	2	4	3	6	5	3	5	6	8	7	10	9	*
2	1	2	6	5	3	4	3	7	8	5	11	9	10	*
3	1	3	6	5	2	4	4	7	9	5	11	8	10	*
4	1	4	2	3	5	6	5	3	6	9	5	7	8	*
5	1	4	3	5	6	2	5	4	7	10	8	9	5	*
6	1	5	2	3	4	6	6	3	7	9	5	6	8	*
7	1	6	3	5	4	2	7	4	9	10	8	7	5	*
8	1	6	4	3	2	5	7	5	10	8	7	6	9	*
9	2	1	4	6	3	5	3	6	5	4	10	7	9	*
10	2	3	4	6	1	5	5	6	7	4	10	5	9	*
11	2	4	1	6	5	3	6	3	5	9	7	6	4	*
12	2	4	5	3	6	1	6	7	9	10	8	11	6	*
13	2	5	1	6	4	3	7	3	6	9	7	5	4	*
14	2	5	6	3	1	4	7	8	11	6	9	7	10	*
15	2	6	5	3	4	1	8	7	11	10	8	9	6	*
16	3	1	6	2	5	4	4	9	7	6	8	11	10	*
17	3	2	4	1	6	5	5	7	6	8	5	10	9	*
18	3	4	2	1	5	6	7	5	6	9	3	7	8	*
19	3	4	5	2	6	1	7	8	9	10	7	11	6	*
20	3	5	2	1	4	6	8	5	7	9	3	6	8	*
21	3	5	6	2	1	4	8	9	11	6	8	7	10	*
22	3	6	4	1	2	5	9	7	10	8	5	6	9	*
23	3	6	5	2	4	1	9	8	11	10	7	9	6	*
24	4	1	2	5	3	6	5	6	3	4	7	5	8	*
25	4	1	3	6	5	2	5	7	4	6	9	8	5	*

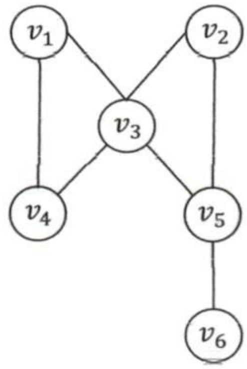
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
26	4	2	1	5	6	3	6	5	3	8	6	7	4	*
27	4	2	5	6	3	1	6	9	7	5	11	8	6	*
28	4	3	2	5	1	6	7	6	5	4	7	3	8	*
29	4	3	5	6	2	1	7	9	8	5	11	7	6	*
30	4	5	3	6	1	2	9	7	8	6	9	4	5	*
31	4	6	1	5	2	3	10	5	7	8	6	3	4	*
32	5	1	2	4	3	6	6	7	3	4	6	5	8	*
33	5	2	1	4	6	3	7	6	3	8	5	7	4	*
34	5	2	6	1	3	4	7	11	8	5	7	9	10	*
35	5	3	2	4	1	6	8	7	5	4	6	3	8	*
36	5	3	6	1	2	4	8	11	9	5	7	8	10	*
37	5	4	3	1	6	2	9	8	7	10	4	9	5	*
38	5	6	1	4	2	3	11	6	7	8	5	3	4	*
39	5	6	3	1	4	2	11	8	9	10	4	7	5	*
40	6	1	3	4	5	2	7	9	4	6	7	8	5	*
41	6	1	4	2	3	5	7	10	5	4	6	7	9	*
42	6	2	5	4	3	1	8	11	7	5	9	8	6	*
43	6	3	4	2	1	5	9	10	7	4	6	5	9	*
44	6	3	5	4	2	1	9	11	8	5	9	7	6	*
45	6	4	1	2	5	3	10	7	5	9	3	6	4	*
46	6	5	1	2	4	3	11	7	6	9	3	5	4	*
47	6	5	3	4	1	2	11	9	8	6	7	4	5	*

Keterangan:
"*" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *vertex-graceful* karena $f^{+}: E(H_{14}) \rightarrow Z_7$ merupakan pemetaan *bijektif* dan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya *konsekutif*.

Jadi, graf H_{14} merupakan pelabelan *vertex-graceful* dan pelabelan *strong vertex-graceful.*

o) Untuk graf H_{15} (ada 720 kemungkinan).

Misalkan $V(H_{15}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.



Gambar 3.2.71 Ilustrasi $V(H_{15})$

– Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(H_{15}) \to \{1,2,3,4,5,6\}$

$$v_1 \mapsto 1,$$

$$v_2 \mapsto 2,$$

$$v_3 \mapsto 3,$$

$$v_4 \mapsto 4,$$

$$v_5 \mapsto 5,$$

$$v_6 \mapsto 6,$$

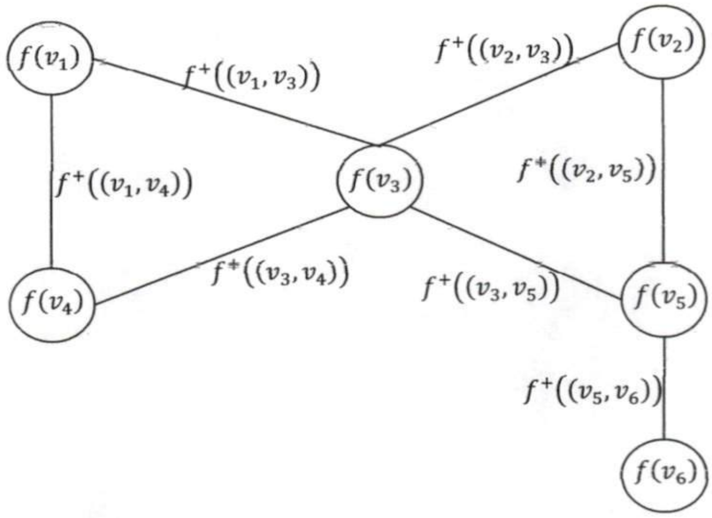
dan $f^+: E(H_{15}) \to Z_q$ dimana $q = 7$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \, mod \; 7, \qquad j \neq k$$

dan $f^+(\neg mod): E(H_{15}) \to \left\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\right\}$

$$\left(v_j, v_k\right) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful*.



Gambar 3.2.72 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{15} (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+((v_1, v_3)) = (f(v_1) + f(v_3))\ mod\ 7 = (1 + 3)\ mod\ 7 = 4$$

$$f^+((v_1, v_4)) = (f(v_1) + f(v_4))\ mod\ 7 = (1 + 4)\ mod\ 7 = 5$$

$$f^+((v_2, v_3)) = (f(v_2) + f(v_3))\ mod\ 7 = (2 + 3)\ mod\ 7 = 5$$

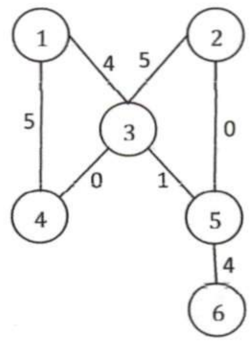
$$f^+((v_2, v_5)) = (f(v_2) + f(v_5))\ mod\ 7 = (2 + 5)\ mod\ 7 = 0$$

$$f^+((v_3, v_4)) = (f(v_3) + f(v_4))\ mod\ 7 = (3 + 4)\ mod\ 7 = 0$$

$$f^+((v_3, v_5)) = (f(v_3) + f(v_5))\ mod\ 7 = (3 + 5)\ mod\ 7 = 1$$

$$f^+((v_5, v_6)) = (f(v_5) + f(v_6))\ mod\ 7 = (5 + 6)\ mod\ 7 = 4.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.73 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{15} yang sudah dilabeli (I)

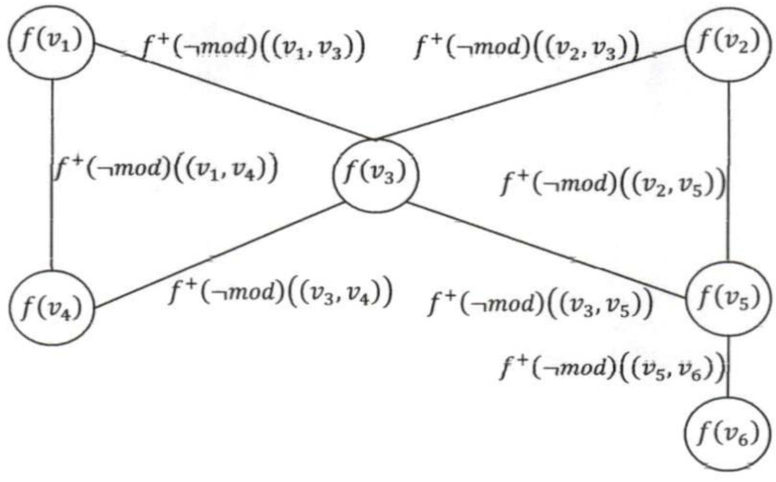
Karena ada beberapa sisi yang mempunyai label yang sama maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *vertex-graceful*. Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.49 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{15} (I)

f						f^+							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1,v_3)	(v_1,v_4)	(v_2,v_3)	(v_2,v_5)	(v_3,v_4)	(v_3,v_5)	(v_5,v_6)	
1	2	3	4	5	6	4	5	5	0	0	1	4	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada beberapa sisi yang mempunyai label yang sama.

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful*.



Gambar 3.2.74 Ilustrasi Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{15} (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+(\neg mod)\big((v_1, v_3)\big) = f(v_1) + f(v_3) = 1 + 3 = 4$$

$$f^+(\neg mod)\big((v_1, v_4)\big) = f(v_1) + f(v_4) = 1 + 4 = 5$$

$$f^+(\neg mod)\big((v_2, v_3)\big) = f(v_2) + f(v_3) = 2 + 3 = 5$$

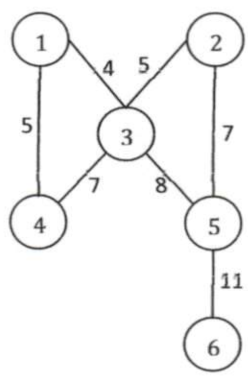
$$f^+(\neg mod)\big((v_2, v_5)\big) = f(v_2) + f(v_5) = 2 + 5 = 7$$

$$f^+(\neg mod)\big((v_3, v_4)\big) = f(v_3) + f(v_4) = 3 + 4 = 7$$

$$f^+(\neg mod)\big((v_3, v_5)\big) = f(v_3) + f(v_5) = 3 + 5 = 8$$

$$f^+(\neg mod)\big((v_5, v_6)\big) = f(v_5) + f(v_6) = 5 + 6 = 11.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.75 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{15} yang sudah dilabeli (I)

Karena pelabelan di atas sisinya tidak *konsekutif* maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *strong vertex-graceful*. Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.50 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{15} (I)

f						$f^+(\neg mod)$							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_3)	(v_1, v_4)	(v_2, v_3)	(v_2, v_5)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_5, v_6)	
1	2	3	4	5	6	4	5	5	7	7	8	11	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif*.

Dengan cara sama seperti cara di atas, untuk pelabelan yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* pada graf H_{15} dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 3.2.51 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{15}

No	f						f^+						
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_3)	(v_1, v_4)	(v_2, v_3)	(v_2, v_5)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_3, v_6)
1	1	3	4	2	5	6	5	3	0	1	6	2	4
2	1	5	2	4	6	3	3	5	0	4	6	1	2
3	2	3	4	1	5	6	6	3	0	1	5	2	4
4	2	6	1	4	3	5	3	6	0	2	5	4	1
5	3	1	6	5	4	2	2	1	0	5	4	3	6
6	3	2	5	6	1	4	1	2	0	3	4	6	5
7	4	5	2	1	6	3	6	5	0	4	3	1	2
8	4	6	1	2	3	5	5	6	0	2	3	4	1
9	5	1	6	3	4	2	4	1	0	5	2	3	6
10	5	4	3	6	2	1	1	4	0	6	2	5	3
11	6	2	5	3	1	4	4	2	0	3	1	6	5
12	6	4	3	5	2	1	2	4	0	6	1	5	3

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah graf yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* tersebut, pelabelan *strong vertex-graceful* atau tidak.

Tabel 3.2.52 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{15}

No	f						$f^+(\neg mod)$							Ket
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_3)	(v_1, v_4)	(v_2, v_3)	(v_2, v_5)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_3, v_6)	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
1	1	3	4	2	5	6	5	3	7	8	6	9	11	
2	1	5	2	4	6	3	3	5	7	11	6	8	9	
3	2	3	4	1	5	6	6	3	7	8	5	9	11	
4	2	6	1	4	3	5	3	6	7	9	5	4	8	*
5	3	1	6	5	4	2	9	8	7	5	11	10	6	*
6	3	2	5	6	1	4	8	9	7	3	11	6	5	
7	4	5	2	1	6	3	6	5	7	11	3	8	9	
8	4	6	1	2	3	5	5	6	7	9	3	4	8	*
9	5	1	6	3	4	2	11	8	7	5	9	10	6	*

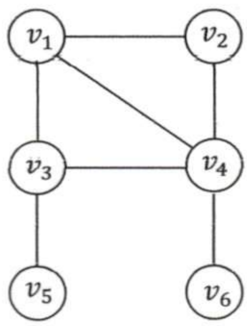
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
10	5	4	3	6	2	1	8	11	7	6	9	5	3	
11	6	2	5	3	1	4	11	9	7	3	8	6	5	
12	6	4	3	5	2	1	9	11	7	6	8	5	3	

Keterangan:
"*" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *vertex-graceful* karena $f^+: E(H_{15}) \to Z_7$ merupakan pemetaan *bijektif* dan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya *konsekutif.*

Jadi, graf H_{15} merupakan pelabelan *vertex-graceful.*

p) Untuk graf H_{16} (ada 720 kemungkinan)

Misalkan $V(H_{16}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.



Gambar 3.2.76 Ilustrasi $V(H_{16})$

- Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(H_{16}) \to \{1,2,3,4,5,6\}$

$$v_1 \mapsto 1,$$

$$v_2 \mapsto 2,$$

$$v_3 \mapsto 3,$$

$$v_4 \mapsto 4,$$

$$v_5 \mapsto 5,$$

$$v_6 \mapsto 6,$$

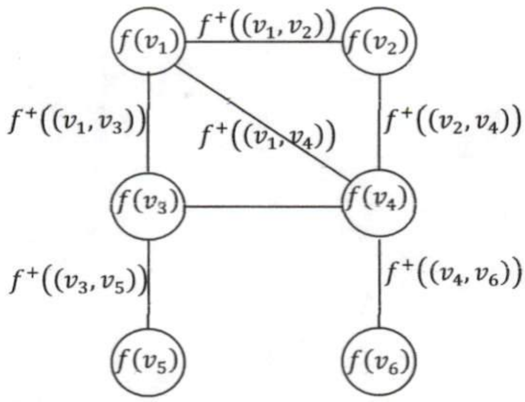
dan $f^+: E(H_{16}) \to Z_q$ dimana $q = 7$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \, mod \, 7, \qquad j \neq k$$

dan $f^+(\neg mod): E(H_{16}) \to \left\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\right\}$

$$\left(v_j, v_k\right) \mapsto f\left(v_j\right) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful.*



Gambar 3.2.77 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{16} (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+((v_1, v_2)) = (f(v_1) + f(v_2))\ mod\ 7 = (1+2)\ mod\ 7 = 3$$

$$f^+((v_1, v_3)) = (f(v_1) + f(v_3))\ mod\ 7 = (1+3)\ mod\ 7 = 4$$

$$f^+((v_1, v_4)) = (f(v_1) + f(v_4))\ mod\ 7 = (1+4)\ mod\ 7 = 5$$

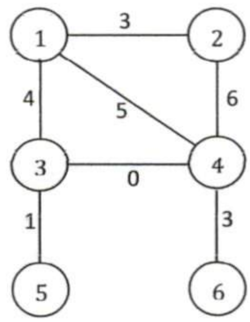
$$f^+((v_2, v_4)) = (f(v_2) + f(v_4))\ mod\ 7 = (2+4)\ mod\ 7 = 6$$

$$f^+((v_3, v_4)) = (f(v_3) + f(v_4))\ mod\ 7 = (3+4)\ mod\ 7 = 0$$

$$f^+((v_3, v_5)) = (f(v_3) + f(v_5))\ mod\ 7 = (3+5)\ mod\ 7 = 1$$

$$f^+((v_4, v_6)) = (f(v_4) + f(v_6))\ mod\ 7 = (4+6)\ mod\ 7 = 3.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.78 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{16} yang sudah dilabeli (I)

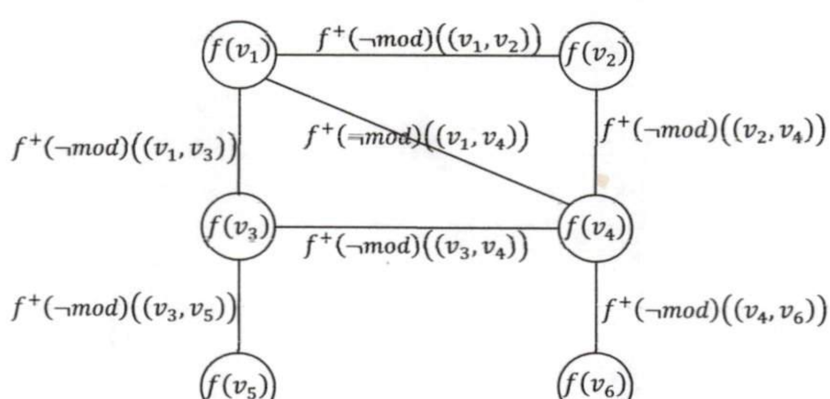
Karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.53 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{16} (I)

f						f^+							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1,v_2)	(v_1,v_3)	(v_1,v_4)	(v_2,v_4)	(v_3,v_4)	(v_3,v_5)	(v_4,v_6)	
1	2	3	4	5	6	3	4	5	6	0	1	3	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama.

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful.*



Gambar 3.2.79 Ilustrasi Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{16} (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_1, v_2)\big) = f(v_1) + f(v_2) = 1 + 2 = 3$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_1, v_3)\big) = f(v_1) + f(v_3) = 1 + 3 = 4$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_1, v_4)\big) = f(v_1) + f(v_4) = 1 + 4 = 5$$

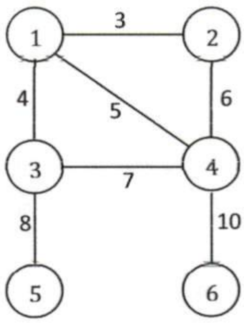
$$f^{+}(\neg mod)\big((v_2, v_4)\big) = f(v_2) + f(v_4) = 2 + 4 = 6$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_3, v_4)\big) = f(v_3) + f(v_4) = 3 + 4 = 7$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_3, v_5)\big) = f(v_3) + f(v_5) = 3 + 5 = 8$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_4, v_6)\big) = f(v_4) + f(v_6) = 4 + 6 = 10.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.80 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{16} yang sudah dilabeli (I)

Karena pelabelan di atas sisinya tidak *konsekutif* maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *strong vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.54 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{16} (I)

f						$f^{+}(\neg mod)$							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_1, v_4)	(v_2, v_4)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_6)	
1	2	3	4	5	6	3	4	5	6	7	8	10	Tidak

Keterangan:

"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif.*

Dengan cara sama seperti cara di atas, untuk pelabelan yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* pada graf H_{16} dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 3.2.55 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{16}

No	f						f^+						
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_1, v_4)	(v_2, v_4)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_6)
1	1	3	2	4	6	5	4	3	5	0	6	1	2
2	1	3	4	5	6	2	4	5	6	1	2	3	0
3	1	3	5	2	4	6	4	6	3	5	0	2	1
4	1	5	6	3	4	2	6	0	4	1	2	3	5
5	1	6	2	3	4	5	0	3	4	2	5	6	1
6	2	3	5	6	1	4	5	0	1	2	4	6	3
7	2	5	4	6	1	3	0	6	1	4	3	5	2
8	2	6	1	3	5	4	1	3	5	2	4	6	0
9	2	6	3	4	1	5	1	5	6	3	0	4	2
10	2	6	4	1	5	3	1	6	3	0	5	1	4
11	3	1	4	2	5	6	4	0	5	3	6	1	1
12	3	2	1	6	5	4	5	4	2	1	0	6	3
13	3	2	5	1	4	6	5	1	4	3	6	1	0
14	3	2	6	5	4	1	5	2	1	0	4	3	6
15	3	4	6	2	5	1	0	2	5	6	1	4	3
16	4	5	1	2	3	6	2	5	6	0	3	4	1
17	4	5	2	6	3	1	2	6	3	4	1	5	0
18	4	5	6	1	2	3	2	3	5	6	0	1	4
19	4	6	3	5	2	1	3	0	2	4	1	5	6
20	5	1	3	6	2	4	6	1	4	0	2	5	3
21	5	1	4	3	6	2	6	2	1	4	0	3	5
22	5	1	6	4	2	3	6	4	2	5	3	1	0
23	5	2	3	1	6	4	0	1	6	3	4	2	5
24	5	4	2	1	6	3	2	0	6	5	3	1	4
25	6	1	5	4	3	2	0	4	3	5	2	1	6
26	6	2	1	4	3	5	1	0	3	6	5	4	2
27	6	4	3	2	1	5	3	2	1	6	5	4	0
28	6	4	5	3	1	2	3	4	2	0	1	6	5

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah graf yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* tersebut, pelabelan *strong vertex-graceful* atau tidak.

Tabel 3.2.56 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{16}

No	f						$f^{+}(\neg mod)$							Ket
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1,v_2)	(v_1,v_3)	(v_1,v_4)	(v_2,v_4)	(v_3,v_4)	(v_3,v_5)	(v_4,v_6)	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
1	1	3	2	4	6	5	4	3	5	7	6	8	9	*
2	1	3	4	5	6	2	4	5	6	8	9	10	7	*
3	1	3	5	2	4	6	4	6	3	5	7	9	8	*
4	1	5	6	3	4	2	6	7	4	8	9	10	5	*
5	1	6	2	3	4	5	7	3	4	9	5	6	8	*
6	2	3	5	6	1	4	5	7	8	9	11	6	10	*
7	2	5	4	6	1	3	7	6	8	11	10	5	9	*
8	2	6	1	3	5	4	8	3	5	9	4	6	7	*
9	2	6	3	4	1	5	8	5	6	10	7	4	9	*
10	2	6	4	1	5	3	8	6	3	7	5	9	4	*
11	3	1	4	2	5	6	4	7	5	3	6	9	8	*
12	3	2	1	6	5	4	5	4	9	8	7	6	10	*
13	3	2	5	1	4	6	5	8	4	3	6	9	7	*
14	3	2	6	5	4	1	5	9	8	7	11	10	6	*
15	3	4	6	2	5	1	7	9	5	6	8	11	3	*
16	4	5	1	2	3	6	9	5	6	7	3	4	8	*
17	4	5	2	6	3	1	9	6	10	11	8	5	7	*
18	4	5	6	1	2	3	9	10	5	6	7	8	4	*
19	4	6	3	5	2	1	10	7	9	11	8	5	6	*
20	5	1	3	6	2	4	6	8	11	7	9	5	10	*
21	5	1	4	3	6	2	6	9	8	4	7	10	5	*
22	5	1	6	4	2	3	6	11	9	5	10	8	7	*
23	5	2	3	1	6	4	7	8	6	3	4	9	5	*
24	5	4	2	1	6	3	9	7	6	5	3	8	4	*
25	6	1	5	4	3	2	7	11	10	5	9	8	6	*

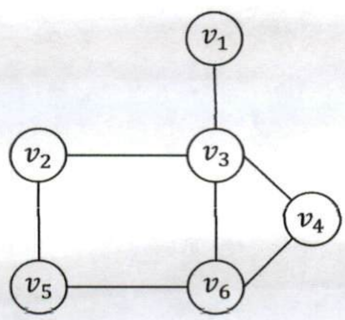
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
26	6	2	1	4	3	5	8	7	10	6	5	4	9	*
27	6	4	3	2	1	5	10	9	8	6	5	4	7	*
28	6	4	5	3	1	2	10	11	9	7	8	6	5	*

Keterangan:
"*" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *vertex-graceful* karena $f^+: E(H_{16}) \to Z_7$ merupakan pemetaan *bijektif* dan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya *konsekutif.*

Jadi, graf H_{16} merupakan pelabelan *vertex-graceful* dan pelabelan *strong vertex-graceful.*

q) Untuk graf H_{17} (ada 720 kemungkinan)

Misalkan $V(H_{17}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.



Gambar 3.2.81 Ilustrasi $V(H_{17})$

– Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(H_{17}) \to \{1,2,3,4,5,6\}$

$$v_1 \mapsto 1,$$

$$v_2 \mapsto 2,$$

$$v_3 \mapsto 3,$$

$$v_4 \mapsto 4,$$

$$v_5 \mapsto 5,$$

$$v_6 \mapsto 6,$$

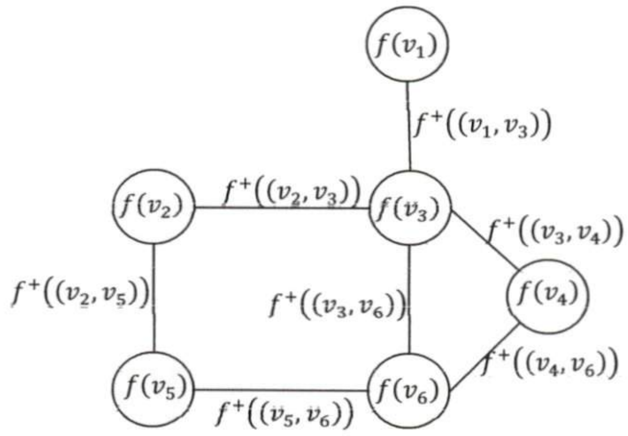
dan $f^+: E(H_{16}) \to Z_q$ dimana $q = 7$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \; mod\; 7, \qquad j \neq k$$

$$\text{dan } f^+(\neg mod): E(H_{16}) \to \left\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\right\}$$

$$(v_j, v_k) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful.*



Gambar 3.2.82 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{17} (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+((v_1, v_3)) = (f(v_1) + f(v_3))\ mod\ 7 = (1 + 3)\ mod\ 7 = 4$$

$$f^+((v_2, v_3)) = (f(v_2) + f(v_3))\ mod\ 7 = (2 + 3)\ mod\ 7 = 5$$

$$f^+((v_2, v_5)) = (f(v_2) + f(v_5))\ mod\ 7 = (2 + 5)\ mod\ 7 = 0$$

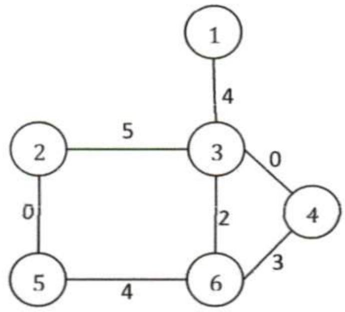
$$f^+((v_3, v_4)) = (f(v_3) + f(v_4))\ mod\ 7 = (3 + 4)\ mod\ 7 = 0$$

$$f^+((v_3, v_6)) = (f(v_3) + f(v_6))\ mod\ 7 = (3 + 6)\ mod\ 7 = 2$$

$$f^+((v_4, v_6)) = (f(v_4) + f(v_6))\ mod\ 7 = (4 + 6)\ mod\ 7 = 3$$

$$f^+((v_5, v_6)) = (f(v_5) + f(v_6))\ mod\ 7 = (5 + 6)\ mod\ 7 = 4.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.83 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{17} yang sudah dilabeli (I)

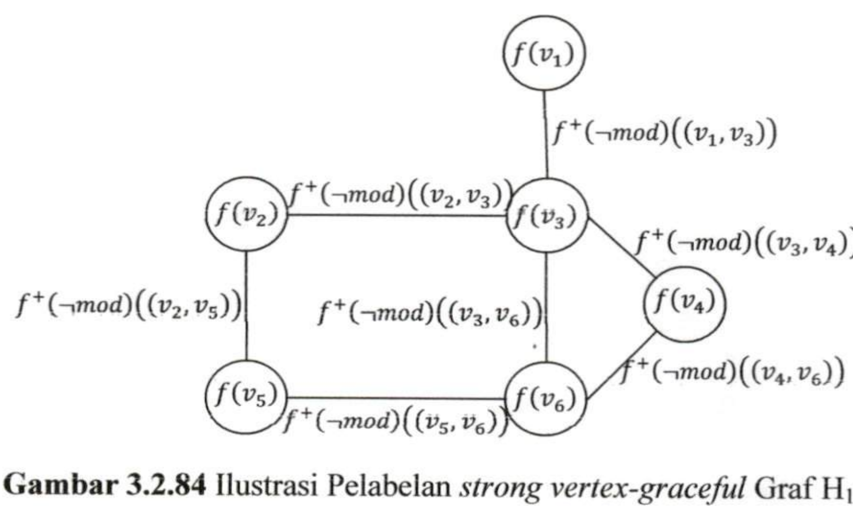
Karena ada beberapa sisi yang mempunyai label yang sama maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.57 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{17} (I)

f						f^+							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_2, v_5)	(v_3, v_4)	(v_3, v_6)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)	
1	2	3	4	5	6	4	5	0	0	2	3	4	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada beberapa sisi yang mempunyai label yang sama.

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful.*



Gambar 3.2.84 Ilustrasi Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{17} (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_1, v_3)\big) = f(v_1) + f(v_3) = 1 + 3 = 4$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_2, v_3)\big) = f(v_2) + f(v_3) = 2 + 3 = 5$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_2, v_5)\big) = f(v_2) + f(v_5) = 2 + 5 = 7$$

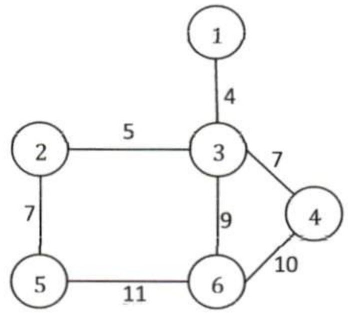
$$f^{+}(\neg mod)\big((v_3, v_4)\big) = f(v_3) + f(v_4) = 3 + 4 = 7$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_3, v_6)\big) = f(v_3) + f(v_6) = 3 + 6 = 9$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_4, v_6)\big) = f(v_4) + f(v_6) = 4 + 6 = 10$$

$$f^{+}(\neg mod)\big((v_5, v_6)\big) = f(v_5) + f(v_6) = 5 + 6 = 11.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.85 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{17} yang sudah dilabeli(I)

Karena pelabelan di atas sisinya tidak *konsekutif* maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *strong vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.58 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{17} (I)

f						$f^{+}(\neg mod)$							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_2, v_5)	(v_3, v_4)	(v_3, v_6)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)	
1	2	3	4	5	6	4	5	7	7	9	10	11	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif.*

Dengan cara sama seperti cara di atas, untuk pelabelan yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* pada graf H_{17} dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 3.2.59 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{17}

No	f						f^+						
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1,v_3)	(v_2,v_3)	(v_2,v_5)	(v_3,v_4)	(v_3,v_6)	(v_4,v_6)	(v_5,v_6)
1	1	4	6	5	2	3	0	3	6	4	2	0	5
2	1	6	2	3	5	4	3	1	4	5	6	1	9
3	1	6	3	5	4	2	4	2	3	1	5	2	6
4	2	1	5	3	4	6	0	6	5	1	4	0	3
5	6	3	1	2	5	4	0	4	1	3	5	0	2
6	2	5	6	3	1	4	1	4	6	2	3	4	5
7	2	5	4	6	3	1	6	2	1	3	5	2	4
8	3	4	2	1	5	6	5	6	2	3	1	6	4
9	3	4	6	2	1	5	2	3	5	1	4	3	6
10	3	5	4	1	6	2	0	2	4	5	6	0	1
11	4	2	3	6	1	5	0	5	3	2	1	0	6
12	4	3	1	5	6	2	5	4	2	6	3	4	1
13	4	3	5	6	2	1	2	1	5	4	6	1	3
14	5	2	3	1	4	6	1	5	6	4	2	5	3
15	5	2	1	4	6	3	6	3	1	5	4	3	2
16	5	6	2	4	3	1	0	1	2	6	3	0	4
17	6	1	4	2	3	5	3	5	4	6	2	5	1
18	6	1	5	4	2	3	4	6	3	2	1	6	5

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah graf yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* tersebut, pelabelan *strong vertex-graceful* atau tidak.

Tabel 3.2.60 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{17}

No	f						$f^+(\neg mod)$							Ket
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1,v_3)	(v_2,v_3)	(v_2,v_5)	(v_3,v_4)	(v_3,v_6)	(v_4,v_6)	(v_5,v_6)	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
1	1	4	6	5	2	3	7	10	6	11	9	7	5	*
2	1	6	2	3	5	4	3	8	11	5	6	8	9	
3	1	6	3	5	4	2	4	9	10	8	5	9	6	*
4	2	1	5	3	4	6	7	6	5	8	11	7	10	*
5	6	3	1	2	5	4	7	4	8	3	5	7	9	*

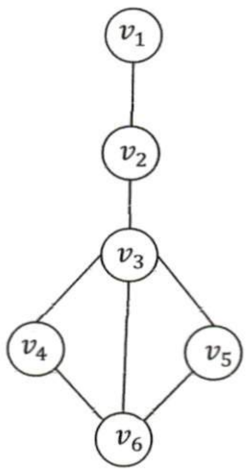
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
6	2	5	6	3	1	4	8	11	6	9	10	4	5	*
7	2	5	4	6	3	1	6	9	8	10	5	9	4	*
8	3	4	2	1	5	6	5	6	9	3	8	6	11	
9	3	4	6	2	1	5	9	10	5	8	11	3	6	*
10	3	5	4	1	6	2	7	9	11	5	6	7	8	
11	4	2	3	6	1	5	7	5	3	9	8	7	6	
12	4	3	1	5	6	2	5	4	9	6	3	11	8	*
13	4	3	5	6	2	1	9	8	5	11	6	8	3	
14	5	2	3	1	4	6	8	5	6	4	9	5	10	*
15	5	2	1	4	6	3	6	3	8	5	4	10	9	*
16	5	6	2	4	3	1	7	8	9	6	3	7	4	*
17	6	1	4	2	3	5	10	5	4	6	9	5	8	*
18	6	1	5	4	2	3	11	6	3	9	8	6	5	

Keterangan:
"*" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *vertex-graceful* karena $f^{+}: E(H_{17}) \to Z_7$ merupakan pemetaan *bijektif* dan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya *konsekutif.*

Jadi, graf H_{17} merupakan pelabelan *vertex-graceful.*

r) Untuk graf H_{18} (ada 720 kemungkinan).

Misalkan $V(H_{18}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.



Gambar 3.2.86 Ilustrasi $V(H_{18})$

- Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(H_{18}) \to \{1,2,3,4,5,6\}$

$$v_1 \mapsto 1,$$

$$v_2 \mapsto 2,$$

$$v_3 \mapsto 3,$$

$$v_4 \mapsto 4,$$

$$v_5 \mapsto 5,$$

$$v_6 \mapsto 6,$$

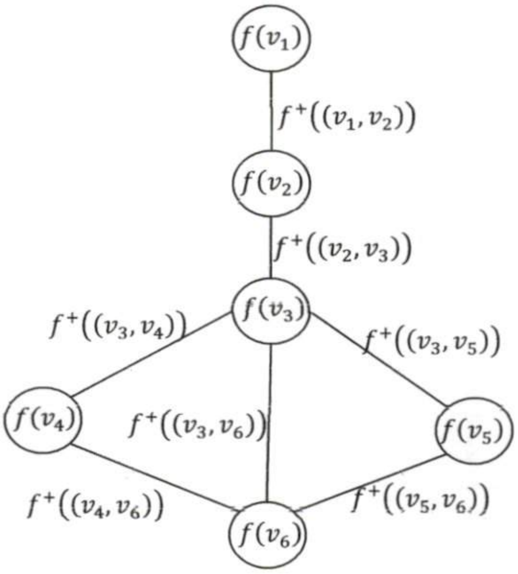
dan $f^+: E(H_{16}) \to Z_q$ dimana $q = 7$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \, mod \, 7, \qquad j \neq k$$

dan $f^+(\neg mod): E(H_{16}) \to \left\{min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \cdots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\right\}$

$$(v_j, v_k) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \qquad j \neq k.$$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful.*



Gambar 3.2.87 Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{18} (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+((v_1, v_2)) = (f(v_1) + f(v_2))\ mod\ 7 = (1 + 2)\ mod\ 7 = 3$$

$$f^+((v_2, v_3)) = (f(v_2) + f(v_3))\ mod\ 7 = (2 + 3)\ mod\ 7 = 5$$

$$f^+((v_3, v_4)) = (f(v_3) + f(v_4))\ mod\ 7 = (3 + 4)\ mod\ 7 = 0$$

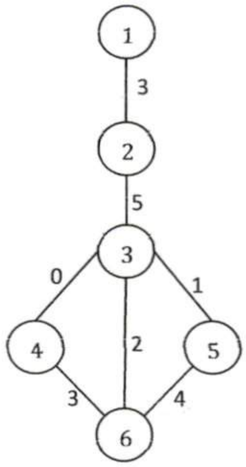
$$f^+((v_3, v_5)) = (f(v_3) + f(v_5))\ mod\ 7 = (3 + 5)\ mod\ 7 = 1$$

$$f^+((v_3, v_6)) = (f(v_3) + f(v_6))\ mod\ 7 = (3 + 6)\ mod\ 7 = 2$$

$$f^+((v_4, v_6)) = (f(v_4) + f(v_6))\ mod\ 7 = (4 + 6)\ mod\ 7 = 3$$

$$f^+((v_5, v_6)) = (f(v_5) + f(v_6))\ mod\ 7 = (5 + 6)\ mod\ 7 = 4.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.88 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{18} yang sudah dilabeli (I)

Karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *vertex-graceful*.

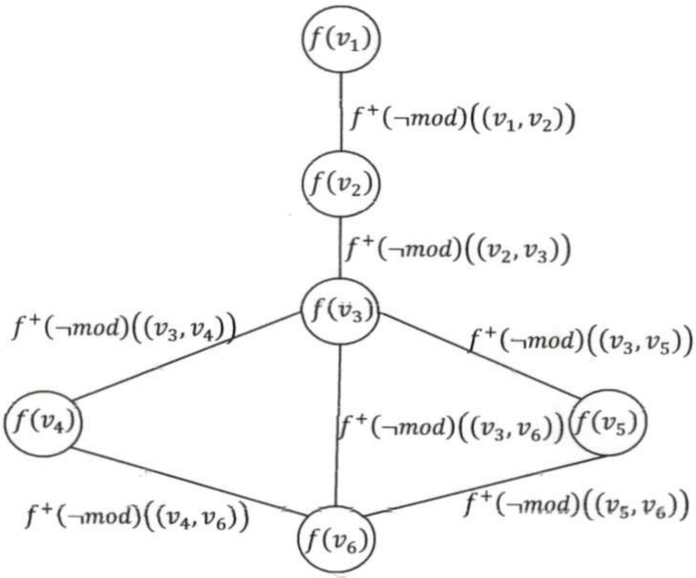
Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.61 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{18} (I)

f						f^+							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_3, v_6)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)	
1	2	3	4	5	6	3	5	0	1	2	3	4	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada dua sisi yang mempunyai label yang sama.

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *strong vertex-graceful.*



Gambar 3.2.89 Ilustrasi Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{18} (I)

Dari definisi pemetaan diperoleh

$$f^+(\neg mod)((v_1, v_2)) = f(v_1) + f(v_2) = 1 + 2 = 3$$

$$f^+(\neg mod)((v_2, v_3)) = f(v_2) + f(v_3) = 2 + 3 = 5$$

$$f^+(\neg mod)((v_3, v_4)) = f(v_3) + f(v_4) = 3 + 4 = 7$$

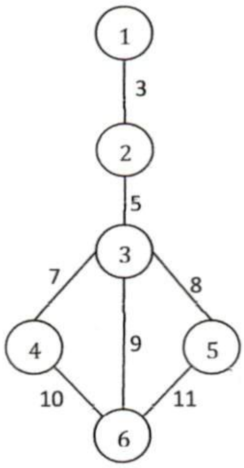
$$f^+(\neg mod)((v_3, v_5)) = f(v_3) + f(v_5) = 3 + 5 = 8$$

$$f^+(\neg mod)((v_3, v_6)) = f(v_3) + f(v_6) = 3 + 6 = 9$$

$$f^+(\neg mod)((v_4, v_6)) = f(v_4) + f(v_6) = 4 + 6 = 10$$

$$f^+(\neg mod)((v_5, v_6)) = f(v_5) + f(v_6) = 5 + 6 = 11.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 3.2.90 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{18} yang sudah dilabeli(I)

Karena pelabelan di atas sisinya tidak *konsekutif* maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *strong vertex-graceful.* Pelabelan graf di atas dapat di tulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.62 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{18} (I)

f						$f^{+}(\neg mod)$							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_3, v_6)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)	
1	2	3	4	5	6	3	5	7	8	9	10	11	Tidak

Keterangan:
"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya tidak *konsekutif.*

Dengan cara sama seperti cara di atas, untuk pelabelan yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* pada graf H_{18} dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 3.2.63 Pelabelan *vertex-graceful* Graf H_{18}

No	f						f^{+}						
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_2, v_3)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_3, v_6)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
1	1	3	2	5	6	4	4	5	0	1	6	2	3
2	1	3	2	6	5	4	4	5	1	0	6	3	2
3	1	5	6	2	4	3	6	4	1	3	9	5	0
4	1	5	6	4	2	3	6	4	3	1	2	0	5

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
5	2	3	5	1	4	6	5	1	6	2	4	0	3
6	2	3	5	4	1	6	5	1	2	6	4	3	0
7	2	6	4	3	5	1	1	3	0	2	5	4	6
8	2	6	4	5	3	1	1	3	2	0	5	6	4
9	3	1	4	6	5	2	4	5	3	2	6	1	0
10	3	1	4	5	6	2	4	5	2	3	6	0	1
11	3	2	6	1	4	5	5	1	0	3	4	6	2
12	3	2	6	4	1	5	5	1	3	0	4	2	6
13	4	5	1	3	6	2	2	6	4	0	3	5	1
14	4	5	1	6	3	2	2	6	0	4	3	1	5
15	4	6	3	1	2	5	3	2	4	5	1	6	0
16	4	6	3	2	1	5	3	2	5	4	1	0	6
17	5	1	3	2	4	6	6	4	5	0	2	1	3
18	5	1	3	4	2	6	6	4	7	5	2	3	1
19	5	4	2	3	6	1	2	6	5	1	3	4	0
20	5	4	2	6	3	1	2	6	1	5	3	0	4
21	6	2	1	3	5	4	1	3	4	6	5	0	2
22	6	2	1	5	3	4	1	3	6	4	5	2	0

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah graf yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* tersebut, pelabelan *strong vertex-graceful* atau tidak.

Tabel 3.2.64 Pelabelan *strong vertex-graceful* Graf H_{18}

No	f						$f^{+}(\neg mod)$							Ket
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_1, v_4)	(v_2, v_4)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_6)	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
1	1	3	2	5	6	4	4	5	7	8	6	9	10	*
2	1	3	2	6	5	4	4	5	8	8	6	10	9	*
3	1	5	6	2	4	3	6	11	8	10	9	5	7	*
4	1	5	6	4	2	3	6	11	10	10	9	7	5	*
5	2	3	5	1	4	6	5	8	6	9	11	7	10	*
6	2	3	5	4	1	6	5	8	9	9	11	10	7	*
7	2	6	4	3	5	1	8	10	7	9	5	4	6	*
8	2	6	4	5	3	1	8	10	9	9	5	6	4	*
9	3	1	4	6	5	2	4	5	10	9	6	8	7	*
10	3	1	4	5	6	2	4	5	9	9	6	7	8	*

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
11	3	2	6	1	4	5	5	8	7	10	11	6	9	*
12	3	2	6	4	1	5	5	8	10	10	11	9	6	*
13	4	5	1	3	6	2	9	6	4	7	3	5	8	*
14	4	5	1	6	3	2	9	6	7	7	3	8	5	*
15	4	6	3	1	2	5	10	9	4	5	8	6	7	*
16	4	6	3	2	1	5	10	9	5	5	8	7	6	*
17	5	1	3	2	4	6	6	4	5	7	9	8	10	*
18	5	1	3	4	2	6	6	4	7	7	9	10	8	*
19	5	4	2	3	6	1	9	6	5	8	3	4	7	*
20	5	4	2	6	3	1	9	6	8	8	3	7	4	*
21	6	2	1	3	5	4	8	3	4	6	5	7	9	*
22	6	2	1	5	3	4	8	3	6	6	5	9	7	*

Keterangan:

"*" berarti pelabelan tersebut merupakan pelabelan *vertex-graceful* karena $f^+: E(H_{18}) \rightarrow Z_7$ merupakan pemetaan *bijektif* dan pelabelan *strong vertex-graceful* karena pelabelan tersebut sisinya *konsekutif.*

Jadi, graf H_{18} merupakan pelabelan *vertex-graceful* dan pelabelan *strong vertex-graceful.*

Jadi, di antara 18 graf-(6,7) seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.2 terdapat 14 graf yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* yaitu $H_5, \cdots, H_{18}$. Empat graf diantaranya juga merupakan pelabelan *strong vertex-graceful* yaitu H_7, H_{14}, H_{16}, dan H_{18}.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh pada Bab III, dapat disimpulkan bahwa:

1. Pada graf-(5,6) terdapat 3 graf yang merupakan pelabelan *vertex-graceful* dan juga pelabelan *strong vertex-graceful* yaitu G_1, G_2, dan G_3.
2. Pada graf-(6,7) terdapat 14 graf yang merupakan pelabelan *vertex-graceful,* yaitu $H_5, \cdots, H_{18}$. Empat graf diantaranya juga merupakan pelabelan *strong vertex-graceful* yaitu H_7, H_{14}, H_{16}, dan H_{18}.

4.2 Saran

Pada penelitian ini, penulis melakukan kajian pelabelan *vertex-graceful* pada graf-(5,6) dan graf-(6,7). Penelitian ini dapat dilanjutkan untuk graf-(7,8) dan seterusnya.

DAFTAR PUSTAKA

1] Baskoro, E. T. 2007. *Mengenalkan Indonesia Melalui Teori Graf.* Balai Pertemuan Ilmiah ITB, Bandung

[2] Cunningham, D. 2004. Vertex magic. *Electronic Journal of Undergraduate Mathematics*.**9**:1-20

[3] N.Hartsfield and G.Ringel. 1990. *Pearls in Graph Theory*. Academic Press, San Diego

[4] Rosyid, Abdul and Ratnasari , Lucia and Djuwandi. 2009. *Vertex Magic Total Labeling of Generalized Petersen Graphs.* Undergraduate thesis, Universitas Diponegoro, Semarang

[5] Sin-Min Lee, Y.C.Pan and Ming-Chen Tsai. 2005. On vertex-graceful (p,p+1)-graphs. *Congressus Numerantium*. **172**: 65-68

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis dilahirkan pada tanggal 20 Juli 1988 di Padang, terlahir sebagai anak kedua dari empat bersaudara dari pasangan Drs.H.Nuryanuwar,Apt,MM,MKes,MMR dan Dra.Hj.Evawani. Pada tahun 1993 penulis memulai dunia pendidikan di TK Aisyiyah Pulau Punjung kabupaten Sawahlunto/Sijunjung. Kemudian penulis menamatkan pendidikan di SDN 05 Kayu Kubu kota Bukittinggi pada tahun 2000. Penulis melanjutkan pendidikan di SMPN 1 Bukittinggi dan menamatkan Sekolah Menengah Atas di SMAN 1 Bukittinggi pada tahun 2006. Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswi jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur Seleksi Penerimaan Mahasiswa Baru (SPMB) Non Reguler. Selama menjadi mahasiswi jurusan Matematika, penulis pernah menjadi anggota HIMATIKA.